7.
Referências bibliográficas

Baptista, R. Numerical study of fatigue crack initiation and propagation on optimally designed cruciform specimens. **Procedia Structural Integrity**, v. 1, p. 98-115, 2016.

Bathias, C. There is no infinite fatigue life in metallic materials. **Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures**, vol.22, n.7, p. 217-222, 1999.

Bhatti, N. A.; Wahab, M. A. A numerical investigation on critical plane orientation and initiation lifetimes in fretting fatigue under out of phase loading conditions. **Tribology International**, v. 115, p.307-318, 2017.

Branco, R.; Costa, J. D.; Antunes, F. V. Low-cycle fatigue behaviour of 34CrNiMo6 high strength steel. **Theoretical and Applied Fracture Mechanics**, v. 58, p. 28-34. 2012.

Branco, R.; Costa, J. D.; Antunes, F. V. Fatigue behaviour and life prediction of lateral notched round barsunder bending-torsion loading. **Engineering Fracture Mechanics**, v. 119, p. 66-84. 2014.

CALLISTER, W. D., **Ciência e Engenharia de Materiais: Uma Introdução**. 7 ed, Rio de Janeiro: Livros técnicos e Científicos Editora Ltda, 2008. 705p.

Carpinteri, A. Spagnoli, A. Multiaxial high-cycle fatigue criterion for hard metals. **International Journal of Fatigue**, v.23, p. 135-145, 2001.

Carpinteri, A. *et al*. Expected position of the fatigue fracture plane by using the weighted mean principal Euler angles. **International Journal of Fracture**, v. 155, p. 87-99, 2002.

Carpinteri, A.; Brighenti, R.; Spagnoli, A. A fracture plane approach in multiaxial high-cycle fatigue of metals. **Fatigue & Fracture of Engineering Materials and Structures**, v. 23, p. 355-364, 2000.

Carpinteri, A.; Spagnoli, A.; Vantadori, S. Multiaxial fatigue assessment using a simplified critical plane-based criterion. International Journal of fatigue, v. 33, p. 969-976, 2011.

Castro, J. T.; Meggiolaro, M. A. **Fadiga: técnicas e práticas de dimensionamento estrutural sob cargas reais de serviço**. 1ª ed, Rio de Janeiro: Createspace Independent Publishing Platform, v.1, 494 p., 2009

Dowling, N. E. **Mechanical behavior of materials**. 4ª ed. Estados Unidos: Prentice Hall, 2012. 960 p.

Findley, W. N. A theory for the effect of mean stress on fatigue of metals under combined torsion and axial loading or bending. J Engng Industry, Trans ASME 1959, v. 81, p.301-306. Citado em: Carpinteri, A. Spagnoli, A. Multiaxial high-cycle fatigue criterion for hard metals. **International Journal of Fatigue**, v.23, p. 135-145, 2001.

Gaur, V. *et al*. Effect of biaxial cyclic tension on the fatigue life and damage mechanisms of Cr–Mo steel. **International Journal of Fatigue,** v. 87, p.124-131, 2016.

Golos, K. M. Multiaxial fatigue criterion with mean stress effect. **Journal of Pressure Vessels and Piping**. v. 69, p. 263-266, 1996.

Gómez, C. *et al*. High and low cycle fatigue life estimation of welding steel under constant amplitude loading: Analysis of different multiaxial damage models and in-phase and out-of-phase loading effects. **International Journal of Fatigue,** v. 33, p. 578-587, 2011.

Itoh, T.; Sakane, M.; Ohsuga, K. Multiaxial low cycle fatigue life under non-proportional loading. **International Journal of Vessels and Piping**, v. 110, p. 50-56, 2013.

Karolczuk, A.; Macha, E. A Review of Critical Plane Orientations in Multiaxial Fatigue Failure Criteria of Metallic Materials. **International Journal of Fracture**, v. 134, p. 267-304, 2005.

Lei, B., et al. Effects of biaxial mean stress on the critical plane orientation under biaxial tension/compression fatigue loading conditions. **International Jounal of Fatigue**, v. 66, p. 194-206, 2014.

Liu, T.; Shi, X.; Zhang, J. Effect of Phase Angle on Fatigue Failure of 30CrMnSiA Steel underTension-torsion Fatigue Loading. **Matec Web of Conferences**, v.77, p. 1-4, 2016.

Liu, C. D.; Bassim, M. N.; St. Lawrence, S. Evaluation of fatigue-crack initiation at inclusions in fully pearlitic steels. **Material Science and Engineering**. v. 167, n. 1-2, p. 107-113, 1993.

Liu, Y; Mahadevan, S. Multiaxial high-cycle fatigue criterion and life prediction for metals. **International Journal of Fatigue**. v.27, n.7, p. 790-800, 2005.

Matake, T. Na explanation on fatigue limit under combined stress. Bull JSME, 1977; 20: 257-63. Citado em: Carpinteri, A. Spagnoli, A. Multiaxial high-cycle fatigue criterion for hard metals. **International Journal of Fatigue**, v.23, p. 135-145, 2001.

Matsubara, G.; Nishio, K. Multiaxial high-cycle fatigue criterion considering crack initiation and non-propagation. International Journal of Fatigue, v. 47, p. 222-231, 2013.

McDiarmid, D. L. A general criterion for high cycle multiaxial fatigue failure. Fatigue Fract Engng Mater Struct 1987; 9: 457-75. Citado em: Carpinteri, A. Spagnoli, A. Multiaxial high-cycle fatigue criterion for hard metals. **International Journal of Fatigue**, v.23, p. 135-145, 2001.

Ministério de Minas e Energia; EPE. **Balanço Energético Nacional 2014 – Ano base 2013**. Rio de Janeiro, 2014.

Ministério de Minas e Energia; EPE. **Balanço Energético Nacional 2015 – Ano base 2014**. Rio de Janeiro, 2015.

Ministério de Minas e Energia; EPE. **Balanço Energético Nacional 2016 – Ano base 2015**. Rio de Janeiro, 2016.

Papadopoulos, I. V. A new criterion of fatigue strength for out-of-phase bending and torsion of hard metals**. International Journal of Fatigue**. v.16, p. 377-384, 1994.

Papadopoulos, I. V et al. **A comparative study of multiaxial high-cycle fatigue criteria for metals**. International Journal of Fatigue. v.19. n.3, p. 219-235, 1997.

Papuga, J. **Mapping of Fatigue Damages – Program Shell of FE-Calculation**. Praga, 2005. 115p. Tese de Doutorado, Universidade de Praga.

Pytell, B.; Schwerdt, D.; Berger, C. Very high cycle fatigue: Is there a fatigue limit? **International Journal of Fatigue**. v. 33, n.1, p. 49-58, 2011.

Schijve, J. **Fatigue of Structures and Materials**. 2ª ed., Amsterdã: Springer, 2009. 623 p.

Stephens, R. I. **Metal fatigue in Engineering**. 2ª ed. Estados Unidos: John Wiley and Sons, 2001. 472p.

Socie, D. F.; Marquis, G.B. **Multiaxial Fatigue**.1ª ed. Estados Unidos: SAE International, 2000. 484p.

Suresh, S., **Fatigue of Materials**. 2ª ed. Cambridge: Cambridge University Press, 2001. 677 p.

Susmel, L.; Tovo, R.; Lazzarin, P. The mean stress effect on the high-cycle fatigue strength from a multiaxial fatigue point of view. **International Journal of Fatigue**. v. 27, p. 928–943, 2005.

Takahashi, B. X. **Metodologia moderna para análise de fadiga baseada em elementos finitos de componentes sujeitos a fadiga uni e multiaxial**. São Paulo. 2014. 338 p. Dissertação de Mestrado. USP.

Zhang, C.; YAO, W. An improved multiaxial high-cycle fatigue criterion based on critical plane approach. **Fatigue & Fracture of Engineering Materials & structures**. n. 34, p. 337–344, 2010.

APÊNDICE I

Determinação das constantes pertencentes aos modelos em questão

1- Modelo de Papadopoulos:

$$\sqrt{\frac{\sigma_a^2}{3}+\tau_a^2}+\alpha\,\frac{\sigma_a+\sigma_m}{3}\leq\beta \tag{1}$$

Ao aplicar a equação acima em torção pura, i.e., $\sigma_a = t_{-1}$ e $\sigma_a = \sigma_m = 0$, obtém-se:

$$t_{-1}=\beta \tag{2}$$

Aplicando a mesma equação, agora em flexão pura completamente reversível, ou seja: $\sigma_a = f_{-1}$; $\sigma_m = 0$ e $\tau_a = 0$, obtém-se:

$$\frac{\sigma_a}{\sqrt{3}}+\alpha\,\frac{\sigma_a}{3}=t_{-1} \tag{3}$$

Nesta condição: $\sigma_a = f_{-1}$

Assim a equação (3) pode ser resscrita:

$$\frac{f_{-1}}{\sqrt{3}}+\alpha\,\frac{f_{-1}}{3}=t_{-1} \tag{4}$$

Logo:

$$\alpha=\frac{3t_{-1}}{f_{-1}}-\sqrt{3} \tag{5}$$

2- Modelo de Matake

$$C_a + \mu N_{max} \leq \lambda \tag{6}$$

Para aplicação da equação (6) em torção completamente reversível, $C_a = t_{-1}$ e $N_{max} = 0$. Logo:

$$t_{-1} = \lambda \tag{7}$$

Aplicando a mesma equação (6) Em flexão completamente reversível, isto é, $\tau_a = 0$:

$$C_a = \frac{1}{2}\, sen2\psi \tag{8}$$

$$N_{max} = N_a = \frac{1}{2}\sigma_a + \frac{1}{2}\sigma_a \cos 2\psi \tag{9}$$

Maximizando para ψ = 45° e considerando que $\sigma_a = f_{-1}$:

$$C_a = \frac{1}{2} f_{-1} \tag{10}$$

$$N_a = \frac{1}{2} f_{-1} \tag{11}$$

Então:

$$\frac{1}{2} f_{-1} + \mu \frac{1}{2} f_{-1} = t_{-1} \tag{12}$$

$$\mu = \frac{2t_{-1}}{f_{-1}} - 1 \tag{13}$$

3- Modelo de McDiarmid:

$$C_a + \frac{\tau_{A,B}}{2\sigma_u} N_{max} \leq \tau_{A,B} \qquad (14)$$

Para flexão e torção combinadas, $\tau_{A,B}$ na equação do modelo, é simplesmente substituído por $\tau_A = t_{-1}$

4- Modelo de Findley:

$$C_a + kN_{max} \leq f \qquad (15)$$

Utilizando a equação de Findley para cisalhamento puro, completamente reversível, $\tau_a = t_{-1}$ e $\sigma_a = 0$:

$$N_a = \tau_a \, sen \, 2\psi \qquad (16)$$

$$C_a = \tau_a \, cos \, 2\psi \qquad (17)$$

A equação (15) pode ser reescrita como:

$$\tau_a \cos 2\psi + k(\tau_a \, sen \, 2\psi) = f \qquad (18)$$

Maximizando a equação acima:

$$-2\tau_a \, sen \, 2\psi + 2k\tau_a \cos 2\psi = 0 \qquad (19)$$

$$k = \tan 2\psi \qquad (20)$$

Substituindo k na equação (18):

$$\tau_a \cos 2\psi + \tan 2\psi \, (\tau_a \, sen \, 2\psi) = f \qquad (21)$$

Desenvolvendo a equação anterior:

$$\tau_a + \tau_a tan^2 2\psi = \frac{f}{\cos 2\psi} \tag{22}$$

$$t_{-1} + k^2 t_{-1} = f\ sec\ 2\psi \tag{23}$$

$$\sec 2\psi = \sqrt{1 + tan^2 2\psi} \tag{24}$$

$$\sec 2\psi = \sqrt{1 + k^2} \tag{25}$$

Voltando para a equação (23):

$$t_{-1} + k^2 t_{-1} = f\sqrt{1 + k^2} \tag{26}$$

$$t_{-1}(1 + k^2) = f\sqrt{1 + k^2} \tag{27}$$

$$t_{-1}\sqrt{1 + k^2} = f \tag{28}$$

$$1 + k^2 = \frac{f^2}{t_{-1}^2} \tag{29}$$

$$k = \sqrt{\frac{f^2 - t_{-1}^2}{t_{-1}^2}} \tag{30}$$

Em flexão pura, completamente reversível, $\tau_a = 0$ e $\sigma_a = f_{-1}$:

$$N_a = \frac{1}{2}\sigma_a + \frac{1}{2}\sigma_a \cos 2\psi \tag{31}$$

$$C_a = \frac{1}{2}\sigma_a\ sen\ 2\psi \tag{32}$$

Substituindo na equação geral do modelo:

$$\frac{1}{2}\sigma_a sen\ 2\psi + k\left(\frac{1}{2}\sigma_a + \frac{1}{2}\sigma_a \cos 2\psi\right) \tag{33}$$

Maximizando a equação anterior:

$$\sigma_a \cos 2\psi - k\sigma_a sen\, 2\psi = 0 \qquad (34)$$

$$\tan 2\psi = \frac{1}{k} \qquad (35)$$

$$tan^2\, 2\psi = \frac{1}{k^2} \qquad (36)$$

$$\sec^2 2\psi = 1 + \frac{1}{k^2} = \frac{1+k^2}{k^2} \qquad (37)$$

$$cos^2\, 2\psi = \frac{k^2}{1+k^2}\ ; sen^2\, 2\psi = \frac{1}{1+k^2} \qquad (38)$$

$$cos\, 2\psi = \frac{k}{\sqrt{1+k^2}}\ ; sen\, 2\psi = \frac{1}{\sqrt{1+k^2}} \qquad (39)$$

Substituindo os valores de σ_a, cos e sen na equação do modelo:

$$\frac{1}{2} f_{-1} \frac{1}{\sqrt{1+k^2}} + \frac{1}{2} f_{-1} k + \frac{1}{2} f_{-1} \frac{k^2}{\sqrt{1+k^2}} = f \qquad (40)$$

$$\frac{1}{2} f_{-1} \frac{1}{\sqrt{1+k^2}} [1 + k^2] + \frac{1}{2} f_{-1} k = f \qquad (41)$$

$$\frac{1}{2} f_{-1} \sqrt{1+k^2} = f - \frac{1}{2} f_{-1} k \qquad (42)$$

$$\sqrt{1+k^2} = \frac{2f}{f_{-1}} - k \qquad (43)$$

$$1 + k^2 = \frac{4f^2}{f_{-1}^2} - \frac{4fk}{f_{-1}} + k^2 \qquad (44)$$

$$4f^2 - 4kf_{-1}f - f_{-1}^2 = 0 \qquad (45)$$

$$f = \frac{4kf_{-1} + \sqrt{16k^2 f_{-1}^2 + 16f_{-1}^2}}{8} \tag{46}$$

$$f = \frac{1}{2}kf_{-1} + \frac{1}{2}f_{-1}\sqrt{1 + k^2} \tag{47}$$

Substituindo k pelo valor encontrado anteriormente:

$$f = \frac{1}{2}f_{-1}\left[\sqrt{\frac{f^2}{t_{-1}^2} - 1} + \sqrt{\frac{f^2}{t_{-1}^2}}\right] \tag{48}$$

$$\frac{1}{2}f_{-1}\sqrt{\frac{f^2}{t_{-1}^2} - 1} = f\left(1 - \frac{1}{2}\frac{f_{-1}}{t_{-1}}\right) \tag{49}$$

$$\frac{1}{4}f_{-1}^2\left[\frac{f^2}{t_{-1}^2} - 1\right] = f^2\left(1 - \frac{f_{-1}}{t_{-1}} + \frac{1}{4}\frac{f_{-1}^2}{t_{-1}^2}\right) \tag{50}$$

$$f^2\left(1 - \frac{f_{-1}}{t_{-1}}\right) = -\frac{1}{4}f_{-1}^2 \tag{51}$$

$$f^2 4\left(\frac{f_{-1}}{t_{-1}} - 1\right) = f_{-1}^2 \tag{52}$$

$$f = \frac{f_{-1}}{\sqrt{4\left(\frac{f_{-1}}{t_{-1}} - 1\right)}} \tag{53}$$

$$f = \sqrt{\frac{f_{-1}^2}{4\left(\frac{f_{-1}}{t_{-1}} - 1\right)}} \tag{54}$$

Sabendo que $k = \sqrt{\frac{f^2}{t_{-1}^2} - 1}$, pode-se obter:

$$k = \sqrt{\frac{f_{-1}^2}{4\left(\frac{f_{-1}}{t_{-1}} - 1\right)t_{-1}^2} - 1} \tag{55}$$

$$k = \sqrt{\frac{\frac{f_{-1}^2}{t_{-1}^2} - 4\left(\frac{f_{-1}}{t_{-1}} - 1\right)}{4\left(\frac{f_{-1}}{t_{-1}} - 1\right)}} \tag{56}$$

$$k = \sqrt{\frac{\left(\frac{f_{-1}}{t_{-1}}\right)^2 - 4\frac{f_{-1}}{t_{-1}} + 4}{4\left(\frac{f_{-1}}{t_{-1}} - 1\right)}} \tag{57}$$

$$k = \sqrt{\frac{\left(\frac{f_{-1}}{t_{-1}} - 2\right)^2}{4\left(\frac{f_{-1}}{t_{-1}} - 1\right)}} \tag{58}$$

$$k = \pm \frac{\left(\frac{f_{-1}}{t_{-1}} - 2\right)}{\sqrt{4\left(\frac{f_{-1}}{t_{-1}} - 1\right)}} \tag{59}$$

Optou-se pelo sinal negativo para garantir que k seja positivo:

$$k = \frac{2 - \frac{f_{-1}}{t_{-1}}}{\sqrt{4\left(\frac{f_{-1}}{t_{-1}} - 1\right)}} \tag{60}$$

5- Modelo de Liu & Mahadevan:

A orientação do plano crítico é definida pelo critério em que a contribuição da amplitude da tensão hidrostática seja minimizada para zero. Primeiro, o modelo procura pelo plano que tem a amplitude máxima da tensão normal, que corresponde ao plano de fratura. O ângulo deste plano com o plano crítico é α e tem que ser determinado. O modelo é originalmente expresso como:

$$\sqrt{\left(\frac{\sigma_{a,c}}{f_{-1}}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{a,c}}{t_{-1}}\right)^2 + k\left(\frac{\sigma_{a,c}^H}{f_{-1}}\right)^2} = \beta \tag{61}$$

E passa a ser expresso como:

$$\sqrt{\left(\frac{\sigma_{a,\alpha}}{f_{-1}}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{a,\alpha}}{t_{-1}}\right)^2} = \beta \quad (62)$$

Uma vez que α ainda é uma variável a ser determinada.

Para carregamento uniaxial completamente reversível ($\sigma_a = f_{-1}$; $\tau_a = 0$), o plano de fratura é perpendicular ao eixo de carregamento e o plano crítico faz um ângulo α com o plano de fratura. Assim, obtém-se:

$$\sigma_{a,\alpha} = \frac{1}{2} f_{-1} + \frac{1}{2} f_{-1} \cos 2\alpha \quad (63)$$

$$\tau_{a,\alpha} = \frac{1}{2} f_{-1} \operatorname{sen} 2\alpha \quad (64)$$

Para carregamento em torção completamente reversível ($\sigma_a = 0$; $\tau_a = t_{-1}$), o plano crítico também deve fazer um ângulo α com o pano de tensão normal máxima (que é plano de fratura). Esse plano de tensão normal máxima faz um ângulo de 45° com o plano onde a torção está aplicada.

Assim sendo, $\sigma_{a,\alpha}$ e $\tau_{a,\alpha}$ são obtidos como:

$$\sigma_{a,\alpha} = t_{-1} sen\, 2\left(\frac{\pi}{4} \pm \alpha\right) \quad (65)$$

$$\sigma_{a,\alpha} = t_{-1} sen\left(\frac{\pi}{2} \pm 2\alpha\right) \quad (66)$$

$$\sigma_{a,\alpha} = t_{-1} \cos(2\alpha) \quad (67)$$

$$\tau_{a,\alpha} = t_{-1}\, cos\, 2\left(\frac{\pi}{4} \pm \alpha\right) \quad (68)$$

$$\tau_{a,\alpha} = t_{-1}\, cos\, \left(\frac{\pi}{2} \pm 2\alpha\right) \quad (69)$$

$$\tau_{a,\alpha} = \pm t_{-1} sen\, (2\alpha) \quad (70)$$

Para carregamento uniaxial, o critério de Liu & Mahadevan pode ser escrito como:

$$\frac{[1+\cos(2\alpha)]^2}{4} + \frac{1}{4}\left(\frac{f_{-1}}{t_{-1}}\right)^2 sen^2\,(2\alpha) = \beta^2 \tag{71}$$

Para carregamento em torção, o mesmo critério pode ser escrito como:

$$\left(\frac{t_{-1}}{f_{-1}}\right)^2 cos^2(2\alpha) + sen^2(2\alpha) = \beta^2 \tag{72}$$

Então:

$$\frac{1}{4}[1 + 2\cos(2\alpha) + cos^2(2\alpha)] + \frac{1}{4}\left(\frac{f_{-1}}{t_{-1}}\right)^2 sen^2(2\alpha) = \left(\frac{t_{-1}}{f_{-1}}\right)^2 cos^2(2\alpha) + sen^2(2\alpha) \tag{73}$$

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cos(2\alpha) + \frac{1}{4}cos^2(2\alpha) + \frac{1}{4}\left(\frac{f_{-1}}{t_{-1}}\right)^2 [1 - cos^2(2\alpha)] = \left(\frac{t_{-1}}{f_{-1}}\right)^2 cos^2(2\alpha) + 1 - cos^2(2\alpha) \tag{74}$$

$$cos^2(2\alpha)\left[\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\left(\frac{f_{-1}}{t_{-1}}\right)^2 - \left(\frac{t_{-1}}{f_{-1}}\right)^2 + 1\right] + \frac{1}{2}\cos(2\alpha) + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\left(\frac{f_{-1}}{t_{-1}}\right)^2 - 1 = 0 \tag{75}$$

$$\cos(2\alpha) = \frac{-\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - 4\left[\frac{5}{4} - \left(\frac{t_{-1}}{f_{-1}}\right)^2 - \frac{1}{4}\left(\frac{f_{-1}}{t_{-1}}\right)^2\right]\left[\frac{1}{4}\left(\frac{f_{-1}}{t_{-1}}\right)^2 - \frac{3}{4}\right]}}{2\left[\frac{5}{4} - \left(\frac{t_{-1}}{f_{-1}}\right)^2 - \frac{1}{4}\left(\frac{f_{-1}}{t_{-1}}\right)^2\right]} \tag{76}$$

$$\cos(2\alpha) = \frac{-2 + \sqrt{4 - 4\left[\left(\frac{f_{-1}}{t_{-1}}\right)^2 - 3\right]\left[5 - \left(\frac{f_{-1}}{t_{-1}}\right)^2 - 4\left(\frac{t_{-1}}{f_{-1}}\right)^2\right]}}{2\left[5 - \left(\frac{f_{-1}}{t_{-1}}\right)^2 - 4\left(\frac{t_{-1}}{f_{-1}}\right)^2\right]} \tag{77}$$

Vale lembrar que os termos $\frac{t_{-1}}{f_{-1}}$ e β são funções das propriedades do material, i.e., seus valores não variam com a razão e/ou diferença de fase entre σ_a e τ_a. Além disso, os valores de β são próximos de 1 para materiais com a razão $\frac{t_{-1}}{f_{-1}}$ na faixa entre $\frac{1}{\sqrt{3}}$ e 1.

Deve-se notar que α aumenta a medida que $\frac{t_{-1}}{f_{-1}}$ diminui e que α varia entre 0 e $\frac{\pi}{2}$. De acordo com a equação (77), α não tem solução real para $\frac{t_{-1}}{f_{-1}} > 1$. Isto indica que, para um material extremamente frágil a contribuição da amplitude da tensão hidrostática não pode ser minimizada para zero e, assim sendo, deve ser considerada durante a avaliação do dano por fadiga. A determinação do valor de k, neste caso, pode ser realizada de acordo como seguinte procedimento:

Supõe-se que, para um tipo específico de material, o plano crítico coincide com o plano de fratura (o ângulo entre eles é zero).

Para um carregamento uniaxial, completamente reversível ($\sigma_a = f_{-1}$ e $\tau_a = 0$) obtem-se:

$$\sigma_{a,c} = f_{-1} \tag{78}$$

$$\tau_{a,c} = 0 \tag{79}$$

$$\sigma_{a,c}^H = \frac{f_{-1}}{3} \tag{80}$$

Para um carregamento em torção completamente reversível ($\sigma_a = 0$ e $\tau_a = t_{-1}$), obtém-se:

$$\sigma_{a,c} = t_{-1} \tag{81}$$

$$\tau_{a,c} = 0 \tag{82}$$

$$\sigma_{a,c}^H = 0 \tag{83}$$

Os critérios para a previsão de falha por fadiga são, respectivamente:

$$\sqrt{1+\frac{k}{9}}=\beta \quad (84)$$

$$\sqrt{\left(\frac{t_{-1}}{f_{-1}}\right)^2}=\beta \quad (85)$$

Assim sendo, k e β podem ser expressos como:

$$k=9\left[\left(\frac{t_{-1}}{f_{-1}}\right)^2-1\right] \quad (86)$$

$$\beta=\frac{t_{-1}}{f_{-1}} \quad (87)$$

Para que haja contribuição devido à amplitude da tensão hidrostática, k deve ser positivo, ou seja, $\frac{t_{-1}}{f_{-1}}$ deve ser maior que 1, e o plano crítico pode coincidir com o plano de fratura, somente para um material extremamente frágil ($\frac{t_{-1}}{f_{-1}} \geq 1$). É interessante observar que k se tornará nulo para $\frac{t_{-1}}{f_{-1}}=1$ e a tensão hidrostática não terá nenhuma contribuição para o critério de falha por fadiga.

- Efeito da tensão média

Normalmente uma tensão média trativa reduz a vida em fadiga, enquanto que uma compressiva aumenta a mesma. A tensão média, $\sigma_{m,c}$, é introduzida no modelo de Liu & Mahadevan através do fator de correção "$1+\eta\frac{\sigma_{m,c}}{f_{-1}}$ ", onde η é um parâmetro do material. Deste modo, o critério de fadiga é reescrito como:

$$\sqrt{\left[\frac{\sigma_{a,c}\left(1+\eta\frac{\sigma_{m,c}}{f_{-1}}\right)}{f_{-1}}\right]^2+\left[\frac{\sigma_{a,c}}{t_{-1}}\right]^2+k\left[\frac{\sigma_{a,c}^H}{f_{-1}}\right]^2}=\beta \quad (88)$$

η pode ser calibrado utilizando ensaios de fadiga em carregamento uniaxial na presença da tensão média, σ_m. η varia com a razão $\frac{t_{-1}}{f_{-1}}$, de acordo com as expressões abaixo:

$$\eta=\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\left[\frac{\sqrt{3}-\frac{f_{-1}}{t_{-1}}}{\sqrt{3}-1}\right] \text{ para } \frac{t_{-1}}{f_{-1}}\leq 1 \quad (89)$$

$$\eta=0 \text{ para } \frac{t_{-1}}{f_{-1}}>1 \quad (90)$$

APÊNDICE II

Influência da tensão cisalhante média nos cálculos dos modelos

- Findley:

Carregamento cisalhante puro na presença de τ_m:

$$N_a = \tau_a sen\, 2\psi \quad (1)$$

$$N_m = \tau_m sen\, 2\psi \quad (2)$$

$$N_{max} = (\tau_a + \tau_m)\, sen\, 2\psi \quad (3)$$

$$C_a = \sigma_a \cos 2\psi \quad (4)$$

Então pelo critério de Findley, escreve-se:

$$\sigma_a \cos 2\psi + k(\tau_a + \tau_m)\, sen\, 2\psi \ \leq \ f_{findley} \quad (5)$$

Maximizando o lado esquerdo em relação a ψ, obtém-se:

$$-2\tau_a \operatorname{sen} 2\psi + 2k(\tau_a + \tau_m)\, cos\, 2\psi = 0 \quad (6)$$

$$\tan 2\psi = \frac{k(\tau_a+\tau_m)}{\tau_a} \quad (7)$$

$$\cos 2\psi = \frac{\tau_a}{\sqrt{\tau_a^2+k^2(\tau_a+\tau_m)^2}} \quad (8)$$

$$sen\, 2\psi = \frac{k(\tau_a+\tau_m)}{\sqrt{\tau_a^2+k^2(\tau_a+\tau_m)^2}} \quad (9)$$

$$C_a = \frac{\tau_a^2}{\sqrt{\tau_a^2 + k^2(\tau_a + \tau_m)^2}} \tag{10}$$

$$N_{max} = \frac{k(\tau_a + \tau_m)^2}{\sqrt{\tau_a^2 + k^2(\tau_a + \tau_m)^2}} \tag{11}$$

$$\frac{\tau_a^2}{\sqrt{\tau_a^2 + k^2(\tau_a + \tau_m)^2}} + \frac{k^2(\tau_a + \tau_m)^2}{\sqrt{\tau_a^2 + k^2(\tau_a + \tau_m)^2}} \leq f_{findley} \tag{12}$$

Na falha por fadiga, τ_a passa a ser equivalente a t_{-1} e o lado esquerdo se iguala a $f_{findley}$

$$\sqrt{\tau_a^2 + k^2(\tau_a + \tau_m)^2} = f_{findley} \tag{13}$$

$$\tau_a^2 + k^2(\tau_a + \tau_m)^2 - f_{findley}^2 = 0 \tag{14}$$

$$\tau_a^2(1 + k^2) + 2k^2\tau_m\tau_a + k^2\tau_m^2 - f_{findley}^2 = 0 \tag{15}$$

Isso significa que $\tau_a = \tau_{-1}$ será dada pela seguinte expressão, mostrando a dependência de τ_{-1} por τ_m:

$$t_{-1} = -\frac{k^2\tau_m}{(1+k^2)} + \sqrt{\frac{k^4\tau_m^2}{(1+k^2)^2} - \frac{\left(k^2\tau_m^2 - f_{findley}^2\right)}{(1+k^2)}} \tag{16}$$

- Matake e McDiarmid

Carregamento cisalhante puro na presença de τ_m

$$N_a = \tau_a sen\, 2\psi \tag{17}$$

$$C_a = \sigma_a \cos 2\psi \tag{18}$$

Maximizando C_a em função de ψ:

$$\cos\psi = 1 \tag{19}$$

$$\psi = 0 \tag{20}$$

$$N_a = 0 \tag{21}$$

$$C_a = \tau_a \tag{22}$$

O critério de Matake é dado por:

$$C_a + k_{mat} N_a \leq t_{-1} \tag{23}$$

$$\tau_a \leq t_{-1} \tag{24}$$

Na presença da tensão cisalhante média (τ_m), N_m é igual a $\tau_a sen\, 2\psi = 0$ e o critério continuará sendo $\tau_a = t_{-1}$, confirmando que na presença de τ_m em carregamento de torção pura, a falha será definida somente pela amplitude da tensão τ_a=t_{-1}, característica essa levantada em carregamento totalmente reversível.

O procedimento apresentado anteriormente é válido também para o modelo de McDiarmid no qual o plano crítico é definido através da maximização da amplitude da tensão cisalhante C_a, significando que em carregamento cisalhante puro t_{-1} é independente de τ_m, assim como o modelo de Matake.

- Carpinteri & Spagnoli

Carregamento cisalhante puro na presença de τ_m:

$$N_a = \tau_a sen\, 2\psi \tag{25}$$

$$N_m = \tau_m sen\, 2\psi \tag{26}$$

$$N_{max} = (\tau_a + \tau_m)\ sen\ 2\psi \quad (27)$$

Maximizando N_{max} em termos de ψ, obtem-se $\psi = \frac{\pi}{4}$

O plano crítico será definido pelo ângulo (ψ + δ), onde δ é dado por:

$$\delta = \frac{3}{2}\left[1 - \left(\frac{t_{-1}}{f_{-1}}\right)^2\right]\frac{\pi}{4} \quad (28)$$

Assim sendo, (ψ + δ) será dado por:

$$(\psi + \delta) = \frac{1}{2}\left[5 - 3\left(\frac{t_{-1}}{f_{-1}}\right)^2\right]\frac{\pi}{4} \quad (29)$$

$$(\psi + \delta) = \left[5 - 3\left(\frac{t_{-1}}{f_{-1}}\right)^2\right]\frac{\pi}{8} \quad (30)$$

$$2(\psi + \delta) = \left[5 - 3\left(\frac{t_{-1}}{f_{-1}}\right)^2\right]\frac{\pi}{4} \quad (31)$$

A tensão perpendicular ao plano crítico, também discriminado N_{max} e a tensão cisalhante $C_a$são dadas por:

$$N_{max} = (\tau_a + \tau_m) sen\ 2(\psi + \delta) \quad (32)$$

$$N_{max} = (\tau_a + \tau_m) sen\ \left\{\left[5 - 3\left(\frac{t_{-1}}{f_{-1}}\right)^2\right]\frac{\pi}{4}\right\} \quad (33)$$

$$C_a = \tau_a \cos 2(\psi + \delta) \quad (34)$$

$$C_a = \tau_a \cos\left\{\left[5 - 3\left(\frac{t_{-1}}{f_{-1}}\right)^2\right]\frac{\pi}{4}\right\} \quad (35)$$

Assim sendo, o critério de Carpinteri & Spagnoli pode ser expresso por:

$$\sqrt{(\tau_a + \tau_m)^2 sen^2 \left\{\left[5 - 3\left(\frac{t_{-1}}{f_{-1}}\right)^2\right]\frac{\pi}{4}\right\} + \left(\frac{f_{-1}}{t_{-1}}\right)^2 \tau_a^2 \cos^2\left\{\left[5 - 3\left(\frac{t_{-1}}{f_{-1}}\right)^2\right]\frac{\pi}{4}\right\}} \leq f_{-1} \qquad (36)$$

Para condição de carregamento correspondente ao estado limite de fadiga, τ_aé igual a t_{-1} e os dois lados da desigualdade tornam-se iguais. Deste modo, escreve-se:

$$(t_{-1} + \tau_m)^2 sen^2 \left\{\left[5 - 3\left(\frac{t_{-1}}{f_{-1}}\right)^2\right]\frac{\pi}{4}\right\} + \left(\frac{f_{-1}}{t_{-1}}\right)^2 t_{-1}^2 \cos^2\left\{\left[5 - 3\left(\frac{t_{-1}}{f_{-1}}\right)^2\right]\frac{\pi}{4}\right\} = f_{-1}^2 \qquad (37)$$

Como o termo $\left[5 - 3\left(\frac{t_{-1}}{f_{-1}}\right)^2\right]$ depende de t_{-1}, pode-se concluir que, a partir da relação acima, t_{-1} depende de τ_m. Isso significa que o limite de resistência à fadiga em torção varia com a tensão cisalhante média. Este fato parece ser uma limitação ao modelo de Carpinteri & Spagnoli, uma vez que t_{-1} deve ser independente da tensão média τ_m superposta.

- Papadopoulos

Para carregamento torsivo puro, mesmo na presença da tensão cisalhante média, τ_m, o critério de Papadopoulos é simplesmente expresso por $\tau_a = t_{-1}$, para condição de carregamento correspondente ao estado limite de fadiga em torção, o que em nada depende de τ_m.

- Liu & Mahadevan:

Carregamento cisalhante puro na presença de τ_m:

$$N_a = \tau_a sen\, 2\psi \qquad (38)$$

$$N_m = \tau_m sen\, 2\psi \qquad (39)$$

$$N_{max} = (\tau_a + \tau_m)\, sen\, 2\psi \qquad (40)$$

Maximizando N_{max} em relação ao ψ, obtém-se $\psi = \frac{\pi}{4}$. Assim o plano crítico faz um ângulo de $\left(\frac{\pi}{4} + \delta_{L\&M}\right)$. Desta forma, N_a e C_a no plano crítico são dados por:

$$N_a = \tau_a \, sen\, 2\left(\frac{\pi}{4} + \delta_{L\&M}\right) \tag{41}$$

$$N_a = \tau_a \, sen\left(\frac{\pi}{2} + 2\delta_{L\&M}\right) \tag{42}$$

$$C_a = \tau_a \, cos\, 2\left(\frac{\pi}{4} + \delta_{L\&M}\right) \tag{43}$$

$$C_a = \tau_a \, cos\left(\frac{\pi}{2} + 2\delta_{L\&M}\right) \tag{44}$$

De acordo com o critério de Liu & Mahadevan, a equação principal do modelo pode ser reescrita, para a condição do carregamento em questão, como:

$$\sqrt{\left(\frac{N_a}{f_{-1}}\right)^2 + \left(\frac{C_a}{t_{-1}}\right)^2} = \sqrt{cos^2(2\delta_{L\&M})\left(\frac{t_{-1}}{f_{-1}}\right)^2 + sen^2(2\delta_{L\&M})} \tag{45}$$

$$\left[\frac{\tau_a \, sen\left(\frac{\pi}{2}+2\delta_{L\&M}\right)}{f_{-1}}\right]^2 + \left[\frac{\tau_a \, cos\left(\frac{\pi}{2}+2\delta_{L\&M}\right)}{t_{-1}}\right]^2 = cos^2(2\delta_{L\&M})\left(\frac{t_{-1}}{f_{-1}}\right)^2 + sen^2(2\delta_{L\&M}) \tag{46}$$

$$\frac{\tau_a^2 \cos^2(2\delta_{L\&M})}{f_{-1}^2} + \frac{\tau_a^2 \operatorname{sen}^2(2\delta_{L\&M})}{t_{-1}^2} = cos^2(2\delta_{L\&M})\left(\frac{t_{-1}}{f_{-1}}\right)^2 + sen^2(2\delta_{L\&M}) \tag{47}$$

Para o estado limite de resistência à fadiga em torção, tem-se

$$\frac{\tau_{-1}^2 \cos^2(2\delta_{L\&M})}{f_{-1}^2} + \operatorname{sen}^2(2\delta_{L\&M}) = cos^2(2\delta_{L\&M})\left(\frac{t_{-1}}{f_{-1}}\right)^2 + sen^2(2\delta_{L\&M}) \tag{48}$$

Pela equação acima é possível observar a não dependência de t_{-1} por τ_m. Esse resultado é atestado pelo próprio critério onde não consta nenhuma referência à τ_m.

APÊNDICE III

Convergência das equações propostas por Papadopoulos e Carpinteri & Spagnoli

As equações gerais apresentadas por Papadopoulos e por Carpinteri & Spagnoli são dispostas em seus artigos de forma diferente. Entretanto, por meio de substituições trigonométricas, é possível comprovar que ambas levam ao mesmo resultado.

Segundo Carpinteri & Spagnoli:

$$N_a = \sqrt{a^2 + b^2} \tag{1}$$

$$a = \sigma_a sen^2\left(\frac{\pi}{2} - \psi\right) + \tau_a cos\beta \; sen2\left(\frac{\pi}{2} - \psi\right) \tag{2}$$

Onde o termo $\left(\frac{\pi}{2} - \psi\right)$ é referente ao ângulo complementar entre a tensão de carregamento normal e um plano com ângulo ψ qualquer.

$$a = \sigma_a cos^2(\psi) + \tau_a cos\beta \; sen(\pi - 2\psi) \tag{3}$$

$$a = \sigma_a cos^2(\psi) + \tau_a cos\beta \; sen(2\psi) \tag{4}$$

$$b = -\tau_a sen\beta \; sen2\psi \tag{5}$$

Logo:

$$N_a = \sqrt{\sigma_a^2 cos^4(\psi) + \tau_a^2 cos^2\beta \; sen^2(2\psi) + 2\sigma_a\tau_a cos^2\psi \; cos\beta \; sen\,2\psi + \tau_a^2 sen^2\beta \; sen^2 2\psi} \tag{6}$$

$$N_a = \cos\psi \sqrt{\sigma_a^2 cos^2(\psi) + \frac{\tau_a^2 sen^2 2\psi}{cos^2\psi} + 2\sigma_a\tau_a \cos\beta \; sen\,2\psi} \tag{7}$$

$$N_a = \cos\psi \sqrt{\sigma_a^2 cos^2(\psi) + 4\tau_a^2 sen^2\psi + 2\sigma_a\tau_a \cos\beta\, sen\, 2\psi} \tag{8}$$

Essa expressão de N_a é a mesma apresentada por Papadopoulos em seu artigo.

Para a determinação de N_m, Carpinteri & Spagnoli apresentam a seguinte equação:

$$N_m = \sigma_m\, sen^2\left(\frac{\pi}{2} - \psi\right) + \tau_m\, sen\, 2\left(\frac{\pi}{2} - \psi\right) \tag{9}$$

$$N_m = \sigma_m\, cos^2(\psi) + \tau_m\, sen(\pi - 2\psi) \tag{10}$$

$$N_m = \sigma_m\, cos^2(\psi) + \tau_m\, sen(2\psi) \tag{11}$$

Novamente, a equação de Carpinteri & Spagnoli se mostra convergente à equação do mesmo termo de Papadopoulos.

Para o cálculo de C_a, os dois artigos apresentam a mesma equação:

$$Ca = \sqrt{\frac{f^2+g^2+p^2+q^2}{2} + \sqrt{\left(\frac{f^2+g^2+p^2+q^2}{2}\right)^2 - (fq - gp)^2}} \tag{12}$$

Entretanto as equações de cada termo (*f*, *g*, *p* e *q*) são aparentemente diferente em cada artigo. Mais uma vez, ao se manipular trigonometricamente essas equações é possível mostrar que em ambos artigos o resultado seria o mesmo.

Em Carpinteri & Spagnoli, os termos *f* e *g* são zerados. Os mesmos ocorrem com os termos *p* e *q* em Papadopoulos. Com isso, a última parte da equação anterior fica zerada, independente do modelo usado.

Para os termos *p* e *q* de Carpinteri, seguem-se as equações abaixo:

$$p = \frac{1}{2}\sigma_a sen\, 2\varphi + \tau_a \cos\beta \cos 2\varphi \quad (13)$$

$$p = \frac{1}{2}\sigma_a sen\, (\pi - 2\psi) + \tau_a \cos\beta \cos(\pi - 2\psi) \quad (14)$$

$$p = \frac{1}{2}\sigma_a sen\, (2\psi) + \tau_a \cos\beta \cos(2\psi) \quad (15)$$

$$q = -\tau_a\, sen\, \beta \cos(2\varphi) \quad (16)$$

$$q = -\tau_a\, sen\, \beta \cos(\pi - 2\psi) \quad (17)$$

$$q = -\tau_a\, sen\, \beta \cos(2\psi) \quad (18)$$

Os termos p e q de Carpinteri & Spagnoli correspondem, respectivamente aos termos f e g de Papadopoulos. É possível observar que p encontrado em Carpinteri & Spagnoli tem sinal oposto ao f encontrado em Papadopoulos. Porém como na equação (12) todos os termos são elevados ao quadrado, o sinal não influencia.