

Capítulo 5

Análise de Vórtices

Como já foi previamente mencionado, momentos magnéticos de spin no interior de certos materiais supercondutores podem gerar campos magnéticos que prevalecem sobre o momento diamagnético gerado pela supercorrentes. Esses momentos de spin podem ser provenientes de:

(i) elétrons $4f$ localizados nos íons da rede magnética periódica. Nesses casos, a magnetização é independente da supercondutividade, que é gerada, por sua vez, pelos elétrons de condução;

(ii) elétrons itinerantes que geram simultaneamente o magnetismo de banda e a supercondutividade;

Nesse capítulo será demonstrado, com algum detalhe, que se a interação tipo Zeeman entre os momentos magnéticos dos elétrons supercondutores e o campo magnético interno auto-gerado for suficientemente forte, um estado espontâneo de vórtices pode ocorrer [37]. Como em alguns supercondutores magnéticos (UGe_2 , por exemplo) o campo interno medido é bastante forte, pode-se excluir todos os emparelhamentos singleto (limite de Pauli) e também tripletos unitários. A única solução possível corresponde então a um parâmetro não-unitário. Mais precisamente, o parâmetro de ordem deve ser também não- bipolar, pois esse tipo de parâmetro possui momento magnético médio não nulo, o que acarreta um ganho adicional de energia de Zeeman.

O parâmetro de ordem escolhido corresponde à representação E_u do grupo pontual D_{4h} . Pode-se então escrever o parâmetro de ordem bidimensional $\mathbf{d}(\mathbf{k})$ da seguinte forma:

$$\mathbf{d}(\mathbf{k}) = \eta_1 k_z \hat{x} + \eta_2 k_z \hat{y}, \quad (5.1)$$

onde η_1 e η_2 são números complexos. Um exemplo de material que

possui simetria quase-tetragonal é o UGe₂. Esse material cristaliza-se numa estrutura ortorrômbica com simetria de inversão. Como as constantes de rede a e c do plano basal são praticamente iguais (diferem por 2%), pode-se tratar a estrutura cristalina como tetragonal [19].

Pode-se convenientemente fazer a seguinte mudança de variáveis [38]:

$$\eta_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\eta_1 \pm i\eta_2). \quad (5.2)$$

Reescrevendo o parâmetro de ordem $\mathbf{d}(\mathbf{k})$, obtemos

$$\mathbf{d}(\mathbf{k}) = \frac{k_z}{\sqrt{2}} [\eta_+(\hat{x} - i\hat{y}) + \eta_-(\hat{x} + i\hat{y})]. \quad (5.3)$$

Na aproximação de superfície de Fermi esférica, o valor esperado do spin do par de Cooper [Eq. (2.38)] é então dado por

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \frac{k_F^2}{3} (|\eta_-|^2 - |\eta_+|^2) \hat{z}. \quad (5.4)$$

Como o momento magnético médio é proporcional a $\langle \mathbf{S} \rangle$, podemos intuitivamente associar as funções η_- e η_+ com as populações de spin do par de Cooper para cima e para baixo, respectivamente. Reescrevendo-se a expressão do espectro das excitações das quasepartículas [Eq. (2.44)] a partir das funções η_{\pm} , obtemos que cada ramo da relação de dispersão envolverá somente uma componente do parâmetro de ordem; mais especificamente,

$$E_{k_{\pm}} = \sqrt{\xi_k^2 + 2k_z^2 |\eta_{\pm}|^2}. \quad (5.5)$$

O funcional de Ginzburg-Landau é expresso como uma expansão em potências das funções complexas η_1 e η_2 e seus gradientes e envolve também o potencial vetor \mathbf{A} e o campo magnético aplicado \mathbf{H} . A expansão deve ser invariante sob atuação de todas as operações de simetria do grupo D_{4h} e é escrita da seguinte forma:

$$F[\eta, \mathbf{A}, \mathbf{H}] = F_{\text{sc}}[\eta, \mathbf{A}] + F_{\text{mag}}[\eta, \mathbf{A}] + F_{H_{\text{ext}}}[\mathbf{H}, \mathbf{A}]. \quad (5.6)$$

O termo F_{sc} , que é a parte do funcional independente dos campos externos é dada por [38]

$$\begin{aligned} F_{\text{sc}}[\eta, \mathbf{A}] = & \alpha (|\eta_1|^2 + |\eta_2|^2) + \beta_1 (|\eta_1|^2 + |\eta_2|^2)^2 + \beta_2 (\eta_1^* \eta_2 - \eta_1 \eta_2^*)^2 + \beta_3 (|\eta_1|^2 |\eta_2|^2) + \\ & K_1 [|D_x \eta_1|^2 + |D_y \eta_2|^2] + K_2 [|D_x \eta_2|^2 + |D_y \eta_1|^2] + \\ & K_3 [(D_x \eta_1)^* (D_y \eta_2) + \text{c.c.}] + K_4 [(D_x \eta_2)^* (D_y \eta_1) + \text{c.c.}], \end{aligned} \quad (5.7)$$

onde $D_k = \partial_k - i\frac{2e}{c}A_k$. Os termos F_{mag} e $F_{H_{\text{ext}}}$ correspondem, respectivamente, às contribuições referentes ao campo de indução magnética \mathbf{B} no material e ao campo magnético externo \mathbf{H} :

$$F_{\text{mag}}[\eta, \mathbf{A}] = \frac{\mathbf{B}^2}{8\pi} - \gamma \mathbf{B} \cdot \mathbf{S}, \quad (5.8)$$

e

$$F_{H_{\text{ext}}}[\mathbf{H}, \mathbf{A}] = \frac{\mathbf{H}^2}{8\pi} - \frac{1}{4\pi} \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}, \quad (5.9)$$

onde \mathbf{S} é dado pela Eq. (5.4) e $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$.

Os termos do funcional F podem ser reescritos em termos das funções η_{\pm} . Mantido o termo quadrático da Eq. (5.7), ocorrerá que, em termos das funções η_{\pm} , o novo termo quadrático terá também como coeficiente α . Contudo, como estamos interessados em descrever estados onde a condensação ocorre primeiramente para uma determinada orientação de spin, faremos com que este coeficiente quadrático difira para cada uma das funções η_{\pm} . O mesmo raciocínio se aplica aos coeficientes dos termos quárticos. Deste modo, temos que (omitindo os termos de gradiente)

$$F_{\text{sc}}[\eta, \mathbf{A}] = \alpha_+ |\eta_+|^2 + \alpha_- |\eta_-|^2 + \frac{\beta_+}{2} |\eta_+|^4 + \frac{\beta_-}{2} |\eta_-|^4 + \frac{\beta'}{2} |\eta_+|^2 |\eta_-|^2 + \frac{\beta''}{2} \left[(\eta_+^* \eta_-)^2 + (\eta_+ \eta_-^*)^2 \right], \quad (5.10)$$

onde os coeficientes β' e β'' podem ser escritos em termos de β_1 , β_2 e β_3 .

Seguindo a abordagem usual, próximo às temperaturas de transição, podemos escrever que $\alpha_{\pm} \approx \alpha_0^{(\pm)}(T - T_c^{\pm})$, onde as constantes $\alpha_0^{(\pm)}$ são supostas positivas. Suponhamos inicialmente que $T_c^- > T_c^+$, de modo que ao reduzirmos a temperatura, η_- torna-se não nulo antes de η_+ . Neste intervalo de temperaturas $\eta_+ \equiv 0$ e a expressão completa de F pode ser reescrita como

$$F[\eta_-, \mathbf{A}, \mathbf{H}] = \alpha_- |\eta_-|^2 + \frac{\beta_-}{2} |\eta_-|^4 + K \left[|D_x \eta_-|^2 + |D_y \eta_-|^2 \right] - iK' \left[(D_x \eta_-)^* (D_y \eta_-) - \text{c.c.} \right] + \frac{B^2}{8\pi} - \gamma B_z |\eta_-|^2 + \frac{\mathbf{H}^2}{8\pi} - \frac{1}{4\pi} \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}, \quad (5.11)$$

onde foi utilizada a Eq. (5.4). É importante ressaltar que quando η_+ e η_- são não-nulos simultaneamente, além de termos equivalentes a estes para η_+ , aparecerão também termos cruzados em η_- e η_+ . A partir de agora, como nos restringiremos somente à análise do caso em que $\eta_+ \equiv 0$, deixaremos de usar o índice “-”.

A minimização do funcional F com relação a η^* e \mathbf{A} fornece as seguintes equações (para $\mathbf{H} = 0$):

$$\frac{\delta F}{\delta \eta^*} = \alpha \eta + \beta \eta |\eta|^2 - \frac{K}{2} \left(\nabla - \frac{2ie}{c} \mathbf{A} \right)^2 \eta - \gamma \hat{z} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) \eta = 0 \quad (5.12)$$

e

$$iK \frac{e}{c} [\eta^* (\mathbf{D}\eta) - \eta (\mathbf{D}\eta)^*] + \frac{1}{4\pi} \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A} - 4\pi \gamma \hat{z} |\eta|^2) = 0, \quad (5.13)$$

onde foram desconsideradas contribuições de superfície. As Eqs. (5.11) e (5.12) são difíceis de serem resolvidas analiticamente. Deve-se então recorrer a aproximações. A primeira aproximação a ser utilizada é denominada *regime de London* [22]. Nela assume-se que o comprimento de penetração λ e o comprimento de coerência ξ são tais que $\lambda \gg \xi$. Além disso, supõe-se que os vórtices são praticamente isolados (distância entre vizinhos $\gg \lambda$). Nesse limite, supõe-se que a função η seja constante fora dos centros dos vórtices (pontos singulares), i.e.,

$$\eta(r, \phi) = f(r) e^{i\chi(r, \phi)} \quad (5.14)$$

onde $f(r) = f_0$ para $r \gg \xi$ e $f(r) \rightarrow 0$ para $r \ll \xi$. Para $r > \xi$ função η pode ser escrita como:

$$\eta(r, \phi) = f_0 e^{i\chi(r, \phi)}. \quad (5.15)$$

Com intuito de encontrar soluções que descrevam um vórtice isolado, impomos que o mesmo possua simetria cilíndrica e analisamos o comportamento da solução para $r \rightarrow \infty$. Ou seja, escolhemos \mathbf{A} com a seguinte forma:

$$\mathbf{A} = A(r) \hat{\phi} \quad (5.16)$$

(direção azimutal). É possível verificar, a partir da Eq.(5.12), que para essa escolha específica do potencial vetor \mathbf{A} , a função χ deve depender unicamente de ϕ . Além disso, pode-se fazer a seguinte escolha para a forma funcional de χ :

$$\chi(\phi) = v\phi, \quad (5.17)$$

onde v é denominado parâmetro de vorticidade (uma escolha não linear acarretaria o aparecimento de termos com dependência em ϕ na Eq. (5.12), o que é incoerente visto que \mathbf{A} depende apenas de r).

As Eqs. (5.11) e (5.12) podem então ser reescritas da seguinte forma:

$$\alpha + \beta f_0 - \frac{K}{2} \left(-\frac{v^2}{r^2} - \frac{4e^2}{c^2} A^2 + \frac{2e v}{c r} A \right) - \gamma \left(\frac{A}{r} + \frac{dA}{dr} \right) = 0 \quad (5.18)$$

e

$$K \left(\frac{4e^2}{c^2} A - \frac{2e v}{c r} A \right) f_0^2 - \frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{r} \frac{dA}{dr} + \frac{d^2 A}{dr^2} - \frac{1}{r^2} A \right) = 0. \quad (5.19)$$

Lembrando que, fora do caroço central dos vórtices o parâmetro de ordem é praticamente homogêneo e o potencial vetor nulo, temos que $\alpha + \beta f_0^2 = 0$. Usando esta relação na Eq. (5.18), a qual determina a corrente eletromagnética no supercondutor, obtemos

$$\frac{d^2 A}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dA}{dr} - A \left[\frac{1}{r^2} - \frac{16\pi e^2 K \alpha}{c^2 \beta} \right] - \frac{v}{r} \frac{8\pi e K \alpha}{c \beta} = 0. \quad (5.20)$$

Redefinindo o potencial vetor como

$$\bar{A} = A - \frac{c v}{2e r}, \quad (5.21)$$

a Eq. (5.19) adquire o seguinte formato:

$$\frac{d^2 \bar{A}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\bar{A}}{dr} - \bar{A} \left[a + \frac{1}{r^2} \right] = 0, \quad (5.22)$$

onde $a = \frac{16\pi e^2 K \alpha}{c^2 \beta} = \lambda^{-2}$. Essa equação é do tipo Bessel modificada (ordem $\nu = 1$). Sua solução é dada por

$$\bar{A} = K_1 \left(\frac{r}{\lambda} \right), \quad (5.23)$$

a qual, para $r \ll \lambda$, se comporta como $K_1 \rightarrow \frac{\lambda}{r}$, e para $r \gg \lambda$ decai exponencialmente, ou seja, $K_1 \rightarrow \sqrt{\frac{\pi}{2z}} e^{-r/\lambda}$. Pode-se então associar a escala

$$\lambda = \frac{c}{4e} \frac{1}{\sqrt{\pi K}} \frac{1}{f_0} \quad (5.24)$$

ao comprimento de penetração característico do supercondutor.

O fluxo magnético Φ associado a esse potencial vetor \mathbf{A} é dado por

$$\Phi = \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} d\phi A(R) R = 2\pi \left(\frac{c}{2e} \right) v, \quad (5.25)$$

onde foi utilizado que $\lim_{R \rightarrow \infty} \bar{A} = 0$. Como vórtices múltiplos são instáveis (repelem-se mutuamente), escolhe-se $v = 1$. Isto equivale à quantização de fluxo por vórtice (um quantum de fluxo Φ_0 por vórtice) no supercondutor.

Deve-se observar que a Eq. (5.18), que descreve o comportamento de um vórtice isolado num supercondutor com emparelhamento tipo tripleto, é

essencialmente a mesma que descreve um supercondutor convencional tipo onda s . No entanto, a Eq. (5.18) não reflete a presença do acoplamento Zeeman do spin do condensado com o campo magnético interno. Contudo, a presença desse termo muda completamente a energética do problema, gerando configurações bastante pouco convencionais. Por exemplo, a energia livre de Gibbs (por unidade de volume) do sistema pode ser escrita como

$$G = n \varepsilon - \frac{\mathbf{B} \cdot \mathbf{H}}{4\pi}, \quad (5.26)$$

onde n é a densidade superficial de vórtices e ε é a energia por unidade de comprimento do filamento, que é dada nesse caso por

$$\varepsilon = \left(\frac{\Phi_0}{4\pi\lambda}\right)^2 \ln\left(\frac{\lambda}{\xi}\right) - \gamma \Phi_0 f_0^2 = \left(\frac{\Phi_0}{4\pi\lambda}\right)^2 \left[\ln\left(\frac{\lambda}{\xi}\right) - g \right], \quad (5.27)$$

onde o parâmetro g é definido pela última igualdade. A partir da Eq. (5.26) e integrando a configuração de campo para um único vórtice ($n = 1$), podemos obter o primeiro campo externo crítico (vide Apêndice A):

$$H_{c1}(\gamma) = \frac{\Phi_0}{4\pi\lambda^2} \left[\ln\left(\frac{\lambda}{\xi}\right) - g \right]. \quad (5.28)$$

Verifica-se então que para $g \geq \ln\left(\frac{\lambda}{\xi}\right)$ a energia do vórtice torna-se negativa. Graças a isso, a criação de vórtices torna-se muito pouco custosa. Vórtices são então criados copiosamente, até que a repulsão entre os mesmos supere o ganho energético devido à interação Zeeman. Nessa configuração bem pouco usual, o estado fundamental do supercondutor na ausência de campos externos torna-se inhomogêneo espontaneamente.

Para campos magnéticos próximos de H_{c2} , o parâmetro de ordem $|\eta| \ll 1$ (vide Apêndice A). Podemos então desprezar termos de segunda ordem em $|\eta|$ [22]. Além disso, como a resposta diamagnética torna-se fraca, podemos fazer a seguinte aproximação:

$$\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{H},$$

onde $\mathbf{H} = H \hat{z}$ é o campo magnético externo. Utilizando essa aproximação podemos reescrever a Eq. (5.11) da seguinte forma:

$$\left(\nabla - \frac{2ie}{c} \mathbf{A} \right)^2 \eta = -\frac{1}{\xi^2} \eta, \quad (5.29)$$

onde ξ é dado por

$$\xi^2 = -\frac{K}{2} \frac{1}{\alpha - \gamma H}. \quad (5.30)$$

Utilizando as Eqs. (A.14) e (4.9) podemos identificar ξ com comprimento de coerência do supercondutor. Abaixo de T_c , α é negativo e seu valor absoluto aumenta com a diminuição da temperatura. Portanto, para campos externos orientados paralelamente à magnetização intrínseca do sistema, a Eq. (5.30) indica que o raio do vórtice decresce à medida que se reduz a temperatura.

Além disso, é possível demonstrar que a supercondutividade em campos magnéticos não nulos pode ocorrer para temperaturas $T > T_c$, contrariando o comportamento usualmente encontrado em supercondutores convencionais [37]. Utilizando-se a Eq. (5.29) e procedendo-se de maneira análoga ao caso convencional (vide Apêndice A) obtemos que o coeficiente $\frac{1}{\xi^2}$ é dado por

$$\frac{1}{\xi^2} = \left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{2eH}{mc} \quad (5.31)$$

onde n é um número inteiro. Utilizando então a Eq. (5.29) obtemos a seguinte expressão para H :

$$H = \frac{\alpha}{K} \left[\frac{\gamma}{K} - \left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{e}{mc} \right]^{-1}. \quad (5.32)$$

O valor mínimo de H para o qual existe solução é dada por $n = 0$

$$H_{c2} = \frac{\alpha}{K} \left[\frac{\gamma}{K} - \frac{e}{2mc} \right]^{-1}. \quad (5.33)$$

Dentro da aproximação $\alpha \approx \alpha_0(T - T_c)$, válida em $T \approx T_c$, verifica-se que o campo crítico H_{c2} varia linearmente com a temperatura. Além disso, essa equação nos diz que para $T < T_c$ o campo H_{c2} é identicamente nulo. Assim, a aplicação de um campo externo não necessariamente implica na destruição da supercondutividade. Isso é possível porque os vórtices aumentam em número, mas ao mesmo tempo encolhem. Eventualmente, atinge-se um regime onde a aproximação linear explícita na Eq. (5.29) deixa de ser válida e mecanismos não-lineares (devido ao aumento da amplitude do parâmetro de ordem) tornam-se importantes.

A partir da Eq. (5.33), verifica-se também que o campo magnético aumenta o valor da temperatura de transição:

$$T_c(H) = T_c(0) + \frac{k}{\alpha_0} \left[\frac{\gamma}{k} - \frac{e}{2mc} \right] H. \quad (5.34)$$

Estas conclusões podem ser interpretadas da seguinte forma. Para supercondutores ferromagnéticos, o acoplamento entre o condensado e o

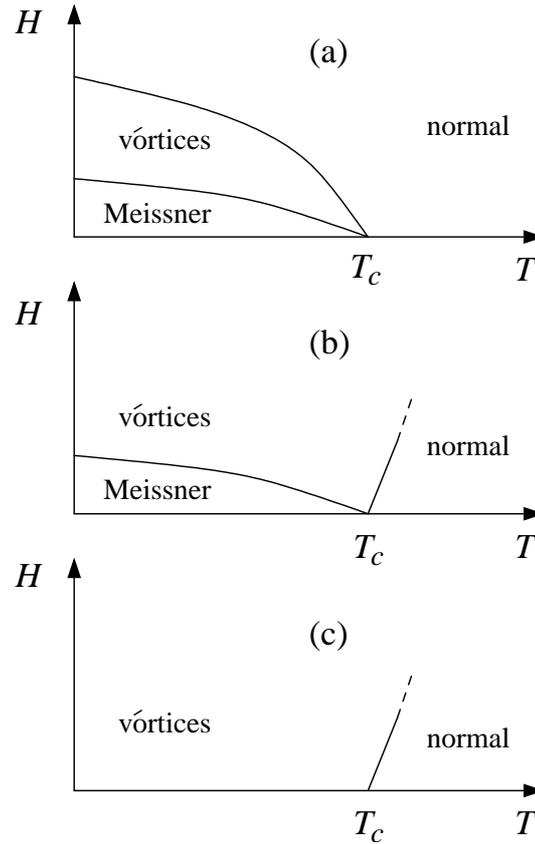


Figura 5.1: Diagramas esquemático de fase HT para um supercondutor do tipo tripleto para diversos valores dos parâmetros de Ginzburg-Landau. Em (a) é mostrado o caso em que o acoplamento Zeeman é fraco ($g < K$), não havendo geração espontânea de vórtices. O diagrama (c) corresponde ao caso onde há geração espontânea de vórtices [$g > \ln(\frac{\lambda}{\xi})$]. O diagrama (b) corresponde ao caso intermediário, onde há supercondutividade para temperaturas além de T_c mas não há geração espontânea de vórtices [$K < g < \ln(\frac{\lambda}{\xi})$].

campo magnético externo estimula a formação de pares de Cooper. Isso fica mais claro se reescrevermos a expressão da energia livre F para $H \approx H_{c2}$:

$$F \approx F_{sc}[\eta, \mathbf{A}] + \frac{\mathbf{B}^2}{8\pi} - \gamma |\eta|^2 \hat{z} \cdot \mathbf{H} - \frac{\mathbf{B} \cdot \mathbf{H}}{4\pi} + \frac{\mathbf{H}^2}{8\pi}. \quad (5.35)$$

Verifica-se que se o coeficiente γ (ou g) for suficientemente grande ($g > \ln(\frac{\lambda}{\xi})$), é energeticamente vantajoso para o sistema condensar mais elétrons, de modo a gerar um ganho adicional de energia tipo Zeeman.

Todas essas conclusões podem ser visualizados a partir dos diagramas mostrados na Fig. (5.1).

Outro aspecto interessante e pouco usual é que o campo magnético, quando aplicado num sentido *oposto* ao da magnetização intrínseca, pode cancelar o campo de indução interno e conseqüentemente remover os vórtices, facilitando a estabilidade da fase supercondutora.