



**Anderson Gomes da Silva**

**Um estudo sobre coloração de arestas e  
coloração total de grafos**

**Dissertação de Mestrado**

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática do Departamento de Matemática do Centro Técnico Científico da PUC-Rio.

Orientador : Prof. Simon Richard Griffiths

Co-orientadora: Prof. Diana Sasaki Nobrega

Rio de Janeiro  
Novembro de 2018



**Anderson Gomes da Silva**

**Um estudo sobre coloração de arestas e  
coloração total de grafos**

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática do Departamento de Matemática do Centro Técnico Científico da PUC-Rio. Aprovada pela Comissão Examinadora abaixo assinada.

**Prof. Simon Richard Griffiths**

Orientador

Departamento de Matemática – PUC-Rio

**Prof. Diana Sasaki Nobrega**

Co-orientadora

Instituto de Matemática e Estatística – UERJ

**Prof. Celina Miraglia Herrera de Figueiredo**

COPPE – UFRJ

**Prof. Luis Antonio Kowada**

Instituto de Computação – UFF

**Prof. Simone Dantas**

Instituto de Matemática e Estatística – UFF

**Prof. Márcio da Silveira Carvalho**

Coordenador Setorial do Centro Técnico Científico – PUC-Rio

Rio de Janeiro, 30 de Novembro de 2018

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, do autor e do orientador.

### **Anderson Gomes da Silva**

Graduou-se pela Universidade Federal Fluminense (UFF), onde ingressou como primeiro colocado no curso de Licenciatura em Matemática no Vestibular UFF 2012. Recebeu o Prêmio Láurea Acadêmica UFF 2016 por ter alcançado o maior coeficiente de rendimento entre os formandos de seu curso daquele ano. Foi bolsista do Programa Ciência sem Fronteiras, estudando em Auburn University durante um ano. Desenvolveu projeto de iniciação científica em teoria dos grafos sob orientação das professoras Simone Dantas e Diana Sasaki. É técnico em Gerência em Saúde pela EPSJV/Fiocruz, onde desenvolveu trabalho de conclusão de curso sob orientação dos professores Fabiano Gomes e Viviane Soares.

### Ficha Catalográfica

Da Silva, Anderson Gomes

Um estudo sobre coloração de arestas e coloração total de grafos / Anderson Gomes da Silva; orientador: Simon Richard Griffiths; co-orientadora: Diana Sasaki Nobrega. – Rio de Janeiro: PUC-Rio, Departamento de Matemática, 2018.

v., 74 f: il. color. ; 30 cm

Dissertação (mestrado) - Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Matemática.

Inclui bibliografia

1. Matemática – Teses. 2. Coloração de grafos;. 3. Índice cromático;. 4. Coloração total;. 5. Coloração total equilibrada.. I. Griffiths, Simon. II. Sasaki, Diana. III. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Matemática. IV. Título.

CDD: 510

## Agradecimentos

Agradeço, primeiramente, a Deus pelas lições ensinadas ao longo desses últimos dois anos, por ter me conduzido até aqui com bondade e misericórdia e por muito mais, que não caberia aqui dizer. A Deus toda honra e toda glória!

Agradeço a minha mãe, Ruth, e ao meu irmão, Alberto, por serem os verdadeiros patrocinadores e maiores incentivadores dos meus sonhos. Em especial, agradeço a minha mãe pelo amor, carinho e cuidado para comigo.

Agradeço aos meus orientadores, Simon e Diana, pelas contribuições para o aperfeiçoamento deste trabalho. Agradeço à Diana por ter me apresentado o tema de coloração de grafos e pelas publicações que essa parceria rendeu e ao Simon pela humildade tão rara e pela disponibilidade de sempre ajudar da forma que estivesse ao seu alcance.

Agradeço aos amigos de perto e de longe por terem tornado a caminhada mais aprazível. Em especial, agradeço à Tamires, que me ajudou com a formatação desta dissertação.

Agradeço aos funcionários da secretaria do Departamento de Matemática da PUC-Rio pela cordialidade com que sempre me trataram. Em particular, agradeço à Creuza Nascimento pela eficiência com que realiza seu trabalho e também por sua paciência.

Agradeço aos membros da banca por aceitarem o convite de avaliarem meu trabalho. Em particular, agradeço ao Kowada e à professora Simone pela contribuição que deram para a minha formação acadêmica durante a graduação.

Agradeço ao CNPq pelo apoio financeiro.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

## Resumo

Da Silva, Anderson Gomes; Griffiths, Simon; Sasaki, Diana. **Um estudo sobre coloração de arestas e coloração total de grafos**. Rio de Janeiro, 2018. 74p. Dissertação de Mestrado – Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Uma coloração de arestas é a atribuição de cores às arestas de um grafo, de modo que arestas adjacentes não recebam a mesma cor. O menor inteiro positivo para o qual um grafo admite uma coloração de arestas é dito seu índice cromático. Fizemos revisão bibliográfica dos principais resultados conhecidos nessa área. Uma coloração total, por sua vez, é a aplicação de cores aos vértices e arestas de um grafo de modo que elementos adjacentes ou incidentes recebam cores distintas. O número cromático total de um grafo é o menor inteiro positivo para o qual o grafo possui coloração total. Dada uma coloração total, se a diferença entre as cardinalidades de quaisquer duas classes de cor for no máximo um, então dizemos que a coloração é equilibrada e o menor número inteiro positivo que satisfaz essa condição é dito o número cromático total equilibrado do grafo. Para tal valor, Wang (2002) conjecturou um limite superior. Um grafo multipartido completo balanceado é aquele em que o conjunto de vértices pode ser particionado em conjuntos independentes com a mesma quantidade de vértices, sendo adjacentes quaisquer dois vértices de diferentes partes da partição. Determinamos o número cromático total equilibrado dos grafos multipartidos completos balanceados, contribuindo, desta forma, com novos resultados na área de coloração de grafos.

## Palavras-chave

Coloração de grafos; Índice cromático; Coloração total; Coloração total equilibrada.

## Abstract

Da Silva, Anderson Gomes; Griffiths, Simon (Advisor); Sasaki, Diana (Co-Advisor). **A study on edge and total coloring of graphs**. Rio de Janeiro, 2018. 74p. Dissertação de mestrado – Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

An edge coloring is the assignment of colors to the edges of a graph, so that adjacent edges do not receive the same color. The smallest positive integer for which a graph admits an edge coloring is said to be its chromatic index. We did a literature review of the main known results of this area. A total coloring, in turn, is the application of colors to the vertices and edges of a graph so that adjacent or incident elements receive distinct colors. The total chromatic number of a graph is the least positive integer for which the graph has a total coloring. Given a total coloring, if the difference between the cardinality of any two color classes is at most one, then we say that the coloring is equitable and the smallest positive integer that satisfies this condition is said to be the graph's equitable total chromatic number. For such value, Wang (2002) conjectured an upper bound. A complete multipartite balanced graph is the one in which the set of vertices can be partitioned into independent sets with the same quantity of vertices, being adjacent any two vertices of different parts of the partition. We determine the equitable total chromatic number of complete multipartite graphs, contributing, therefore, with new results in the area of graph coloring.

## Keywords

Graph coloring; Chromatic index; Total coloring; Equitable total coloring.

# Sumário

1	Introdução	8
1.1	História da teoria dos grafos	8
1.2	Algumas definições	10
1.3	História do problema de coloração de grafos	12
1.4	Coloração de arestas	13
1.5	Coloração total	14
1.6	Objetivos, questão norteadora e organização do trabalho	15
2	Sobre coloração de arestas	17
2.1	Determinando o índice lista-cromático de multigrafos bipartidos	23
2.1.1	Um lema sobre digrafos para auxiliar na demonstração do teorema	26
2.1.2	A demonstração do teorema em si	29
3	Sobre coloração total	33
3.1	Coloração total equilibrada de $K_{r \times p}$	34
3.1.1	$K_{2 \times p}$	39
3.1.2	$K_{r \times p}$ , com $r \geq 4$ par e $p$ ímpar	42
3.1.3	$K_{r \times p}$ com $r$ e $p$ pares ( $r \geq 4$ )	46
3.1.4	$K_{r \times p}$ , com $r$ e $p$ ímpares	57
3.1.5	$K_{r \times p}$ , com $r$ ímpar e $p$ par	64
4	Considerações finais	71
5	Referências bibliográficas	73

# 1

## Introdução

### 1.1

#### História da teoria dos grafos

Há problemas do mundo físico que podem ser estudados a partir das relações entre os elementos de um dado conjunto. Por exemplo, os elementos do conjunto em questão podem ser cidades que possuem aeroportos. Dadas duas cidades quaisquer pode haver voos entre as mesmas ou não. A respeito da situação apresentada, alguém pode desejar descobrir o menor número de conexões necessárias para se fazer uma determinada viagem de avião. Nesse contexto, podemos representar cada cidade por um ponto e, dadas duas cidades quaisquer, se houver um voo entre elas, então podemos representar este fato simbolicamente por uma linha ligando os pontos que as representam. Informalmente, um grafo é um conjunto de pontos, alguns dos quais são ligados por linhas. O Problema das Sete Pontes, que é considerado o primeiro problema de teoria dos grafos, originou-se no mundo físico.

No século XVIII, a cidade de Königsberg, Prússia (atualmente Kaliningrado, Rússia), continha sete pontes ligando as quatro partes da cidade, que é cortada pelo rio Pregel, conforme ilustra a Figura 1.1, retirada de Lopes e Táboas (2015). Nela, as letras maiúsculas designam as quatro partes de Königsberg, enquanto as letras minúsculas representam as sete pontes. Naquela época questionava-se a possibilidade de percorrer todas as pontes exatamente uma vez.

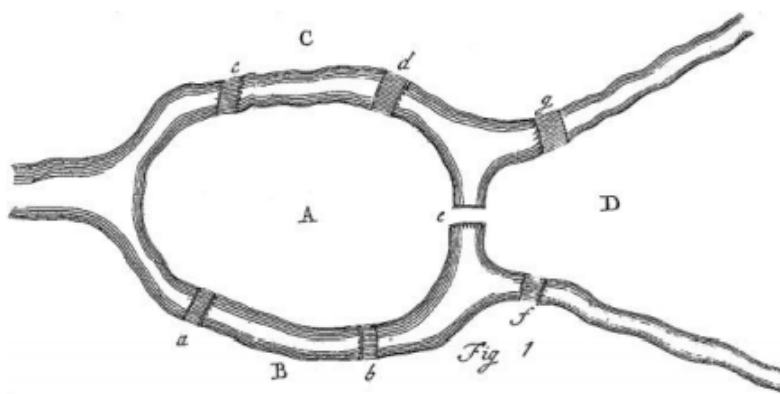


Figura 1.1: As sete pontes de Königsberg



A fim de solucionar o problema, o matemático suíço Leonard Euler (1707 - 1783) denotou, por exemplo, a travessia das pontes  $d$  e  $g$  começando na região  $A$ , passando por  $C$  e chegando à região  $D$  por  $ACD$ . Euler percebeu, então, que, para haver uma maneira de atravessar as sete pontes exatamente uma vez, era necessário uma sequência de oito letras envolvendo as regiões  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$  de Königsberg. O matemático notou ainda que, na sequência procurada, se houvesse uma região ligada às demais por uma quantidade ímpar de pontes, tal região deveria iniciar ou (exclusivo) finalizar a sequência. Isso ocorre pois cada par de letras consecutivas representa uma ponte. Portanto, a letra inicial (ou final) juntamente com sua sucessora (ou antecessora) representam uma ponte e as demais ocorrências da letra na sequência representam duas pontes. Além disso, a quantidade de vezes que uma região com número ímpar de pontes deveria figurar na sequência deveria ser dado pelo número de pontes daquela região acrescido de uma unidade, e depois dividido por dois. No caso de Königsberg, as regiões  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$  deveriam figurar na sequência 3, 2, 2 e 2 vezes, respectivamente, o que totalizaria uma sequência com 9 letras. Logo, a conclusão é que não é possível atravessar as sete pontes exatamente uma vez.

O artigo intitulado “Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis”, escrito em 1735, apresentado para publicação em 1736 e impresso em 1741 contém, além da solução do Problema das Sete Pontes, a resposta a uma questão mais geral, a saber: se não importassem a figura do rio, sua ramificação ou a quantidade de pontes, seria possível passar por todas as pontes exatamente uma vez? A conclusão é que isso é possível se somente se há nenhuma ou duas regiões com uma quantidade ímpar de pontes. A explicação do problema geral pode ser encontrada em Lopes e Táboas (2015). Embora o artigo de Euler seja o primeiro em teoria dos grafos de que se tem notícia, o matemático aparentemente não imaginava que estava fornecendo a base para uma nova área da matemática. Isso se infere, por exemplo, por uma passagem, na qual fica claro que Euler acreditava estar resolvendo um problema de geometria. Nela, Euler afirma que Leibniz chamou de Geometria de situação (ou de posição, para usar um vocabulário técnico mais atual) aquela que se ocupa de problemas em que o cálculo de quantidades não são feitos. Assim, Euler se refere ao Problema das Sete pontes como um problema de Geometria de posição e apresenta um método para resolver esse problema (Lopes e Táboas, 2015).

Ainda fazendo referência a Lopes e Táboas (2015), os autores afirmam que o artigo escrito por Euler exemplifica bem o surgimento de uma teoria matemática, iniciando-se pela observação até chegar à solução do problema

por meio da reflexão, passando pelas etapas de abstração e codificação.

No entanto, por se tratar de um trabalho em uma área até então desconhecida e pelo fato de as ideias ainda não estarem estabelecidas naquela época, obviamente Euler não utilizou um vocabulário técnico na solução do problema a ele apresentado; e porque nosso intuito ao exibir tal problema era introduzi-lo no contexto em que ele foi solucionado, igualmente não definimos formalmente os conceitos. No entanto, é necessário fazê-lo antes de prosseguir com a apresentação de parte do desenvolvimento histórico de teoria dos grafos.

## 1.2

### Algumas definições

As principais notações e conceitos desta seção foram tirados de Bondy e Murty (2008). Para nós, um *grafo*  $G = (V(G), E(G))$  é um par ordenado que consiste em um conjunto finito e não vazio de *vértices*, denotado por  $V(G)$ , e um conjunto de *arestas*  $E(G)$  tal que cada aresta é um par não ordenado de vértices não necessariamente distintos. Quando o contexto não suscitar ambiguidade, denotamos os conjuntos de vértices e de arestas de um grafo simplesmente por  $V$  e  $E$ , respectivamente. Se  $u, v \in V$  e se há uma aresta  $e$  ligando os dois vértices, dizemos que  $u$  e  $v$  são *extremidades* de  $e$  e escrevemos  $e = uv (= vu)$ . Denotamos por  $n$  e  $m$  o número de vértices e de arestas de um grafo  $G$ , respectivamente, e chamamos tais parâmetros de *ordem* e *tamanho* de  $G$ . Os vértices e as arestas de  $G$  são ditos os *elementos* do grafo. Um grafo  $H$  é dito um *subgrafo* de um grafo  $G$  se  $V(H) \subseteq V(G)$ ,  $E(H) \subseteq E(G)$ . Neste caso escrevemos  $H \subseteq G$ .

Observe que, de acordo com nossa definição, não está excluída a possibilidade de uma aresta possuir o mesmo vértice como ambas extremidades. Neste caso, tal aresta é chamada de *laço*. Se duas ou mais arestas possuem os mesmos vértices como extremidades elas são chamadas de *arestas paralelas*. Grafos que não possuem laços nem arestas paralelas são ditos *grafos simples* e grafos que possuem arestas paralelas mas não possuem laços são chamados de *multigrafos*. Na Figura 1.2 mostramos um desenho do multigrafo que modela o Problema das Sete Pontes, apresentado no início do presente capítulo.

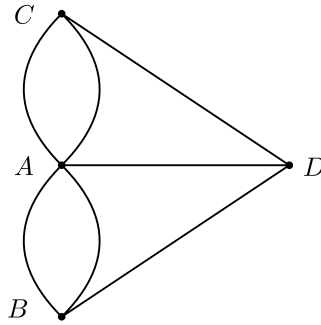


Figura 1.2: Multigrafo que modela o Problema das Sete Pontes

Como foi dito anteriormente, os vértices de um grafo  $G$  são representados graficamente por pontos e as arestas, por linhas ligando suas extremidades. O modo, no entanto, como os elementos de  $G$  são desenhados é irrelevante; logo, um mesmo grafo pode ser representado de diferentes formas. Importam apenas as relações de *incidência* e de *adjacência* entre os elementos. Um vértice  $v$  e uma aresta  $e$  são ditos incidentes se  $v$  é uma extremidade de  $e$ . Dois vértices são adjacentes, por sua vez, se são extremidades de uma dada aresta, enquanto que duas arestas são ditas adjacentes se incidem em um mesmo vértice. A *vizinhança* de  $v$ , denotada por  $N_G(v)$  ou  $N(v)$  é o conjunto de vértices distintos de  $v$  que são adjacentes a  $v$ . O *grau* de um vértice  $v$ , denotado por  $d(v)$  é o número de arestas incidentes nele, com os laços sendo contados duas vezes. Os graus *mínimo* e *máximo* de um grafo  $G$  são denotados por  $\delta(G)$  e  $\Delta(G)$ , respectivamente, e, como os nomes sugerem, são dados por  $\delta(G) := \min_{v \in V(G)} d(v)$  e  $\Delta(G) := \max_{v \in V(G)} d(v)$ .

Um *caminho* é um grafo cujos vértices podem ser dispostos em sequência de modo que dois vértices são adjacentes se e somente se os vértices são consecutivos. Um caminho também pode ser compreendido como um subgrafo de um grafo dado que satisfaz a propriedade acima mencionada. Um *ciclo*, por sua vez, pode ser visto como um caminho que contém a aresta que tem como extremidades o primeiro vértice da sequência e o último. A exemplo do caminho, um ciclo também pode ser visto como subgrafo de um grafo dado que satisfaz a propriedade citada. Um *componente conexo* de um grafo  $G$  é um subgrafo  $H \subseteq G$  em que há um caminho entre um vértice qualquer de  $H$  e um vértice  $v$  qualquer de  $G$  se e somente se  $v$  for também um elemento de  $H$ . Assim, diz-se que um grafo é *conectado* se ele tem apenas um componente conexo, ou seja, se há um caminho ligando quaisquer dois de seus vértices. Um grafo conectado que não possui ciclos é chamado de *árvore*.

De acordo com suas características, alguns grafos são agrupados em famílias. Um grafo é dito *r-partido* (ou *multipartido*, mais genericamente) se seu conjunto de vértices pode ser particionado em  $r$  subconjuntos *independentes*,

isto é, se  $V = \bigcup_{i=1}^r X_i$ , com  $X_i \cap X_j = \emptyset$  se  $i \neq j$ , e se quaisquer dois vértices de uma mesma parte forem não adjacentes. Denotamos o  $k$ -ésimo vértice da parte  $X_i$  por  $x_{ik}$ . Se, em um grafo  $r$ -partido, há uma aresta entre quaisquer dois vértices de partes diferentes, então o grafo é dito  *$r$ -partido completo*. Se um grafo  $r$ -partido completo com  $|X_i| = p_i$ ,  $i = 1, \dots, r$ , é tal que os  $p_i$  não são todos iguais, então denotamos tais grafos por  $K_{p_1, p_2, \dots, p_r}$ . Se  $p = p_1 = p_2 = \dots = p_r$ , então o grafo  $r$ -partido completo é dito  *$p$ -balanceado*. Neste caso, denotamos o grafo por  $K_{r \times p}$ . A família dos grafos  $r$ -partidos completos  $p$ -balanceados será objeto de nosso estudo, bem como a classe dos *multigrafos bipartidos*, em que o conjunto de vértices pode ser particionado em dois conjuntos independentes e são admitidas arestas paralelas. A respeito de ambos os tipos de grafos ( $K_{r \times p}$  e multigrafos bipartidos) estudaremos dois tipos distintos de coloração. Por esta razão, passamos a expor brevemente o desenvolvimento histórico desse problema de teoria dos grafos.

### 1.3

#### História do problema de coloração de grafos

Após a resolução do Problema das Sete Pontes por Euler, outros trabalhos em teoria dos grafos que sucederam a descoberta do matemático suíço incluem o estudo de redes elétricas por Kirchoff em 1847, a enumeração de isômeros químicos orgânicos por Cayley em 1857 e um jogo desenvolvido por Hamilton em 1859. Nos dois primeiros exemplos avançou-se no conhecimento de conceitos básicos sobre árvores a partir de situações oriundas do mundo físico. Quanto ao jogo de Hamilton, tratava-se de um dodecaedro onde cada um dos 20 vértices representava uma cidade famosa do mundo e o objetivo do jogador era passar por cada um dos vértices do dodecaedro exatamente uma vez, sendo permitida a passagem de um vértice para outro apenas se eles fossem adjacentes. Diga-se de passagem, o jogo não fez sucesso com as vendas (Harary, 1969). Apesar de cada uma das contribuições citadas terem tido sua importância no desenvolvimento de teoria dos grafos, certamente o problema sobre coloração de grafos se destaca frente aos demais. Bondy e Murty (2008) citam uma carta datada de 1852 em que se faz referência ao problema que deu origem à área da coloração de grafos. Harary (1969), por sua vez, afirma que há relatos segundo os quais Möbius já tinha conhecimento em 1840 do referido problema, causando incerteza sobre sua origem.

O problema em questão, que na época ficou conhecido como conjectura das quatro cores, foi comunicado a Hamilton por Augustus De Morgan em uma carta datada de 1852, e apresentado a este por seu aluno Francis Guthrie. O aluno queria uma razão para o fato de quatro cores serem suficientes

para colorir uma figura dividida em partes de modo que regiões de fronteira recebessem cores diferentes. Em 1879 Alfred Kempe (1879) publicou uma demonstração errônea para o problema, porém interessante por pelo menos dois aspectos, quais sejam: primeiramente, a demonstração evidenciou as limitações do uso de desenhos em provas; e em segundo lugar, uma ideia central na argumentação, que ficou conhecida como cadeias de Kempe, serviu não somente para demonstrar a veracidade do teorema em sua formulação para cinco cores, mas também foi relevante na demonstração final do teorema e de outros resultados, um dos quais será apresentado no capítulo seguinte. Apenas em 1889 Heawood encontrou uma falha na demonstração de Kempe. Outra demonstração equivocada foi apresentada por Tait em 1880, cuja falha foi detectada em 1891 por Petersen.

Até o presente momento citamos o problema apenas de modo informal. No começo dos anos 1900 o problema foi reformulado em termos de grafos *planares*, ou seja, grafos que podem ser representados em um plano de modo que suas arestas adjacentes não se interceptem. Se cada parte da figura que procuramos colorir for denotada por um vértice e se regiões adjacentes forem ligadas por uma aresta, então o grafo obtido será planar. Tal figura pode ser pensada como um mapa em que regiões de fronteira recebem cores distintas. Desse modo, o problema de coloração do mapa é equivalente a colorir os vértices do grafo correspondente, de maneira que vértices adjacentes não recebam a mesma cor, ou seja, estamos interessados em obter uma *k-coloração (própria) de vértices* de um grafo  $G$ . Dessa forma, temos o seguinte enunciado.

**Teorema 1.1** (*Teorema das Quatro Cores, Appel e Haken, 1977*) *Todo grafo planar simples possui coloração de vértices com 4 cores.*

O teorema foi finalmente demonstrado em 1976 por Appel e Haken (Appel e Haken, 1976; Appel et al., 1977) com o auxílio de um computador, fato também notável a respeito do resultado, uma vez que foi o primeiro teorema a ser demonstrado com ajuda extensiva do equipamento.

## 1.4

### Coloração de arestas

Pode-se dizer que o problema das quatro cores deu origem a uma subárea de teoria dos grafos chamada de coloração de grafos, em que deseja-se atribuir cores a elementos dos grafos satisfazendo certas propriedades. Em geral, o objetivo é que elementos conflitantes não recebam a mesma cor. No caso da coloração de um mapa, por exemplo, o conflito é representado pela fronteira entre duas regiões. Em termos de grafos, geralmente elementos adjacentes ou

incidentes devem ser atribuídos a cores distintas. O desejo de solucionar o teorema das quatro cores o tornou tão importante que há diferentes modelagens para o mesmo resultado. Uma delas diz respeito a coloração de arestas. Definimos uma *k-coloração (própria) de arestas* como a atribuição de cores às arestas de um grafo de modo que arestas adjacentes recebam cores diferentes. O menor inteiro positivo  $k$  para o qual um grafo  $G$  possui uma  $k$ -coloração de arestas é dito o *índice cromático* de  $G$  e denotado por  $\chi'(G)$ . Como veremos adiante, o índice cromático de um grafo simples pode assumir apenas os valores  $\Delta(G)$  ou  $\Delta(G) + 1$ , permitindo a classificação desses grafos em duas categorias, a saber: grafos *classe 1* e grafos *classe 2*, respectivamente.

Um tipo particular de coloração de arestas é a *coloração de arestas por listas*. Suponha que para cada aresta  $e$  de um grafo  $G$  é dada uma lista  $L(e)$  de cores permitidas em  $e$ . Se há uma coloração de arestas de  $G$  de modo que a cor atribuída a cada aresta  $e$  é um elemento de  $L(e)$ , então dizemos que a coloração em questão é uma coloração de arestas de  $G$  pelas listas  $(L(e))_{e \in E}$ . O menor inteiro positivo  $k$  para o qual  $G$  possui coloração de arestas por qualquer família de listas  $(L(e))_{e \in E}$  (com  $|L(e)| = k \ \forall e \in E$ ) é chamado de *índice lista-cromático* de  $G$  e é denotado por  $\text{ch}'(G)$ , conforme a notação encontrada em Galvin (1995). De acordo com Bondy e Murty (2008), diversos autores, incluindo Vizing, Gupta, Albertson e Collins, estabeleceram a Conjectura da Coloração por Listas (*List Coloring Conjecture* (LCC) em inglês) acerca do índice lista-cromático de grafos sem laços.

**Conjectura 1.2** (LCC) *Todo grafo sem laços  $G$  satisfaz  $\text{ch}'(G) = \chi'(G)$ .*

## 1.5

### Coloração total

Outro tipo de coloração dentro da subárea de coloração de grafos é a *k-coloração (própria) total* de um grafo  $G$ , que consiste na atribuição de  $k$  cores aos vértices e às arestas de  $G$  de modo que os elementos adjacentes e incidentes recebem cores diferentes. Analogamente à coloração anterior, *número cromático total* de um grafo  $G$  é o menor inteiro positivo  $k$  para o qual  $G$  admite uma  $k$ -coloração total e é denotado por  $\chi''$ . A respeito dessa coloração, Vizing (1968) e Behzad (1965) estabeleceram a Conjectura da Coloração Total (*Total Coloring Conjecture* (TCC) em inglês).

**Conjectura 1.3** (TCC, Behzad, 1965, Vizing, 1968) *Todo grafo simples  $G$  satisfaz  $\Delta + 1 \leq \chi(G)'' \leq \Delta + 2$ .*

Se a diferença entre a quantidade de vezes que quaisquer duas cores foram usadas na coloração total for no máximo 1, então ela é dita *equilibrada*.

Denotamos por  $\chi_e''(G)$  o menor inteiro positivo  $k$  para o qual um grafo  $G$  possui uma  $k$ -coloração total equilibrada. Wang (2002) conjecturou um limite superior para o número cromático total equilibrado. Tal resultado é conhecido como a Conjectura da Coloração Total Equilibrada (*Equitable Total Coloring Conjecture* (ETCC) em inglês).

**Conjectura 1.4** (ETCC, Wang, 2002) *Todo grafo simples  $G$  satisfaz  $\Delta + 1 \leq \chi(G)_e'' \leq \Delta + 2$ .*

Acerca das colorações apresentadas, cumpre esclarecer que a palavra “própria”, utilizada nas definições entre parênteses, refere-se ao fato de que elementos incidentes e adjacentes não devem receber a mesma cor. Omitimos o termo posteriormente pois colorações em teoria dos grafos, em geral procuram evitar conflitos, que são representados pela incidência e adjacência de elementos. Como falar de uma coloração que não seja própria não faz sentido, assumimos que a característica de ser própria já está incluída no termo coloração, não sendo necessário usar o adjetivo, portanto. Além disso, salientamos que, embora seja possível utilizar qualquer conjunto de elementos para representar as cores, nós usaremos o conjunto dos inteiros  $\{1, 2, \dots, k\}$  quando nos referirmos a uma  $k$ -coloração de um grafo.

## 1.6

### Objetivos, questão norteadora e organização do trabalho

O objetivo geral deste trabalho é apresentar uma pesquisa em coloração de grafos, subárea de teoria de grafos em que se busca atribuir o menor número possível de cores a elementos do grafo respeitando certas propriedades. Os objetivos específicos, por sua vez, são: (a) estudar os principais resultados sobre coloração de arestas, investigando, em particular a coloração de arestas por listas de multigrafos bipartidos; (b) abordar os principais resultados sobre coloração total de grafos, com foco na coloração total equilibrada das classes dos grafos  $r$ -partidos completos  $p$ -balanceados, para os quais determinaremos seus números cromáticos totais equilibrados. Para tanto, introduziremos novas técnicas ao apresentarmos algoritmos para colorir total e equilibradamente todos os grafos do tipo  $K_{r \times p}$ . Contribuir-se-á, dessa forma, com novos resultados para a ETCC.

A fim de nortear o trabalho, a seguinte questão foi elaborada: após uma análise de dois tipos diferentes de colorações de grafos, quais novas contribuições podem ser dadas para essa área, tendo em mente, em particular, grafos multipartidos? Para responder a pergunta proposta utilizaremos revisão bibliográfica como principal metodologia.

Além das *Considerações finais*, este trabalho possui três capítulos. No presente capítulo, *Introdução*, é feita uma exposição do surgimento de teoria dos grafos; menção de definições relevantes sobre grafos, enfatizando, sobretudo, as mais importantes a respeito de coloração de grafos; e explicitação dos objetivos, da questão norteadora e da metodologia do trabalho. No segundo capítulo, *Sobre coloração de arestas*, exibiremos os principais resultados de coloração de arestas e de coloração de arestas por lista, focando, em particular, nos fatos conhecidos mais relevantes para a determinação do índice lista-cromático de multigrafos bipartidos. Galvin (1995) verificou a LCC para essa classe de grafos e faremos um estudo desse resultado. No terceiro capítulo, *Sobre coloração total*, apresentaremos resultados gerais e relevantes sobre coloração total de grafos. Também investigaremos a coloração total equilibrada dos grafos  $r$ -partidos completos  $p$ -balanceados, verificando a ETCC para as seguintes classes de grafos:

1.  $K_{2 \times p}$ ,  $\chi_e'' = \Delta + 2$ ;
2.  $K_{r \times p}$  com  $r$  par ( $r \geq 4$ ) e  $p$  ímpar,  $\chi_e'' = \Delta + 2$ ;
3.  $K_{r \times p}$  com  $r$  par ( $r \geq 4$ ) e  $p$  par,  $\chi_e'' = \Delta + 1$ ;
4.  $K_{r \times p}$  com  $r$  ímpar e  $p$  ímpar,  $\chi_e'' = \Delta + 1$ .
5.  $K_{r \times p}$  com  $r$  ímpar e  $p$  par,  $\chi_e'' = \Delta + 1$ ;

Os resultados do terceiro capítulo foram apresentados no Latin-American Workshop on Cliques in Graphs (LAWCG) em 2016. Uma versão completa do artigo foi recentemente publicada na Discrete Applied Mathematics (DAM) (da Silva et al., 2018). Os resultados mais novos serão submetidos à conferência Latin and American Algorithms, Graphs and Optimization Symposium (LAGOS), que ocorrerá em 2019 e foram apresentados na conferência Cologne Twente Workshop (CTW) em 2018. No quarto e último capítulo, *Considerações finais*, retomaremos a questão norteadora e mencionaremos os principais resultados do trabalho, com destaque para os novos resultados na área de coloração de grafos. Abordaremos também as perspectivas de trabalhos futuros. Destacamos que no segundo capítulo faz-se um estudo de resultados já conhecidos da área de coloração de arestas. No terceiro capítulo, por sua vez, são apresentados resultados do autor da presente dissertação, que foram desenvolvidos em colaboração com as professoras Simone Dantas, da Universidade Federal Fluminense (UFF) e Diana Sasaki, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro (UERJ).



## 2

### Sobre coloração de arestas

Considere o seguinte problema: os dois professores de Matemática de uma escola que possui três turmas estão planejando o horário das aulas e querem se organizar de modo a minimizar a quantidade de tempos de aula para as turmas. Suponha que um professor tem que lecionar dois tempos na primeira turma, um tempo na segunda e um na terceira, enquanto o outro professor deve lecionar um tempo na primeira turma, um na segunda e dois na terceira. Denotando por  $x_1$  e  $x_2$  os professores, por  $y_1$ ,  $y_2$  e  $y_3$  as turmas e representando por uma aresta cada tempo de aula que cada professor deve ministrar em determinada turma, o problema consiste em colorir as arestas do multigrafo da Figura 2.1 com o menor número possível de cores, ou seja, deve-se determinar o índice cromático do seguinte multigrafo.

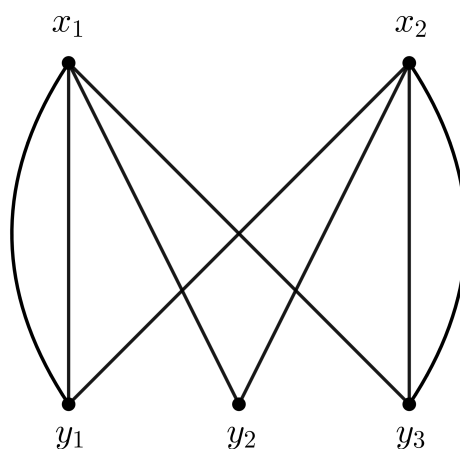


Figura 2.1: Multigrafo que modela o problema do horário de aulas

Naturalmente, duas arestas adjacentes no multigrafo acima representam uma incompatibilidade, seja porque um professor não pode lecionar em duas turmas simultaneamente (arestas  $x_1y_2$  e  $x_1y_3$ , por exemplo) ou porque uma turma não pode ter aula de dois professores ao mesmo tempo (caso das arestas  $x_1y_2$  e  $x_2y_2$ , por exemplo). Assim, arestas adjacentes devem receber cores diferentes. Sendo assim, uma possível solução para o problema apresentado é retratado na Figura 2.2.

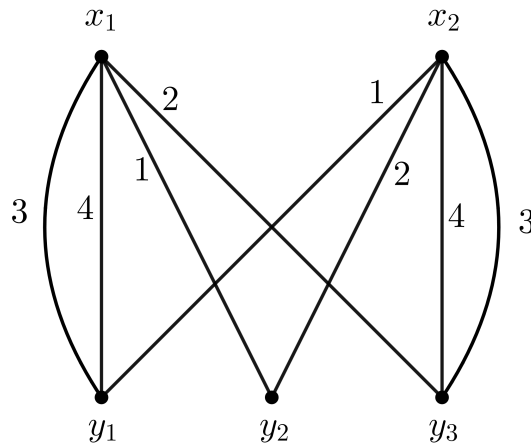


Figura 2.2: Solução do problema do horário das aulas

O multigrafo acima deve ser interpretado da seguinte forma: no primeiro tempo, o professor  $x_1$  deve dar aula para a turma  $y_2$ , enquanto o professor  $x_2$  deve estar na turma  $y_3$ . O raciocínio para os demais tempos de aula é análogo.

Conforme dissemos no capítulo anterior, o problema de coloração em grafos teve início com a indagação acerca da possibilidade de se colorir qualquer mapa utilizando no máximo quatro cores. O problema em questão foi resolvido em 1976 por Appel e Haken (Appel e Haken, 1976; Appel et al., 1977). Em 1997 uma demonstração um pouco mais simples foi apresentada por Robertson et al. (1997). A primeira tentativa errada de demonstrar o teorema foi feita por Kempe em 1879. Apesar do erro, uma ideia de Kempe (que ficou conhecida como *cadeias de Kempe*) foi utilizada para a demonstração do Teorema de Vizing. Dado um grafo  $G$  com uma coloração de arestas, uma cadeia de Kempe consiste em um subgrafo de  $G$  formado pelas arestas coloridas com duas cores dadas e pelas extremidades dessas arestas. O Teorema de Vizing, cujos enunciado e demonstração serão apresentados após a demonstração do seguinte lema, permite a classificação de grafos simples em duas categorias de acordo com o valor de seu índice cromático.

**Lema 2.1** *Um grafo é 2-regular se e somente se seus componentes conexos são ciclos.*

**Demonstração.** De fato, seja  $G$  um grafo cujos componentes conexos são todos ciclos. Então,  $G$  é claramente 2-regular. Seja  $G$  um grafo 2-regular. No que segue, os rótulos dos vértices de  $G$  são dados de maneira conveniente. Tome um vértice qualquer de  $G$ , digamos,  $v_1$ . Como  $G$  é 2-regular,  $v_1$  tem 2 vizinhos. Seja  $v_2$  um desses vizinhos. Novamente,  $v_2$  tem dois vizinhos: um deles é  $v_1$  e o outro chamaremos de  $v_3$ . Procedendo com este raciocínio, como  $G$  é finito, em algum momento obteremos um vértice  $v_k$ , que terá o vértice  $v_1$  como vizinho,

além de  $v_{k-1}$ . Se  $v_1$  não fosse o outro vizinho de  $v_k$ , implicaria que um vértice  $v_j$  seria o outro vizinho de  $v_k$ , onde  $j \in \{2, 3, \dots, k-2\}$ . No entanto,  $v_j$  já tem dois vizinhos, a saber:  $v_{j-1}$  e  $v_{j+1}$ . Assim,  $v_k$  seria um terceiro vizinho de  $v_j$ , o que contradiria nossa suposição de que  $G$  é 2-regular. Assim,  $G$  tem um componente conexo que é  $C_k$ . O grafo  $G - C_k$  também deve ser 2-regular. Procedendo analogamente obteremos outro ciclo e assim sucessivamente. ■

**Teorema 2.2** (*Vizing, 1964, Gupta, 1966*). *Todo grafo simples  $G$  satisfaz*

$$\Delta(G) \leq \chi'(G) \leq \Delta(G) + 1.$$

**Demonstração.** A primeira desigualdade é satisfeita trivialmente. Basta tomar um vértice cujo grau seja  $\Delta$ , o grau máximo do grafo. Assim, para colorir as arestas incidentes em tal vértice são necessárias  $\Delta$  cores diferentes para que a coloração seja própria, como desejado. Agora suponha por contradição que nem todo grafo satisfaz a segunda desigualdade, isto é, suponha que existe um grafo  $G$  tal que  $\chi'(G) > \Delta(G) + 1$ . Assuma, sem perda de generalidade, que  $G$  é minimal, ou seja, suponha que a remoção de uma aresta  $e = v_0v_1 \in E$  faz com que  $H = G \setminus e$  satisfaça  $\chi'(H) \leq \Delta(H) + 1$ . Se  $\chi'(H)$  fosse estritamente menor que  $\Delta(H) + 1$ , bastaria colorir a aresta  $e$  com uma nova cor e, assim, teríamos uma coloração de  $G$  com  $\chi'(H) + 1 \leq \Delta(H) + 1 \leq \Delta(G) + 1$ , contradizendo nossa suposição a respeito do índice cromático de  $G$ . Podemos ter  $\Delta(G) = \Delta(H)$  ou  $\Delta(G) = \Delta(H) + 1$ . No segundo caso, basta colorir a aresta  $e$  com uma cor nova. Assim,  $G$  ficaria colorido com  $\Delta(G) + 1$  cores, contradizendo nossa suposição inicial.

Vamos supor, então, que  $\Delta(G) = \Delta(H)$ . Se  $\chi'(H) = \Delta(H)$ , novamente bastaria colorir  $e$  com uma cor nova, o que iria contradizer nossa hipótese. Podemos assumir, então, que  $\chi'(H) = \Delta(H) + 1$ . Como estamos supondo que  $H$  tem uma coloração com  $\Delta(H) + 1$  cores, todo vértice de  $H$  tem pelo menos uma cor *disponível*<sup>1</sup>. Suponha que a cor disponível em  $v_0$  seja  $c_0$  e que a cor disponível em  $v_1$  seja  $c_1$ . Seja  $v_2$  o vértice tal que a cor de  $v_0v_2$  é  $c_1$  e seja  $c_2$  a cor disponível em  $v_2$ . Procedendo assim, seja  $G'$  o subgrafo de  $G$  construído do seguinte modo: as arestas de  $G'$  são da forma  $v_0v_i$ , onde  $i = 1, 2, \dots, k$ , de modo que a cor  $c_i$  esteja disponível em  $v_i$  e seja a cor da aresta  $v_0v_{i+1}$  para todo  $i = 1, \dots, k-1$ . Temos que  $k \leq d_G(v_0)$ . Mas além disso é necessário que a construção de  $G'$  termine em apenas uma das seguintes situações com a cor  $c_k$ : quando  $c_k$  for uma cor disponível em  $v_0$  ou quando  $c_k = c_i$  para algum

<sup>1</sup>Dada uma coloração de arestas de um grafo, dizemos que uma cor  $c$  está disponível em um vértice se ela não é usada em nenhuma das arestas incidentes em tal vértice.

$i = 1, 2, \dots, k - 2$ . Na Figura 2.3 exibimos o subgrafo  $G'$  construído segundo a descrição acima.

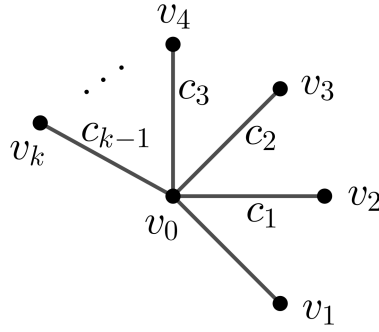


Figura 2.3: Subgrafo de  $G$

**1º caso:**  $c_k$  é uma cor disponível em  $v_0$ .

Neste caso, basta colorir a aresta  $v_0v_k$  com cor  $c_k$  e, para  $i = 1, \dots, k - 1$ , as arestas da forma  $v_0v_i$  devem ser coloridas com cor  $c_i$ . Pela construção do subgrafo  $G'$  sabemos que tal distribuição de cores é possível. Assim, encontraríamos uma coloração de  $G$  com  $\Delta(G) + 1$  cores, contrariando nossa suposição inicial.

**2º caso:**  $c_k = c_i$  para algum  $i = 1, 2, \dots, k - 2$ .

Se  $c_0$ , a cor disponível em  $v_0$ , estiver disponível em  $v_k$ , a aresta  $v_0v_k$  pode ser colorida com  $c_0$  e as arestas da forma  $v_0v_i$ , com cor  $c_i$ , onde  $i = 1, 2, \dots, k - 1$ . Pela construção do subgrafo  $G'$  isso é possível. Se  $c_0$  está disponível em  $v_i$ , semelhantemente, a cor da aresta  $v_0v_i$  pode ser  $c_0$  e as arestas  $v_0v_j$ , com  $j = 1, 2, \dots, i - 1$  podem ser coloridas com  $c_j$ . Em qualquer um desses casos obteríamos uma  $(\Delta(G) + 1)$ -coloração de arestas de  $G$ , contrariando nossa hipótese inicial.

Se  $c_0$  não estiver disponível em  $v_k$  nem em  $v_i$ , considere o subgrafo  $G'' = G[M_{c_0} \cup M_{c_k}]$ , onde  $M_{c_0}$  e  $M_{c_k}$  são, respectivamente, os emparelhamentos que contêm todas as arestas de  $H$  que, pela nossa coloração, receberam cores  $c_0$  e  $c_k$ .

Afirmamos que os componentes conexos de  $G''$  são caminhos ou ciclos de comprimento par. De fato, um vértice de  $G''$  possui grau no máximo dois, em cujo caso há uma aresta de cor  $c_0$  e outra de cor  $c_k$  incidentes no vértice em questão. Qualquer outra aresta incidente nesse vértice só poderia ter cor  $c_0$  ou  $c_k$ , o que seria uma contradição, pois haveria arestas adjacentes recebendo mesma cor.

Se todos os vértices de um componente conexo tem grau dois, pelo Lema 2.1, tal componente é um ciclo. Neste caso, o ciclo deve ser de comprimento par, pois não há coloração de ciclos de comprimento ímpar com

duas cores. Isso ocorre porque se colorirmos as arestas do ciclo em sequência alternando duas cores, a última aresta deveria receber a mesma cor da primeira; mas, como se tratam de arestas adjacentes, elas não poderiam receber a mesma cor.

Se todos os vértices de um componente conexo tem grau um, tal componente é apenas uma aresta com suas extremidades, pois se qualquer uma das extremidades fosse adjacente a outro vértice, o grau de tal extremidade seria no mínimo dois.

Por fim, se há vértices de grau um e dois, podemos chamar um vértice de grau um de  $w_1$  e seu vértice adjacente de  $w_2$ . Este, por sua vez, possui um outro vértice adjacente, que chamaremos de  $w_3$ . Prosseguindo com o raciocínio, chegaremos, pela finitude do grafo, a um último vértice, que não pode ser adjacente a nenhum dos anteriores. Assim, este vértice também tem grau um e é o último na sequência que forma o caminho que descrevemos.

Em  $G''$ , os vértices  $v_0, v_i$  e  $v_k$  são extremidades de caminhos, pois a cor  $c_0$  está representada<sup>2</sup> em  $v_k$  e  $v_i$ , enquanto a cor  $c_k$  está disponível neles. Já o vértice  $v_0$  tem a cor  $c_0$  disponível e a cor  $c_k$  representada em si. Logo,  $v_0, v_i$  e  $v_k$  não podem pertencer ao mesmo componente conexo de  $G''$ . Tome um caminho em que apenas um dos três vértices faz parte. Suponha que o caminho em questão contém  $v_0$ . Trocando as cores  $c_0$  e  $c_k$  das arestas desse componente conexo, obtemos que a cor  $c_0$  passa a estar representada no vértice  $v_0$ , enquanto a cor  $c_k$  passa a estar disponível nele. Assim, podemos aplicar cor  $c_i$  nas arestas  $v_0v_i$  para todo  $i = 1, 2, 3, \dots, k$ . Os demais casos são semelhantes. ■

**Teorema 2.3** (*Vizing, 1964*) *Seja  $M$  multigrafo com grau máximo  $\Delta$  e multiplicidade máxima  $\mu$ . Então*

$$\Delta \leq \chi'(M) \leq \Delta + \mu.$$

Omitimos a demonstração deste teorema tendo em vista que ela é análoga à prova do teorema anterior.

**Teorema 2.4** (*Shannon, 1949*) *Seja  $M$  um multigrafo com grau máximo  $\Delta$ . Temos*

$$\chi'(M) \leq \frac{3}{2}\Delta.$$

**Demonstração.** Suponha, por contradição, que o resultado é falso e seja  $M$  um contraexemplo minimal, ou seja,  $M$  é um multigrafo com  $\chi'(M) > \frac{3}{2}\Delta$  tal que, se removida uma aresta  $e = uv$ , o grafo  $H = M \setminus e$  satisfaz  $\chi'(H) \leq$

<sup>2</sup>Dada uma coloração de arestas de um grafo, dizemos que uma cor está representada em um vértice se ela é usada em uma aresta incidente nele.

$\frac{3}{2}\Delta(H)$ . Observamos que podem haver arestas distintas de  $e$  que tenham como extremidades  $u$  e  $v$ , já que  $M$  é um multigrafo.

Afirmamos que  $\chi'(H) = \left\lfloor \frac{3}{2}\Delta(H) \right\rfloor$ . Se o índice cromático de  $H$  fosse menor, existiria  $k \in \mathbb{Z}_+$  tal que  $\chi'(H) = \left\lfloor \frac{3}{2}\Delta(H) \right\rfloor - k$  e poderíamos atribuir à aresta  $e = uv$  uma cor distinta das  $\chi'(H)$  já usadas e obteríamos uma coloração de  $M$  com  $\left\lfloor \frac{3}{2}\Delta(H) \right\rfloor - k + 1$  cores. Independentemente da paridade de  $\Delta(H)$  essa coloração de  $M$  teria no máximo  $\frac{3}{2}\Delta(M)$ , já que  $k \geq 1$  e que  $\Delta(H) \leq \Delta(M)$ . Isso iria contradizer nossa suposição inicial que  $\chi'(M) \geq \frac{3}{2}\Delta(M)$ .

O grau máximo de  $H$  pode assumir dois valores, a saber:  $\Delta(M)$  ou  $\Delta(M) - 1$ , já que  $H$  foi obtido pela remoção de uma aresta. No segundo caso, basta colorir a aresta removida  $e = uv$  com cor  $\chi'(H) + 1 = \left\lfloor \frac{3}{2}(\Delta(M) - 1) \right\rfloor + 1 \leq \left\lfloor \frac{3}{2}\Delta(M) \right\rfloor$ . Então, assumimos que  $\Delta(H) = \Delta(M)$ .

Afirmamos que  $\chi'(H) = \chi'(M) - 1$ . Como  $H$  tem coloração com  $\left\lfloor \frac{3}{2}\Delta(M) \right\rfloor$  cores, usar uma nova cor em  $e$  já garante uma coloração própria de  $M$ . Daí,  $\chi'(M) \leq \left\lfloor \frac{3}{2}\Delta(M) \right\rfloor + 1$ . Se  $\chi'(M)$  fosse estritamente menor que o limite dado, isso implicaria que  $\chi'(M) \leq \left\lfloor \frac{3}{2}\Delta(M) \right\rfloor$ , contradizendo nossa suposição inicial.

Denotando por  $d_H(u)$  o grau do vértice  $u$  no multigrafo  $H$ , temos que  $d_H(u) \leq \Delta(M) - 1$ . Assim, há pelo menos  $\chi'(M) - 1 - (\Delta(M) - 1)$  cores disponíveis no vértice  $u$ . Se alguma dessas cores não estiver representada em  $v$ , podemos aplicar a cor em questão na aresta  $e = uv$  e, assim, teríamos uma coloração de  $M$  com  $\left\lfloor \frac{3}{2}\Delta(M) \right\rfloor$  cores, contradizendo nossa suposição inicial.

Então devemos assumir que as cores disponíveis em  $u$  estão representadas em  $v$  e vice-versa. Assim, na coloração de  $H$ , o total de cores representadas nos vértices  $u$  e  $v$  é dado por  $2\chi'(M) - 2\Delta(M) + \bar{\mu}$ , onde  $\bar{\mu}$  é a multiplicidade das arestas que ligam  $u$  e  $v$  no multigrafo  $H$ . Logo,  $\bar{\mu} \leq \mu - 1$ , com  $\mu$  sendo a multiplicidade máxima de  $M$ .

Se  $\bar{\mu} < \mu - 1$ , temos

$$\begin{aligned}
2\chi'(M) - 2\Delta(M) + \bar{\mu} &< 2\chi'(M) - 2\Delta(M) + \mu - 1 \\
&= 2\chi'(H) - 2\Delta(M) + \mu + 1 \\
&\leq 3\Delta(M) - 2\Delta(M) + \mu + 1 \\
&< \Delta(M) + \mu + 1
\end{aligned}$$

Temos que  $\Delta(M) + \mu + 1 \leq \left\lfloor \frac{3}{2}\Delta(M) \right\rfloor \iff 2\Delta(M) + 2\mu + 2 < 2\left\lfloor \frac{3}{2}\Delta(M) \right\rfloor \leq 3\Delta(M) \iff 2\mu + 2 < \Delta(M) \iff \mu + 1 < \frac{\Delta(M)}{2}$ . Por outro lado, o Teorema 2.3 nos garante que  $\chi'(M) \leq \Delta(M) + \mu$  e a nossa hipótese inicial é que  $\frac{3}{2}\Delta(M) < \chi'(M)$ , o que implica que  $\frac{\Delta(M)}{2} < \mu$ . Em particular,  $\frac{\Delta(M)}{2} < \mu + 1$ , contradizendo a conclusão a que chegamos anteriormente. Então podemos assumir que  $\bar{\mu} = \mu - 1$ .

Isso implica que a quantidade de cores usadas para colorir as arestas incidentes em  $u$  e em  $v$  em  $H$  é  $2\chi'(M) - 2\Delta + \mu - 1 > 2\chi(H) - 2\Delta(M) + \frac{\Delta(M)}{2} + 1$ . Independentemente da paridade de  $\Delta(M)$  conclui-se que esse valor é estritamente maior que  $\frac{3}{2}\Delta(M)$ , contradizendo o fato de que  $\chi'(H) = \left\lfloor \frac{3}{2}\Delta(M) \right\rfloor$ . ■

**Observação 2.5** Como  $\frac{3}{2}\Delta \leq \Delta + \mu \iff \Delta \leq 2\mu$ , temos que se o grau máximo do multigrafo for menor ou igual ao dobro da multiplicidade máxima do grafo, então o limite dado pelo Teorema 2.4 é melhor do que a cota do Teorema 2.3. Como o Teorema 2.4 depende apenas do grau máximo do multigrafo, isto representa uma vantagem de utilizá-lo.

## 2.1

### Determinando o índice lista-cromático de multigrafos bipartidos

No problema citado no início deste capítulo, nosso objetivo era obter uma coloração das arestas de um multigrafo. Porém, há situações em que desejamos obter uma coloração de arestas de um determinado grafo para o qual há uma lista prévia de cores que podem ser escolhidas para cada aresta, conforme esclarecemos melhor através do exemplo a seguir. Suponha que em um departamento de uma universidade, três alunos queiram encontrar-se individualmente com três professores para tirarem dúvidas acerca das disciplinas. Suponha ainda que as reuniões duram 30 minutos e podem ocorrer às 8 h, às 8h30, às 9 h ou às 9h30. Estes horários serão denotados

respectivamente pelos números 1, 2, 3 e 4. Na Figura 2.4 abaixo os vértices  $a_1, a_2$  e  $a_3$  denotam os alunos, enquanto os vértices  $p_1, p_2$  e  $p_3$  representam os professores. Perto de cada aresta está a lista de cores que indicam os horários disponíveis em comum entre cada par de professor e aluno. Assim, o aluno  $a_1$  e o professor  $p_1$  podem encontrar-se no horário 1, 2 ou 3, por exemplo.

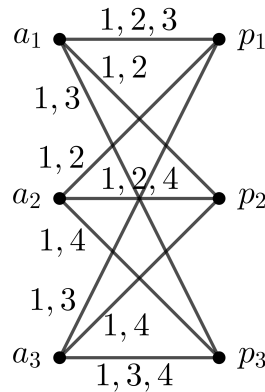


Figura 2.4: Problema das reuniões com professores

Note que se os professores e alunos escolherem aleatoriamente um dos horários em que ambos estejam disponíveis, outros encontros podem ser inviabilizados. Por exemplo, se o aluno  $a_1$  e o professor  $p_1$  se reunirem no horário 3 e se o aluno  $a_1$  encontrar o professor  $p_2$  no horário 2, o aluno  $a_1$  não teria um horário em comum com o professor  $p_3$  para que eles se reunissem. Também, temos que arestas adjacentes precisam ser atribuídas a cores diferentes por um entre dois motivos: pelo fato de um aluno não poder estar em reunião com dois professores diferentes ao mesmo tempo ou pelo fato de professores não poderem atender a dois alunos simultaneamente. Dessa forma, uma possível solução para o problema é dada pela Figura 2.5 abaixo.

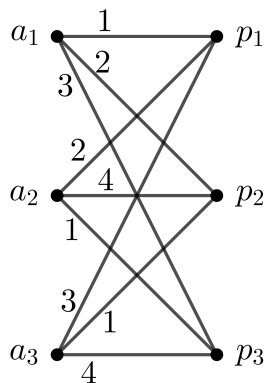


Figura 2.5: Problema das reuniões com professores

O mais importante resultado ainda em aberto sobre coloração de arestas por listas é a Conjectura da Coloração por Listas (LCC), segundo a qual, todo



grafo sem laços tem índice lista-cromático igual ao índice cromático. Galvin (1995) verificou tal conjectura para multigrafos bipartidos. Este resultado passamos a expor a seguir tomando como base a demonstração encontrada em Galvin (1995), de onde também tiramos as principais notações e conceitos. Antes, no entanto, faz-se necessário apresentar algumas definições e resultados preliminares que serão importantes na demonstração do teorema.

Seja  $G = (V, E)$  um grafo e sejam  $f, g : V \rightarrow \mathbb{N}$  funções que associam a cada vértice de  $G$  um número inteiro não negativo. Para todo  $v \in G$ , associe um conjunto  $L(v)$  tal que  $|L(v)| = f(v)$ . Dizemos que  $G$  é  $(f, g)$ -escolhível se, para qualquer escolha das listas  $L(v)$ , existem conjuntos  $B(v) \subseteq L(v)$  (para todo  $v \in V$ ) tais que  $|B(v)| = g(v)$  e  $B(v) \cap B(u) = \emptyset$  se  $uv \in E$ . Se  $G$  é  $(f, g)$ -escolhível para  $f(v) = n$  e  $g(v) = 1$ , então  $G$  é dito  $n$ -escolhível. O menor inteiro positivo  $k$  para o qual um grafo  $G$  é  $k$ -escolhível é denotado por  $\text{ch}(G)$  e é dito o *número lista-cromático* do grafo. Em outras palavras, se atribuímos a cada vértice de um grafo  $G$  uma lista de cores e somos capazes de obter uma coloração de vértices de tal modo que a cor dada a cada vértice pertence ao conjunto das cores previamente designadas a elas, então temos uma *coloração de vértices por listas* de  $G$  ou simplesmente uma *coloração por listas* de  $G$ . Os conceitos aqui apresentados são análogos àqueles apresentados para a coloração de arestas por listas no Capítulo 1. Introduzimos tais definições aqui pois há uma relação entre o índice lista-cromático de um grafo e o número lista-cromático de seu grafo linha.

Seja  $M$  um multigrafo. O *grafo linha* de  $M$ , denotado por  $L(M)$ , é o grafo em que cada vértice representa uma aresta de  $M$ , isto é,  $V(L(M)) = E(M)$ , e em que dois vértices de  $L(M)$  são adjacentes se e somente se as arestas correspondentes em  $M$  são adjacentes. Na Figura 2.6 exibimos um multigrafo  $M$  e seu grafo linha correspondente.

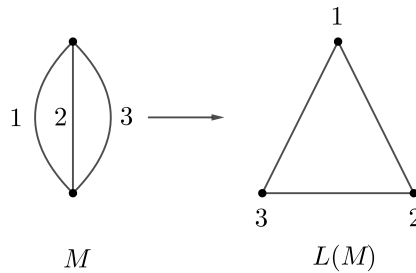


Figura 2.6: Multigrafo  $M$  e seu grafo linha  $L(M)$

A afirmação a seguir foi feita por Galvin (1995), porém não demonstrada pelo autor. Apresentamos uma demonstração para a mesma.

**Afirmção 2.6** *Seja  $M$  um multigrafo. O índice cromático de  $M$  é igual ao número cromático do grafo linha  $L(M)$ . De modo análogo, o*

*índice lista-cromático de  $M$  é igual ao número lista-cromático de  $L(M)$ . Simbolicamente,  $\chi'(M) = \chi(L(M))$  e  $\text{ch}'(M) = \text{ch}(L(M))$ .*

**Demonstração.** Provaremos apenas a afirmação que  $\chi'(M) = \chi(L(M))$ , visto que a outra é análoga. Sejam  $M$  um multigrafo e  $c : E \rightarrow \{1, 2, \dots, \chi'(M)\}$  uma coloração de arestas de  $M$ . Quando obtemos o grafo linha  $L(M)$ , este possui naturalmente uma coloração de vértices em que a cor de cada vértice é a cor da sua aresta correspondente em  $M$ . A coloração de vértices de  $L(M)$  é própria. Com efeito, suponha por contradição que a coloração não é própria. Então há dois vértices  $u, v \in V(L(M))$  adjacentes que recebem a mesma cor. Se  $u$  e  $v$  são adjacentes em  $L(M)$ , então suas arestas correspondentes em  $M$  são adjacentes pela construção do grafo linha. Daí, as cores das arestas correspondentes seria a mesma, contradizendo o fato de que a coloração  $c$  é própria. Isso implica que  $\chi(L(M)) \leq \chi'(M)$ .

Suponha, agora, que o número cromático de  $L(M)$  é estritamente menor do que o índice cromático de  $M$ . Então considere uma coloração de vértices de  $L(M)$  com  $\chi(L(M))$  cores. Afirmamos que se as arestas de  $M$  forem coloridas com as cores dos vértices correspondentes de  $L(M)$ , a coloração obtida será própria. Caso contrário haveria duas arestas adjacentes  $e$  e  $f$  (correspondentes aos vértices  $u$  e  $v$ , respectivamente) em  $M$  que recebem a mesma cor. Isso implicaria que  $u$  e  $v$  são adjacentes em  $L(M)$  e que teriam recebido a mesma cor, o que é uma contradição. Assim, seria possível colorir as arestas de  $M$  com uma quantidade menor do que seu índice cromático, o que é um absurdo. Como  $\chi(L(M))$  não pode ser estritamente menor que  $\chi'(M)$ , segue que  $\chi(L(M)) = \chi'(M)$ , como desejado. ■

### 2.1.1

#### Um lema sobre digrafos para auxiliar na demonstração do teorema

Para nós, um *digrafo* ou *grafo dirigido*  $D = (V, \vec{E})$  é um par ordenado composto por um conjunto não vazio de vértices  $V(D)$  (ou simplesmente  $V$ , quando o contexto não suscitar dúvidas) e por um conjunto de *arestas orientadas* ou *arcos*  $\vec{E}(D)$  (ou  $\vec{E}$ ), cujos elementos são pares ordenados de vértices distintos. Dados dois vértices  $u, v \in V$  admitimos que eles sejam ligados por no máximo um arco em cada direção. Denotamos por  $(u, v)$  um arco direcionado de  $u$  para  $v$ , que são chamados, respectivamente, de *cauda* e *cabeça* do arco. Em um digrafo, temos duas definições análogas à definição de grau de vértice. Como os arcos são orientados, temos as noções de *grau de entrada* e *grau de saída* de um vértice  $v$ , respectivamente denotados por  $\deg^-(v)$  e  $\deg^+(v)$ , com  $\deg^-(v) = |\{u : (u, v) \in \vec{E}\}|$  e  $\deg^+(v) = |\{u : (v, u) \in \vec{E}\}|$ . A *vizinhança fechada* de um vértice  $v$  é o conjunto  $N[v] = \{u : (v, u) \in E\} \cup \{v\}$ .

Logo,  $|N[v]| = \deg^+(v) + 1$ . O *grafo subjacente* a  $D$  é o grafo  $G = (V, E)$  em que o conjunto de arestas de  $G$  são os arcos de  $D$  sem orientação, isto é, as arestas  $uv$  tais que  $(u, v)$  ou  $(v, u)$  são elementos de  $\vec{E}$ . Um *núcleo* de um digrafo  $D$  é um conjunto independente  $K \subseteq V$  tal que para todo  $u \in V \setminus K$ , existe  $v \in K$  de modo que  $(u, v) \in E$ . Seja  $D$  um digrafo e  $S \subseteq V(D)$ . O *subdigrafo*  $F$  induzido por  $S$  é um digrafo tal que  $V(F) = S$  e, dados  $u, v \in S$ ,  $(u, v) \in E(F)$  se e somente se  $(u, v) \in E(D)$  (ou  $(v, u) \in E(F) \iff (v, u) \in E(D)$ , analogamente). Neste caso, um núcleo de  $F$  é também dito um núcleo de  $S$ . Usamos a Figura 2.7 para exemplificar os conceitos de grau de entrada e de saída, bem como o de núcleo.

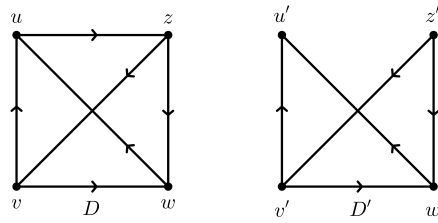


Figura 2.7: Digrafos

Na Figura 2.7 temos que  $\deg^+(u) = 1$  e  $\deg^-(u) = 2$ . Note que nem todo grafo possui núcleo. Por exemplo, em  $D$ , qualquer núcleo (caso existisse), deveria ser um conjunto unitário. No entanto, nenhum dos vértices é cabeça de arcos que tenham como caudas os demais três vértices. Já  $D'$  tem  $K = \{u', z'\}$  como um núcleo. O seguinte lema relaciona o conceito de núcleo com a ideia de um grafo ser  $(f, g)$ -escolhível.

**Lema 2.7** (Bondy, Boppana e Siegel) *Seja  $D$  um digrafo em que todo subdigrafo induzido possui um núcleo. Se  $f, g : V(D) \rightarrow \mathbb{N}$  são tais que  $f(v) \geq \sum_{u \in N[v]} g(u)$  sempre que  $g(v) > 0$ , então  $D$  é  $(f : g)$ -escolhível.*

**Demonstração.** Seja  $D = (V, \vec{E})$  um digrafo em que todo subdigrafo induzido possui um núcleo  $K$ . Sejam  $f, g : V(D) \rightarrow \mathbb{N}$  funções com  $f(v) \geq \sum_{u \in N[v]} g(u)$  quando  $g(v) > 0$ . Provaremos este resultado por indução sobre  $\sum_{v \in V} g(v)$ , o somatório das imagens da função  $g$ .

Base: Se  $g(v) = 0 \forall v \in V$ , o resultado é válido para qualquer função  $f : V(D) \rightarrow \mathbb{N}$  simplesmente por não haver  $v \in V$  tal que  $g(v) > 0$  para verificar.

Hipótese de indução: Assuma, agora, que  $\sum_{v \in V} g(v) \geq 1$  e assumo que o lema é válido para algum  $k \in \mathbb{Z}_+$  com  $k < \sum_{v \in V} g(v)$ .

Passo indutivo: Seja  $W$  o conjunto dos vértices cuja imagem pela função  $g$  é diferente de 0. Em outras palavras,  $W = \{v \in V : g(v) > 0\}$ . Sejam  $L(v)_{v \in V}$  as listas de cores permitidas nos vértices. Assim,  $|L(v)| = f(v) \forall v \in V$ . Seja  $c$  uma cor qualquer pertencente ao conjunto  $\bigcup_{v \in W} L(v)$  e seja  $S$  o conjunto de vértices  $v$  tais que  $c \in L(v)$  e que estão em  $W$  ao mesmo tempo, isto é,  $S = \{v \in W : c \in L(v)\}$ . Por hipótese, o subdigrafo de  $D$  induzido por  $S$  possui um núcleo  $K$ . Sejam  $f', g' : V \rightarrow \mathbb{N}$  definidas por  $g'(v) = \begin{cases} g(v) - 1, & \text{se } v \in K \\ g(v), & \text{caso contrário} \end{cases}$  e  $f'(v) = |L(v) \setminus \{c\}|$ .

Como  $g'(v) \leq g(v) \forall v \in V$ , então  $\sum_{v \in V} g'(v) \leq \sum_{v \in V} g(v)$ . Dado  $v \in V$ , há três possibilidades:  $v \in K$ ,  $v \in S \setminus K$  ou  $v \in V \setminus S$ . Afirmamos que nos três casos, temos  $f'(v) \geq \sum_{u \in N[v]} g'(u)$  quando  $g(v) > 0$ .

De fato, suponha que  $v \in K$ . Então  $g'(v) = g(v) - 1$  e, como todos os vértices em  $S$  possuem  $c$  como uma de suas cores disponíveis, então  $f'(v) = f(v) - 1$ . Daí,  $f'(v) = f(v) - 1 \geq \left( \sum_{u \in N[v]} g(u) \right) - 1 = g(v) - 1 + \left( \sum_{u \in N[v] \setminus \{v\}} g(u) \right) \geq \sum_{u \in N[v]} g'(u)$ .

Suponha, agora, que  $v \in V \setminus S$ . Então  $g'(v) = g(v)$ . Se  $g'(v) = 0$ , não há o que verificar. Se  $g'(v) > 0$ , então  $v \in W$  e  $c \notin L(v)$  (caso contrário, teríamos  $v \in S$ , pela construção de  $S$ ). Daí,  $f'(v) = f(v)$ . Segue que  $f'(v) = f(v) \geq \sum_{u \in N[v]} g(u) \geq \sum_{u \in N[v]} g'(u)$ , como desejado.

Por fim, suponha que  $v \in S \setminus K$  e seja  $N[v] = \{v, v_1, \dots, v_k\}$ . Como  $v \in S \setminus K$ , pela definição de núcleo de  $S$ ,  $v_i \in K$  para algum  $i = 1, \dots, k$ . Suponha, sem perda de generalidade que  $v_1 \in K$ . Então,  $g'(v_1) = g(v_1) - 1$ . Também,  $g'(v) = g(v)$ . Pela construção de  $S$ ,  $c \in L(v)$  e, por isso,  $f'(v) = f(v) - 1$ . Então,  $f'(v) = f(v) - 1 \geq \left( \sum_{u \in N[v]} g(u) \right) - 1 = g(v) + g(v_1) + \dots + g(v_k) - 1 = g(v) + (g(v_1) - 1) + \dots + g(v_k) \geq \sum_{u \in N[v]} g'(u)$ .

Portanto, podemos aplicar a hipótese de indução e, dela, segue que  $D$  é  $(f' : g')$ -escolhível. Assim, há conjuntos  $B'(v) \subseteq L(v) \setminus \{c\}$  tais que  $|B'(v)| = g'(v)$  e  $B'(u) \cap B'(v) = \emptyset$  se  $u$  e  $v$  são adjacentes. Sejam  $B(v)$  dados por  $B(v) = B'(v) \cup \{c\}$  se  $v \in K$  e  $B(v) = B'(v)$ , caso contrário. Assim,  $B(v) \subseteq L(v) \forall v \in V$ , com  $|B(v)| = g(v)$ . Na construção dos conjuntos  $B$  a partir de  $B'$ , somente os conjuntos associados a vértices do núcleo  $K$  receberam um novo elemento, a saber: a cor  $c$ . Portanto, como  $K$  é um conjunto independente, isto é, seus elementos são dois a dois não adjacentes, tem-se que  $B(u) \cap B(v) = \emptyset$  para quaisquer dois vértices adjacentes  $u$  e  $v$ . ■

**Corolário 2.8** *Seja  $D$  digrafo com grau de saída máximo  $n - 1$ , com todo subdigrafo induzido de  $D$  possuindo um núcleo. Então  $D$  é  $(kn, k)$ -escolhível para todo  $k \in \mathbb{N}$ . Em particular,  $D$  é  $n$ -escolhível.*

**Demonstração.** Sejam  $k \in \mathbb{N}$ ,  $n - 1$  o grau de saída máximo do digrafo e  $v \in V$  tal que  $g(v) > 0$ . Como o somatório  $\sum_{u \in N[v]} g(u)$  tem no máximo  $n$  parcelas, todas iguais a  $k$ , segue que  $\sum_{u \in N[v]} g(u) \leq kn = f(v)$ . ■

### 2.1.2

#### A demonstração do teorema em si

Antes de enunciarmos e demonstrarmos o teorema principal desta seção, faz-se necessário apresentar mais algumas definições e indicar um resultado.

Um *clique* em um digrafo é um subconjunto do conjunto de vértices em que há um arco em pelo menos uma direção para cada par de vértices do subconjunto em questão. Um digrafo  $D$  pode ser visto como uma *orientação* das arestas do seu grafo subjacente  $G$ , isto é, a atribuição de direção às arestas de  $G$ . Um digrafo é dito *normal* se todo clique possui um núcleo. Nesse caso, tal núcleo deve ser composto por um único vértice, já que os vértices de um clique são dois a dois adjacentes. Assim, uma orientação normal de um grafo  $G$  é o digrafo  $D$ , subjacente a  $G$  em que todo clique possui um núcleo. Um grafo é dito *solúvel*, por sua vez, se toda orientação normal possui um núcleo. De acordo com Galvin (1995), todo *subgrafo induzido*<sup>3</sup> de um grafo solúvel é também solúvel. Por fim, um grafo *perfeito* é aquele em que todo subgrafo induzido  $H$  tem número cromático igual ao tamanho do maior clique em  $H$ .

**Teorema 2.9** (Maffray, 1992) *Seja  $M$  um multigrafo e  $L(M)$  seu grafo linha.  $L(M)$  é solúvel se e somente se  $L(M)$  é perfeito.*

Omitimos a demonstração do Teorema 2.9, que pode ser encontrada em Maffray (1992). Maffray (1992) provou que o grafo linha de um multigrafo é perfeito se e somente se o multigrafo não contém ciclos ímpares de comprimento pelo menos 5. Como todo multigrafo bipartido  $M$  não possui ciclos de tamanho ímpar, segue que  $L(M)$  é perfeito. Daí, é válido o seguinte corolário do Teorema 2.9.

**Corolário 2.10** *O grafo linha de um multigrafo bipartido é solúvel.*

**Observação 2.11** *Seja  $D$  uma orientação normal do grafo linha de um multigrafo bipartido. Segue, do fato de que todo subgrafo induzido de um*

<sup>3</sup>Dado um grafo  $G$ , um subgrafo  $H$  de  $G$  é dito subgrafo induzido se  $V(H) \subseteq V(G)$  e  $e = uv \in E(H) \iff u, v \in V(H)$ .

grafo solúvel é também solúvel, que todo subdigrafo induzido de  $D$  é solúvel e, portanto, possui núcleo.

**Teorema 2.12** (Galvin, 1995) *Sejam  $M$  um multigrafo bipartido e  $L(M)$  seu grafo linha. Suponha que  $\chi(L(M)) = n$ . Então  $L(M)$  é  $(kn : k)$ -escolhível para todo  $k \in \mathbb{Z}_+$ ; em particular,  $L(M)$  é  $n$ -escolhível.*

**Demonstração.** Seja  $[X, Y]$  uma partição do conjunto de vértices de  $M$ , ou seja,  $X$  e  $Y$  são conjuntos independentes e são tais que  $X \cap Y = \emptyset$  e  $X \cup Y = V(M)$ . Sejam  $x \in X$  e  $y \in Y$ . O conjunto  $\{e \in E(M) : x \text{ e } e \text{ são incidentes}\}$  é chamado de *linha*, enquanto o conjunto  $\{e \in E(M) : y \text{ e } e \text{ são incidentes}\}$  é uma *coluna*. Para todo  $e \in E(M)$ , denotamos a linha e a coluna que contém  $e$  por  $R(e)$  e  $C(e)$ , respectivamente. Assim, duas arestas  $e$  e  $e'$  são adjacentes se  $R(e) = R(e')$  e/ou se  $C(e) = C(e')$ .

Seja  $c : E(M) \rightarrow \{1, \dots, n\}$  uma coloração própria das arestas de  $M$ . Vamos obter o seguinte digrafo  $D = (V(L(M), \vec{E}(L(M))) (= (V(D), \vec{E}(D)))$ , para simplificar a notação) a partir da orientação das arestas de  $L(M)$ : dados  $e, f \in V(L(M))$ ,  $(ef) \in \vec{E}$  se  $R(e) = R(f)$  e  $c(e) > c(f)$ , ou se  $C(e) = C(f)$  e  $c(e) < c(f)$ .

Afirmamos que  $\deg^+(e) < n$  para todo  $e \in \vec{E}$ , pois  $c$  é injetiva em  $N[e]$ . De fato, seja  $N[e] = \{e, e_1, \dots, e_k\}$  a vizinhança fechada de  $e$ . Note que  $e$  e  $e_i$  ( $\forall 1 \leq i \leq k$ ) são adjacentes em  $L(M)$  pela definição de  $N[e]$ . Isso implica que, em  $M$ , as arestas  $e$  e  $e_i$  são adjacentes e, portanto, recebem cores diferentes. Tome então vértices  $e_i, e_j \in N[e]$ , com  $e_i \neq e_j$  ( $1 \leq i, j \leq k$ ). Se  $e_i$  e  $e_j$  são adjacentes em  $L(M)$ , então  $c(e_i) \neq c(e_j)$  pelo raciocínio do caso anterior. Assuma, então, que  $e_i$  e  $e_j$  não são adjacentes em  $L(M)$ . Como  $e_i, e_j \in N[e]$ ,  $(ee_i, ee_j) \in \vec{E}$ . Logo,  $R(e) = R(e_i)$  ou  $C(e) = C(e_i)$ . Faremos o primeiro caso apenas, já que o segundo é análogo. Se  $R(e) = R(e_i)$ , então  $R(e_j) \neq R(e_i)$ . Caso contrário,  $e_i$  e  $e_j$  seriam adjacentes em  $L(M)$ . Daí, segue que  $C(e) = C(e_j)$ . Temos que  $c(e) < c(e_j)$  e  $c(e) > c(e_i)$ , o que implica que  $c(e_i) \neq c(e_j)$ . Então,  $c$  é, de fato, injetiva em  $N[e]$ . Como a coloração usa  $n$  cores, segue que  $\deg^+(e) < n$ , como desejado. Pelo Corolário 2.8 temos que provar que todo subdigrafo induzido de  $D$  possui um núcleo. Mostraremos que  $D$  é orientação normal e, pelo Corolário 2.10, seguirá o resultado desejado.

Seja  $\{e_1, \dots, e_k\}$  um clique em  $D$ . Então os elementos desse conjunto são dois a dois adjacentes em  $L(M)$  e em  $M$  também. Daí, existe um vértice em  $M$  no qual as arestas  $e_1, \dots, e_k$  incidem. Logo,  $R(e_1) = \dots = R(e_k) = R$  e/ou  $C(e_1) = \dots = C(e_k) = C$ . Vamos supor que vale o primeiro caso, já que o segundo é análogo. Como  $c$  é injetiva em  $R$ , o clique contém um elemento  $e_i$  ( $1 \leq i \leq k$ ) tal que  $c(e_i) < c(e_j) \forall 1 \leq j \leq k, j \neq i$ . Pelo modo como a

orientação  $D$  foi definida,  $(e_j e_i) \in \vec{E}$  para todo  $1 \leq j \leq k$ ,  $j \neq i$ . Daí,  $e_i$  é o núcleo do clique. Isso mostra que  $D$  é orientação normal.

Vimos que  $D$  é orientação normal. Isso implica, pelo Teorema 2.10 e pela Observação 2.11, que todo subdigrafo induzido de  $D$  possui núcleo. Isso e o fato de que  $\deg^+(e) < n$  em  $D$  implicam, pelo Corolário 2.8, que  $L(M)$  é  $(kn : k)$ -escolhível para todo  $k \in \mathbb{Z}_+$ . Em particular,  $L(M)$  é  $n$ -escolhível.

Com esse teorema mostramos que  $\chi(L(M)) = \text{ch}(L(M))$ . Pela Afirmação 2.6, segue que  $\chi'(M) = \text{ch}'(M)$ , verificando, dessa forma, a LCC para a classe dos multigrafos bipartidos. ■

**Corolário 2.13** *Seja  $G$  um grafo bipartido simples. Então  $\text{ch}'(G) = \Delta(G)$ .*

**Demonstração.** König (1916) provou em 1916 que grafos bipartidos simples são classe 1 ( $\chi'(G) = \Delta(G)$ ). Uma demonstração para este fato pode ser encontrada em Bondy e Murty (2008). Pela última frase da demonstração do Teorema 2.12, segue que  $\text{ch}'(G) = \Delta(G)$ . ■

Conforme mostramos ao longo deste capítulo, há resultados importantes já conhecidos no sentido de determinar os índices cromático e lista-cromático de grafos. Além dos teoremas aqui apresentados, destacamos ainda o trabalho de Erdős e Wilson (1977), que provaram que a maioria dos grafos é classe 1. Diversas classes de grafos já tiveram seu índice cromático determinado. Alguns exemplos são: os grafos bipartidos, cujo índice cromático é  $\Delta$ . Este resultado foi demonstrado por König (1916). Os grafos *completos*<sup>4</sup>  $K_n$ , com  $\chi(K_n) = \Delta$  se  $n$  for par ou  $\chi(K_n) = \Delta + 1$  se  $n$  for ímpar ( $n \geq 2$ ). Apresentaremos no capítulo seguinte uma coloração para essa família de grafos como proposto por Soifer em Soifer (2008). As *árvores*<sup>5</sup> possuem índice cromático igual a  $\Delta$ . Apesar dos avanços, há ainda problemas em aberto envolvendo coloração de arestas. Além da Conjectura da Coloração por Listas, aqui discutida, destacamos a Conjectura de Goldberg-Seymour, proposta pelos autores independentemente por Goldberg (1973) e por Seymour (1979).

Para um multigrafo  $G$ , definimos sua *densidade ímpar* por

$$\mathcal{W}(G) = \max_{X \subseteq V(G), |X| \geq 3 \text{ ímpar}} \left\lceil \frac{2|E(G[X])|}{|X| - 1} \right\rceil$$

se  $|V(G)| \geq 3$  e  $\mathcal{W}(G) = 0$ , caso contrário. O subgrafo de  $G$  induzido por  $X$  é denotado por  $G[X]$ . A Conjectura de Goldberg-Seymour é a seguinte afirmação.

<sup>4</sup>Um grafo completo é aquele em que quaisquer dois vértices são adjacentes.

<sup>5</sup>As árvores são grafos conexos que não possuem ciclos.

**Conjectura 2.14** (*Conjectura de Goldberg-Seymour, Goldberg, 1973, Seymour, 1979*) Seja  $G$  um multigrafo. Então,

$$\chi'(G) \leq \max\{\mathcal{W}(G), \Delta(G) + 1\}$$

A conjectura em questão é importante pois apresenta um limite para o índice cromático de multigrafos.



### 3

## Sobre coloração total

Além da definição de coloração total apresentada no Capítulo 1, este conceito pode ser definido simbolicamente da seguinte forma: uma coloração total de um grafo  $G = (V, E)$  é uma função  $c : E \cup V \rightarrow \mathbb{Z}_+$  de modo que  $c(\alpha) \neq c(\beta)$  para qualquer par de elementos adjacentes ou incidentes  $\alpha$  e  $\beta$ .

Há algumas classes de grafos para os quais o número cromático total foi determinado, entre as quais citamos os grafos completos, os ciclos (Yap, 1996) e os multipartidos completos balanceados (Bermond, 1974). Há muitas famílias de grafos cujo número cromático total ainda não é conhecido. Alguns resultados importantes no sentido de ao menos limitar o valor que  $\chi''$  pode assumir são a TCC (Behzad, 1965; Vizing, 1968), o artigo de Hind, Molloy, Reed (1998) e o artigo de Molloy e Reed (1998). No primeiro artigo mostra-se que  $\chi''(G) \leq \Delta(G) + 8 \ln^8(\Delta(G))$  para  $\Delta(G)$  suficientemente grande, enquanto que no segundo é provado que  $\chi''(G) \leq \Delta(G) + 10^{26}$ .

Dito isto, passamos agora à apresentação de resultados preliminares sobre grafos  $r$ -partidos completos  $p$ -balanceados para, na sequência, partirmos para a determinação do número cromático total equilibrado da referida família de grafos. O texto que segue é baseado no artigo de Silva et al. (2018) e no artigo intitulado “Equitable total chromatic number of two classes of complete  $r$ -partite  $p$ -balanced graphs”, apresentado na conferência CTW 2018 e que será submetido para a conferência LAGOS 2019, conforme explicitamos na Tabela 3.1.

Tabela 3.1: Resultados obtidos

$K_{r \times p}$		$\chi_e''$	Referência
$r$	$p$		
$r = 2$	$p$	$\Delta + 2$	DAM (2018)
$r \geq 3$ ímpar	ímpar	$\Delta + 1$	DAM (2018)
$r \geq 4$ par	ímpar	$\Delta + 2$	DAM (2018)
$r \geq 4$ par	$p = 2$	$\Delta + 1$	LAGOS 2019
$r \geq 4$ par	$p = 4$	$\Delta + 1$	LAGOS 2019
$r \geq 4$ par	$p \geq 6$ par	$\Delta + 1$	LAGOS 2019
$r \geq 3$ ímpar	$p = 2$	$\Delta + 1$	LAGOS 2019
$r \geq 3$ ímpar	$p \geq 4$ par	$\Delta + 1$	LAGOS 2019

### 3.1

#### Coloração total equilibrada de $K_{r \times p}$

Lembramos que um grafo  $r$ -partido completo  $p$ -balanceado, denotado por  $K_{r \times p}$ , é aquele em que o conjunto de vértices  $V$  pode ser particionado em  $r$  conjuntos independentes  $\left(V = \bigcup_{i=1}^r X_i\right)$ , cada um tendo cardinalidade  $p$  e onde há uma aresta ligando quaisquer dois vértices de partes diferentes da partição. Desse modo, é fácil ver que tais grafos possuem  $rp$  vértices e, como há  $(r-1)p$  arestas incidindo em cada vértice, há um total de  $\frac{(r-1)rp^2}{2}$  arestas. O total de elementos a serem coloridos é de  $\frac{(r-1)rp^2}{2} + rp$ . Esses grafos são *regulares*, ou seja, todos os vértices possuem o mesmo grau. No caso dos grafos  $K_{r \times p}$ , seu grau máximo é  $(r-1)p$ .

Quando uma cor é aplicada em um vértice ou em uma aresta que incide neste vértice, diz-se que a cor foi *representada* em tal vértice. Em toda  $(\Delta+1)$ -coloração total equilibrada de grafos regulares todas as cores devem ser representadas em todos os vértices, já que devem ser usadas  $\Delta$  cores diferentes para as arestas incidentes em um mesmo vértice e uma cor para o vértice em questão. Usaremos este fato na coloração dos grafos  $r$ -partidos completos  $p$ -balanceados em que  $r$  é ímpar ou  $r$  e  $p$  são pares, com  $r \geq 4$ , pois eles possuem  $(\Delta+1)$ -coloração total equilibrada.

Denotamos o  $j$ -ésimo vértice da  $i$ -ésima parte da partição de  $V$  por  $x_{ij}$ . Sendo assim, temos  $X_i = \{x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{ip}\}$ . Conforme dissemos no capítulo 1, não há uma forma única de desenhar um grafo. Apesar disso, sempre que desenharmos um grafo  $K_{r \times p}$ , disporemos os vértices como em uma matriz com  $r$  colunas e  $p$  linhas, em que cada coluna corresponde a uma parte  $X_i$  e o

vértice  $x_{ij}$  estará na  $j$ -ésima linha e na  $i$ -ésima coluna. Na Figura 3.1 abaixo exemplificamos isto.

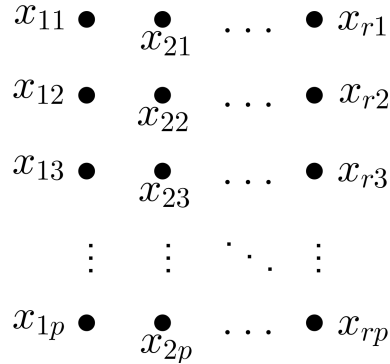


Figura 3.1: Disposição dos vértices de  $K_{r \times p}$

Pensando na disposição dos vértices como em uma matriz, definimos uma *aresta horizontal* como uma aresta do tipo  $x_{ab}x_{cb}$ . Também, se citarmos os vértices de uma dada linha  $a$ , estamos nos referindo a  $x_{1a}, x_{2a}, \dots, x_{ra}$ , com  $1 \leq a \leq p$ . Analogamente, os vértices de uma certa coluna  $b$  são  $x_{b1}, x_{b2}, \dots, x_{bp}$ , com  $1 \leq b \leq r$ . A disposição de vértices tal qual exibimos auxilia não só a visualização, mas também a compreensão das duas definições seguintes, que serão usadas nas colorações que mostraremos.

**Definição 3.1** *Um emparelhamento horizontal de distância  $i$  ligando os vértices das linhas  $a$  e  $b$  ( $1 \leq a < b \leq p$ ) é o emparelhamento  $\{x_{ja}x_{j+i,b} | 1 \leq j \leq r\}$ , sendo o índice  $j+i$  tomado módulo  $r$ .*

Na Figura 3.2 exibimos emparelhamentos horizontais de distância 1 e 2 ligando os vértices das linhas 1 e 2 do grafo  $K_{3 \times 3}$ .

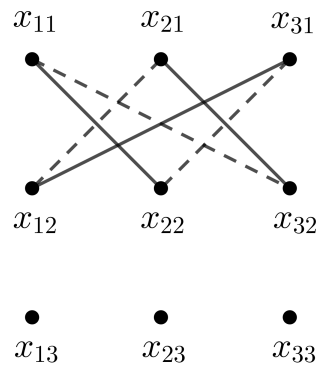


Figura 3.2: Emparelhamentos horizontais de distância 1 e 2 ligando os vértices das linhas 1 e 2 do grafo  $K_{3 \times 3}$  representados respectivamente por linhas contínuas e tracejadas

Observamos que  $1 \leq i \leq r - 1$ . Também, tanto aqui quanto no decorrer do texto, ao mencionarmos um resultado tomado módulo  $\alpha$ , se o mesmo for congruente a 0 módulo  $\alpha$ , então usamos  $\alpha$  em vez de 0.

Como  $1 \leq j \leq r$ , cada emparelhamento tem  $r$  arestas. Logo, se aplicarmos uma cor  $c$  em um emparelhamento horizontal de distância ligando vértices de duas linhas quaisquer, então  $c$  fica representada em todos os vértices das linhas em questão. Note que dadas duas linhas quaisquer, há  $r - 1$  emparelhamentos horizontais de distância entre elas, já que  $j + i$  é tomado módulo  $r$  e o fato de que  $j \geq 1$  implicam que  $i \leq r - 1$ .

É fácil verificar que os  $r - 1$  emparelhamentos horizontais de distância são disjuntos entre si. Com efeito, sejam  $\{x_{ja}x_{j+i,b} | 1 \leq j \leq r\}$  e  $\{x_{ja}x_{j+k,b} | 1 \leq j \leq r\}$ , respectivamente emparelhamentos horizontais de distância  $i$  e  $k$  ligando os vértices das linhas  $a$  e  $b$ . Supondo por contradição que existem  $i$  e  $k$  para os quais as arestas  $x_{ja}x_{j+i,b}$  e  $x_{ja}x_{j+k,b}$  são iguais, obteríamos que  $i \equiv k \pmod{r}$ . Isso, somado ao fato de que  $1 \leq i, k \leq r - 1$ , implica que  $i = k$ , contradizendo a hipótese de que os emparelhamentos de distância tomados são distintos.

**Definição 3.2** *Analogamente, definimos emparelhamento vertical de distância  $i$  entre as colunas  $a$  e  $b$  ( $1 \leq a < b \leq r$ ) como o emparelhamento  $\{x_{aj}x_{b,j+i} | 1 \leq j \leq p\}$ , sendo o índice  $j + i$  tomado módulo  $p$ .*

Na Figura 3.3 são exibidos os emparelhamentos verticais de distância 0, 1 e 2 ligando os vértices das colunas 1 e 2 do grafo  $K_{2 \times 3}$ .

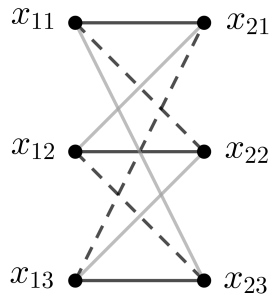


Figura 3.3: Emparelhamentos verticais de distâncias 0, 1 e 2 ligando os vértices das colunas 1 e 2 do grafo  $K_{2 \times 3}$  representados, respectivamente, pela linha preta, pela linha tracejada e pela linha de cor cinza

Observe que, diferentemente do caso anterior, agora  $i$  pode assumir o valor 0. Então, dadas duas colunas quaisquer, há  $p$  emparelhamentos verticais de distância entre as mesmas e todos eles são disjuntos entre si, como se pode verificar com argumento similar ao usado na definição anterior. Além disso, como  $1 \leq j \leq p$ , os emparelhamentos desse tipo possuem  $p$  arestas.

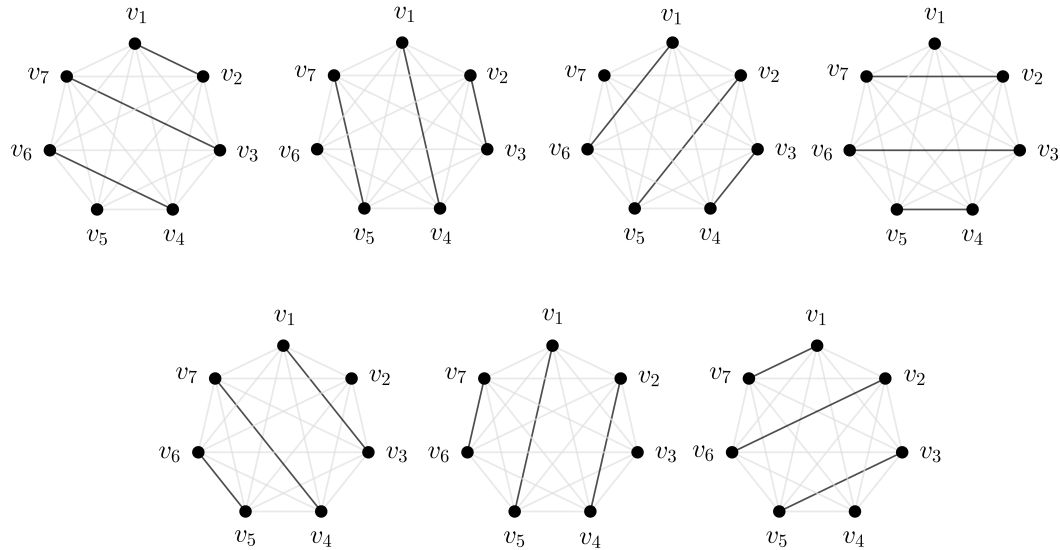
As duas afirmações que apresentamos a seguir serão relevantes para determinar agrupamentos disjuntos de pares de linhas ou de colunas de  $K_{r \times p}$ . Salientamos que em alguns momentos faremos menção a grafos completos com uma quantidade de vértices que faz alusão às  $r$  partes ou aos  $p$  vértices em cada parte do grafo  $r$ -partido completo  $p$ -balanceado. Quando isto ocorrer, denotaremos seus emparelhamentos respectivamente por  $R_i$  e  $P_i$  em vez de  $M_i$ , que é a notação usual para emparelhamentos.

**Afirmção 3.3** (Soifer, 2008) *Seja  $K_n$  um grafo completo com  $n \geq 3$  ímpar. Tal grafo possui  $n$  emparelhamentos disjuntos.*

**Demonstração.** Seja  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ . Para obter os  $n$  emparelhamentos desejados, desenhe um polígono regular com  $n$  vértices dispostos em sentido horário. A aresta  $v_i v_{i+1}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , deve pertencer ao emparelhamento  $M_i$ , sendo os índices de  $v$  e de  $M$  tomados módulo  $n$ . As arestas da forma  $v_{i-j} v_{i+1+j}$  devem pertencer ao mesmo emparelhamento que as arestas  $v_i v_{i+1}$  para todo  $i = 1, 2, \dots, n$  e para todo  $j = 1, 2, \dots, \frac{n-1}{2} - 1$ .

Note que o intervalo de variação de  $j$  se deve ao fato de que se repetíssemos o processo para  $j = \frac{n-1}{2}$ , obteríamos  $v_{i-\frac{n-1}{2}} v_{i+\frac{n+1}{2}}$ . Como esses índices são congruentes módulo  $n$ , concluímos que a aresta dada seria um laço, uma contradição. Como o grafo  $K_n$  tem ordem ímpar, então ele não possui emparelhamento perfeito e o vértice que sobra em cada emparelhamento  $M_i$  é  $v_{i+\frac{n+1}{2}}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ . ■

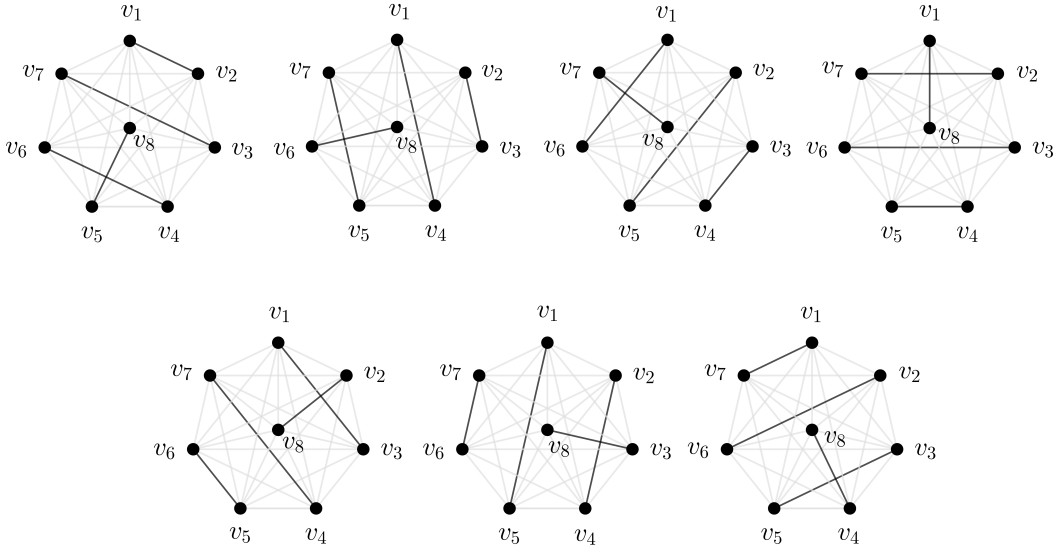
Na Figura 3.4 mostramos como obter, a partir do algoritmo apresentado, os 7 emparelhamentos disjuntos de  $K_7$ . Note que, geometricamente, o algoritmo consiste em colocar cada um dos lados de um heptágono regular em emparelhamentos distintos e, depois, atribuir todas as diagonais paralelas a um lado ao mesmo emparelhamento do lado em questão.

Figura 3.4: Emparelhamentos de  $K_7$ 

**Afirmção 3.4** (Soifer, 2008) *Seja  $K_n$  um grafo completo com  $n \geq 4$  par. Tal grafo possui  $n - 1$  emparelhamentos disjuntos.*

**Demonstração.** O algoritmo é semelhante ao anterior. Dado um grafo  $K_n$ , com  $n \geq 4$  par, basta tomar cada emparelhamento do grafo  $K_{n-1}$  unido com a aresta que tem como extremidades  $v_n$  e a aresta que sobra em cada emparelhamento  $M_i$  de  $K_{n-1}$ ,  $1 \leq i \leq n - 1$ . ■

Observe a Figura 3.5 a seguir, em que os emparelhamentos de  $K_8$  são obtidos a partir dos emparelhamentos de  $K_7$ . Geometricamente, para um  $n$  qualquer, o algoritmo consiste em desenhar um polígono regular com  $n - 1$  lados e colocar o  $n$ -ésimo vértice no centro do círculo circunscrito ao polígono de  $n - 1$  lados. Daí, basta tomar os emparelhamentos como no caso anterior e, para cada um deles, acrescentar a aresta composta pelos dois vértices restantes.

Figura 3.5: Emparelhamentos de  $K_8$ 

Feitas estas observações de caráter preliminar, podemos determinar o número cromático total equilibrado de  $K_{r \times p}$ .

### 3.1.1

#### $K_{2 \times p}$

Em 1994 Fu determinou que o número cromático total equilibrado de  $K_{2 \times p}$  é igual a  $\Delta + 2$ . Embora o número cromático total equilibrado para esta classe de grafos já tenha sido determinada, descrevemos a seguir um algoritmo elegante, por nós desenvolvido, para obter uma coloração total equilibrada para  $K_{2 \times p}$  com  $\Delta + 2$  cores. Além da elegância do algoritmo, outro motivo que justifica sua apresentação é o fato de que a técnica nele empregada também será usada em no caso dos grafos  $K_{r \times p}$ , com  $r$  par ( $r \geq 4$ ) e  $p$  ímpar.

**Teorema 3.5** (Fu, 1994)  $K_{2 \times p}$  tem  $\chi_e'' = \Delta + 2$ . Embora o teorema seja de Fu, apresentamos a demonstração similar à demonstração de Silva, Dantas e Sasaki (2018).

Antes de apresentarmos o algoritmo, mostraremos que  $K_{2 \times p}$  não tem coloração total com  $\Delta + 1$  cores. Assim,  $\chi_e'' \neq \Delta + 1$  para essa família de grafos.

**Lema 3.6** (Chetwynd e Hilton, 1988) Seja  $G$  um grafo regular.  $G$  é conformable se e somente se possui uma coloração de vértices com  $\Delta + 1$  cores  $c_1, c_2, \dots, c_{\Delta+1}$  tal que  $i_1 \equiv i_2 \equiv \dots \equiv i_{\Delta+1} \equiv |V(G)| \pmod{2}$ , onde  $i_j$ ,  $1 \leq j \leq \Delta + 1$ , é o número de vértices coloridos com cor  $c_j$ .

Por outro resultado que pode ser encontrado em Chetwynd e Hilton (1988), sabe-se que se  $G$  é regular e não é conformable, então  $G$  não é tem coloração total com  $\Delta + 1$  cores, não podendo ter, portanto, coloração total equilibrada com  $\Delta + 1$  cores.

Afirmamos que  $K_{2 \times p}$  não é conformable. Com efeito, caso fosse,  $K_{2 \times p}$  teria coloração de vértices com  $\Delta + 1 = p + 1$  cores em que cada uma das classes de cor tem cardinalidade par. Para isso, seria necessário que cada uma das  $p + 1$  cores fossem usadas pelo menos 2 vezes, o que totalizaria  $2p + 2$ , vértices. No entanto, há  $p$  vértices. Logo,  $K_{2 \times p}$  não é conformable e, portanto, não admite  $(\Delta + 1)$ -coloração total.

### **Demonstração.**

#### **Algoritmo**

##### **1º passo - coloração das arestas:**

Atribua cor  $i + 1$  ao emparelhamento vertical de distância  $i$  ligando os vértices das colunas 1 e 2 (isto é, entre as partes  $X_1$  e  $X_2$ ). Conforme explicado no subcapítulo 3.1, há  $p$  emparelhamentos disjuntos desse tipo. Portanto, são usadas  $p$  cores distintas nessa parte do processo e cada uma delas é usada  $p$  vezes.

##### **2º passo - coloração dos vértices:**

Atribua cor  $p + 1$  aos vértices da parte  $X_1$  e cor  $p + 2$  aos vértices da parte  $X_2$ .

Precisamos mostrar que elementos adjacentes e incidentes recebem cores diferentes e que a diferença entre as cardinalidades de duas classes de cor é no máximo 1.

De fato, os vértices de  $X_1$  são não adjacentes, já que o grafo é bipartido, assim como os vértices de  $X_2$ . Como a cardinalidade de cada um desses conjuntos é  $p$ , isso significa que as cores  $p + 1$  e  $p + 2$  são usadas exatamente  $p$  vezes cada. Como essas cores não são usadas em arestas, nenhuma aresta recebe a mesma cor que suas extremidades.

Como as arestas são coloridas de acordo com os emparelhamentos verticais de distância, segue da própria definição deste tipo de emparelhamento que arestas adjacentes recebem cores distintas. Da observação feita no subcapítulo 3.1 após a Definição 3.2 segue que cada uma das cores empregadas em arestas foi utilizada  $p$  vezes. As cores  $p + 1$  e  $p + 2$  são usadas exatamente  $p$  vezes cada na coloração dos vértices do grafo. Isto prova que a diferença entre as cardinalidades de quaisquer duas classes de cor distintas é 0. Assim, a coloração total apresentada é equilibrada, como desejado.

Seja  $A_{X_1 X_2} = [a_{ij}]$  uma matriz de coloração de arestas de ordem  $p \times p$  em que a entrada  $a_{ij}$  representa a cor atribuída à aresta que tem  $x_{1i}$  e



$x_{2j}$  como suas extremidades. Note que toda entrada pode ser escrita como  $a_{i,i+j} \forall i = 1, 2, \dots, p$ , onde  $1 \leq i, j \leq p$  e o índice  $i + j$  é tomado módulo  $p$ . O algoritmo que apresentamos acima em termos de emparelhamentos verticais de distância equivale a afirmar que a entrada  $a_{i,i+j}$  da matriz  $A_{X_1 X_2}$  é  $j + 1 \pmod{p}$ , isto é, que a aresta  $x_{1i}x_{2,i+j}$  recebe cor  $j + 1 \pmod{p}$ .

Já que os vértices recebem cores não usadas em arestas, para mostrar que o algoritmo funciona em termos matriciais, basta verificar que arestas adjacentes recebem cores diferentes.

Note que duas arestas  $x_{1i}x_{2,i+j}$  e  $x_{1i'}x_{2,i'+j'}$  são adjacentes se  $i = i'$  ou se  $i + j = i' + j'$ , com  $1 \leq i, i', j, j' \leq p$  e os índices  $i + j$  e  $i' + j'$  sendo tomados módulo  $p$ , o que implica que suas entradas correspondentes em  $A_{X_1 X_2}$  estão na mesma linha ou coluna.

Sejam  $x_{1i}x_{2,i+j}$  e  $x_{1i'}x_{2,i'+j'}$  arestas adjacentes e assumamos que  $i = i'$ . Então  $i + j \neq i + j'$ , ou seja,  $j \neq j'$  (caso contrário, as arestas seriam as mesmas). Se as arestas em questão recebessem a mesma cor, teríamos  $j + 1 \equiv j' + 1 \pmod{p}$ , o que implica  $j \equiv j' \pmod{p}$ . Como  $1 \leq j, j' \leq p$ , então  $j \equiv j' \pmod{p}$  é equivalente a afirmar que  $j = j'$ , que é absurdo, pois contradiz a afirmação acima de que  $j \neq j'$ . Assumamos agora, que  $i + j \equiv i' + j' \pmod{p}$ , isto é,  $i - i' \equiv j' - j \pmod{p}$ . Devemos ter, então  $i \neq i'$  para que as arestas sejam distintas. Suponha, por contradição, que as arestas adjacentes que tomamos recebem a mesma cor, ou seja, suponha que  $j + 1 \equiv j' + 1 \pmod{p}$ . Então,  $j \equiv j' \pmod{p} \implies j' - j \equiv 0 \pmod{p}$ . Pelas duas afirmações, concluímos que  $i - i' \equiv 0 \pmod{p}$ , o que implica que  $i = i'$ , já que  $1 \leq i, i' \leq p$ . Absurdo, pois neste caso temos  $i \neq i'$ . Assim, as arestas recebem cores diferentes, como desejado.

Cada entrada da matriz  $A_{X_1 X_2}$  representa a cor que uma aresta de  $K_{2 \times p}$  recebe e, de acordo com o algoritmo descrito, usamos as cores do conjunto  $\{1, 2, \dots, p\}$  para colorir as arestas de tal grafo. O que provamos acima mostra que cada cor aparece no máximo uma vez em uma dada linha ou coluna da matriz de coloração de arestas. Se houvesse alguma cor do conjunto  $\{1, 2, \dots, p\}$  que não aparecesse em uma linha (ou coluna, respectivamente), então haveria  $p - 1$  elementos em tal linha (coluna). Consequentemente, todo elemento de  $\{1, 2, \dots, p\}$  aparece exatamente uma vez por linha (coluna). Assim, cada uma dessas  $p$  cores é usada precisamente  $p$  vezes na coloração de arestas de  $K_{2 \times p}$ . Já as cores  $p + 1$  e  $p + 2$  são usadas  $p$  vezes cada na coloração dos vértices do grafo. Isto prova que a diferença entre as cardinalidades de quaisquer duas classes de cor distintas é 0. Assim, a coloração total apresentada é equilibrada. ■

Apresentamos a seguir o grafo  $K_{2 \times 4}$  colorido de acordo com o algoritmo

descrito acima.

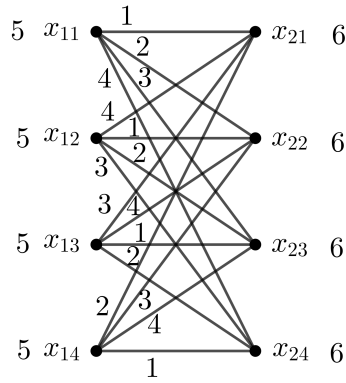


Figura 3.6: Coloração total equilibrada de  $K_{2 \times 4}$

Para o caso do grafo  $K_{2 \times 4}$ , cuja coloração foi mostrada acima, a matriz de coloração de arestas é dada por:

$$A_{x_1 x_2} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

### 3.1.2

$K_{r \times p}$ , com  $r \geq 4$  par e  $p$  ímpar

Inicialmente mostraremos que  $\chi''_e \neq \Delta + 1$  para estes grafos. Em seguida apresentaremos um algoritmo para mostrar que  $\chi''_e = \Delta + 2$ , confirmando, assim, a validade da ETCC para  $K_{r \times p}$ , com  $r \geq 4$  par e  $p$  ímpar.

**Afirmção 3.7** (da Silva, Dantas e Sasaki, 2018) Se  $K_{r \times p}$  tem  $r \geq 4$  par e  $p$  ímpar, então  $\chi''_e \neq \Delta + 1$ .

**Demonstração.** Suponha, por contradição, que grafos completos  $r$ -partidos  $p$ -balanceados, em que  $r \geq 4$  é par e  $p$  é ímpar, tem coloração total com  $\Delta + 1$  cores. Assim, cada cor deve ser representada em cada um dos vértices.

O caso  $p = 1$  é particular, porque tais grafos são completos e são de ordem par. Sabe-se que tais grafos não possuem coloração total com  $\Delta + 1$  cores (Kubale, 2004). Então, assumiremos que  $p \geq 3$ .

Afirmamos que uma quantidade ímpar de vértices não pode receber a mesma cor em qualquer  $(\Delta + 1)$ -coloração total equilibrada. De fato, suponha, por contradição, que uma quantidade ímpar  $y$  de vértices recebem a mesma cor  $i$  ( $y \leq p$ , pois para haver mais de  $p$  vértices recebendo a mesma cor, isso iria requerer que vértices de partes diferentes recebessem a mesma cor, o que não

pode ocorrer, já que vértices de partes diferentes são adjacentes). Neste caso, uma quantidade ímpar ( $rp - y$ ) de vértices sobraria (este número é ímpar já que  $rp$  é par e  $y$  é ímpar) e a cor  $i$  seria representada em arestas que tem estes vértices como suas extremidades. Como cada aresta tem duas extremidades, pelo menos um vértice não teria a cor  $i$  representada.

Afirmamos que uma quantidade par de vértices não pode receber a mesma cor em qualquer coloração total equilibrada dos grafos desta seção com  $\Delta + 1$  cores. De fato, suponha que existem cores  $a_1, a_2, \dots, a_k$  usadas  $b_1, b_2, \dots, b_k$  vezes ( $b_i$  é par  $\forall i = 1, \dots, k$ ), respectivamente, para colorir os vértices de uma parte arbitrária  $X_j$ . Concluiríamos que uma quantidade ímpar ( $p - (b_1 + b_2 + \dots + b_k)$ ) de vértices não foram coloridos. Pelo provado acima, não existe cor usada para colorir um número ímpar de vértices; logo, temos uma contradição. ■

**Teorema 3.8** (da Silva, Dantas e Sasaki, 2018) *O grafo  $K_{r \times p}$  com  $r \geq 4$  par e  $p$  ímpar tem  $\chi_e'' = \Delta + 2$ .*

**Demonstração.**

**Algoritmo**

**1º passo - obter emparelhamentos de  $K_r$  para colorir as arestas:**

Usando a Afirmção 3.4 é possível organizar as matrizes de colorações de arestas como segue. Se  $R_i = \{v_{a_1}v_{a_2}, \dots, v_{a_{r-1}}v_{a_r}\}$  é um dos  $r - 1$  emparelhamentos perfeitos de  $K_r$ , então as matrizes  $\{A_{X_{a_1}X_{a_2}}, \dots, A_{X_{a_{r-1}}X_{a_r}}\}$  devem ter como entradas os elementos do conjunto  $\{(i - 1)p + 1, (i - 1)p + 2, \dots, ip\}$ , de modo que o preenchimento seja feito de maneira análoga ao caso  $K_{2 \times p}$ . Equivalentemente, a cor  $(i - 1)p + 1$  deve ser aplicada em emparelhamentos verticais de distância 0 ligando os vértices das colunas  $a_1$  e  $a_2, \dots, a_{r-1}$  e  $a_r$ ; a cor  $(i - 1)p + 2$  deve ser aplicada em emparelhamentos verticais de distância 1 ligando os vértices das colunas  $a_1$  e  $a_2, \dots, a_{r-1}$  e  $a_r$  e assim sucessivamente.

Como  $|R_i| = \frac{r}{2}$ , cada cor de 1 até  $p(r - 1)$  foi usada  $\frac{rp}{2}$  vezes em arestas ( $p$  vezes em cada emparelhamento vertical de distância). Quando dividimos as matrizes em  $r - 1$  grupos, em cada um destes grupos, a parte  $X_i$  aparece precisamente uma vez. Portanto, quando o mesmo conjunto de cores é atribuído a matrizes determinadas pelos emparelhamentos de  $K_r$ , quaisquer duas arestas adjacentes não recebem a mesma cor.

**2º passo - substituir as cores de algumas arestas determinadas pelo passo anterior:**

Substituímos as entradas da diagonal principal de  $\frac{r - 2}{2}$  matrizes pela cor  $(r - 1)p + 1$  e de  $\frac{r - 2}{2}$  matrizes pela cor  $(r - 1)p + 2$ , que não foram

usadas ainda. A substituição é feita como segue.  $A_{X_1X_2}, A_{X_2X_3}, \dots, A_{X_{r-2}X_{r-1}}$  tem suas entradas da diagonal principal substituídas alternadamente por  $(r-1)p+1$  e  $(r-2)p+2$ . Observamos que estas matrizes são elementos de  $R_1, R_2, \dots, R_{r-2}$ , respectivamente. Além disso, todas as matrizes que tem algumas de suas entradas mudadas haviam recebido previamente cores diferentes, já que estavam associadas a diferentes emparelhamentos  $R_i$  do grafo  $K_r$ .

Note que os elementos da diagonal principal de uma matriz de coloração  $A_{X_kX_l}$  são todos iguais, já que as arestas associadas a essas entradas são um emparelhamento vertical de distância 0 entre as colunas  $k$  e  $l$ . Para cada  $i = 1, 2, \dots, r-1$ , as matrizes de coloração determinadas pelos emparelhamentos  $R_i$  possuem como elemento da entrada principal a cor  $(i-1)p+1$ .

### 3º passo - coloração dos vértices:

As cores dos vértices serão as cores  $(r-1)p+1, (r-1)p+2$  e as cores que foram mudadas em algumas diagonais secundárias, que são  $(i-1)p+1$ , onde  $i = 1, 2, \dots, r-2$ . Aos vértices de  $X_j$ , para todo  $1 \leq j \leq r-2$ , atribua a cor  $(j-1)p+1$ , aos vértices de  $X_{r-1}$ , atribua a cor  $(r-1)p+1$  e aos vértices de  $X_r$ , atribua a cor  $(r-1)p+2$ .

A cor  $(r-1)p+1$  é usada  $\frac{(r-2)p}{2}$  vezes em arestas e  $p$  vezes na coloração de vértices, totalizando  $\frac{rp}{2}$  vezes. O resultado é análogo para a cor  $(r-1)p+2$ .

As cores que estavam inicialmente na diagonal principal de algumas matrizes e foram substituídas, originalmente foram usadas  $p$  vezes em  $\frac{r}{2}$  matrizes. Posteriormente, elas foram substituídas por uma nova cor em  $p$  entradas de uma matriz de coloração. Por outro lado, essas cores são usadas para colorir  $p$  vértices de uma das partes da partição de  $V$ . Então, essas cores são usadas  $\frac{rs}{2} - p + p = \frac{rp}{2}$  vezes no total. Cada cor é usada exatamente  $\frac{rp}{2}$  vezes. Consequentemente, a diferença entre as cardinalidades de duas classes de cor é 0 e isso conclui a demonstração. ■

No caso do grafo  $K_{6 \times 5}$  por exemplo, inicialmente teríamos os seguintes emparelhamentos de  $K_6$  e as seguintes matrizes de coloração de arestas:  $R_1 = \{v_1v_2, v_3v_5, v_4v_6\}, R_2 = \{v_2v_3, v_1v_4, v_5v_6\}, R_3 = \{v_3v_4, v_2v_5, v_1v_6\}, R_4 = \{v_4v_5, v_1v_3, v_2v_6\}$  e  $R_5 = \{v_1v_5, v_2v_4, v_3v_6\}$

$$A_{X_1X_2} = A_{X_3X_5} = A_{X_4X_6} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_{X_2X_3} = A_{X_1X_4} = A_{X_5X_6} = \begin{bmatrix} 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 10 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 9 & 10 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 9 & 10 & 6 & 7 \\ 7 & 8 & 9 & 10 & 6 \end{bmatrix}$$

$$A_{X_3X_4} = A_{X_2X_5} = A_{X_1X_6} = \begin{bmatrix} 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 15 & 11 & 12 & 13 & 14 \\ 14 & 15 & 11 & 12 & 13 \\ 13 & 14 & 15 & 11 & 12 \\ 12 & 13 & 14 & 15 & 11 \end{bmatrix}$$

$$A_{X_4X_5} = A_{X_1X_3} = A_{X_2X_6} = \begin{bmatrix} 16 & 17 & 18 & 19 & 20 \\ 20 & 16 & 17 & 18 & 19 \\ 19 & 20 & 16 & 17 & 18 \\ 18 & 19 & 20 & 16 & 17 \\ 17 & 18 & 19 & 20 & 16 \end{bmatrix}$$

$$A_{X_1X_5} = A_{X_2X_4} = A_{X_3X_6} = \begin{bmatrix} 21 & 22 & 23 & 24 & 25 \\ 25 & 21 & 22 & 23 & 24 \\ 24 & 25 & 21 & 22 & 23 \\ 23 & 24 & 25 & 21 & 22 \\ 22 & 23 & 24 & 25 & 21 \end{bmatrix}$$

Pelo segundo passo, as matrizes  $A_{X_1X_2}$ ,  $A_{X_2X_3}$ ,  $A_{X_3X_4}$  e  $A_{X_4X_5}$  de  $K_{6 \times 5}$  são transformadas em

$$A_{X_1X_2} = \begin{bmatrix} 26 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 26 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 26 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 & 26 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 26 \end{bmatrix}, A_{X_2X_3} = \begin{bmatrix} 27 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 10 & 27 & 7 & 8 & 9 \\ 9 & 10 & 27 & 7 & 8 \\ 8 & 9 & 10 & 27 & 7 \\ 7 & 8 & 9 & 10 & 27 \end{bmatrix}$$

$$A_{X_3X_4} = \begin{bmatrix} 26 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 15 & 26 & 12 & 13 & 14 \\ 14 & 15 & 26 & 12 & 13 \\ 13 & 14 & 15 & 26 & 12 \\ 12 & 13 & 14 & 15 & 26 \end{bmatrix}, A_{X_4X_5} = \begin{bmatrix} 27 & 17 & 18 & 19 & 20 \\ 20 & 27 & 17 & 18 & 19 \\ 19 & 20 & 27 & 17 & 18 \\ 18 & 19 & 20 & 27 & 17 \\ 17 & 18 & 19 & 20 & 27 \end{bmatrix}$$

e as demais matrizes permanecem inalteradas.

Por fim, pelo terceiro passo temos a seguinte coloração de vértices do grafo  $K_{6 \times 5}$ : os vértices de  $X_1$  recebem cor 1, os de  $X_2$ , cor 6, os de  $X_3$ , cor 11, os de  $X_4$ , cor 16, os de  $X_5$ , cor 26 e os de  $X_6$ , cor 27.

### 3.1.3

#### $K_{r \times p}$ com $r$ e $p$ pares ( $r \geq 4$ )

Antes de enunciarmos e provarmos as três partes do principal teorema deste capítulo, trataremos de aspectos de um conceito necessário para a demonstração do resultado. Um *quadrado latino* é uma matriz de ordem  $k$  cujas entradas são  $k$  símbolos diferentes que aparecem exatamente uma vez por linha e por coluna. Dado um quadrado latino de ordem  $k$ , um conjunto de  $k$  entradas diferentes de linhas e de colunas diferentes é chamado de *transversal*. A respeito dos transversais, McKay et al. (2006) provaram o seguinte teorema.

**Teorema 3.9** (McKay, McLeod e Wanless, 2006) *Definindo  $T(k)$  como o número máximo de transversais sobre todos os quadrados latinos de ordem  $k$ , temos que  $b^k \leq T(k)$  para  $k \geq 5$ , onde  $b \approx 1,719$ .*

**Lema 3.10** (da Silva, Dantas e Sasaki, apresentado no CTW 2018 e a ser submetido para o LAGOS 2019) *Existe pelo menos um quadrado latino de ordem  $k$  ( $k \geq 4$  e par) cujos elementos da diagonal principal são todos distintos.*

#### Demonstração.

Para  $k = 4$ , considere a seguinte matriz:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 2 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

A matriz apresentada é um quadrado latino e, além disso, suas entradas da diagonal principal são distintas, como desejado.

Para  $k \geq 6$ , o Teorema 3.9 garante a existência de um quadrado latino com pelo menos um transversal. Seja  $A_k$  um quadrado latino de ordem  $k$  que possui pelo menos um transversal. A partir de operações de trocas de linhas, obteremos  $A'_k$  que satisfaz as condições do lema.

Sejam  $a_{l_1 1}, a_{l_2 2}, \dots, a_{l_k k}$  as entradas que formam um transversal de  $A$ , onde  $1 \leq l_i \leq k$  para todo  $i = 1, 2, \dots, k$  e os  $l_i$  são diferentes entre si.

Seja  $L_i$  a  $i$ -ésima linha de  $A$ . Denotaremos a troca entre as linhas  $L_i$  e  $L_j$  por  $L_i \leftrightarrow L_j$ . Fazemos as seguintes trocas de linhas:  $L_{l_1} \leftrightarrow L_1$ . Com isso,

o elemento  $a_{l_1 1}$  se torna o elemento  $a_{11}$  da nova matriz obtida com a troca de linhas. A partir da nova matriz, fazemos a troca  $L_{l_2} \leftrightarrow L_2$ . Assim, o elemento que ocupava a posição  $a_{l_2 2}$  em  $A$  passa a ocupar a segunda linha e a segunda coluna. Procedemos semelhantemente até a troca  $L_{l_{k-1}} \leftrightarrow L_{k-1}$ .

Como as alterações são feitas sempre sobre linhas, garantimos que, em cada passo, todos os elementos aparecem uma vez por coluna. Como a ordem das entradas de cada linha permanecem inalteradas e, desde o princípio, essas entradas já eram diferentes entre si, então, em cada etapa a nova matriz obtida continua sendo um quadrado latino. ■

Considere o seguinte quadrado latino, onde os elementos de um transversal estão em negrito:

$$\begin{bmatrix} 6 & 5 & 1 & 2 & \mathbf{3} & 4 \\ 2 & 1 & \mathbf{5} & 4 & 6 & 3 \\ 5 & 2 & 3 & \mathbf{1} & 4 & 6 \\ \mathbf{4} & 3 & 2 & 6 & 5 & 1 \\ 3 & 4 & 6 & 5 & 1 & \mathbf{2} \\ 1 & \mathbf{6} & 4 & 3 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

Observe, agora, as sucessivas trocas de linhas de acordo com o algoritmo apresentado acima:

$$\begin{bmatrix} 6 & 5 & 1 & 2 & \mathbf{3} & 4 \\ 2 & 1 & \mathbf{5} & 4 & 6 & 3 \\ 5 & 2 & 3 & \mathbf{1} & 4 & 6 \\ \mathbf{4} & 3 & 2 & 6 & 5 & 1 \\ 3 & 4 & 6 & 5 & 1 & \mathbf{2} \\ 1 & \mathbf{6} & 4 & 3 & 2 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_4 \leftrightarrow L_1} \begin{bmatrix} \mathbf{4} & 3 & 2 & 6 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & \mathbf{5} & 4 & 6 & 3 \\ 5 & 2 & 3 & \mathbf{1} & 4 & 6 \\ 6 & 5 & 1 & 2 & \mathbf{3} & 4 \\ 3 & 4 & 6 & 5 & 1 & \mathbf{2} \\ 1 & \mathbf{6} & 4 & 3 & 2 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_6 \leftrightarrow L_2} \begin{bmatrix} \mathbf{4} & 3 & 2 & 6 & 5 & 1 \\ 1 & \mathbf{6} & 4 & 3 & 2 & 5 \\ 5 & 2 & 3 & \mathbf{1} & 4 & 6 \\ 6 & 5 & 1 & 2 & \mathbf{3} & 4 \\ 3 & 4 & 6 & 5 & 1 & \mathbf{2} \\ 2 & 1 & \mathbf{5} & 4 & 6 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_6 \leftrightarrow L_3} \begin{bmatrix} \mathbf{4} & 3 & 2 & 6 & 5 & 1 \\ 1 & \mathbf{6} & 4 & 3 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & \mathbf{5} & 4 & 6 & 3 \\ 6 & 5 & 1 & 2 & \mathbf{3} & 4 \\ 3 & 4 & 6 & 5 & 1 & \mathbf{2} \\ 5 & 2 & 3 & \mathbf{1} & 4 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_6 \leftrightarrow L_4} \begin{bmatrix} \mathbf{4} & 3 & 2 & 6 & 5 & 1 \\ 1 & \mathbf{6} & 4 & 3 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & \mathbf{5} & 4 & 6 & 3 \\ 5 & 2 & 3 & \mathbf{1} & 4 & 6 \\ 3 & 4 & 6 & 5 & 1 & \mathbf{2} \\ 6 & 5 & 1 & 2 & \mathbf{3} & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_6 \leftrightarrow L_5} \begin{bmatrix} \mathbf{4} & 3 & 2 & 6 & 5 & 1 \\ 1 & \mathbf{6} & 4 & 3 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & \mathbf{5} & 4 & 6 & 3 \\ 5 & 2 & 3 & \mathbf{1} & 4 & 6 \\ 6 & 5 & 1 & 2 & \mathbf{3} & 4 \\ 3 & 4 & 6 & 5 & 1 & \mathbf{2} \end{bmatrix}$$

**Teorema 3.11** (da Silva, Dantas e Sasaki, apresentado no CTW 2018 e a ser submetido para o LAGOS 2019) O grafo  $K_{r \times p}$  com  $r \geq 4$  e  $p$  pares tem  $\chi''_e = \Delta + 1$ .

**Demonstração. Algoritmo para o caso  $p = 2$ :**

**1º passo - obter quadrado latino com entradas distintas na diagonal principal para colorir vértices e arestas não horizontais:**

Vamos construir uma matriz de coloração  $A_{L_1L_2}$  de ordem  $r$  em que a entrada  $a_{ij}$  representa a cor que a aresta  $x_{i1}x_{j2}$  recebe se  $i \neq j$  e, se  $i = j$ , a entrada  $a_{ii}$  representa a cor que os vértices da parte  $X_i$  recebem. A matriz  $A_{L_1L_2}$  deve ser um quadrado latino cujos elementos da diagonal principal são todos distintos. O Lema 3.10 garante a existência de tal matriz. Como os vértices de partes diferentes são adjacentes, o fato de os elementos da diagonal principal serem distintos entre si implica que vértices de partes diferentes não recebem a mesma cor. O fato de que elementos não se repetem nas linhas ou nas colunas implica que arestas não horizontais e vértices adjacentes ou incidentes não recebem a mesma cor.

**2º passo - colorir as arestas horizontais com os emparelhamentos de  $K_r$ :**

Como  $\Delta + 1 = 2r - 1$  neste caso, faltam ser usadas  $r - 1$  cores. Elas serão aplicadas em arestas horizontais da seguinte forma: obtenha os  $r - 1$  emparelhamentos de  $K_r$ . Suponha que  $R_i = \{v_{a_1}v_{a_2}, \dots, v_{a_{r-1}}v_{a_r}\}$ . Então as arestas  $x_{a_11}x_{a_21}, \dots, x_{a_{r-1}1}x_{a_r1}$  e  $x_{a_12}x_{a_22}, \dots, x_{a_{r-1}2}x_{a_r2}$  devem receber a mesma cor. Isso deve ser feito para cada  $i = 1, 2, \dots, r - 1$ .

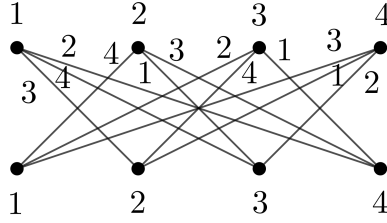
Como as  $r - 1$  cores finais são aplicadas em arestas horizontais determinadas pelos  $R_i$ , então arestas adjacentes não recebem a mesma cor. O primeiro conjunto de cores aparece  $r$  vezes na matriz de coloração  $A_{L_1L_2}$ , sendo  $r - 1$  vezes em arestas e 2 vezes em vértices, totalizando  $r + 1$  vezes. O segundo grupo de cores é usada em um emparelhamento perfeito de  $K_{r \times 2}$ , ou seja, em  $r$  arestas. Logo, a diferença entre as cardinalidades de duas classes de cor é de no máximo 1, como desejado.

Para  $K_{4 \times 2}$ , por exemplo, se tomarmos

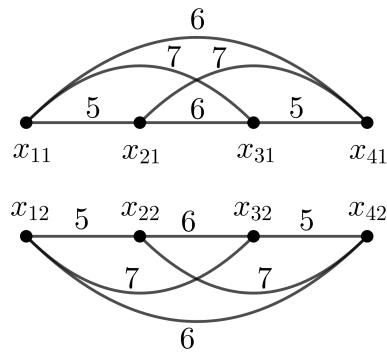
$$A_{L_1L_2} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 2 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{bmatrix},$$

então as arestas não horizontais e os vértices do grafo  $K_{4 \times 2}$  fica colorido conforme a Figura 3.7:



Figura 3.7: Coloração de vértices e arestas não horizontais de  $K_{4 \times 2}$ 

Os emparelhamentos de  $K_4$  são  $R_1 = \{v_1v_2, v_3v_4\}$ ,  $R_2 = \{v_2v_3, v_1v_4\}$  e  $R_3 = \{v_1v_3, v_2v_4\}$ . Portanto, as arestas horizontais devem ser coloridas como a Figura 3.8 a seguir:

Figura 3.8: Coloração de arestas horizontais de  $K_{4 \times 2}$ 

#### Algoritmo para o caso $p = 4$ :

##### 1º passo - coloração de vértices:

Para colorir os vértices, usamos uma cor diferente para cada um dos seguintes pares:  $x_{11}$  e  $x_{12}$ ;  $x_{13}$  e  $x_{14}$ ;  $x_{21}$  e  $x_{22}$ ;  $x_{23}$  e  $x_{24}$ ;  $\dots$ ;  $x_{(r-1)1}$  e  $x_{(r-1)2}$ ;  $x_{(r-1)3}$  e  $x_{(r-1)4}$ ;  $x_{r1}$  e  $x_{r4}$ ;  $x_{r2}$  e  $x_{r2}$ . Note que a parte  $X_r$  é a única que segue um padrão diferente de coloração.

##### 2º passo - coloração de arestas horizontais:

As cores usadas nos vértices das linhas 1 e 2 das partes  $X_1, X_2, \dots, X_{r-1}$  serão aplicadas nas linhas 3 e 4 em arestas horizontais de acordo com os emparelhamentos de  $K_r$ , enquanto as cores usadas nos vértices das linhas 3 e 4 das partes  $X_1, X_2, \dots, X_{r-1}$  serão aplicadas nas linhas 1 e 2 em arestas horizontais de acordo com os emparelhamentos de  $K_r$ . Se  $R_1 = \{v_{b_1}v_{b_2}, \dots, v_{b_{r-1}}v_{b_r}\}$ , então use a cor dos vértices  $x_{11}$  e  $x_{12}$  nas arestas  $x_{b_1i}x_{b_2i}, \dots, x_{b_{r-1}i}x_{b_r i}$  ( $i = 3, 4$ ) e use a cor dos vértices  $x_{13}$  e  $x_{14}$  nas arestas  $x_{b_1i}x_{b_2i}, \dots, x_{b_{r-1}i}x_{b_r i}$  ( $i = 1, 2$ ). Proceda de maneira análoga em relação às cores dos vértices das partes  $X_2, X_3, \dots, X_{r-1}$ .

**3º passo: coloração de arestas não horizontais das matrizes  $A_{L_1L_3}$  e  $A_{L_2L_4}$ :**

A exemplo do caso anterior, definimos, matrizes  $A_{L_1L_2}$ ,  $A_{L_3L_4}$ ,  $A_{L_2L_3}$ ,  $A_{L_1L_4}$ ,  $A_{L_1L_3}$  e  $A_{L_2L_4}$ , de ordem  $r$ , em que a entrada  $a_{ij}$  da matriz  $A_{L_kL_l}$  representa a cor da aresta  $x_{ik}x_{jl}$  recebe se  $i \neq j$  e, se  $i = j$ , a entrada  $a_{ij}$  fica vazia, neste caso.

Devemos usar  $r - 1$  cores (distintas das usadas em vértices) em emparelhamentos horizontais de distância ligando vértices das linhas 1 e 3, e das linhas 2 e 4. Em termos das matrizes  $A_{L_1L_3}$  e  $A_{L_2L_4}$ , o preenchimento das entradas é feito de modo análogo ao preenchimento da matriz  $A_{X_1X_2}$  definida na seção 3.1.1, com a diferença que aqui, as entradas da diagonal principal ficam vazias.

**4º passo - preenchimento das matrizes  $A_{L_1L_2}$  e  $A_{L_3L_4}$ :**

Antes de explicarmos esse passo, considere o seguinte algoritmo. Seja  $n$  um número par,  $n \geq 4$ . O seguinte algoritmo fornece um quadrado latino de ordem  $n$  com um transversal na diagonal principal. Seja  $A$  o quadrado latino que estamos buscando construir e seja  $a_{ij}$  a entrada da  $i$ -ésima linha e  $j$ -ésima coluna de  $A$ . Antes de apresentarmos o algoritmo em si, esclarecemos que os índices devem ser lidos módulo  $n$ . Caso o índice seja congruente a 0 módulo  $n$ , então tal índice deve ser  $n$ , em vez de 0.

Seja  $c$  um dos elementos de  $\{1, \dots, n\}$ , que serão as entradas do quadrado latino  $A$ . Para  $1 \leq c \leq n - 2$ , faça o seguinte: as entradas do tipo  $a_{i,(i+c+1)}$  devem receber o elemento  $c$  para  $1 \leq i \leq c - 1$ ; a entrada  $a_{cc}$  deve receber o elemento  $c$ ; as entradas  $a_{i,(i+c)}$  devem receber o elemento  $c$  para  $c + 1 \leq i \leq n - 1$ ; a entrada  $a_{n,(c+1)}$  deve receber o elemento  $c$ .

Para  $c = n - 1$ , faça o seguinte: as entradas do tipo  $a_{i,2i}$  devem receber o elemento  $n - 1$  para  $1 \leq i \leq n/2$ ; as entradas do tipo  $a_{i,(2i-n+1)}$  devem receber o elemento  $n - 1$  para  $(n/2) + 1 \leq i \leq n$ . Para  $c = n$ , faça o seguinte: as entradas da forma  $a_{i,(2i+1)}$  devem receber o elemento  $n$  para  $1 \leq i \leq n/2$ ; as entradas do tipo  $a_{i,(2i-n)}$  devem receber o elemento  $n$  para  $(n/2) + 1 \leq i \leq n$ .

É fácil ver que o algoritmo acima descreve como se obter um quadrado latino de ordem  $n$  ( $n$  par maior ou igual a 4) com um transversal na diagonal principal.

Para preenchermos a matriz  $A_{L_1L_2}$  e  $A_{L_3L_4}$  precisamos de quadrados latinos cujas entradas na diagonal principal sejam distintas entre si (embora tais entradas sejam omitidas). O Teorema 3.9 garante a existência de tais quadrados latinos e o algoritmo acima indica como obter tal quadrado latino. As entradas da matriz  $A_{L_1L_2}$  serão as cores usadas nos vértices das linhas 1 e 2 das partes  $X_1, X_2, \dots, X_{r-1}$ , enquanto as entradas da matriz  $A_{L_3L_4}$  são as cores usadas nos vértices das linhas 3 e 4 das partes  $X_1, X_2, \dots, X_{r-1}$ . Como as matrizes em questão são de ordem  $r$  e, nesse momento elas serão preenchidas

com  $r - 1$  cores, algumas entradas ficarão vazias. Obtenha um quadrado latino cujas cores são as descritas acima e cujos elementos da diagonal principal são todos distintos e as entradas que devem ficar vazias são aquelas que teriam o mesmo valor da entrada  $a_{rr}$ .

Acima da última linha, exatamente uma entrada em cada linha fica vazia e, à esquerda da última coluna, exatamente uma entrada fica vazia em cada coluna por se tratar de um quadrado latino. Com isso, representamos as cores usadas nos vértices das partes  $X_1, X_2, \dots, X_{r-1}$  em todos os vértices.

Como  $\Delta + 1 = 4r - 3$  neste caso e, até o momento, usamos  $2r + (r - 1)$  cores ( $2r$  usadas em vértices e  $r - 1$  são aquelas usadas nas matrizes  $A_{L_1L_3}$  e  $A_{L_2L_4}$ ), falta usarmos  $r - 2$  cores, além de faltar representar as cores dos vértices de  $X_r$  em arestas. Das  $r - 2$  cores que ainda não foram usadas em nenhum elemento do grafo, 2 serão usadas em 2 emparelhamentos especiais e as outras  $r - 4$ , em emparelhamentos horizontais de distância ligando vértices das linhas 2 e 3; e das linhas 1 e 4, ou seja, serão aplicadas nas matrizes  $A_{L_2L_3}$  e  $A_{L_1L_4}$ .

**5º passo - aplicação as cores dos vértices  $x_{r1}$  e  $x_{r2}$  nas matrizes  $A_{L_2L_3}$  e  $A_{L_1L_4}$**

Suponha que as cores  $\alpha$  e  $\beta$  tenham sido usadas respectivamente nos vértices  $x_{r1}$  e  $x_{r4}$ ; e nos vértices  $x_{r2}$  e  $x_{r3}$ . Então, na matriz  $A_{L_1L_4}$ , a cor  $\alpha$  deve ocupar as entradas  $a_{1,r-1}, a_{21}, a_{32}, a_{43}, \dots, a_{r-1,r-2}$ , enquanto a cor  $\beta$  deve ser usada em um emparelhamento horizontal de distância 1 ligando os vértices das linhas 1 e 4, isto é, a cor  $\beta$  deve ocupar as entradas  $a_{12}, a_{23}, a_{34}, \dots, a_{r-1,r}, a_{r1}$ . Na matriz  $A_{L_2L_3}$  as entradas ocupadas por  $\alpha$  na matriz anterior devem ser ocupadas por  $\beta$  e vice-versa. É fácil ver que podemos enxaixar  $r - 4$  cores em emparelhamentos horizontais de distância ligando vértices das linhas 1 e 4 e das linhas 2 e 3. Isso é possível porque a cor  $\alpha$ , ao ocupar as entradas acima citadas na matriz  $A_{L_1L_4}$  é aplicada nas arestas  $x_{11}x_{r-1,4}, x_{21}x_{14}, x_{31}x_{24}, x_{41}x_{34}, \dots, x_{r-1,1}x_{r-2,4}$ . A primeira dessas arestas é do emparelhamento horizontal de distância  $r - 2$ , enquanto as demais são arestas do emparelhamento horizontal de distância  $r - 1$  (conferir seção 3.1). Como a cor  $\beta$  é usada em um emparelhamento horizontal de distância 1 ligando vértices das linhas 1 e 4 e como há  $r - 1$  emparelhamentos horizontais de distância, isso significa que sobram os  $r - 4$  emparelhamentos horizontais de distância, como afirmado acima.

Note que a cor  $\beta$ , ao ser aplicada em entradas da matriz  $A_{L_1L_4}$ , não é aplicada em algumas arestas que fazem parte dos emparelhamentos horizontais de distância  $r - 1$  e  $r - 2$ , que são representadas pelas seguintes entradas da matriz  $A_{L_1L_4}$ :  $a_{2r}, a_{31}, a_{42}, a_{53}, \dots, a_{r,r-2}, a_{1r}$  e  $a_{r,r-1}$ . Isso significa que na

matriz  $A_{L_1L_4}$  duas entradas da última linha e duas entradas da última coluna não são preenchidas e, da terceira até a penúltima linha, uma entrada por linha não é preenchida. O resultado é análogo para a matriz  $A_{L_2L_3}$ .

**6º passo - utilização das duas últimas cores:**

Até agora há entradas das matrizes  $A_{L_1L_2}$ ,  $A_{L_3L_4}$ ,  $A_{L_2L_3}$  e  $A_{L_1L_4}$  que não foram preenchidas. Ao olharmos a  $i$ -ésima linha da matriz  $A_{L_jL_k}$ , todas as entradas dessa linha representam arestas que tem como uma das extremidades o vértice  $x_{ij}$ . Analogamente, se olharmos a  $i$ -ésima coluna da mesma matriz, as entradas desta coluna representam arestas que tem como uma das extremidades o vértice  $x_{ik}$ . Pelo preenchimento das matrizes  $A_{L_1L_2}$ ,  $A_{L_3L_4}$ ,  $A_{L_2L_3}$  e  $A_{L_1L_4}$  que fizemos acima pode-se verificar que as entradas não preenchidas formam um subgrafo  $H$  de  $K_{r \times 4}$  2-regular. Pelo Lema 2.1, um grafo é 2-regular se e somente se seus componentes conexos são ciclos.

**Afirmção 3.12** (da Silva, Dantas e Sasaki, apresentado no CTW 2018 e a ser submetido para o LAGOS 2019) *Nenhum dos componentes conexos do subgrafo  $H$  é um ciclo de tamanho ímpar.*

**Demonstração.** De fato, as arestas que ainda não foram atribuídas a nenhuma cor são entradas das matrizes  $A_{L_1L_2}$ ,  $A_{L_3L_4}$ ,  $A_{L_2L_3}$  e  $A_{L_1L_4}$ , ou seja, ligam vértices das linhas 1 e 2, 3 e 4, 2 e 3, 1 e 4. Suponha, por contradição, que o subgrafo  $H$  possui um ciclo  $C_k$  de comprimento ímpar. Assuma, sem perda de generalidade, que o primeiro vértice de  $C_k$ , aqui denotado por  $v_1$  é um vértice da primeira linha. Consequentemente, o vértice  $v_2$  deverá ser um vértice da linha 2 ou da linha 4. Independentemente da possível linha em que se encontra o vértice  $v_2$ , temos que o vértice  $v_3$  deverá ser um vértice da linha 1 ou da linha 3. Prosseguindo com o raciocínio, temos que o  $k$ -ésimo vértice de  $C_k$  deverá estar nas linhas 1 ou 3, já que estamos assumindo que  $C_k$  é um ciclo ímpar. Entretanto, como o vértice  $v_1v_k$  faz parte de  $C_k$ , segue que  $v_k$  não pode estar na linha 1 (caso contrário,  $v_1v_k$  seria uma aresta horizontal) e  $v_k$  também não pode estar na linha 3 (caso contrário,  $v_1v_k$  ligaria vértices das linhas 1 e 3, que não é possível, pelo que foi explicado no início da afirmação). Com isso, obtemos uma contradição. Daí, segue que nenhum dos componentes conexos de  $H$  é um ciclo de comprimento ímpar. ■

Assim, os componentes de  $H$  são ciclos de comprimentos pares, que possuem coloração com 2 cores, como desejado. Uma das cores é a cor  $\Delta$  e a outra, a cor  $\Delta + 1$ .

É fácil ver, pela construção do algoritmo, que algumas cores são usadas em 2 vértices e em  $2r - 1$  arestas, enquanto as demais cores são aplicadas em um emparelhamento perfeito do grafo, ou seja, em  $2r$  arestas. Logo, a coloração total é equilibrada, como desejado.

Tomando o grafo  $K_{4 \times 4}$ , temos que determinar os emparelhamentos de  $K_4$ , que são:  $R_1 = \{v_1v_2, v_3v_4\}$ ,  $R_2 = \{v_2v_3, v_1v_4\}$  e  $R_3 = \{v_1v_3, v_2v_4\}$ . Assim, a coloração de vértices e arestas horizontais fica conforme a Figura 3.9 abaixo.

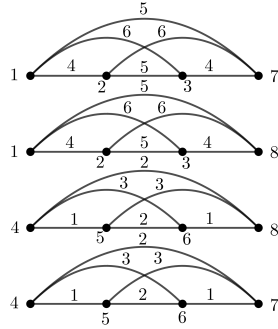


Figura 3.9: Coloração de vértices e arestas horizontais de  $K_{4 \times 4}$

Pelo terceiro passo do algoritmo obtemos, no caso do grafo  $K_{4 \times 4}$ , que

$$A_{L_1L_3} = A_{L_2L_4} = \begin{bmatrix} & 9 & 10 & 11 \\ 11 & & 9 & 10 \\ 10 & 11 & & 9 \\ 9 & 10 & 11 & \end{bmatrix}$$

Por exemplo, tomando o quadrado latino

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 2 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

como base para

as matrizes  $A_{L_1L_2}$  e  $A_{L_3L_4}$  obtemos:

$$A_{L_1L_2} = \begin{bmatrix} 3 & * & 2 \\ * & 1 & 3 \\ 2 & * & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}; A_{L_3L_4} = \begin{bmatrix} 6 & * & 5 \\ * & 4 & 6 \\ 5 & * & 4 \\ 6 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

Pelo quinto passo, segue que

$$A_{L_2L_3} = \begin{bmatrix} 7 & 8 & * \\ 8 & 7 & * \\ 8 & & 7 \\ 7 & * & * \end{bmatrix}; A_{L_1L_4} = \begin{bmatrix} 8 & 7 & * \\ 7 & 8 & * \\ 7 & & 8 \\ 8 & * & * \end{bmatrix}$$

Por fim, pelo sexto passo, no exemplo que estamos apresentando, usamos as cores 13 e 14 para colorir estas arestas que faltam e isso conclui a coloração do grafo em questão.

**Algoritmo para o caso  $p \geq 6$ :**

**1º passo - coloração de vértices:**

Para colorir os vértices, obtenha o emparelhamento  $P_1$  do grafo  $K_p$  de acordo com o algoritmo apresentado na seção 3.1. Se  $P_1 = \{v_{b_1}v_{b_2}, v_{b_3}v_{b_4}, \dots, v_{b_{p-1}}v_{b_p}\}$ , então atribua uma cor diferente para cada um dos seguintes pares de vértices:  $x_{ib_1}$  e  $x_{ib_2}$ ;  $x_{ib_3}$  e  $x_{ib_4}$ ;  $x_{ib_{p-1}}$  e  $x_{ib_p}$  para todo  $i = 1, 2, \dots, r$ . Como há  $rp$  vértices em  $K_{r \times p}$  e usamos uma cor diferente para cada par de vértices, ao todo são usadas  $\frac{rp}{2}$  cores nesta etapa.

**2º passo - usar as cores dos vértices em arestas não horizontais:**

Considere as matrizes  $A_{L_{b_1}L_{b_2}}, A_{L_{b_3}L_{b_4}}, \dots, A_{L_{b_{p-1}}L_{b_p}}$  como descrito no início de 3.1.1 para o caso  $p = 2$ . Para isso, aplicamos o Teorema 3.9 e o Lema 3.10 e obtemos quadrados latinos cujos elementos da diagonal principal são todos distintos. Além disso, a entrada  $a_{kk}$  de uma dada matriz  $A_{L_iL_j}$  deve ser a cor dos vértices  $x_{ki}$  e  $x_{kj}$ . As entradas de cada matriz  $A_{L_{b_i}L_{b_j}}$  são as cores usadas nos vértices das linhas  $b_i$  e  $b_j$ .

**3º passo - representar as cores usadas na coloração de vértices onde elas ainda não haviam sido utilizadas:**

Ao fim do segundo passo, as cores  $1, 2, \dots, \frac{rp}{2}$  foram usadas em todos os vértices de duas linhas. Entretanto, elas ainda precisam ser representadas nos vértices das demais linhas. Para isso, usamos o seguinte resultado de Alspach e Gavlas (2001):

**Afirmção 3.13** (*Alspach, Gavlas, 2001*) Para inteiros positivos pares  $m$  e  $n$  com  $4 \leq m \leq n$ , o grafo  $K_n - I$  pode ser decomposto em ciclos de tamanho  $m$  se e somente se o número de arestas em  $K_n - I$  for um múltiplo de  $m$ .

Salientamos que  $K_n - I$  denota um grafo completo com  $n$  vértices menos um 1-fator, isto é, menos um emparelhamento perfeito ( $K_n$  possui emparelhamento perfeito já que  $n$  é par).

Para o próximo passo do algoritmo precisaremos obter  $\frac{p}{2}$  ciclos de tamanho  $p - 2$  do grafo  $K_p$  menos um 1-fator. Observamos que  $K_p - I$  possui  $\binom{p}{2} - \frac{p}{2} = \frac{p(p-2)}{2}$  arestas. Fazendo  $m = p - 2$  e  $n = p$  na afirmação 3.13, concluímos que  $K_p - I$  pode ser decomposto em  $\frac{p}{2}$  ciclos de tamanho  $p - 2$ , como desejado.

Suponha, sem perda de generalidade, que  $K_p - I = K_p \setminus P_1$ , com  $P_1$  sendo o emparelhamento perfeito de  $K_p$  obtido pela afirmação 3.4. Sabe-se que todo ciclo de comprimento par possui uma coloração de arestas com 2 cores. Então dividimos cada ciclo em dois emparelhamentos determinado pela sua coloração de arestas e os associamos com as arestas de  $P_1$ , de modo que cada aresta de  $P_1$  seja associada aos emparelhamentos do ciclo de  $K_p - I$  que não contém os vértices  $v_i$  e  $v_j$ .

Com o processo de decomposição de  $K_p \setminus P_1$ , obtemos  $\frac{p}{2}$  ciclos. Sejam  $M_k$  e  $M'_k$  os emparelhamentos obtidos do  $k$ -ésimo ciclo da decomposição de  $K_p \setminus P_1$ , que não contém a aresta  $v_i v_j$ . Então as cores usadas no  $i$ -ésimo e  $j$ -ésimo vértices das partes  $X_1, X_2, \dots, X_{\frac{r}{2}}$  devem ser usadas em emparelhamentos horizontais de distância ligando vértices das linhas determinadas por  $M_k$ , enquanto as cores usadas no  $i$ -ésimo e  $j$ -ésimo vértices das partes  $X_{\frac{r}{2}+1}, \dots, X_r$  são usadas em emparelhamentos horizontais de distância ligando vértices das linhas determinadas por  $M'_k$ . Como há  $r - 1$  emparelhamentos horizontais de distância ligando vértices de quaisquer duas linhas e como usamos apenas  $\frac{r}{2} (< r - 1)$  emparelhamentos deste tipo nesta etapa, concluímos que esta é uma ação válida.

**4º passo - utilizar  $\left(\frac{r}{2} - 1\right)(p - 2)$  cores em emparelhamentos perfeitos de  $K_{r \times p}$ :**

O objetivo de decompormos  $K_p \setminus P_1$  em ciclos para aplicarmos as cores que foram usadas em vértices em emparelhamentos horizontais de distância é para garantir que, ao final desse processo, nos emparelhamentos  $P_2, P_3, \dots, P_{p-1}$ , cada par de linhas do grafo  $K_{r \times p}$  foi usado a mesma quantidade de vezes. Com o passo descrito acima, garantimos que cada par de linhas e, conseqüentemente, cada emparelhamento de  $P_2$  até  $P_{p-1}$  foi usado  $\frac{r}{2}$  vezes em emparelhamentos horizontais de distância, de um total de  $r - 1$  emparelhamentos desse tipo. Isso significa que ainda há  $r - 1 - \frac{r}{2} = \frac{r}{2} - 1$  emparelhamentos horizontais de distância disponível em cada emparelhamento  $P_i$  ( $2 \leq i \leq r$ ). Em outras palavras,  $\left(\frac{r}{2} - 1\right)(p - 2)$  cores podem ser aplicadas nesses emparelhamentos de distância disponíveis. Note que cada uma dessas cores é aplicada em um emparelhamento perfeito de  $K_{r \times p}$ , ou seja, as cores são representadas em todos os vértices, como necessário por se tratar de uma coloração total equilibrada com  $\Delta + 1$  cores de um grafo regular.

**5º passo - coloração das arestas horizontais:**

Para finalizar, aplicamos  $r - 1$  novas cores em arestas horizontais determinadas pelos emparelhamentos de  $K_r$  da seguinte forma. Se  $R_1 = \{v_{a_1} v_{a_2}, v_{a_3} v_{a_4}, \dots, v_{a_{r-1}} v_r\}$ , então aplicamos uma das novas cores nas arestas  $x_{a_1 i} x_{a_2 i}, x_{a_3 i} x_{a_4 i}, \dots, x_{a_{r-1} i} x_{a_r i}$  para todo  $i = 1, 2, \dots, p$ . Usando uma cor diferente para cada emparelhamento  $R_i$  de  $K_r$ , concluímos que  $r - 1$  cores são usadas nessa etapa, como afirmamos.

Por fim, usamos  $\frac{rp}{2} + \left(\frac{r}{2} - 1\right)(p - 2) + (r - 1) = \Delta + 1$  cores e, por construção, elas não foram aplicadas em elementos incidentes ou adjacentes do grafo. Também da construção do algoritmo segue que a diferença entre as cardinalidades de quaisquer duas classes de cor é, no máximo 1, como desejado.



Observe, na Figura 3.10 abaixo, o esquema de coloração dos vértices do grafo  $K_{4 \times 6}$ . Temos que o emparelhamento  $P_1$  de  $K_6$  é  $P_1 = \{v_1v_2, v_3v_5, v_4v_6\}$ .

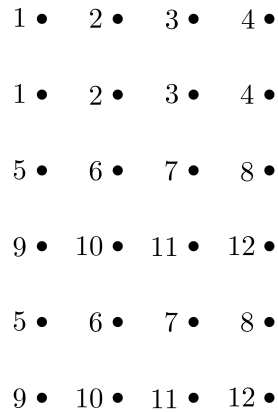


Figura 3.10: Esquema de coloração de vértices de  $K_{4 \times 6}$

Pelo segundo passo do algoritmo aplicado ao grafo  $K_{4 \times 6}$ , podemos

$$\text{escolher } A_{L_1L_2} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 2 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}. \text{ Analogamente, tomamos } A_{L_3L_5} =$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 7 & 8 & 6 \\ 8 & 6 & 5 & 7 \\ 6 & 8 & 7 & 5 \\ 8 & 5 & 6 & 8 \end{bmatrix} \text{ e } A_{L_4L_6} = \begin{bmatrix} 9 & 11 & 12 & 10 \\ 12 & 10 & 9 & 11 \\ 10 & 12 & 11 & 9 \\ 11 & 9 & 10 & 12 \end{bmatrix}$$

Pelo terceiro passo, tomamos  $(v_3v_4v_5v_6v_3)$ ,  $(v_2v_4v_1v_6v_2)$  e  $(v_1v_3v_2v_5v_1)$  como decomposição de  $K_6 - \{v_1v_2, v_3v_5, v_4v_6\}$  e associamos, respectivamente tais ciclos a  $v_1v_2$ ,  $v_3v_5$  e  $v_4v_6$ . Assim, devemos aplicar as cores 1 e 2 em emparelhamentos horizontais de distância 1 e 2, respectivamente, em arestas que ligam vértices das linhas 3 e 4; e 5 e 6. Representaremos a aplicação das 12 cores até então utilizadas na tabela abaixo.



Tabela 3.2: Aplicação das cores 1, 2,  $\dots$ , 12 em emparelhamentos horizontais de distância

Cor	Distância	Combinação de linhas
1	1	3 e 4; 5 e 6
2	2	3 e 4; 5 e 6
3	1	4 e 5; 3 e 6
4	2	4 e 5; 3 e 6
5	1	2 e 4; 1 e 6
6	2	2 e 4; 1 e 6
7	1	4 e 1; 2 e 6
8	2	4 e 1; 2 e 6
9	1	1 e 3; 2 e 5
10	2	1 e 3; 2 e 5
11	1	3 e 2; 1 e 5
12	2	3 e 2; 1 e 5

Aplicando o quarto passo ao grafo  $K_{4 \times 6}$ , segue que ainda temos um emparelhamento horizontal de distância 3 para  $P_2, P_3, P_4$  e  $P_5$ . Assim, usamos as cores 13, 14, 15 e 16 para cada um dos emparelhamentos de distância 3 ligando vértices de linhas determinadas por  $P_2, P_3, P_4$  e  $P_5$ .

Como  $r = 4$  no exemplo que estamos colorindo, para aplicar o quinto passo devemos obter os emparelhamentos de  $K_4$ , que são:  $R_1\{v_1v_2, v_3v_4\}$ ,  $R_2\{v_2v_3, v_1v_4\}$  e  $R_3\{v_1v_3, v_2v_4\}$ . Assim, usamos cor 17 nas arestas  $x_{1i}x_{2i}$  e  $x_{3i}x_{4i}$  para todo  $i = 1, 2, \dots, 6$ . Analogamente, usamos cor 18 nas arestas  $x_{2i}x_{3i}$  e  $x_{1i}x_{4i}$  e cor 19 nas arestas  $x_{1i}x_{3i}$  e  $x_{2i}x_{4i}$  para todo  $i = 1, 2, \dots, 6$ .

### 3.1.4

#### $K_{r \times p}$ , com $r$ e $p$ ímpares

Fu (1994) determinou que  $K_{r \times p}$  com  $r$  e  $p$  ímpares tem  $\chi_e'' \leq \Delta + 2$ . Aqui nós melhoramos este limite apresentando um algoritmo para colorir tais grafos com  $\Delta + 1$  cores.

**Teorema 3.14** (da Silva, Dantas e Sasaki, 2018) *O grafo  $K_{r \times p}$  com  $r$  e  $p$  ímpares tem  $\chi_e'' = \Delta + 1$ .*

**Demonstração.** Se  $p = 1$ , então temos  $K_{r \times 1} = K_r$ , que é o grafo completo com  $r$  vértices. É sabido que tais grafos possuem coloração total equilibrada com  $\Delta + 1$  cores (Kubale, 2004). Portanto, assuma que  $p \geq 3$ .

Como o grafo  $K_{r \times p}$  é regular e já que estamos propondo uma coloração total equilibrada com  $\Delta + 1$  cores, cada uma delas deve ser representadas

em todos os vértices, isto é, ser atribuída ao vértice em si ou a uma aresta que tenha tal vértice como extremidade. Se  $q$  vértices recebam a mesma cor  $i$ , então o número de arestas coloridas com cor  $i$  é  $\frac{rp - q}{2}$ . O número total de elementos que recebem cor  $i$  é  $\frac{rp + q}{2}$ . Como  $rp$  é ímpar,  $q$  deve ser ímpar. Além disso, o número de elementos do grafo  $\left(rp + \frac{rp^2(r-1)}{2}\right)$  dividido pelo número de cores  $((r-1)p + 1)$  tem quociente igual a  $\frac{rp + 1}{2}$  e resto igual a  $\frac{p-1}{2}$ . Isso pode ser verificado da seguinte maneira. Primeiro, é necessário que o resto seja estritamente menor do que o divisor, ou seja,  $\frac{p-1}{2} < (r-1)p + 1 \iff r > \frac{3(p-1)}{2p}$ . Como  $\frac{3(p-1)}{2p} \rightarrow \frac{3}{2}$  quando  $p \rightarrow \infty$  e  $r \geq 3$ , então essa parte é verdadeira. Depois, multiplicando-se o quociente pelo divisor e adicionando-se o resto, obtém-se o dividendo, como desejado. Isso prova que o resto está correto e, como, pela divisão euclidiana, resto e quociente são únicos, concluímos que o quociente também está certo. Isso implica que  $\frac{p-1}{2}$  cores são usadas  $\frac{rp+3}{2}$  vezes e  $\left((r-1)p + 1 - \frac{p-1}{2}\right)$  cores são usadas  $\frac{rp+1}{2}$  vezes. Portanto,  $q = 1$  ou  $q = 3$ . Concluímos que  $\frac{p-1}{2}$  triplas de vértices recebem uma cor cada e os demais  $rp - \frac{3(p-1)}{2}$  vértices recebem uma cor diferente cada.

### 1º passo - obter triplas de vértices:

Para formar as triplas, usamos a Afirmação 3.3 para obter os emparelhamentos  $P_i$  do grafo  $K_p$ . Tome somente os emparelhamentos com índice ímpar de 1 até  $p-2$ , ou seja,  $P_1, P_3, \dots, P_{p-2}$ , que totaliza  $\frac{p-2-1}{2} + 1 = \frac{p-1}{2}$  emparelhamentos, o número exato de triplas que precisamos. Em cada  $P_i$  usado, precisamos das extremidades da primeira aresta e do vértice que sobra, ou seja,  $v_i, v_{i+1}$  e  $v_{i+\frac{p-1}{2}+1}$  (todos os índices tomados módulo  $p$ ). Como usamos apenas 3 vértices de cada emparelhamento tomado, usaremos a notação  $P'_i$  para nos referirmos a eles. Distribua por linhas os  $P'_i$ 's em uma tabela em que as colunas representam as partes  $X_1, X_2, \dots, X_r$ . A primeira linha da tabela é  $P'_1, P'_3, P'_5, \dots, P'_{2r-1}$ , a segunda é  $P'_{2r+1}, P'_{2r+3}, P'_{2r+5}, \dots, P'_{4r-1}$ , e assim sucessivamente. Temos  $P'_1$  na coluna de  $X_1$  e  $P'_1 = \{v_1, v_2, v_{2+\frac{p-1}{2}}\}$  (isto é, as extremidades do primeiro elemento de  $P_1$  e o vértice restante nesse emparelhamento). Isso significa que os vértices  $x_{11}, x_{12}$  e  $x_{1,2+\frac{p-1}{2}}$  devem receber a mesma cor. O processo deve ser repetido para cada  $P'_i$  em que  $i = 1, 3, 5, \dots, p-2$ .

Suponha que  $1 \leq i < j \leq p-2$ . Note que pode ocorrer de  $P'_i$  e  $P'_j$  na mesma coluna da tabela terem um vértice em comum. Neste caso, translate os elementos da linha que contém  $P'_j$  uma unidade para a direita (o elemento

dessa linha na coluna  $X_r$  deve ser movido para a coluna  $X_1$ ). Pela construção do algoritmo da Afirmação 3.3 observa-se que um vértice de  $K_p$  aparece no primeiro elemento de um emparelhamento  $P_i$  ( $i$  ímpar) precisamente uma vez e é o vértice restante de exatamente um emparelhamento de  $K_p$ . Isso implica que qualquer  $P'_i$  tem um vértice comum com um único  $P'_j$ . Assim, transladar os elementos da linha que contém  $P'_j$  uma unidade para a direita resolve o problema sem a possibilidade de, após a translação, o novo  $P'_k$  que ficar na mesma coluna de  $P'_i$  ter vértice em comum com  $P'_i$ . Com esse procedimento, determinamos as triplas de vértices que vão receber, cada uma, uma cor diferente e, conseqüentemente, cada um dos demais vértices recebe cores diferentes entre si e diferentes das usadas nas triplas.

Para fixar as ideias, exibimos abaixo dois exemplos: um em que não é necessário fazer translação dos elementos da tabela e outro em que a mudança é necessária.

Considere o grafo  $K_{3 \times 11}$ . Temos

$P_1 = \{v_1v_2, v_3v_{13}, v_4v_{12}, v_5v_{11}, v_6v_{10}, v_7v_9\}$  e o vértice que sobra é  $v_8$ ;

$P_3 = \{v_3v_4, v_2v_5, v_1v_6, v_7v_{13}, v_8v_{12}, v_9v_{11}\}$  e o vértice que sobra é  $v_{10}$ ;

$P_5 = \{v_5v_6, v_4v_7, v_3v_8, v_2v_9, v_1v_{10}, v_{11}v_{13}\}$  e o vértice que sobra é  $v_{12}$ ;

$P_7 = \{v_7v_8, v_6v_9, v_5v_{10}, v_4v_{11}, v_3v_{12}, v_2v_{13}\}$  e o vértice que sobra é  $v_1$ ;

$P_9 = \{v_9v_{10}, v_8v_{11}, v_7v_{12}, v_6v_{13}, v_1v_5, v_2v_4\}$  e o vértice que sobra é  $v_3$ ;

$P_{11} = \{v_{11}v_{12}, v_{10}v_{13}, v_1v_9, v_2v_8, v_3v_7, v_4v_6\}$  e o vértice que sobra é  $v_5$ ;

Daí,  $P'_1 = \{v_1, v_2, v_8\}$ ,  $P'_3 = \{v_3, v_4, v_{10}\}$ ,  $P'_5 = \{v_5, v_6, v_{12}\}$ ,  $P'_7 = \{v_7, v_8, v_1\}$ ,  $P'_9 = \{v_9, v_{10}, v_3\}$ ,  $P'_{11} = \{v_{11}, v_{12}, v_5\}$ .

Temos

Tabela 3.3: Distribuição de  $P'_1, P'_3, P'_5, P'_7, P'_9$  e  $P'_{11}$  entre as partes  $X_1, X_2$  e  $X_3$  antes da translação

$X_1$	$X_2$	$X_3$
$P'_1$	$P'_3$	$P'_5$
$P'_7$	$P'_9$	$P'_{11}$

Note que  $P'_1$  e  $P'_7$  tem um vértice comum, assim como  $P'_3$  e  $P'_7$ , e  $P'_5$  e  $P'_{11}$ . Portanto, é necessário transladar em uma unidade os elementos da segunda linha da tabela neste caso. Temos

Tabela 3.4: Distribuição de  $P'_1, P'_3, P'_5, P'_7, P'_9$  e  $P'_{11}$  depois da translação

$X_1$	$X_2$	$X_3$
$P'_1$	$P'_3$	$P'_5$
$P'_{11}$	$P'_7$	$P'_9$

Assim, as triplas de vértices são:  $(x_{11}, x_{12}, x_{18})$ ;  $(x_{1,11}, x_{1,12}, x_{15})$ ;  $(x_{23}, x_{24}, x_{2,10})$ ;  $(x_{27}, x_{28}, x_{21})$ ;  $(x_{35}, x_{36}, x_{3,12})$ ; e  $(x_{39}, x_{3,10}, x_{33})$ .

Considere, agora, o grafo  $K_{3 \times 9}$ . Temos

$P_1 = \{v_1v_2, v_3v_9, v_4v_8, v_5v_7\}$  e o vértice que sobra é  $v_6$ ;

$_3 = \{v_3v_4, v_2v_5, v_1v_6, v_7v_9\}$  e o vértice que sobra é  $v_8$ ;

$P_5 = \{v_5v_6, v_4v_7, v_3v_8, v_2v_9\}$  e o vértice que sobra é  $v_1$ ;

$P_7 = \{v_7v_8, v_6v_9, v_1v_5, v_2v_4\}$  e o vértice que sobra é  $v_3$ ;

Daí,  $P'_1 = \{v_1, v_2, v_6\}$ ,  $P'_3 = \{v_3, v_4, v_8\}$ ,  $P'_5 = \{v_5, v_6, v_1\}$ ,  $P'_7 = \{v_7, v_8, v_3\}$ .

Temos

Tabela 3.5: Distribuição de  $P'_1, P'_3, P'_5$  e  $P'_7$  entre as partes  $X_1, X_2$  e  $X_3$

$X_1$	$X_2$	$X_3$
$P'_1$	$P'_3$	$P'_5$
$P'_7$		

Como não há vértices em comum entre  $P'_1$  e  $P'_7$ , não há o que alterar na tabela acima. Assim, as triplas de vértices são  $(x_{11}, x_{12}, x_{16})$ ;  $(x_{23}, x_{24}, x_{28})$ ;  $(x_{35}, x_{36}, x_{31})$ ; e  $(x_{17}, x_{18}, x_{13})$ .

### 2º passo - coloração de arestas horizontais:

Para colorir as arestas horizontais precisamos dos emparelhamentos de  $K_r$  (Afirmação 3.3). Se um vértice  $x_{ij}$  recebe uma certa cor, então devemos buscar o emparelhamento  $R_l$  de  $K_r$  em que  $v_i$  é o vértice restante. Usamos o grafo completo  $K_r$  porque há  $r$  vértices em cada linha. Temos  $R_l = \{v_{a_1}v_{a_2}, \dots, v_{a_{r-2}}v_{a_{r-1}}\}$   $\left(|R_l| = \frac{r-1}{2}\right)$ . Então as arestas  $x_{a_1j}x_{a_2j}, \dots, x_{a_{r-2}j}x_{a_{r-1}j}$  devem receber a mesma cor mencionada acima. Fazendo isso, se uma dada cor é usada em um certo vértice, então a cor é representada em todos os vértices daquela linha. Como estamos propondo uma coloração total equilibrada com  $\Delta + 1$  cores, cada uma delas precisa ser representada também em todos os vértices das demais linhas.

### 3º passo - concluir a representação das cores usadas em triplas de vértices:

Para representar as cores que já foram usadas em 3 vértices e nas linhas que contêm tais vértices, usamos os emparelhamentos  $P_i$  de  $K_p$  (Afirmação 3.3) do seguinte modo. Como explicado acima, os vértices  $x_{11}, x_{12}$  e  $x_{1,2+\frac{p-1}{2}}$  recebem a mesma cor  $k$  e tal cor foi representada nos vértices das linhas 1, 2 e  $2 + \frac{p-1}{2}$ . Assumindo que  $P_1 - \{v_1v_2\} = \{v_av_b, \dots, v_cv_d\}$ , em que  $a, b, \dots, c, d \in \{3, 4, \dots, p\} - \left\{2 + \frac{p-1}{2}\right\}$ , atribua cor  $k$  ao emparelhamento horizontal de distância 1 (conferir Seção 3.1) ligando vértices das linhas  $a$  e

$b; \dots$ ; e  $c$  e  $d$ . Repita o processo para todas as cores usadas em 3 vértices cada. Note que ao final desta etapa, como as cores das triplas foram aplicadas em emparelhamentos de distância 1 relacionados a  $P_1 - \{v_1v_2\}$ ,  $P_3 - \{v_3v_4\}$ ,  $\dots$ ,  $P_{p-2} - \{v_{p-2}v_{p-1}\}$ , as arestas de emparelhamentos de distância 1 ligando vértices das linhas 1 e 2, 3 e 4,  $\dots$ ,  $p-2$  e  $p-1$  não foram coloridos.

**4º passo - concluir a representação das cores usadas em apenas um vértice:**

Agora precisamos representar as cores usadas em apenas um vértice (e nas linhas que o contém) nas demais linhas. Para fazer isso, vamos da parte  $X_1$  até  $X_r$ , procurando do vértice  $x_{i1}$  para  $x_{ip}$  em cada parte para tomar aqueles que foram os únicos vértices a receberem uma certa cor. É importante deixar um vértice da última linha ( $x_{\alpha p}$ ) para ser o último vértice a aplicar este passo. Seja  $x_{1a}$  o primeiro vértice em  $X_1$  que satisfaz a condição de não ser parte de uma tripla de vértices que recebe a mesma cor. Assim, a cor usada em tal vértice foi representada nos vértices da linha  $a$  (em arestas horizontais) e ainda precisam ser representadas nas outras linhas. Tome o emparelhamento de  $K_p$  em que  $v_a$  foi o vértice restante e atribua a mesma cor de  $x_{1a}$  no emparelhamento de distância 1 se tal distância não foi previamente usada por qualquer uma das cores das triplas ou emparelhamento de distância 2, caso contrário. Repita o processo para cada cor que foi usada em um vértice na ordem descrita usando sempre o próximo emparelhamento de distância disponível. Como há  $r-1$  emparelhamentos de distância entre quaisquer duas linhas e aplicamos um emparelhamento de distância  $i$  por cor e tal cor está associada com um emparelhamento  $P_j$  (há  $p$  destes emparelhamentos), isto significa que podemos repetir o processo  $(r-1)p$  vezes. Em outras palavras, este processo pode ser feito para  $(r-1)p$  cores. Contudo, devemos usar  $(r-1)p+1 = \Delta+1$  cores. O vértice  $x_{\alpha p}$  a que nos referimos acima recebeu uma cor que foi representada em todos os vértices da última linha. Sendo assim, tal cor ainda precisa ser representada nas demais linhas. Lembre que quando usamos as cores das triplas de vértices em arestas, o emparelhamento de distância 1 ligando as linhas 1 e 2, 3 e 4,  $\dots$ , linhas  $p-2$  e  $p-1$  não foram usados. Portanto, a cor usada em  $x_{\alpha p}$  deve ser usada nos emparelhamentos de distância 1 ligando os pares de linhas acima citados.

Por construção, é fácil ver que usamos exatamente  $\Delta+1$  cores e cada cor foi representada em cada vértice. Também por construção, elementos incidentes ou adjacentes não receberam a mesma cor. Cada cor usada em uma tripla de vértices foi também usada em  $\frac{rp-3}{2}$  arestas. Então, cada uma dessas cores foi usada em  $\frac{rp+3}{2}$  elementos. As cores usadas em apenas um vértice foram

usadas também em  $\frac{rp-1}{2}$  arestas cada. Então, cada uma dessas cores foi usada em  $\frac{rp+1}{2}$  elementos. Como  $\frac{rp+3}{2} - \frac{rp+1}{2} = 1$ , concluímos que a diferença entre as cardinalidades de quaisquer duas classes de cores é no máximo 1. Portanto, o algoritmo descrito provê uma coloração total equilibrada com  $\Delta+1$  cores para o grafo  $K_{r \times p}$  quando  $r$  e  $p$  são ímpares, como desejado. ■

Observe o exemplo seguinte, em que exibimos uma coloração total equilibrada de  $K_{3 \times 11}$  com  $23 = \Delta + 1$  cores. Temos

$P_1 = \{v_1v_2, v_3v_{11}, v_4v_{10}, v_5v_9, v_6v_8\}$  e o vértice restante é  $v_7$ ;

$P_2 = \{v_2v_3, v_1v_4, v_5v_{11}, v_6v_{10}, v_7v_9\}$  e o vértice restante é  $v_8$ ;

$P_3 = \{v_3v_4, v_2v_5, v_1v_6, v_7v_{11}, v_8v_{10}\}$  e o vértice restante é  $v_9$ ;

$P_4 = \{v_4v_5, v_3v_6, v_2v_7, v_1v_8, v_9v_{11}\}$  e o vértice restante é  $v_{10}$ ;

$P_5 = \{v_5v_6, v_4v_7, v_3v_8, v_2v_9, v_1v_{10}\}$  e o vértice restante é  $v_{11}$ ;

$P_6 = \{v_6v_7, v_5v_8, v_4v_9, v_3v_{10}, v_2v_{11}\}$  e o vértice restante é  $v_1$ ;

$P_7 = \{v_7v_8, v_6v_9, v_5v_{10}, v_4v_{11}, v_3v_1\}$  e o vértice restante é  $v_2$ ;

$P_8 = \{v_8v_9, v_7v_{10}, v_6v_{11}, v_1v_5, v_2v_4\}$  e o vértice restante é  $v_3$ ;

$P_9 = \{v_9v_{10}, v_8v_{11}, v_1v_7, v_2v_6, v_3v_5\}$  e o vértice restante é  $v_4$ ;

$P_{10} = \{v_{10}v_{11}, v_1v_9, v_2v_8, v_3v_7, v_6v_4\}$  e o vértice restante é  $v_5$ ;

$P_{11} = \{v_1v_{11}, v_2v_{10}, v_3v_9, v_4v_8, v_5v_7\}$  e o vértice restante é  $v_6$ ;

Daí,  $P'_1 = \{v_1, v_2, v_7\}$ ,  $P'_3 = \{v_3, v_4, v_9\}$ ,  $P'_5 = \{v_5, v_6, v_{11}\}$ ,  $P'_7 = \{v_7, v_8, v_2\}$  e  $P'_9 = \{v_9, v_{10}, v_4\}$ . Temos

Tabela 3.6: Distribuição de  $P'_1, P'_3, P'_5, P'_7$  e  $P'_9$  entre as partes  $X_1, X_2$  e  $X_3$  antes da translação

$X_1$	$X_2$	$X_3$
$P'_1$	$P'_3$	$P'_5$
$P'_7$	$P'_9$	

Como  $P'_1$  e  $P'_7$  (que estão na mesma coluna) possuem vértices em comum e  $P'_3$  e  $P'_9$  também, então é necessário transladar os elementos da segunda linha uma unidade para a direita. Fazendo isso, a nova tabela obtida é

Tabela 3.7: Distribuição de  $P'_1, P'_3, P'_5, P'_7$  e  $P'_9$  entre as partes  $X_1, X_2$  e  $X_3$  depois da translação

$X_1$	$X_2$	$X_3$
$P'_1$	$P'_3$	$P'_5$
	$P'_7$	$P'_9$

Com isso, as triplas de vértices formadas são  $(x_{11}, x_{12}, x_{17})$ ;  $(x_{23}, x_{24}, x_{29})$ ;  $(x_{27}, x_{28}, x_{22})$ ;  $(x_{35}, x_{36}, x_{3,11})$ ; e  $(x_{39}, x_{3,10}, x_{34})$ . Apresentamos a coloração de

vértices e arestas horizontais de  $K_{3 \times 11}$  segundo o algoritmo proposto, na Figura 3.11 a seguir

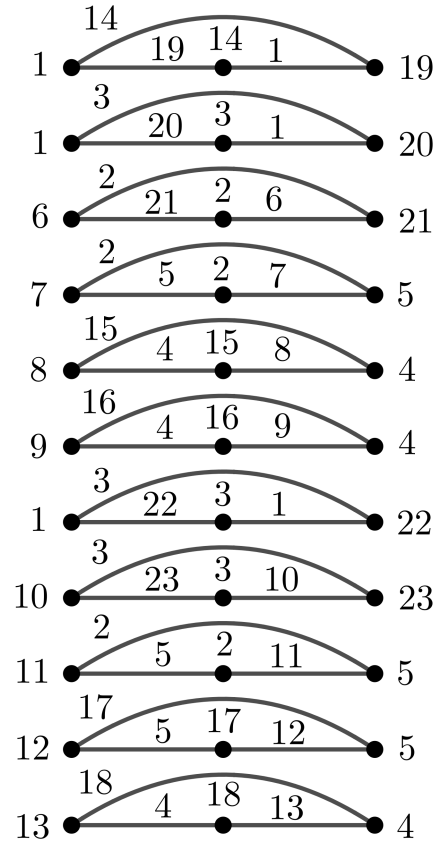


Figura 3.11: Coloração de vértices e arestas horizontais de  $K_{3 \times 11}$

A tabela a seguir mostra a distribuição de cores entre as arestas que não são horizontais. Observe, por exemplo, que na linha onde aparece a cor 1, ao lado temos distância 1 e, na coluna pares de linhas, lê-se  $P_1 \setminus \{v_1 v_2\} = \{v_3 v_{11}, v_4 v_{10}, v_5 v_9, v_6 v_8\}$ . Isso significa que a cor 1 deve ser aplicada em emparelhamentos horizontais de distância 1 ligando os vértices das linhas 3 e 11; 4 e 10; 5 e 9; 6 e 8. O mesmo raciocínio deve ser aplicado para cada uma das cores na tabela abaixo.

Tabela 3.8: Distribuição de cores entre as arestas não horizontais de  $K_{3 \times 11}$ 

Cor	Distância	Pares de linhas
1	1	$P_1 \setminus \{v_1v_2\}$
2	1	$P_3 \setminus \{v_3v_4\}$
3	1	$P_7 \setminus \{v_7v_8\}$
4	1	$P_5 \setminus \{v_5v_6\}$
5	1	$P_9 \setminus \{v_9v_{10}\}$
6	1	$P_8$
7	2	$P_9$
8	1	$P_{10}$
9	1	$P_{11}$
10	1	$P_2$
11	2	$P_3$
12	1	$P_4$
13	2	$P_5$
14	1	$P_6$
15	2	$P_{10}$
16	2	$P_{11}$
17	2	$P_4$
18	1	$\{v_1v_2, v_3v_4, v_5v_6, v_7v_8, v_9v_{10}\}$
19	2	$P_6$
20	2	$P_7$
21	2	$P_8$
22	2	$P_1$
23	2	$P_2$

### 3.1.5

$K_{r \times p}$ , com  $r$  ímpar e  $p$  par

**Algoritmo para o caso  $p = 2$ :**

**1º passo - coloração de vértices e de arestas horizontais:**

Os vértices da parte  $X_i$  devem receber cor  $i$ ,  $i = 1, 2, \dots, r$ . A cor  $i$  também deve ser usada em arestas horizontais como segue. Suponha que o emparelhamento  $R_j = \{v_av_b, \dots, v_cv_d\}$  tem como vértice restante  $v_i$ . Então a cor  $i$  deve ser usada nas arestas  $x_{a1}x_{b1}, \dots, x_{c1}x_{d1}$  e também nas arestas  $x_{a2}x_{b2}, \dots, x_{c2}x_{d2}$ . Como  $i$  é o vértice restante no emparelhamento  $R_j$  e as arestas que recebem esta cor estão associadas ao emparelhamento em questão, os vértices e as arestas que receberam cor  $i$  não são incidentes e nem adjacentes,



por construção. Como cada emparelhamento de  $K_r$  tem cardinalidade  $\frac{r-1}{2}$ , concluímos que cada uma das  $r$  cores foi usada  $2 + \frac{r-1}{2} \cdot 2 = r+1$  vezes.

**2º passo - coloração de arestas não horizontais:**

Como esta é uma coloração com  $\Delta + 1 = 2r - 1$  cores e o primeiro passo usou  $r$  cores, sobraram  $r - 1$  cores para serem usadas em arestas não horizontais, já que vértices e arestas horizontais foram coloridos na etapa anterior. Usamos cada uma das  $r - 1$  cores restantes em um emparelhamento horizontal de distância terminando, assim, a coloração. Note que, conforme explicado no capítulo 3.1, cada emparelhamento horizontal tem  $r$  elementos. Assim, a diferença entre as cardinalidades de duas classes de cor é, no máximo 1, como desejado.

Observe a Figura 3.12, onde mostramos as cores dos vértices e das arestas horizontais de  $K_{3 \times 2}$  de acordo com o primeiro passo.

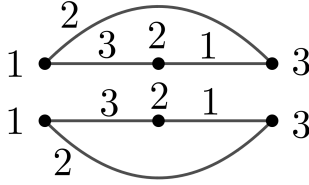


Figura 3.12: Coloração de vértices e arestas horizontais de  $K_{3 \times 2}$

Já a coloração das arestas não horizontais do grafo  $K_{3 \times 2}$  fica conforme a Figura 3.13.

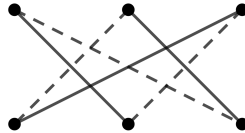


Figura 3.13: As arestas pontilhadas devem receber cor 5 e as arestas pretas, cor 4

**Algoritmo para o caso  $p \geq 4$ :**

**1º passo - distribuição inicial de algumas cores em emparelhamentos horizontais de distância:**

O primeiro passo para obter uma  $(\Delta + 1)$ -coloração total equilibrada dessa classe de grafos consiste em obter os  $p - 1$  emparelhamentos de  $K_p$  conforme a Afirmação 3.4. Então devemos montar uma tabela em que cada emparelhamento é escrito  $r - 1$  vezes. Nesta etapa são usadas  $(p - 1)(r - 1) = rp - p - r + 1$  cores.

Suponha que na  $i$ -ésima linha da tabela a seguir a distância seja  $j$  e o emparelhamento seja  $P_k = \{v_a v_b, \dots, v_c v_d\}$ . Isso significa que a cor  $i$  deve

ser aplicada em um emparelhamento horizontal de distância  $j$  entre as linhas determinadas pelo emparelhamento  $P_k$ , isto é, entre as linhas  $a$  e  $b, \dots, c$  e  $d$ .

Tabela 3.9: Distribuição inicial de algumas cores nas arestas de  $K_{r \times p}$

Cor	Distância	Emparelhamento
1	1	$P_1$
2	2	$P_1$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$r - 1$	$r - 1$	$P_1$
$r$	1	$P_2$
$r + 1$	2	$P_2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$2(r - 1)$	$r - 1$	$P_2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$(p - 4)(r - 1) + 1$	1	$P_{p-3}$
$(p - 4)(r - 1) + 2$	2	$P_{p-3}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$(p - 3)(r - 1)$	$r - 1$	$P_{p-3}$
$(p - 3)(r - 1) + 1$	1	$P_{p-2}$
$(p - 3)(r - 1) + 2$	2	$P_{p-2}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$(p - 2)(r - 1)$	$r - 1$	$P_{p-2}$
$(p - 2)(r - 1) + 1$	1	$P_{p-1}$
$(p - 2)(r + 1) + 2$	2	$P_{p-1}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$(p - 1)(r - 1)$	$r - 1$	$P_{p-1}$

**2º passo - fazer mudanças na tabela obtida pelo passo anterior:**

A segunda etapa da coloração consiste em alterar parte do que foi feito no primeiro passo. Todas as cores que, na Tabela 3.9 estão na mesma linha dos emparelhamentos  $P_i$ , onde  $i = 1, 3, 5, \dots, p - 3$  e também cada cor que está na mesma linha da primeira vez que os emparelhamentos  $P_j$  ( $j = 2, 4, 6, \dots, p - 2$ ) aparecem na Tabela 3.9 devem ceder o primeiro elemento do emparelhamento para novas  $r$  cores que serão inseridas na tabela<sup>1</sup>. Note que ao todo são alteradas  $\left(\frac{p}{2} - 1\right)r$  linhas, pois elas são alteradas em sequências de  $r$  ( $r - 1$  referentes a um emparelhamento de índice ímpar e 1 referente

<sup>1</sup>Observamos que como  $i$  varia de 1 até  $p - 3$ , se  $p$  fosse 2 essa parte do algoritmo não faria sentido. Isso justifica a apresentação de um algoritmo diferente para o caso  $p = 2$ .

ao emparelhamento de índice par seguinte) e  $i$  é ímpar e varia de 1 a  $p - 3$ , totalizando  $\frac{p-3-1}{2} + 1 = \frac{p}{2} - 1$ . Lembramos que a etapa anterior utilizou  $rp - r - p + 1$  cores e  $\Delta + 1 = rp - p + 1$ . Então, ao introduzirmos novas  $r$  cores à tabela anterior, completamos a quantidade total de cores que devem ser usadas na coloração. Assim, a Tabela 3.9 se transforma em

Tabela 3.10: Distribuição de algumas cores nas arestas de  $K_{r \times p}$ 

Cor	Distância	Emparelhamento
1	1	$P_1 \setminus \{v_1 v_2\}$
2	2	$P_1 \setminus \{v_1 v_2\}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$r - 1$	$r - 1$	$P_1 \setminus \{v_1 v_2\}$
$r$	1	$P_2 \setminus \{v_2 v_3\}$
$r + 1$	2	$P_2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$2(r - 1)$	$r - 1$	$P_2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$(p - 4)(r - 1) + 1$	1	$P_{p-3} \setminus \{v_{p-3} v_{p-2}\}$
$(p - 4)(r - 1) + 2$	2	$P_{p-3} \setminus \{v_{p-3} v_{p-2}\}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$(p - 3)(r - 1)$	$r - 1$	$P_{p-3} \setminus \{v_{p-3} v_{p-2}\}$
$(p - 3)(r - 1) + 1$	1	$P_{p-2} \setminus \{v_{p-2} v_{p-1}\}$
$(p - 3)(r - 1) + 2$	2	$P_{p-2}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$(p - 2)(r - 1)$	$r - 1$	$P_{p-2}$
$(p - 2)(r - 1) + 1$	1	$P_{p-1}$
$(p - 2)(r + 1) + 2$	2	$P_{p-1}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$(p - 1)(r - 1)$	$r - 1$	$P_{p-1}$
$(p - 1)(r - 1) + 1$	1	$\{v_1 v_2, v_3 v_4, v_5 v_6, \dots, v_{p-3} v_{p-2}\}$
$(p - 1)(r - 1) + 2$	2	$\{v_1 v_2, v_3 v_4, v_5 v_6, \dots, v_{p-3} v_{p-2}\}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$(r - 1)p$	$r - 1$	$\{v_1 v_2, v_3 v_4, v_5 v_6, \dots, v_{p-3} v_{p-2}\}$
$(r - 1)p + 1$	1	$\{v_2 v_3, v_4 v_5, v_6 v_7, \dots, v_{p-2} v_{p-1}\}$

### 3º passo - coloração de vértices:

As  $\left(\frac{p}{2} - 1\right)r$  cores que, pelo passo anterior, cederam o primeiro elemento  $v_{ab}$  do emparelhamento ao qual estavam associadas deixaram de ser

representadas nos vértices das linhas  $a$  e  $b$ . Como estamos apresentando uma coloração com  $\Delta + 1$  cores, todas as cores devem ser representadas em todos os vértices. Para isso, usaremos estas  $\left(\frac{p}{2} - 1\right)r$  cores e as últimas  $r$  cores na coloração de vértices e de arestas horizontais que, até o momento, não foram coloridas.

Se uma cor  $i$  havia sido aplicada em um emparelhamento horizontal de distância  $j$  e cedeu o elemento  $v_{ab}$  do emparelhamento  $P_k$ , com  $k$  ímpar, então a cor  $i$  deve ser usada na coloração dos vértices  $x_{ja}$  e  $x_{jb}$ . Se o índice  $k$  do emparelhamento  $P_k$  for par, então a cor  $i$  deve ser usada para colorir os vértices  $x_{ra}$  e  $x_{rb}$ . Já as cores que foram inseridas apenas na segunda etapa devem colorir os vértices  $x_{t,p-1}$  e  $x_{tp}$  se a distância correspondente a essas cores na Tabela 3.10 for  $t$  e se não se tratar da última cor. Esta deve ser empregada nos vértices  $x_{r1}$  e  $x_{rp}$ . As arestas horizontais devem ser coloridas como no grafo  $K_{r \times p}$  com  $r$  e  $p$  ímpares.

**Teorema 3.15** (da Silva, Dantas e Sasaki, apresentado no CTW 2018 e a ser submetido para o LAGOS 2019) *O algoritmo acima apresenta uma  $(\Delta + 1)$ -coloração total equilibrada de  $K_{r \times p}$ , com  $r$  ímpar e  $p$  par.*

**Demonstração.** Algumas cores foram usadas somente em arestas. Tais cores foram usadas em emparelhamentos horizontais de distância entre linhas que foram determinadas pelos emparelhamentos de  $K_p$ . Como cada emparelhamento é disjunto, os pares de linhas determinadas pelos emparelhamentos  $K_p$  são distintos e não há, portanto, cores sendo aplicadas em arestas adjacentes.

Outras cores foram usadas em vértices e em arestas (horizontais e não horizontais). Com relação às arestas não horizontais, a aplicação seguiu o mesmo processo das cores anteriores e, por isso, não houve aplicação de uma cor em arestas adjacentes. Tais cores cederam um elemento do emparelhamento de  $K_p$  ao qual estavam relacionadas e, com isso, perderam a representação nas linhas determinadas pelo elemento de  $K_p$  cedido. Posteriormente, estas cores foram aplicadas justamente em vértices (na mesma parte da partição do conjunto de vértices) daquelas linhas onde haviam perdido a representação. Assim, não há elementos incidentes recebendo uma mesma cor. Por fim, tais cores foram usadas em arestas horizontais (daquelas linhas onde haviam perdido representação, não havendo, portanto, possibilidade de arestas adjacentes terem recebido mesma cor) da mesma maneira que no caso  $K_{r \times p}$  com  $r$  e  $p$  ímpares. Logo, conforme explicado em capítulo anterior, estas arestas horizontais e os vértices coloridos por uma mesma cor não são incidentes. Assim, conclui-se que, por construção, elementos incidentes e adjacentes receberam cores distintas.

As cores usadas em arestas apenas foram empregadas em emparelhamentos perfeitos do grafo, totalizando, assim,  $\frac{rp}{2}$  vezes. Já as cores usadas em vértices e arestas foram usadas em 2 vértices, em arestas horizontais de duas linhas, totalizando  $2\frac{r-1}{2}$  vezes e também em  $\frac{p-2}{2}r$  arestas não horizontais. Então, cada uma dessas cores foi usada  $\frac{rp+2}{2}$  e esse número difere em 1 unidade em relação à quantidade de vezes que as outras cores foram empregadas. Portanto, a coloração total é equilibrada, como desejado. ■

Pelo primeiro passo, obtemos a Tabela 3.11 para o grafo  $K_{3 \times 8}$ :

Tabela 3.11: Distribuição inicial de cores nas arestas de  $K_{3 \times 8}$

Cor	Distância	Emparelhamento
1	1	$\{v_1v_2, v_3v_7, v_4v_6, v_5v_8\}$
2	2	$\{v_1v_2, v_3v_7, v_4v_6, v_5v_8\}$
3	1	$\{v_2v_3, v_1v_4, v_5v_7, v_6v_8\}$
4	2	$\{v_2v_3, v_1v_4, v_5v_7, v_6v_8\}$
5	1	$\{v_3v_4, v_2v_5, v_1v_6, v_7v_8\}$
6	2	$\{v_3v_4, v_2v_5, v_1v_6, v_7v_8\}$
7	1	$\{v_4v_5, v_3v_6, v_2v_7, v_1v_8\}$
8	2	$\{v_4v_5, v_3v_6, v_2v_7, v_1v_8\}$
9	1	$\{v_5v_6, v_4v_7, v_1v_3, v_2v_8\}$
10	2	$\{v_5v_6, v_4v_7, v_1v_3, v_2v_8\}$
11	1	$\{v_6v_7, v_1v_5, v_2v_4, v_3v_8\}$
12	2	$\{v_6v_7, v_1v_5, v_2v_4, v_3v_8\}$
13	1	$\{v_1v_7, v_2v_6, v_3v_5, v_4v_8\}$
14	2	$\{v_1v_7, v_2v_6, v_3v_5, v_4v_8\}$

A Tabela 3.12 foi obtida com as alterações do segundo passo para o grafo  $K_{3 \times 8}$

Tabela 3.12: Distribuição final de cores nas arestas de  $K_{3 \times 8}$ 

Cor	Distância	Emparelhamento
1	1	$\{v_3v_7, v_4v_6, v_5v_8\}$
2	2	$\{v_3v_7, v_4v_6, v_5v_8\}$
3	1	$\{v_1v_4, v_5v_7, v_6v_8\}$
4	2	$\{v_2v_3, v_1v_4, v_5v_7, v_6v_8\}$
5	1	$\{v_2v_5, v_1v_6, v_7v_8\}$
6	2	$\{v_2v_5, v_1v_6, v_7v_8\}$
7	1	$\{v_3v_6, v_2v_7, v_1v_8\}$
8	2	$\{v_4v_5, v_3v_6, v_2v_7, v_1v_8\}$
9	1	$\{v_4v_7, v_1v_3, v_2v_8\}$
10	2	$\{v_4v_7, v_1v_3, v_2v_8\}$
11	1	$\{v_1v_5, v_2v_4, v_3v_8\}$
12	2	$\{v_6v_7, v_1v_5, v_2v_4, v_3v_8\}$
13	1	$\{v_1v_7, v_2v_6, v_3v_5, v_4v_8\}$
14	2	$\{v_1v_7, v_2v_6, v_3v_5, v_4v_8\}$
15	1	$\{v_1v_2, v_3v_4, v_5v_6\}$
16	2	$\{v_1v_2, v_3v_4, v_5v_6\}$
17	1	$\{v_2v_3, v_4v_5, v_6v_7\}$

No caso do grafo  $K_{3 \times 8}$ , a coloração de vértices é como segue:  $x_{11}$  e  $x_{12}$  recebem cor 1,  $x_{13}$  e  $x_{14}$  recebem cor 5,  $x_{15}$  e  $x_{16}$  recebem cor 9,  $x_{17}$  e  $x_{18}$  recebem cor 15,  $x_{21}$  e  $x_{22}$  recebem cor 2,  $x_{23}$  e  $x_{24}$  recebem cor 6,  $x_{25}$  e  $x_{26}$  recebem cor 10,  $x_{27}$  e  $x_{28}$  recebem cor 16,  $x_{32}$  e  $x_{33}$  recebem cor 3,  $x_{34}$  e  $x_{35}$  recebem cor 7,  $x_{36}$  e  $x_{37}$  recebem cor 11 e  $x_{31}$  e  $x_{38}$  recebem cor 17.

## 4

### Considerações finais

O problema de coloração de grafos foi motivado pela percepção de que quatro cores são suficientes para colorir qualquer mapa que pode ser desenhado no plano, de modo que regiões que partilhem uma fronteira sejam coloridas com cores distintas. Esta percepção gerou uma conjectura cuja veracidade foi finalmente comprovada apenas mais de um século depois de sua proposição. Apesar das demonstrações errôneas, muitos avanços foram feitos na área de coloração de grafos.

Abordamos neste trabalho dois tipos específicos de coloração: de arestas e total. Sobre a coloração de arestas, apresentamos a demonstração de teoremas importantes, que limitam os valores que podem ser assumidos pelo índice cromático. Um tipo particular de coloração de arestas é a coloração de arestas por listas. Sobre isso, foi determinado o índice lista-cromático de multigrafos bipartidos conforme é feito em Galvin(1995). Em seguida, passamos a tratar da coloração total de grafos. Mencionamos ainda alguns resultados acerca dos valores que o número cromático total pode assumir e expusemos, na sequência, um tipo particular de coloração total: a equilibrada. A esse respeito apresentamos resultados novos, determinando  $\chi''_e(K_{r \times p})$ .

A pergunta proposta para nortear este trabalho dizia respeito a novas contribuições que poderiam ser dadas na área de coloração de grafos, com foco, sobretudo, em grafos multipartidos. Utilizando novas técnicas, verificamos a ETCC para a classe dos grafos  $r$ -partidos completos  $p$ -balanceados. Esse resultado conclui a investigação do número cromático total equilibrado dessa classe de grafos. Além disso, fornecemos algoritmos para que se obtenha uma coloração total equilibrada deste tipo de grafos. Resultados parciais a respeito deste assunto foram apresentados por Fu (1994) e também por da Silva et al. (2018). Bermond (1974) determinou o número cromático total dos grafos  $r$ -partidos completos balanceados e aqui determinamos  $\chi''_e$  para a mesma classe de grafos.

Futuros trabalhos incluem, mas não se limitam a verificar a ETCC para diferentes classes de grafos. Uma das classes de grafos para a qual pretendemos determinar o número cromático total equilibrado é a classe dos  $r$ -partidos completos não balanceados. Outra família de grafos que pretendemos investigar

a fim de verificar a ETCC é a dos *grafos de Petersen generalizados*, classe de grafos 3-regulares (ou cúbicos), formados pela união dos vértices de um polígono regular com os vértices de um polígono estrela. A respeito dos *grafos fortemente regulares*, pretende-se responder a seguinte questão: o índice cromático de um grafo fortemente regular de ordem par é determinado pelos seus parâmetros? Um grafo é dito fortemente regular com parâmetros  $v, k, \lambda, \mu$  ou um  $\text{gfr-}(v, k, \lambda, \mu)$  se ele é  $k$ -regular de ordem  $v$ , quaisquer dois vértices adjacentes possuem exatamente  $\lambda$  vizinhos em comum e quaisquer dois vértices não adjacentes e distintos possuem exatamente  $\mu$  vizinhos em comum.

Na Tabela 4.1 temos uma comparação do número cromático total com o número cromático total equilibrado para os grafos  $r$ -partidos completos  $p$ -balanceados.

Tabela 4.1: Comparação do número cromático total com o número cromático total equilibrado para  $K_{r \times p}$

$K_{r \times p}$		Coloração total		Coloração total equilibrada	
$r$	$p$	$\chi''$	Referência	$\chi''_e$	Referência
$r = 2$	$p$	$\Delta + 2$	Behzad, Chartrand e Cooper (1967)	$\Delta + 2$	Behzad, Chartrand e Cooper (1967)
$r \geq 4$ par	ímpar	$\Delta + 2$	Bermond (1974)	$\Delta + 2$	DAM (2018)
ímpar	ímpar	$\Delta + 1$	Bermond (1974)	$\Delta + 1$	DAM (2018)
$r \geq 4$ par	par	$\Delta + 1$	Bermond (1974)	$\Delta + 1$	LAGOS 2019
ímpar	par	$\Delta + 1$	Bermond (1974)	$\Delta + 1$	LAGOS 2019



ALSPACH, B., GAVLAS, H., **Cycle Decompositions of  $K_n$  and  $K_n - I$** , Journal of Combinatorial Theory, v. 81, pp. 77-99, 2001, <https://doi.org/10.1006/jctb.2000.1996>.

APPEL, K., HAKEN, W., **Every planar map is four colorable. Part I: Discharging**, Illinois J. Math., v. 21, pp. 429-490, 1977, <https://projecteuclid.org/euclid.ijm/1256049011>.

APPEL, K., et al. **Every planar map is four colorable. Part II: Reducibility**. Illinois J. Math., v. 21, pp. 491-567, 1977. <https://projecteuclid.org/euclid.ijm/1256049012>.

BEHZAD, M., **Graphs and their chromatic numbers**, Ph.D. Thesis, Michigan State University (1965).

BERMOND, J. C., **Nombre chromatique total du graphe  $r$ -parti complet**, J. Lond. Math Soc., v. 9, pp. 279-285, 1974, <https://doi.org/10.1112/jlms/s2-9.2.279>.

BONDY, J. A., MURTY, U. S. R., **Graph Theory**, Springer Publishing Company, New York, 2008.

CHETWYND, A. G., HILTON, A. J. W., **Some refinements of the total chromatic number conjecture**, Congressus Numerantium, v. 66, pp. 195-216, 1988.

DA SILVA, A. G., et al., **Equitable total coloring of complete  $r$ -partite  $p$ -balanced graphs**, Discrete Applied Mathematics, 2018, <https://doi.org/10.1016/j.dam.2018.03.009>.

ERDŐS, P., WILSON, R. J., **Note on the chromatic index of almost all graphs**, J. Combin. Theory, v. 23, pp. 255-257, 1977, [https://doi.org/10.1016/0095-8956\(77\)90039-9](https://doi.org/10.1016/0095-8956(77)90039-9).

FU, H.-L., **Some results on equalized total colorings**. Congressus Numerantium, v. 102, pp. 111-119, 1994.

GALVIN, F., **The List Chromatic Index of a Bipartite Multigraph**, Journal of Combinatorial Series, v. 63, pp. 153-158, 1995, <https://doi.org/10.1006/jctb.1995.1011>.

GOLDBERG, M. K., **On multigraphs of almost maximal chromatic class** (in Russian). Diskret. Analiz., v. 23, pp. 3-7, 1973.

- HARARY, F., **Graph Theory**, Addison-Wesley Publishing Company, Boston, 1969.
- HIND, H., MOLLOY, M., REED, B., **Total coloring with  $\Delta + \text{poly}(\log(\Delta))$  colors**. SIAM Journal on Computing, v. 28, pp. 816–821, 1998, <https://doi.org/10.1137/S0097539795294578>.
- KEMPE, A. B., **On the geographical problem of the four colours**, Amer. J. Math., v. 2, pp. 193–200, 1879, <https://www.jstor.org/stable/2369235>.
- KÖNIG, D., **Über graphen und ihre anwendung auf determinantentheorie und mengenlehre**, Mathematische Annalen, v. 77, pp. 453–465, 1916, <https://doi.org/10.1007/BF01456961>.
- KUBALE, M., **Graph colorings**, American Mathematical Soc., 2004.
- LOPES, F. J. A., TÁBOAS, P. Z., **Euler e as pontes de Königsberg**, Revista Brasileira de História da Matemática, v. 15, pp. 23–32, 2015.
- MAFFRAY, F., **Kernels in perfect line-graphs**, Journal of Combinatorial Theory, v. 55, pp. 1–8, 1992, [https://doi.org/10.1016/0095-8956\(92\)90028-V](https://doi.org/10.1016/0095-8956(92)90028-V).
- MCKAY, B. D., MCLEOD, J. C., WANLESS, I. M., **The number of transversals in a Latin square**. Des Codes Crypt, v. 40, pp. 269–284, 2006, <https://doi.org/10.1007/s10623-006-0012-8>.
- MOLLOY, M., REED, B., **A bound on the total chromatic number**, Combinatorica, v. 18, pp. 241–280, 1998, <https://doi.org/10.1007/PL00009820>.
- ROBERTSON, N., et al., **The Four-Colour Theorem**, Journal of Combinatorial Theory, v. 70, pp. 2–44, 1997.
- SEYMOUR, P. D., **On multicolorings of cubic graphs, and conjectures of Fulkerson and Tutte**. Proc. Lond. Math. Soc., v. 38, pp. 423–460, 1979.
- SOIFER, A., **The Mathematical Coloring Book**, Springer, 2008.
- VIZING, V.G., **Some Unsolved Problems in Graph Theory**, (Russian). English Translation in Russian Math. Survey, v. 23, pp. 117–134, 1968.
- WANG, WF., **Equitable total coloring of graphs with maximum degree 3**, Graphs and Combinatorics, v. 18, pp. 677–685, 2002, <https://doi.org/10.1007/s003730200051>.
- YAP, H. P., **Total colourings of graphs**, Springer, Germany, 1996.