

3.

Metodologia

3.1.

Primeira Etapa

Nessa etapa foram realizados cálculos matemáticos para os seis critérios numa planilha de Excel tendo como referência as equações propostas pelos artigos de Papadopoulos (1997) e de Carpinteri & Spagnoli (2001). Foi realizada a comparação desses seis critérios para diferentes casos de carregamento e material, além de ter sido feito um estudo sobre o plano de fratura, o plano crítico, bem como uma análise da influência de cada fator de carregamento na previsão da falha por fadiga.

3.1.1.

Processos matemáticos dos modelos de análise de fadiga

Para explicar as etapas matemáticas dos seis modelos de análise de falhas, os mesmos foram divididos em 3 grupos de acordo com a aplicabilidade das equações e características do próprio critério (Figura 8)



Figura 8: Divisão dos grupos de acordo com características de cada critério.

O primeiro grupo é composto apenas pelo modelo de Papadopoulos, por ser o de mais fácil aplicação. Em seu artigo, ele não é claro sobre plano crítico e nem plano de fratura, apesar de comparar seus resultados com outros de modelos

pertencentes aos Critérios de Plano Crítico. Papadopoulos fez um trabalho matemático bem elaborado e chegou à sua equação final - eq. (22) -, em que basta colocar as próprias tensões aplicadas no material para o modelo prever a falha, independentemente de haver ou não defasagem entre as tensões, além de ser uma equação independentemente de qualquer ângulo. (Papadopoulos, 1997; 2001)

Para os outros dois grupos, a definição do plano crítico é de extrema importância para a realização das equações. Isso porque as tensões normais e cisalhantes que aparecem em suas fórmulas finais não são as tensões aplicadas no componente e sim as tensões que agem no plano crítico. Assim equações preliminares devem ser usadas para obter o conjunto de tensões correto que deve ser incorporado às equações finais de cada modelo. Essas equações são funções dos ângulos que definem o plano crítico e consideram também o grau de defasagem entre as tensões atuantes, bem como os parâmetros de carregamento aplicados ao componente.

Essas equações preliminares nos levam às equações finais dos critérios para qualquer conjunto “propriedade de materiais + condições de carregamento”. Apesar de serem equações universais, elas necessitam de programas computacionais para realizar cálculos numéricos, que serão explicados mais à frente.

Entretanto, quando a tensão normal atuante na direção axial do eixo e a tensão cisalhante reinante na seção estão em fase significa que o sistema de eixos principais está fixo no espaço, isto é, não muda de direção à medida que as tensões variam no carregamento cíclico. Conseqüentemente, a aplicação dos modelos de fadiga multiaxial, para a previsão da possível falha do eixo, se torna viável de forma matematicamente fechada, não precisando, assim, de cálculos numéricos mais elaborados. Por meio das equações de análise de tensões é possível obter o mesmo resultado encontrado pelas equações preliminares de cada modelo.

3.1.1.1.

Cálculo dos modelos pela análise de tensões

Os modelos de Findley, Mataka, McDiarmid e Papadopoulos apresentam o sistema de eixos de referência representados pela figura abaixo. Como se trata de um problema planar, as tensões atuantes são: as axiais, paralelas a x ; e as cisalhantes, que agem no plano x - y . Desta forma, o eixo z não estará presente nas análises.

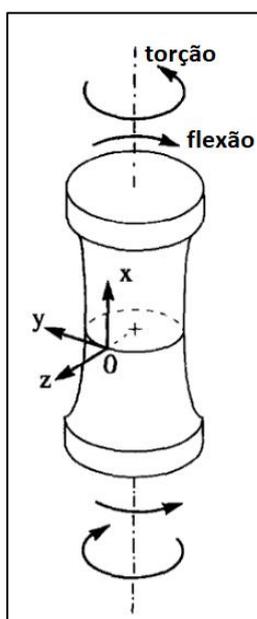


Figura 9: eixos de referência para Findley, Mataka e McDiarmid. Retirado de Papadopoulos, 1997.

Os modelos de Carpinteri & Spagnoli e Liu & Mahadevan apresentam outro sistema de eixos de referência, conforme Figura 10. Assim como os outros quatro critérios, o problema é planar em x - y .

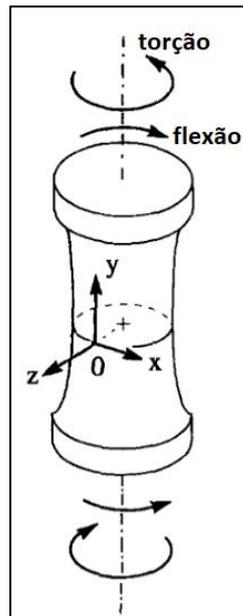


Figura 10: eixos de referência para Carpinteri & Spagnoli e Liu e Mahadevan. Retirado e modificado de Papadopoulos, 1997.

- Rotação do sistema de eixos de referência:

Quando um determinado sistema é rotacionado em um ângulo ψ qualquer (Figura 11), as tensões normais e cisalhantes nesse novo sistema são dadas pelas equações a seguir:

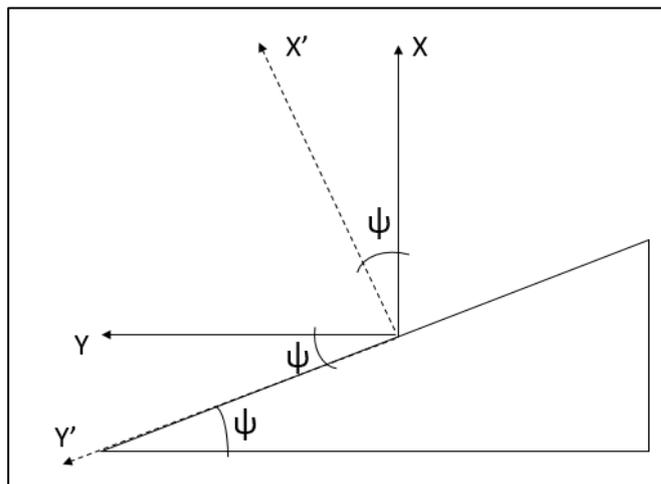


Figura 11: sistema de referência rotacionado em um ângulo ψ qualquer.

$$\sigma'_{ij} = T_{ik} T_{jl} \sigma_{kl} \quad (30)$$

onde a matriz de transformação T_{ij} é dada por:

$$T_{ij} = \begin{bmatrix} \cos \psi & \text{sen } \psi \\ -\text{sen } \psi & \cos \psi \end{bmatrix} \quad (31)$$

e

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & 0 \end{bmatrix} \quad (32)$$

Consequentemente os elementos do novo tensor serão dados por:

$$\sigma'_{xx} = \frac{\sigma_{xx}}{2} + \frac{\sigma_{xx}}{2} \cos(2\psi) + \sigma_{xy} \text{sen}(2\psi) \quad (33)$$

$$\sigma'_{xy} = -\frac{\sigma_{xx}}{2} \text{sen}(2\psi) + \sigma_{xy} \cos(2\psi) \quad (34)$$

É importante salientar que as tensões σ_{xx} e σ_{xy} devem ser substituídas nas equações acima, levando em consideração suas magnitudes e seus sinais. Essas equações são válidas apenas para os casos de flexão e torção em fase, isto é, os valores máximos, mínimos e nulos das tensões normal e cisalhante são coincidentes. Para situações em que são consideradas as amplitudes das tensões σ'_{xx} σ'_{xy} , as equações anteriores podem ser reescritas conforme se mostram a seguir:

$$N_a = \frac{\sigma_a}{2} + \frac{\sigma_a}{2} \cos(2\psi) + \tau_a \text{sen}(2\psi) \quad (35)$$

$$C_a = \left| \frac{\sigma_a}{2} \text{sen}(2\psi) - \tau_a \cos(2\psi) \right| \quad (36)$$

A tensão normal σ'_{yy} não foi levada em consideração devido ao fato que, para aplicar os modelos em questão, precisa-se apenas da amplitude da tensão

cisalhante (C_a) bem como a tensão normal ao plano crítico (N_a). Para esta última, caso haja tensões médias superpostas às cargas cíclicas, deve-se acrescentar a parcela N_m referente às tensões médias normal e cisalhante.

As equações de C_a e N_a também são válidas para o outro sistema de eixos de referência com a tensão normal atuando paralelamente ao eixo dos y (Figura 12). Neste caso, os elementos não nulos do tensor das tensões são σ_{yy} e σ_{xy} , isto é:

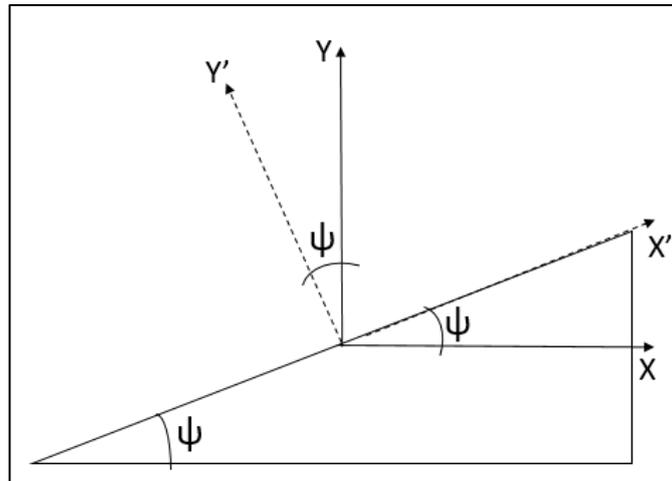


Figura 12: sistema de referência rotacionado em um ângulo ψ qualquer.

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & -\sigma_{xy} \\ -\sigma_{xy} & \sigma_{yy} \end{bmatrix} \quad (37)$$

Com a mudança do sistema de eixos de referência, a tensão cisalhante muda o seu sinal. Assim sendo, os elementos do novo tensor, referenciado ao sistema $x'-y'$, são:

$$\sigma'_{yy} = \frac{\sigma_{yy}}{2} + \frac{\sigma_{yy}}{2} \cos(2\psi) + \sigma_{xy} \sin(2\psi) \quad (38)$$

$$\sigma'_{xy} = \frac{\sigma_{yy}}{2} \sin(2\psi) - \sigma_{xy} \cos(2\psi) \quad (39)$$

Nota-se que a tensão cisalhante tem sinais opostos, conforme indicado pelas equações (34) e (39), uma vez que σ'_{xy} é referenciada a diferentes sistemas de eixos $x'-y'$ nos dois casos e, por conseguinte, N_a e C_a são dados pelas mesmas equações (35) e (36).

Cabe, ainda, acrescentar que as tensões dadas pelas equações (38) e (39) podem também ser obtidas através da rotação do sistema dos eixos de referência $x-y$, constantes da Figura 11, obtendo os sistemas $x'-y'$ mostrados nas Figuras 13 e 14.

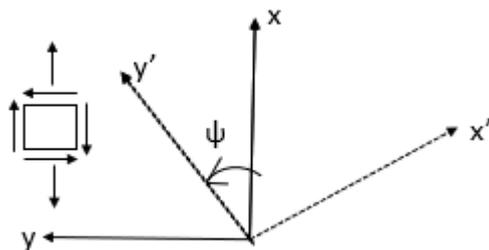


Figura 13: sistema $x'-y'$, obtido pela rotação dos eixos de referência.

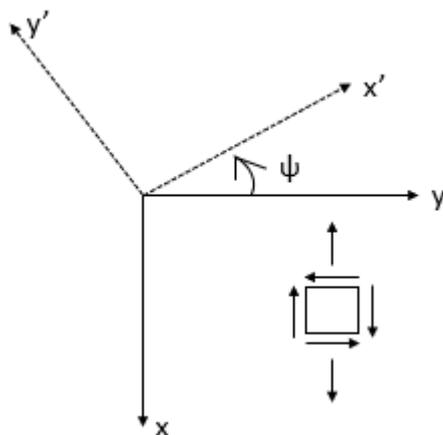


Figura 14: sistema $x'-y'$, obtido pela rotação dos eixos de referência.

Em relação à Figura 13, a matriz de transformação é dada por:

$$T_{ij} = \begin{bmatrix} \text{sen } \psi & -\text{cos } \psi \\ \text{cos } \psi & \text{sen } \psi \end{bmatrix} \quad (40)$$

Aplicando a equação (32) com σ_{ij} , as tensões σ'_{yy} e σ'_{xy} são obtidas como:

$$\sigma'_{yy} = \frac{1}{2} \sigma_{xx} + \frac{1}{2} \sigma_{xx} \cos 2\psi + \sigma_{xy} \text{sen } 2\psi \quad (41)$$

$$\sigma'_{xy} = \frac{1}{2} \sigma_{xx} \text{sen } 2\psi - \sigma_{xy} \cos 2\psi \quad (42)$$

Em relação à Figura 14, a matriz de transformação é dada por:

$$T_{ij} = \begin{bmatrix} -\text{sen } \psi & \text{cos } \psi \\ -\text{cos } \psi & -\text{sen } \psi \end{bmatrix} \quad (43)$$

A aplicação da equação (32) resulta na obtenção das mesmas tensões σ'_{yy} e σ'_{xy} expressas nas equações 41 e 42, e por conseguinte, N_a e C_a são simplesmente dependentes das amplitudes das tensões normal e cisalhante.

Mais à frente será mostrado o uso dessas equações de N_a e C_a em exemplos de cálculos para os modelos estudados.

3.1.1.2.

Cálculo dos modelos pelas equações gerais

Papadopoulos (1997) e Carpinteri & Spagnoli (2001) expuseram em seus artigos equações preliminares que tornam possível definir as tensões atuantes em qualquer plano definido pelo ângulo ψ . As equações apresentadas por Papadopoulos foram utilizadas para os cálculos dos critérios de Findley, Mataka e McDiarmid. Já as equações demonstradas por Carpinteri & Spagnoli foram utilizadas para calcular os critérios deles próprios e de Liu & Mahadevan.

- Equações para Findley, Matake e McDiarmid:

Os três critérios possuem em suas equações finais os seguintes termos: amplitude da tensão cisalhante (C_a) e tensão normal máxima (N_{max}), atuantes no plano crítico. Além disso, o plano em questão está num ângulo ψ em relação ao eixo horizontal de referência. Assim, as equações preliminares necessárias são:

$$C_a = \sqrt{\frac{f^2+g^2+p^2+q^2}{2} + \sqrt{\left(\frac{f^2+g^2+p^2+q^2}{2}\right)^2 - (fq - gp)^2}} \quad (44)$$

onde f , g , p e q já foram definidos nas equações 11, 12, 13 e 14, respectivamente.

N_{max} , nesses critérios, é a soma da amplitude da tensão normal e da tensão normal média ($N_{max} = N_a + N_m$). Logo para calculá-la são necessárias as seguintes equações:

$$N_m = \text{sen}^2\theta(\sigma_m \cos^2\psi + \tau_m \text{sen}2\psi) \quad (45)$$

$$N_a = \text{sen}^2\theta |\cos\psi| \sqrt{\sigma_a^2 \cos^2\psi + 4\tau_a^2 \text{sen}^2\psi + 2\sigma_a \tau_a \text{sen}(2\psi) \cos\beta} \quad (46)$$

onde σ_m e τ_m são as tensões médias nominais, aplicadas no material.

- Equações para Carpinteri & Spagnoli e Liu & Mahadevan:

Assim como os três critérios anteriores, esses dois modelos também possuem equações finais semelhantes entre si, uma vez que o plano crítico é definido acrescentando um determinado ângulo δ ao plano de fratura que já possui uma angulação ψ com o eixo horizontal de referência.

Cabe acrescentar que o plano de fratura é determinado baseando-se em que o mesmo deve ser perpendicular à tensão principal máxima. Os termos presentes em suas equações finais são: amplitude da tensão cisalhante (C_a) para ambos os modelos; amplitude da tensão normal (N_a) e tensão normal média (N_m), para Liu & Mahadevan; e tensão normal máxima ($N_{max} = N_a + N_m$), para Carpinteri & Spagnoli.

Para o cálculo da tensão média normal ao plano crítico e da amplitude da tensão normal no mesmo plano, utiliza-se as seguintes equações:

$$N_m = \text{sen}^2\theta(\sigma_m \text{sen}^2\varphi + \tau_m \text{sen}2\varphi) \quad (47)$$

$$N_a = \sqrt{a^2 + b^2} \quad (48)$$

sendo:

$$a = \text{sen}^2\theta(\sigma_a \text{sen}^2\varphi + \tau_a \cos\beta \text{sen}2\varphi) \quad (49)$$

$$b = -\text{sen}^2\theta(\tau_a \text{sen}\beta \text{sen}2\varphi) \quad (50)$$

onde θ é o ângulo de Euler entre o vetor perpendicular ao plano e o eixo z; Aqui, o ângulo φ é aquele associado com a primeira rotação do sistema para achar o plano de fratura e com o ângulo δ . Conforme mostrado na Figura abaixo, $\varphi = 90 - (\psi + \delta)$, onde ψ é o ângulo do plano de fratura; e β é o ângulo de defasagem entre a tensão normal longitudinal e a tensão cisalhante.

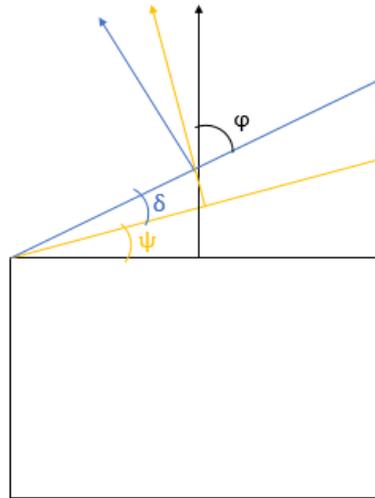


Figura 15: ângulos presentes nos critérios de Carpinteri & Spagnoli e Liu & Mahadevan.

Para calcular a amplitude da tensão cisalhante atuante no plano crítico, faz-se uso da seguinte equação:

$$C_a = \sqrt{\frac{f^2 + g^2 + p^2 + q^2}{2} + \sqrt{\left(\frac{f^2 + g^2 + p^2 + q^2}{2}\right)^2 - (fq - gp)^2}} \quad (51)$$

onde:

$$f = \frac{1}{2} \text{sen} 2\theta (\sigma_a \text{sen}^2 \varphi + \tau_a \text{sen} 2\varphi \cos \beta) \quad (52)$$

$$g = -\frac{1}{2} \text{sen} 2\theta (\tau_a \text{sen} 2\varphi \text{sen} \beta) \quad (53)$$

$$p = \text{sen} \theta \left[\left(\frac{\sigma_a}{2} \text{sen} 2\varphi + \tau_a \cos 2\psi \cos \beta \right) \right] \quad (54)$$

$$q = -\text{sen} \theta (\tau_a \cos 2\varphi \text{sen} \beta) \quad (55)$$

como $\theta = 90^\circ$ em qualquer situação, então f e g serão anulados.

É possível perceber que todas as equações preliminares estão em função ou do ângulo ψ , para Findley, Matake e McDiarmid ou em função de φ , para Carpinteri & Spagnoli e Liu & Mahadevan. Por conta dessas dependências, uma análise numérica é necessária para obter os resultados. Essa análise numérica, como dito anteriormente, foi feita numa planilha Excel, variando o ângulo ψ e φ de 0° a 360° , com incrementos de $0,1^\circ$.

Apesar de se apresentarem um pouco diferentes entre si, essas equações gerais preliminares, expostas por Papadopoulos e Carpinteri & Spagnoli levam ao mesmo resultado. No Anexo III é apresentada essa convergência entre as equações dos dois artigos.

3.1.2.

Análise do plano de fratura

Liu & Mahadevan (2005), como dito no capítulo anterior, assumem o plano de fratura como sendo aquele em que a tensão normal, perpendicular a ele, é máxima. Se as tensões aplicadas em cada situação são distintas, logo a angulação do plano de fratura irá alterar de acordo com essas condições de carregamento utilizadas.

Baseado na teoria de Liu & Mahadevan, os planos de fratura foram determinados para cada modelo utilizando a mesma planilha de Excel, para seis materiais: aço de alta resistência (composição não especificada), 42CrMo4, 34Cr4, 30NCD16, ferro fundido e aço macio, totalizando 73 planos de fratura. As condições de carregamento e as propriedades dos materiais foram retirados dos artigos de Papadopoulos (1997) e Carpinteri & Spagnoli (2001).

Esses planos foram calculados para todos os critérios, e são apresentados no próximo capítulo.

3.1.3.

Análise do plano crítico

Os mesmos materiais e as mesmas condições de carregamento utilizados para achar o plano de fratura também foram utilizados para determinar os planos críticos. Novamente com o auxílio da planilha de Excel, os resultados foram obtidos levando em consideração a definição do plano crítico para cada modelo:

Findley: plano crítico é o plano onde ocorre a maximização da combinação linear da amplitude da tensão cisalhante e da tensão normal máxima, que é sua equação final. Isso significa que deve ser rotacionado o sistema de eixos até encontrar um determinado ângulo ψ que maximize essa combinação linear (Figura 16).

Matake e McDiarmid: plano crítico é onde a amplitude da tensão cisalhante atinge seu máximo. Assim como Findley, para esses dois critérios o plano crítico é definido rotacionando o sistema de eixos para encontrar o ângulo ψ que maximize a tensão cisalhante (Figura 16).

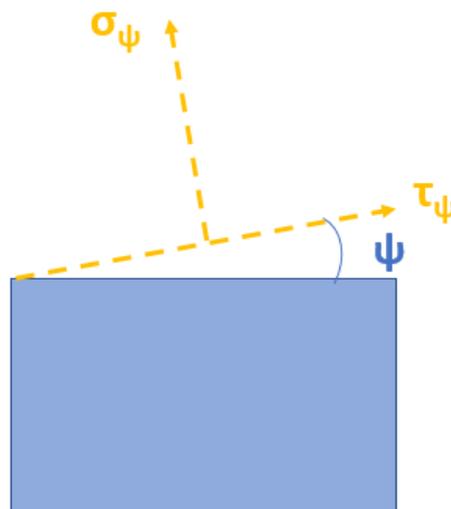


Figura 16: desenho esquemático do plano crítico para Findley, Matake e McDiarmid.

Carpinteri & Spagnoli e Liu & Mahadevan: para estes dois critérios, o plano crítico é aquele que faz um ângulo δ em relação ao plano de fratura. Isso significa que é preciso primeiro achar o ângulo ψ associado ao plano de fratura (onde a tensão normal perpendicular a ele é máxima) e depois acrescentar o ângulo δ para obter o plano crítico (Figura 17). Os ângulos δ são diferentes para os dois modelos, mas ambos são função das propriedades do material: limite de resistência à fadiga em torção (t_{-1}) e limite de resistência à fadiga em flexão (f_{-1}).

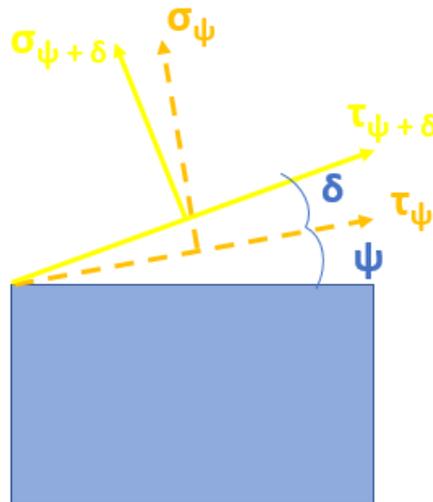


Figura 17: desenho esquemático do plano crítico para Carpinteri & Spagnoli e Liu & Mahadevan.

3.1.4.

Comparação dos seis critérios e validação da metodologia aplicada

Os critérios para fadiga multiaxial de alto ciclo apresentados anteriormente são aplicados a resultados experimentais referentes a carregamentos senoidais simultâneos (flexão e torção) de barras redondas. Os regimes de carregamento adotados envolvem tensões cisalhantes e normais, tanto em fase como fora de fase. Além disso, alguns desses regimes correspondem a carregamentos totalmente reversíveis (isto é, tensão média nula), enquanto outros são realizados na presença da tensão média de natureza tratativa e/ou cisalhante.

É de fundamental importância ressaltar que todos os casos que serão apresentados a seguir correspondem ao estado de limite de fadiga, que representa o campo de tensão acima do qual a fratura ocorre, e abaixo do qual não ocorre.

A aplicação dos diferentes modelos de fadiga multiaxial de alto ciclo foi realizada para quatro diferentes grupos de carregamento, a saber: tensões normal e cisalhante em fase, com tensões médias nulas; tensões normal e cisalhante com presença de tensões médias; tensões normal e cisalhante fora de fase, com tensões médias nulas; e tensões normal e cisalhante fora de fase, com presença de tensões médias. Essas condições foram obtidas a partir dos artigos de

Papadopoulos (1997) e Carpinteri & Spagnoli (2001) para diferentes tipos de material, e são expostas na tabela a seguir:

Tabela 2: Propriedades de carregamento para os diferentes materiais.

	σ_a (MPa)	σ_m (MPa)	τ_a (MPa)	τ_m (MPa)	β (°)
Material: Aço de alta resistência: $f_{-1} = 313,9$ MPa; $t_{-1} = 196,2$ MPa; $\sigma_u = 704,1$ MPa					
1	327,7	0,0	0,0	0,0	0
2	308,0	0,0	63,9	0,0	0
3	255,1	0,0	127,5	0,0	0
4	141,9	0,0	171,3	0,0	0
5	0,0	0,0	201,1	0,0	0
6	255,1	0,0	127,5	0,0	30
7	142,0	0,0	171,2	0,0	30
8	255,1	0,0	127,5	0,0	60
9	147,2	0,0	177,6	0,0	60
10	308,0	0,0	63,9	0,0	90
11	264,9	0,0	132,4	0,0	90
12	152,5	0,0	184,2	0,0	90
Material: Aço de alta resistência: $f_{-1} = 313,9$ MPa; $t_{-1} = 196,2$ MPa; $\sigma_u = 680,0$ MPa					
13	138,1	0,0	167,1	0,0	0
14	140,4	0,0	169,9	0,0	30
15	145,7	0,0	176,3	0,0	60
16	150,2	0,0	181,7	0,0	90
17	245,3	0,0	122,7	0,0	0
18	249,7	0,0	124,9	0,0	30
19	252,4	0,0	126,2	0,0	60
20	258,0	0,0	129,0	0,0	90
21	299,1	0,0	62,8	0,0	0
22	304,5	0,0	63,9	0,0	90
Material: 42CrMo4: $f_{-1} = 398,0$ MPa; $t_{-1} = 260,0$ MPa; $\sigma_u = 1025,0$ MPa					
23	328,0	0,0	157,0	0,0	0
24	286,0	0,0	137,0	0,0	90
25	233,0	0,0	224,0	0,0	0
26	213,0	0,0	205,0	0,0	90
27	266,0	0,0	128,0	128,0	0
28	283,0	0,0	136,0	136,0	90
29	333,0	0,0	160,0	160,0	180
30	280,0	280,0	134,0	0,0	0
31	271,0	271,0	130,0	0,0	90
Material: 34Cr4: $f_{-1} = 410,0$ MPa; $t_{-1} = 256,0$ MPa; $\sigma_u = 795,0$ MPa					
32	314,0	0,0	157,0	0,0	0
33	315,0	0,0	158,0	0,0	60
34	316,0	0,0	158,0	0,0	90

35	315,0	0,0	158,0	0,0	120
36	224,0	0,0	224,0	0,0	90
37	380,0	0,0	95,0	0,0	90
38	316,0	0,0	158,0	158,0	0
39	314,0	0,0	157,0	157,0	60
40	315,0	0,0	158,0	158,0	90
41	279,0	279,0	140,0	0,0	0
42	284,0	284,0	142,0	0,0	90
43	355,0	0,0	89,0	178,0	0
44	212,0	212,0	212,0	0,0	90
45	129,0	0,0	258,0	0,0	90

Material: 30NCD16: $f_{-1} = 660,0$ MPa; $t_{-1} = 410,0$ MPa; $\sigma_u = 1880,0$ MPa

46	485,0	0,0	280,0	0,0	0
47	480,0	0,0	277,0	0,0	90
48	480,0	300,0	277,0	0,0	0
49	480,0	300,0	277,0	0,0	45
50	470,0	300,0	270,0	0,0	60
51	473,0	300,0	273,0	0,0	90
52	590,0	300,0	148,0	0,0	0
53	565,0	300,0	141,0	0,0	45
54	540,0	300,0	135,0	0,0	90
55	211,0	300,0	365,0	0,0	0

Material: Aço macio: $f_{-1} = 235,4$ MPa; $t_{-1} = 137,3$ MPa; $\sigma_u = 518,8$ MPa

56	245,3	0,0	0,0	0,0	0
57	235,6	0,0	48,9	0,0	0
58	187,3	0,0	93,6	0,0	0
59	101,3	0,0	122,3	0,0	0
60	0,0	0,0	142,3	0,0	0
61	194,2	0,0	97,1	0,0	60
62	108,9	0,0	131,5	0,0	60
63	235,6	0,0	48,9	0,0	90
64	208,1	0,0	104,1	0,0	90
65	112,6	0,0	136,0	0,0	90

Material: Ferro fundido: $f_{-1} = 96,1$ MPa; $t_{-1} = 91,2$ MPa; $\sigma_u = 230,0$ MPa

66	93,2	0,0	0,0	0,0	0
67	95,2	0,0	19,7	0,0	0
68	83,4	0,0	41,6	0,0	0
69	56,3	0,0	68,0	0,0	0
70	0,0	0,0	94,2	0,0	0
71	104,2	0,0	21,6	0,0	90
72	97,1	0,0	48,6	0,0	90
73	71,3	0,0	86,1	0,0	90

Pela análise da planilha, é possível observar que o aço de alta resistência está duplicado. Isso é justificado pelo fato de que os dois artigos utilizam o mesmo material, porém com o limite de resistência mecânica (σ_u) diferente.

Os cálculos necessários para cada modelo foram realizados em uma planilha de Excel. Os resultados encontrados nessa planilha foram comparados com os resultados expostos nos dois artigos (Papadopoulos, 1997; Carpinteri & Spagnoli, 2001) com o objetivo de validar a metodologia aplicada na presente tese, além de aumentar o espectro de comparação entre os modelos, uma vez que nenhum artigo analisou os seis critérios ao mesmo tempo para as mesmas condições de carregamento e materiais.

Essa comparação é feita levando em consideração o Índice de Erro, já explicado no capítulo anterior.

3.1.5.

Exemplos matemáticos para cada modelo

Para um melhor entendimento, um exemplo está exposto a seguir para demonstrar como calcular cada critério de análise de falha, tanto pelas equações preliminares, quanto pelos cálculos de análise de tensões (para casos sem defasagem).

Exemplo: sem tensões médias e sem defasagem

Tabela 3: parâmetros de carregamento para aço de alta resistência. Retirado de Carpinteri & Spagnoli, 2001.

Característica do carregamento					Aço de alta resistência		
σ_a (MPa)	σ_m (MPa)	τ_a (MPa)	τ_m (MPa)	β (°)	f_{-1} (MPa)	t_{-1} (MPa)	σ_u (MPa)
308,0	0,0	63,9	0,0	0	313,9	196,2	704,1

- Cálculo de Papadopoulos:

$$\sqrt{\frac{\sigma_a^2}{3} + \tau_a^2} + \alpha \frac{\sigma_a + \sigma_m}{3} \leq t_{-1} \quad (56)$$

onde:

$$\alpha = \frac{t_{-1} - \left(\frac{f-1}{\sqrt{3}}\right)}{\frac{f-1}{3}} \quad (57)$$

$$\alpha = \frac{196,2 - \left(\frac{313,9}{\sqrt{3}}\right)}{\frac{313,9}{3}} \quad (58)$$

Como no critério dele as tensões usadas na equação são as próprias equações aplicadas, basta substituí-las:

$$\sqrt{\frac{308^2}{3} + 63,9^2} + 0,143 \frac{308+0}{3} \leq 196,2 \quad (59)$$

$$203,64 \leq 196,2 \quad (60)$$

Calculando o Índice de Erro (I), por meio da equação (29):

$$I = \frac{203,64 - 196,2}{196,2} \times 100 \quad (61)$$

$$I = 3,79\% \quad (62)$$

- Cálculo de Findley: como não tem defasagem, é possível calcular das duas formas, tanto equações gerais dos modelos, quanto pela análise de tensões.

- Pelas equações gerais:

$$C_a + kN_{max} \leq f \quad (63)$$

$$k = \frac{2 - \left(\frac{f-1}{t-1}\right)}{2\sqrt{\frac{f-1}{t-1} - 1}} \quad (64)$$

$$f = \sqrt{\frac{f_{-1}^2}{4\left(\frac{f_{-1}}{t-1} - 1\right)}} \quad (65)$$

Substituindo os valores nas equações, temos:

$$k = 0,258 \quad (66)$$

$$f = 202,62 \quad (67)$$

$$C_a + 0,258N_{max} \leq 202,62 \quad (68)$$

O cálculo de C_a , utilizando as equações de f e g, apresentadas no capítulo anterior, é dada por:

$$f = \left(-\frac{308}{2}\text{sen}2\psi + 63,9 \cos 2\psi \cos 0^\circ\right) \quad (69)$$

$$g = -63,9 \cos 2\psi \text{sen } 0^\circ \quad (70)$$

$$C_a = \sqrt{f^2} \quad (71)$$

E o cálculo de N_{max} ($N_a + N_m$), será dado pelas substituições dos valores nas equações N_a e N_m , do capítulo anterior:

$$N_m = \text{sen}^2\theta(0\text{cos}^2\psi + 0\text{sen}2\psi) \quad (72)$$

$$N_m = 0 \quad (73)$$

$$N_a = |\cos\psi|\sqrt{308^2\cos^2\psi + 4 \times 63,9^2\text{sen}^2\psi + 2 \times 308 \times 63,9 \text{sen}(2\psi)\cos 0^\circ} \quad (74)$$

$$N_a = |\cos\psi|\sqrt{94864\cos^2\psi + 16332,84\text{sen}^2\psi + 39362,4 \text{sen}(2\psi)} \quad (75)$$

Fica claro que C_a e N_{max} são dependentes do ângulo ψ . Por isso, é necessário fazer os cálculos para diferentes valores de ψ . Como para Findley, o plano crítico é aquele em que a combinação linear de C_a e N_{max} é máxima, é preciso achar o ângulo que dará esse resultado.

Pela planilha de Excel, o ângulo em que se obtém o maior valor da combinação é 49°. E os valores de C_a e N_{max} ($N_{max} = N_a + 0$) correspondentes a ele são 161,39 e 195,84, respectivamente.

Logo a equação final será:

$$161,39 + 0,258 \times 195,84 \leq 202,62 \quad (76)$$

$$211,9 \leq 202,6 \quad (77)$$

E o Índice de Erro:

$$I = \frac{211,9 - 202,6}{202,6} \times 100 \quad (78)$$

$$I = 4,59\% \quad (79)$$

- Pela análise de tensão:

A equação geral do modelo pode ser reescrita substituindo os valores de C_a e N_{max} ($N_{max} = N_a$, pois não há tensões médias), pelas equações da análise de tensões (equações 35 e 36):

$$\left(\frac{\sigma_a}{2} \text{sen}(2\psi) - \tau_a \text{cos}(2\psi)\right) + k \left(\frac{\sigma_a}{2} + \frac{\sigma_a}{2} \text{cos}(2\psi) + \tau_a \text{sen}(2\psi)\right) \leq f \quad (80)$$

Como o ângulo do plano crítico é aquele que maximiza a equação final toda (uma vez que é a combinação linear de C_a e N_{max}), ao igualar a equação acima a zero e achar a derivada em função de ψ , acha-se o ângulo do plano crítico:

$$\frac{d}{d\psi} = \left(\frac{\sigma_a}{2} \text{sen}(2\psi) - \tau_a \text{cos}(2\psi)\right) + k \left(\frac{\sigma_a}{2} + \frac{\sigma_a}{2} \text{cos}(2\psi) + \tau_a \text{sen}(2\psi)\right) = 0 \quad (81)$$

$$\tan 2\psi = \frac{\sigma_a + 2k\tau_a}{k\sigma_a - 2\tau_a} \quad (82)$$

Substituindo os valores de carregamento na equação acima, é possível obter o ψ do referente ao plano crítico:

$$\tan 2\psi = \frac{308 + 2 \times 0,258 \times 63,9}{0,258 \times 308 - 2 \times 63,9} \quad (83)$$

$$2\psi = -81,4 \quad (84)$$

Se somar 180° a este ângulo obtém-se um ângulo positivo $98,6^\circ$, que continua no mesmo plano. E, substituindo esse ângulo na equação final pela

análise de tensões, juntamente com os parâmetros de carregamento, chega-se ao seguinte resultado:

$$(154 \operatorname{sen}(98,6^\circ) - 63,9 \operatorname{cos}(98,6^\circ)) + 0,258 (154 + 154 \operatorname{cos}(98,6^\circ) + 63,9 \operatorname{sen}(98,6^\circ)) \leq 202,62 \quad (85)$$

$$211,9 \leq 202,62 \quad (86)$$

O mesmo resultado encontrado quando utilizadas as equações gerais. Logicamente, o Índice de Erro também terá o mesmo valor de 4,59%.

- Cálculo de Mataka:

- Pelas equações gerais:

$$C_a + \mu N_{max} \leq t_{-1} \quad (87)$$

$$\mu = 2 \left(\frac{t_{-1}}{f_{-1}} \right) - 1 \quad (88)$$

Substituindo os valores de t_{-1} e f_{-1} na equação de μ :

$$\mu = 0,25 \quad (89)$$

Para os cálculos de C_a e N_{max} , deve-se seguir o mesmo roteiro usado em Findley, pelas equações preliminares. Mais uma vez serão obtidas equações dependentes do ângulo ψ . Neste caso, também se faz necessário calcular essas equações para cada ângulo na planilha de Excel.

Diferentemente de Findley, Mataka considera o plano crítico aquele que maximiza a tensão cisalhante. Desta forma, deve-se encontrar o ângulo correspondente ao maior valor de C_a . O critério de Mataka, para qualquer condição, encontra sempre quatro ângulos que maximizam C_a . Para o exemplo em questão, o valor máximo de C_a foi 166,73 MPa e os ângulos que determinam este valor são: 56,3°; 146,3°; 236,3°; e 326,3°.

Os valores de N_{max} correspondentes a esses ângulos são respectivamente, em MPa: 153,81°; 154,19°; 153,81°; e 154,19°. Para substituir na equação final do critério, utiliza-se a combinação com maior valor de N_{max} .

Assim, a equação final do critério se apresenta da seguinte forma:

$$166,73 + 0,25 \times 154,19 \leq 196,2 \quad (90)$$

$$205,27 \leq 196,2 \quad (91)$$

E o Índice de Erro será:

$$I = \frac{205,27 - 196,2}{196,2} \times 100 \quad (92)$$

$$I = 4,62\% \quad (93)$$

- Pela análise de tensão:

Reescrevendo a equação geral do modelo de Matake e substituindo os valores de C_a e N_{max} ($N_{max} = N_a$, pois não há tensões médias) pelas equações da análise de tensões, obtém-se a seguinte equação:

$$\left(\frac{\sigma_a}{2} \operatorname{sen}(2\psi) - \tau_a \operatorname{cos}(2\psi) \right) + \mu \left(\frac{\sigma_a}{2} + \frac{\sigma_a}{2} \operatorname{cos}(2\psi) + \tau_a \operatorname{sen}(2\psi) \right) \leq t_{-1} \quad (94)$$

Nota-se que o lado esquerdo da equação do Matake é igual ao encontrado no Findley; somente a constante μ tem valor diferente. Entretanto, a derivada em função de ψ para o caso de Matake será apenas para a parcela referente à C_a , visto que o plano crítico para este critério é onde ocorre a máxima apenas da amplitude da tensão cisalhante. O ângulo ψ que maximiza essa parcela está mostrado na equação abaixo:

$$\tan(2\psi) = -\frac{\sigma_a}{2\tau_a} \quad (95)$$

Substituindo os valores de σ_a e τ_a pelos valores do exemplo:

$$\tan(2\psi) = -\frac{308}{2 \times 63,9} \quad (96)$$

$$\tan(2\psi) = -2,41 \quad (97)$$

$$2\psi = -67,47 \quad (98)$$

Somando 180° a este ângulo obtém-se o ângulo positivo $112,53^\circ$, no mesmo plano. Substituindo este ângulo e os parâmetros de carregamento e de material na equação dada pela análise de tensões, chega-se ao seguinte resultado:

$$(154 \operatorname{sen}(112,53^\circ) - 63,9 \operatorname{cos}(112,53^\circ)) + 0,25 (154 + 154 \operatorname{cos}(112,53^\circ) + 63,9 \operatorname{sen}(112,53^\circ)) \leq 196,2 \quad (99)$$

$$205,35 \leq 196,2 \quad (100)$$

O Índice de Erro foi:

$$I = \frac{205,35 - 196,2}{196,2} \times 100 \quad (101)$$

$$I = 4,66\% \quad (102)$$

A diferença entre os resultados encontrados pela análise de tensões e pelas equações preliminares é de apenas 0,08. E o Índice de Erro teve diferença de 0,04%.

- Cálculo de McDiarmid:

Este critério possui sua equação final com a mesma estrutura que o critério de Mataka. Eles só se diferenciam pela constante.

Como a definição do plano crítico para McDiarmid é a mesma que a de Mataka, o caminho a ser seguido para obter o resultado dele é o mesmo para o modelo anterior, apenas variando a constante.

- Pelas equações gerais:

$$C_a + \frac{t_{-1}}{2\sigma_u} N_{max} \leq t_{-1} \quad (103)$$

Os valores maiores de C_a , obviamente, também foram encontrados nos mesmos ângulos obtidos em Mataka (56,3°; 146,3°; 236,3°; e 326,3°) e o N_{max} de maior valor nesses ângulos também foi de 154,19 MPa.

Substituindo esses valores na equação final:

$$166,73 + 0,14(154,19) \leq 196,2 \quad (104)$$

$$188,32 \leq 196,2 \quad (105)$$

E o Índice de Erro será:

$$I = \frac{188,32 - 196,2}{196,2} \times 100 \quad (106)$$

$$I = -4,02\% \quad (107)$$

- Pela análise de tensão:

Os mesmos caminhos feitos para se obter o resultado de Mataka deve ser feito para Findley. Para o exemplo utilizado, a derivação em relação a ψ será a mesma e, assim, o ângulo que maximiza a parcela referente a C_a será o mesmo: $-67,47^\circ$ ou $112,53^\circ$.

Calculando o critério pelas equações da análise de tensão, chega-se a equação abaixo:

$$(154 \operatorname{sen}(112,53^\circ) - 63,9 \operatorname{cos}(112,53^\circ)) + 0,14 (154 + 154 \operatorname{cos}(112,53^\circ) + 63,9 \operatorname{sen}(112,53^\circ)) \leq 196,2 \quad (108)$$

$$188,33 \leq 196,2 \quad (109)$$

E o Índice de Erro será:

$$I = \frac{188,33 - 196,2}{196,2} \times 100 \quad (110)$$

$$I = -4,01\% \quad (111)$$

A diferença entre os resultados calculado pelas equações gerais e pelas equações da análise de tensões foi de 0,01MPa e no Índice de Erro foi de 0,01%.

- Cálculo de Carpinteri & Spagnoli:

A equação final de Carpinteri & Spagnoli é dada pela seguinte equação:

$$\sqrt{N_{max}^2 + \left(\frac{f_{-1}}{t_{-1}}\right)^2 C_a^2} \leq f_{-1} \quad (112)$$

- Pelas equações gerais:

Como já mostrado anteriormente, no item 3.1.1.2, esse modelo também faz uso de equações preliminares, que podem ser aplicadas para qualquer situação. O detalhe aqui está na definição do ângulo ϕ que aparece nas equações. Este modelo considera duas inclinações, uma para achar o plano de fratura e outra acrescida a esta para determinar o plano crítico. O φ que aparece nessas equações será definido por:

$$\varphi = 90^\circ - (\psi + \delta) \quad (113)$$

O primeiro passo é encontrar a primeira inclinação, isto é, o ângulo do plano no qual a tensão normal perpendicular a ele seja máxima. Para isso utiliza-se a equação preliminar de N_{max} ($N_{max} = N_a + N_m$) para cada ângulo até achar sua maximização:

$$N_{max} = N_a \quad (114)$$

$$N_a = \sqrt{a^2 + b^2} \quad (115)$$

sendo:

$$a = \text{sen}^2\theta(\sigma_a \text{sen}^2\varphi + \tau_a \cos\beta \text{sen}2\varphi) \quad (116)$$

$$b = -\text{sen}^2\theta(\tau_a \text{sen}\beta \text{sen}2\varphi) \quad (117)$$

Aplicando o exemplo em questão, chega-se à equação abaixo:

$$a = (308 \text{sen}^2\varphi + 63,9 \cos0^\circ \text{sen}2\varphi) \quad (118)$$

$$b = -(63,9 \text{sen}0^\circ \text{sen}2\varphi) \quad (119)$$

$$N_a = \sqrt{(308 \operatorname{sen}^2 \varphi + 63,9 \cos 0^\circ \operatorname{sen} 2\varphi)^2} \quad (120)$$

Pela tabela de Excel, o ângulo que maximiza N_a é $78,7^\circ$. Como isso ainda está associado à primeira inclinação, foi encontrado apenas o ângulo $90^\circ - \psi = 78,7^\circ$. É preciso acrescentar a inclinação δ referente ao plano crítico. Logo φ será $78,7^\circ - \delta$. O ângulo δ é definido apenas pelos limites de resistência à fadiga em torção (t_1) e flexão (f_1), como mostrado na equação (26). Substituindo os valores na equação citada, obtém-se o seguinte resultado:

$$\delta = 41,13^\circ \quad (121)$$

Assim:

$$\varphi = 78,7^\circ - 41,13^\circ \quad (122)$$

$$\varphi = 37,6^\circ \quad (123)$$

Tendo em mãos o valor do φ , ele deve ser substituído nas equações preliminares para determinar C_a e N_{max} ($N_{max} = N_a$), como mostrado abaixo:

$$N_a = \sqrt{(308 \operatorname{sen}^2 37,6^\circ + 63,9 \cos 0^\circ \operatorname{sen} 2 \times 37,6^\circ)^2} \quad (124)$$

$$N_a = 176,44 \quad (125)$$

$$p = \left[\frac{1}{2} (308 \operatorname{sen} 2 \times 37,6^\circ + 63,9 \cos 2 \times 37,6^\circ \cos 0^\circ) \right] \quad (126)$$

$$q = -(63,9 \cos 2 \times 37,6^\circ \operatorname{sen} 0^\circ) \quad (127)$$

$$C_a = \sqrt{p^2} \quad (128)$$

$$C_a = \sqrt{[(154 \operatorname{sen} 2 \times 37,6^\circ + 63,9 \operatorname{cos} 2 \times 37,6^\circ \operatorname{cos} 0^\circ)]^2} \quad (129)$$

$$C_a = 165,21 \text{ MPa} \quad (130)$$

Colocando os valores na equação final do modelo:

$$\sqrt{176,44^2 + \left(\frac{313,9}{196,2}\right)^2} 165,21^2 \leq 313,9 \quad (131)$$

$$317,80 \leq 313,9 \quad (132)$$

E o Índice de Erro:

$$I = \frac{317,8 - 313,9}{313,9} \times 100 \quad (133)$$

$$I = 1,24\% \quad (134)$$

- Pela análise de tensões:

Para achar a primeira inclinação (ψ), basta usar a equação abaixo que maximiza a tensão normal:

$$\tan 2\psi = \frac{2\tau_a}{\sigma_a} \quad (135)$$

Substituindo os valores:

$$\tan 2\psi = \frac{2 \times 63,9}{308} \quad (136)$$

$$2\psi = 22,5^\circ \quad (137)$$

Ainda é preciso acrescentar o valor de δ para que a inclinação total seja referente ao plano crítico. Como, por convenção, usa-se 2ψ , é preciso usar também 2δ . Assim, ao substituir nas equações para achar respectivamente, N_{max} e C_a pela análise de tensão, é preciso inserir o valor 2δ , como mostrado abaixo:

$$N_a = \frac{\sigma_a}{2} + \frac{\sigma_a}{2} \cos(2\psi + 2\delta) + \tau_a \sin(2\psi + 2\delta) \quad (138)$$

$$C_a = \frac{\sigma_a}{2} \sin(2\psi + 2\delta) - \tau_a \cos(2\psi + 2\delta) \quad (139)$$

Com os valores do modelo, as equações são reescritas por:

$$N_a = 154 + 154 \cos(22,50 + 82,2) + 63,9 \sin(22,50 + 82,2) \quad (140)$$

$$C_a = 154 \sin(22,5 + 82,2) - 63,9 \cos(22,50 + 82,2) \quad (141)$$

$$N_a = 176,67 \quad (142)$$

$$C_a = 165,14 \quad (143)$$

Substituindo na equação final do modelo:

$$\sqrt{176,67^2 + \left(\frac{313,9}{196,2}\right)^2 165,14^2} \leq 313,9 \quad (144)$$

$$317,83 \leq 313,9 \quad (145)$$

O Índice de Erro será:

$$I = \frac{317,83-313,9}{313,9} \times 100 \quad (146)$$

$$I = 1,25\% \quad (147)$$

A diferença entre os valores calculados pelas duas formas foi de 0,03MPa e entre os Índices de Erro foi de 0,01%.

- Cálculo de Liu & Mahadevan

Este critério segue exatamente os mesmos passos que o de Carpinteri & Spagnoli. O que os difere é o ângulo δ , que para o modelo em questão é calculado pela relação:

$$\cos(2\delta) = \frac{-2 + \sqrt{4 - 4\left(\frac{1}{s^2} - 3\right)\left(5 - \frac{1}{s^2} - 4s^2\right)}}{2\left(5 - \frac{1}{s^2} - 4s^2\right)} \quad (148)$$

onde "s" é a razão entre o limite de resistência à fadiga por torção e o limite de resistência à fadiga por flexão (t_1/f_1).

- Pelas equações gerais:

Deve-se começar os cálculos encontrando a primeira inclinação, referente ao plano de fratura ($\varphi = 90^\circ - \psi$). Para isto, deve-se achar o ângulo do plano no qual a tensão normal a ele é máxima. Para o exemplo utilizado $N_{max} = N_a$, e é definido pela equação mostrada abaixo:

$$N_a = \sqrt{a^2 + b^2} \quad (149)$$

sendo:

$$a = \text{sen}^2\theta(\sigma_a \text{sen}^2\varphi + \tau_a \cos\beta \text{sen}2\varphi) \quad (150)$$

$$b = -\text{sen}^2\theta(\tau_a \text{sen}\beta \text{sen}2\varphi) \quad (151)$$

Aplicando o exemplo em questão, chega-se à equação abaixo:

$$a = (308 \text{sen}^2\varphi + 63,9 \cos 0^\circ \text{sen}2\varphi) \quad (152)$$

$$b = -(63,9 \text{sen}0^\circ \text{sen}2\varphi) \quad (153)$$

$$N_a = \sqrt{(308 \text{sen}^2\varphi + 63,9 \cos 0^\circ \text{sen}2\varphi)^2} \quad (154)$$

Pela tabela de Excel, o ângulo que maximiza N_a é $78,7^\circ$, assim como no critério anterior. O próximo passo é acrescentar a inclinação δ referente ao plano crítico. Como o ϕ final é $(90 - \psi - \delta)$, logo φ final será $78,7^\circ - \delta$. Para achar o valor de δ , basta substituir as propriedades do material na equação abaixo:

$$\cos(2\delta) = \frac{-2 + \sqrt{4 - 4\left(\frac{1}{0,3907} - 3\right)\left(5 - \frac{1}{0,3907} - 4x0,3907\right)}}{2\left(5 - \frac{1}{0,3907} - 4x0,3907\right)} \quad (155)$$

$$\delta = 39,2^\circ \quad (156)$$

assim:

$$\varphi = 78,7^\circ - 39,2^\circ \quad (157)$$

$$\varphi = 39,5^\circ \quad (158)$$

Tendo em mãos o valor do φ , ele deve ser substituído nas equações preliminares para determinar C_a e N_{max} ($N_{max} = N_a$) como mostrado abaixo:

$$N_a = \sqrt{(308 \operatorname{sen}^2 39,5^\circ + 63,9 \operatorname{cos} 0^\circ \operatorname{sen} 2 \times 39,5^\circ)^2} \quad (159)$$

$$N_a = 186,75 \text{ MPa} \quad (160)$$

$$p = \left[\frac{1}{2} (308 \operatorname{sen} 2 \times 39,5^\circ + 63,9 \operatorname{cos} 2 \times 39,5^\circ \operatorname{cos} 0^\circ) \right] \quad (161)$$

$$q = -(63,9 \operatorname{cos} 2 \times 39,5^\circ \operatorname{sen} 0^\circ) \quad (162)$$

$$C_a = \sqrt{p^2} \quad (163)$$

$$C_a = \sqrt{[(154 \operatorname{sen} 2 \times 39,5^\circ + 63,9 \operatorname{cos} 2 \times 39,5^\circ \operatorname{cos} 0^\circ)]^2} \quad (164)$$

$$C_a = 163,20 \text{ MPa} \quad (165)$$

A equação final do modelo está mostrada a seguir:

$$\sqrt{\left[\frac{N_a \left(1 + \eta \frac{Nm}{f_{-1}} \right)}{f_{-1}} \right]^2 + \left(\frac{C_a}{t_{-1}} \right)^2} \leq \beta \quad (166)$$

onde η e β são funções do parâmetro do material, como mostrado a seguir:

$$\eta = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \left(\frac{\sqrt{3} - \frac{f-1}{t-1}}{\sqrt{3}-1} \right) \quad (167)$$

$$\beta = \sqrt{\cos^2(2\delta) \frac{t-1}{f-1} + \sin^2 2\delta} \quad (168)$$

substituindo os valores de N_a e C_a na equação final:

$$\sqrt{\left[\frac{186,75}{313,9} \right]^2 + \left(\frac{163,20}{196,2} \right)^2} \leq 0,99 \quad (169)$$

$$1,02 \leq 0,99 \quad (170)$$

e o Índice de Erro será:

$$I = \frac{1,02-0,99}{0,99} \times 100 \quad (171)$$

$$I = 3,03\% \quad (172)$$

- Pela análise de tensões:

Assim como em Carpinteri & Spagnoli, basta usar a equação abaixo que maximiza a tensão normal para achar a primeira inclinação (ψ):

$$\tan 2\psi = \frac{2\tau_a}{\sigma_a} \quad (173)$$

substituindo os valores:

$$\tan 2\psi = \frac{2 \times 63,9}{308} \quad (174)$$

$$2\psi = 22,5^\circ \quad (175)$$

Acrescenta-se o valor de δ para que a inclinação total seja referente ao plano crítico. Lembrando que é preciso usar também 2δ , para ficar de acordo com a equação. Para achar respectivamente, $N_{max} = N_a$, e C_a pela análise de tensão, tem-se as duas equações abaixo:

$$N_a = \frac{\sigma_a}{2} + \frac{\sigma_a}{2} \cos(2\psi + 2\delta) + \tau_a \sin(2\psi + 2\delta) \quad (176)$$

$$C_a = \frac{\sigma_a}{2} \sin(2\psi + 2\delta) - \tau_a \cos(2\psi + 2\delta) \quad (177)$$

Com os valores do modelo, as equações são reescritas como:

$$N_a = 154 + 154 \cos(22,50 + 79) + 63,9 \sin(22,50 + 79) \quad (178)$$

$$C_a = 154 \sin(22,5 + 79) - 63,9 \cos(22,50 + 79) \quad (179)$$

$$N_a = 185,93 \text{ MPa} \quad (180)$$

$$C_a = 163,63 \text{ MPa} \quad (181)$$

substituindo na equação final do modelo:

$$\sqrt{\left[\frac{185,93}{313,9}\right]^2 + \left(\frac{163,63}{196,2}\right)^2} \leq 0,99 \quad (182)$$

$$1,02 \leq 0,99 \quad (183)$$

O Índice de Erro será:

$$I = \frac{1,02-0,99}{0,99} \times 100 \quad (184)$$

$$I = 3,03\% \quad (185)$$

Apesar da diferença de 0,82 MPa entre os valores calculados pelas duas formas, os Índices de Erro foram iguais.

3.1.6 Influência das tensões médias e da defasagem

Outra análise importante a ser feita é entender como e o quanto cada fator de carregamento influencia na análise de falhas para cada modelo. Pensando nisso, uma tabela com valores fictícios foi criada, partindo da condição mais simples, com apenas amplitudes das tensões normais e cisalhantes, sem tensões médias e sem defasagem. A partir dela, se foi variando um parâmetro por vez.

Tabela 4: parâmetros de carregamento para 42CrMo4 com valores arbitrários.

Característica do carregamento				
σ_a (MPa)	σ_m (MPa)	τ_a (MPa)	τ_m (MPa)	β (°)
42CrMo4: $f_1 = 398,0$ MPa; $t_1 = 260,0$ MPa; $\sigma_u = 102,0$ MPa				
328,0	0,0	157,0	0,0	0
328,0	0,0	157,0	0,0	30
328,0	0,0	157,0	0,0	60
328,0	0,0	157,0	0,0	90
328,0	109,0	157,0	0,0	0
328,0	164,0	157,0	0,0	0
328,0	328,0	157,0	0,0	0
328,0	0,0	157,0	53,0	0
328,0	0,0	157,0	78,5	0

328,0 0,0 157,0 157,0 0

3.2.

Segunda etapa

Nesta etapa foi utilizado dados do material DIN 34CrNiMo6 obtidos tanto da literatura quanto de análise experimental para serem utilizados nos modelos de previsão de falhas. Na tabela abaixo, encontram-se propriedades do material DIN 34CrNiMO6, extraídas da literatura (Dowling,2012; Branco, Costa e Antunes, 2014):

Tabela 5: propriedades do DIN 34CrNiMo6.

Propriedades mecânicas estáticas e cíclicas - DIN 34CrNiMo6	
limite de resistência máxima (σ_u) - MPa	1035,0
limite de escoamento (σ_y) - MPa	967,0
coeficiente de resistência à fadiga (σ_f') - MPa	1183,7
expoente de resistência à fadiga (b)	-0,05

Para o estudo de fadiga multiaxial é preciso, além das propriedades supracitadas, saber os valores do limite de resistência à fadiga em flexão (f_{-1}) e em torção (t_{-1}). É conhecido que f_{-1} e σ_u se relacionam da seguinte maneira:

$$f_{-1} = 0,4\sigma_u \quad (186)$$

Além disso, segundo Papadopoulos (1997), para metais de alta resistência, o limite de resistência à fadiga em flexão se relaciona com o limite de resistência à fadiga em torção de acordo com a equação abaixo:

$$\frac{f_{-1}}{t_{-1}} = \sqrt{3} \quad (187)$$

Assim, os valores de f_{-1} e t_{-1} serão, respectivamente, 414 MPa e 239 MPa.

Os parâmetros de carregamento foram calculados a partir da tabela de propriedades acima e considerando que a fadiga de alto ciclo fica na faixa entre 10^5 e 10^7 ciclos (Pytell, Schwerdt e Berger, 2011). O primeiro passo foi calcular os valores de σ_a , por meio da equação de Coffin-Manson:

$$\sigma_a = \sigma_f' (2N)^b \quad (188)$$

A tabela a seguir mostra os valores das amplitudes de tensão normal para cada número de ciclos:

Tabela 6: valores da amplitude da tensão para determinados ciclos.

N	σ_a (MPa)
10^7	510,7
10^6	573,0
10^5	643,0

Esses 3 valores de σ_a foram introduzidos nas equações abaixo para a obtenção de tensões normais máximas para 6 razões de tensão diferentes. Os resultados são observados na Tabela 7:

$$\Delta\sigma = 2\sigma_a \quad (189)$$

$$R = \frac{\sigma_{min}}{\sigma_{max}} \quad (190)$$

$$R\sigma_{max} = \sigma_{min} \quad (191)$$

$$\Delta\sigma = \sigma_{max} - \sigma_{min} \quad (192)$$

substituindo as equações 189 e 191 na equação 192:

$$2\sigma_a = \sigma_{max}(1 - R) \quad (193)$$

Tabela 7: valores de tensão máxima para diferentes R e diferentes amplitudes de tensão.

σ_a	R = 0	R = 0,23	R = 0,33	R = -0,15	R = -0,33	R = -1
	σ_{max}	σ_{max}	σ_{max}	σ_{max}	σ_{max}	$\sigma_{max} = \sigma_a$
510,0	1020,0	1324,7	1522,4	887,0	766,9	510
573,0	1146,0	1488,3	1710,4	996,5	861,7	573
643,0	1286,0	1670,1	1919,4	1118,3	966,9	643

Nota-se que a maioria dos valores da tensão máxima ficaram acima da tensão limite de escoamento, o que excluiria o regime elástico, característico da fadiga de alto ciclo. Além disso, como o presente trabalho trata de fadiga multiaxial, uma diminuição desses valores se faz necessário para que, no momento que as amplitudes tensões cisalhantes forem inseridas, o carregamento final apresentado seja apropriado.

Desta forma, novos valores de σ_a foram escolhidos baseados em dados da literatura para material 42CrMo4, que possui características próximas ao material aqui estudado (Papadopoulos, 1997). Os novos valores de σ_a variaram entre 210 e 330 MPa. Os valores de σ_{max} correspondentes a essas novas escolhas de σ_a , assim como os valores de σ_m correspondente, estão listados abaixo:

Tabela 8: valores de tensões máxima e média para diferentes amplitudes de tensão e diferentes R positivos.

σ_a	R = 0		R = 0,23		R = 0,33	
	σ_{max}	σ_m	σ_{max}	σ_m	σ_{max}	σ_m
210,0	420,0	210,0	545,5	335,5	626,9	416,9
240,0	480,0	240,0	623,4	383,4	716,4	476,4
270,0	540,0	270,0	701,3	431,3	806,0	536,0
300,0	600,0	300,0	779,2	479,2	895,5	595,5
330,0	660,0	330,0	857,1	527,1	985,1	655,1

Tabela 9: valores de tensões máxima e média para diferentes amplitudes de tensão e diferentes R negativos.

σ_a	R = -0,15		R = -0,33		R = -1	
	σ_{\max}	σ_m	σ_{\max}	σ_m	$\sigma_{\max} = \sigma_a$	σ_m
210,0	365,2	155,2	315,8	105,8	210,0	0,0
240,0	417,4	177,4	360,9	120,9	240,0	0,0
270,0	469,6	199,6	406,0	136,0	270,0	0,0
300,0	521,7	221,7	451,1	151,1	300,0	0,0
330,0	573,9	243,9	496,2	166,2	330,0	0,0

Para calcular os valores de τ_a foi utilizado o mesmo raciocínio para a determinação de t_{-1} , como pode ser visto na equação abaixo. Para esta etapa do trabalho, foi considerado que a tensão cisalhante média é nula.

$$\frac{\sigma_a}{\tau_a} = \sqrt{3} \quad (194)$$

A partir deste ponto, algumas situações retiradas das tabelas foram escolhidas para avaliar as previsões dadas por cada critério. Em algumas delas foram acrescentadas as defasagens de 30°, 60° e 90°, como mostra a tabela a seguir:

Tabela 10: parâmetros de carregamento para DIN 34CrNiMo6, em fase e tensão média nula.

Característica do carregamento				
σ_a (MPa)	σ_m (MPa)	τ_a (MPa)	τ_m (MPa)	β (°)
34CrNiMo6: f-1 = 414,0 MPa; t-1 = 239,0 MPa; σ_u = 1035,0 MPa				
210,0	0,0	121,4	0,0	0
240,0	0,0	138,7	0,0	0
270,0	0,0	156,1	0,0	0
300,0	0,0	173,4	0,0	0
330,0	0,0	190,8	0,0	0
210,0	210,0	121,4	0,0	0
240,0	240,0	138,7	0,0	0
270,0	431,3	156,1	0,0	0
300,0	479,2	173,4	0,0	0
330,0	166,2	190,8	0,0	0

210,0	0,0	121,4	0,0	30
240,0	0,0	138,7	0,0	30
270,0	0,0	156,1	0,0	60
300,0	0,0	173,4	0,0	90
330,0	0,0	190,8	0,0	90
210,0	105,8	121,4	0,0	90
240,0	120,9	138,7	0,0	30
270,0	199,6	156,1	0,0	30
300,0	655,0	173,4	0,0	60
330,0	527,0	190,8	0,0	60
