

Apêndice A

Estados de Vórtices em Supercondutores Convencionais

Existe uma configuração nos sistemas supercondutores do tipo II [$\xi < \lambda$ - vide Eqs. (4.9) e (4.10)], quando submetidos a um campo magnético, que é caracterizada por regiões que encontram-se no estado normal, porém cercadas por regiões supercondutoras. Esse estado misto é denominado estado de vórtices. Essas regiões normais são em geral bastante estreitas (filamentos), e o campo magnético penetra nas mesmas quase uniformemente, o que não aumenta significamente a energia do sistema (a expulsão de H aumenta a energia do sistema). Cada filamento possui uma região central de raio ξ onde a densidade de elétrons supercondutores decai a zero. As linhas de força do campo magnético não estão confinadas apenas à essa região, mas se estendem sobre uma distância λ [vide Fig. A.1]. Ou seja, correntes circulares envolvem o filamento e blindam o campo magnético para distâncias maiores do que λ .

O fluxo carregado por um filamento é quantizado em unidades de $\Phi_0 = \frac{\pi c}{e}$. Para subdividir ao máximo possível o fluxo magnético total, cada filamento carrega apenas um fluxo Φ_0 . Como cada vórtice carrega apenas um quantum de fluxo, o número de vórtices aumenta à medida que se aumenta o campo aplicado (dentro do intervalo $H_{c1} < H < H_{c2}$ - estes valores são denominados campos críticos inferior e superior, respectivamente). Acima, porém próximo, de H_{c1} , a distância entre vórtices é muito maior do que λ e podemos considerá-los isolados. Quando o campo aplicado é da ordem de H_{c2} , a distância entre vórtices é da ordem do raio ξ , o que corresponde à largura da região normal do filamento, fazendo com que a fase supercondutora colapse.

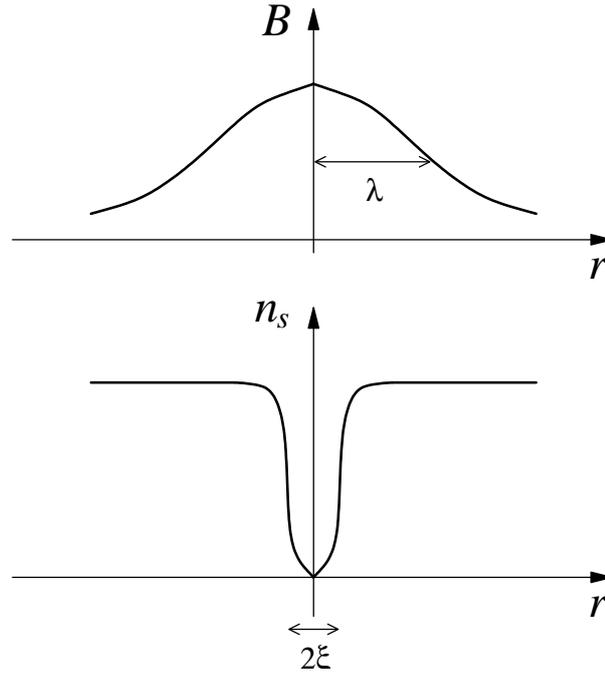


Figura A.1: Estrutura de um vórtice isolado. Na parte superior é mostrado o perfil radial da amplitude do campo de indução, enquanto que na parte inferior está indicado a magnitude do parâmetro de ordem do supercondutor.

Como o fluxo total ($B \times \text{área}$) é unicamente devido aos vórtices, a densidade dos mesmos por unidade de superfície n relaciona-se com B da seguinte forma:

$$B = n\Phi_0. \quad (\text{A.1})$$

Consideremos a estrutura de um vórtice no limite $\lambda \gg \xi$. A região normal de raio ξ é suficientemente pequena de modo que podemos, a princípio, desprezar sua contribuição para energia do vórtice. A energia por unidade de comprimento do filamento é dada por:

$$\varepsilon = \int_{r>\xi} d^2r \frac{1}{8\pi} \left[h^2 + \lambda^2 (\nabla \times \mathbf{h})^2 \right], \quad (\text{A.2})$$

onde \mathbf{h} é a distribuição local do campo. Pode-se mostrar [22] que minimizando a Eq. (A.2) obtemos a seguinte solução para \mathbf{h} :

$$\mathbf{h}(r) = \frac{\Phi_0}{2\pi\lambda^2} K_0 \left(\frac{r}{\lambda} \right), \quad (\text{A.3})$$

onde \mathbf{h} foi escolhido na direção \hat{z} e K_0 é a função de Bessel modificada de ordem zero. O comportamento assintótico dessa solução é dado por

$$h = \frac{\Phi_0}{2\pi\lambda^2} \left[\ln \left(\frac{\lambda}{r} \right) \right] \quad (\text{A.4})$$

para $\xi < r \ll \lambda$ e

$$h = \frac{\Phi_0}{2\pi\lambda^2} \sqrt{\frac{\pi\lambda}{2r}} e^{-r/\lambda} \quad (\text{A.5})$$

para $r \gg \lambda$. Calculando-se então a energia ε por unidade de comprimento do filamento, obtemos

$$\varepsilon = \left(\frac{\Phi_0}{4\pi\lambda} \right)^2 \ln \left(\frac{\lambda}{\xi} \right). \quad (\text{A.6})$$

No limite de baixa indução (B pequeno) a interação entre vórtices vizinhos pode ser desprezada e a energia livre de Gibbs pode ser escrita como

$$G = n\varepsilon - \frac{\mathbf{B} \cdot \mathbf{H}}{4\pi}, \quad (\text{A.7})$$

onde $n\varepsilon$ representa soma das energias dos filamentos isolados. Aqui, cabe notar que utilizou-se a energia livre de Gibbs porque, em situações onde a temperatura T e a corrente externa \mathbf{j} (H conseqüentemente) são fixas, o sistema minimiza G ($\delta G = 0$) no equilíbrio. Substituindo a Eq. (A.1) na Eq. (A.7) obtemos

$$G = B \left(\frac{\varepsilon}{\Phi_0} - \frac{H}{4\pi} \right). \quad (\text{A.8})$$

Para $H < \frac{4\pi\varepsilon}{\Phi_0}$, o valor mínimo de G ocorre para $B = 0$, o que corresponde ao efeito Meissner total. Já para $H > \frac{4\pi\varepsilon}{\Phi_0}$, pode-se minimizar G escolhendo-se um campo de indução B não nulo. Ou seja, a partir de $H = \frac{4\pi\varepsilon}{\Phi_0}$ o sistema minimiza a energia livre G permitindo a penetração de linhas de fluxo. Esse campo limite corresponde ao campo crítico H_{c1} . Vale ressaltar que essa expressão vale apenas para campos de indução B pequenos. Para determinarmos o verdadeiro mínimo de G devemos analisar o comportamento do funcional de Gibbs para todos os valores de B .

Para B finito, deve-se levar em consideração os termos de interação na Eq. (A.7). Neste caso, os filamentos se organizam de forma regular para minimizar a energia livre. Minimizando o funcional G , pode-se calcular a geometria da rede que é mais estável. Verifica-se que, no caso convencional, esta corresponde à rede triangular. A distância a entre dois vórtices numa rede triangular é então dada por

$$a = 1.072 \sqrt{\frac{\Phi_0}{B}} = 1.072 \sqrt{\frac{1}{n}}, \quad (\text{A.9})$$

onde n é densidade superficial de vórtices. Constatamos então que o parâmetro de rede a diminui com o aumento do campo magnético.

Para campos da ordem de H_{c2} , a densidade superficial $n \approx \xi^{-2}$. Nesse limite, os vórtices estão muito próximos e o campo magnético penetra na amostra quase uniformemente.

A.1 Análise GL

Pode-se entender as propriedades magnéticas dos supercondutores convencionais (tipo onda s) com base no funcional de energia livre de Ginzburg-Landau. A expressão de G é dada por

$$G = \alpha |\eta|^2 + \frac{\beta}{2} |\eta|^4 + \frac{K}{2m} |\mathbf{D}\eta|^2 + \frac{H^2}{8\pi} - \frac{\mathbf{B} \cdot \mathbf{H}}{4\pi}, \quad (\text{A.10})$$

onde \mathbf{B} é o campo de indução [aqui correspondente à média espacial de $\mathbf{h}(\mathbf{r})$] e $\mathbf{D} = \nabla - i\frac{2e}{c}\mathbf{A}$. Repare que esse funcional corresponde à energia livre de Gibbs, que, como já mencionado, é mais útil para situações onde a temperatura T e a corrente externa \mathbf{j} (\mathbf{H} conseqüentemente) são fixas.

Variando o funcional G com relação a ψ^* e \mathbf{A} obtém-se:

$$\alpha\eta + \beta |\eta|^2 \eta + K D^2\eta = 0 \quad (\text{A.11})$$

e

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}, \quad (\text{A.12})$$

onde

$$\mathbf{j} = \frac{e}{im}K (\eta^*\nabla\eta - \eta\nabla\eta^*) - \frac{4e^2K}{mc} |\eta|^2 \mathbf{A}. \quad (\text{A.13})$$

Para temperaturas próximas de T_c , o parâmetro de ordem é pequeno e a Eq. (A.11) pode ser linearizada (suponhamos que o cristal seja cúbico, de modo que $K_{ij} = K\delta_{ij}$):

$$(K D^2 + \alpha)\eta = 0. \quad (\text{A.14})$$

Note que o campo magnético numa região supercondutora próxima da transição é simplesmente o campo aplicado \mathbf{H} . Pode-se então igualar $\mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{A}$. Isso ocorre porque as supercorrentes são da ordem de $|\eta|^2$ e suas correções para o campo são desprezíveis na aproximação linear (baixa resposta diamagnética).

Consideremos um campo aplicado na direção \hat{z} ,

$$\mathbf{H} = H\hat{z}, \quad (\text{A.15})$$

gerado pelo potencial vetor

$$\mathbf{A} = H(0, x, 0). \quad (\text{A.16})$$

Nessas condições, o operador diferencial \mathbf{D} é dado por

$$\left(-i\frac{\partial}{\partial x}, -i\frac{\partial}{\partial y} - 2eHx, -i\frac{\partial}{\partial z} \right)$$

e a Eq. (A.18) é escrita como

$$-\frac{1}{2m} \left(\frac{\partial}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial z^2} \right) \eta + \frac{1}{2m} \left(i\frac{\partial}{\partial y} + 2eHx \right)^2 \eta = \alpha \eta. \quad (\text{A.17})$$

Essa equação possui a mesma forma da equação de Schrödinger de uma partícula livre num campo magnético. Como os operadores de momento linear \hat{p}_y e \hat{p}_z comutam com os operadores que aparecem na Eq. (A.17), propõe-se uma solução na forma

$$e^{i[(k_y y + k_z z)]} \phi(x),$$

onde $\phi(x)$ é solução da seguinte equação:

$$\frac{1}{2m} \left[-\frac{d^2}{dx^2} + k_z^2 + \left(\frac{qH}{c} \right)^2 x^2 - \frac{2qHk_y}{c} x \right] \phi = \left[\alpha - \frac{1}{2m} (k_y^2 + k_z^2) \right] \phi = E \phi \quad (\text{A.18})$$

e $E = \alpha - \frac{1}{2m} (k_y^2 + k_z^2)$. Através da mudança de variáveis $X = x - \frac{qHk_y}{2mc}$ podemos finalmente escrever a Eq. (A.18) como

$$-\left[\frac{1}{2m} \frac{d^2}{dX^2} + k_z^2 + \frac{m}{2} \left(\frac{qH}{mc} \right)^2 X^2 \right] \phi = \left[E + \frac{1}{2m} k_y^2 \right] \phi, \quad (\text{A.19})$$

que é a equação para um oscilador harmônico. Para $k_y = 0$, os autovalores da Eq. (A.18) são dados por

$$E = \left(n + \frac{1}{2} \right) \omega = \left(n + \frac{1}{2} \right) \frac{qH}{mc},$$

implicando que, para um n fixo, o valor de H é dado por

$$H = \frac{\alpha mc}{q} \left(\frac{2}{2n+1} \right).$$

Como o campo H máximo para o qual existem soluções corresponde a $n = 0$, podemos escrever

$$H_{c2} = \frac{2\alpha mc}{q}. \quad (\text{A.20})$$

Utilizando a Eq. (4.4) podemos reescrever H_{c2} como

$$H_{c2} = \sqrt{2} \frac{\lambda}{\xi} H_c = \sqrt{2} \kappa H_c. \quad (\text{A.21})$$

Quando $\kappa > \frac{1}{\sqrt{2}}$, ou seja, $H_{c2} > H_c$, o supercondutor é dito do tipo II. Nesse caso, a fase supercondutora aparece para campos aplicados iguais ou menores que H_{c2} . Essa fase não corresponde à total expulsão do fluxo magnético, pois o efeito Meissner completo não é energeticamente favorável para $H > H_c$. Ou seja, se aplicarmos um campo H tal que $H_c < H < H_{c2}$, parte das linhas de campo penetrarão no material, mantendo, no entanto, suas propriedades supercondutoras. Este corresponde ao estado de vórtices previamente descrito. Já para $\kappa < \frac{1}{\sqrt{2}}$, ao diminuirmos o campo encontraremos primeiro H_c , a partir do qual ocorre o efeito Meissner total.

Utilizando-se o funcional da Eq. (A.10), pode-se calcular o parâmetro de ordem e a distribuição da magnetização no supercondutor no limite $H \approx H_{c2}$ [22]. Verifica-se que para uma dada temperatura, a magnetização M se anula em $H = H_{c2}$ como uma função linear do campo magnético aplicado:

$$M = \frac{H_{c2} - H}{1.16(2\kappa^2 - 1)}, \quad (\text{A.22})$$

onde $\kappa = \frac{\lambda}{\xi}$. Ou seja, para campos magnéticos $H \geq H_{c2}$ a resposta diamagnética do sistema é nula.