PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA
DO RIO DE JANEIRO

Wallace Moreira Adame

Análise do comportamento de vasos de pressão cilíndricos considerando-se a junção de Placas e Cascas

Dissertação de Mestrado

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica do Centro Técnico Científico da PUC-Rio como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Engenharia Mecânica.

Orientador: Prof. Ivan Fabio Mota Menezes

Co-orientador: Prof. Carlos Alberto de Almeida

Rio de Janeiro
Setembro de 2018

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1612787/CA

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA
DO RIO DE JANEIRO

Wallace Moreira Adame

Análise do comportamento de vasos de pressão cilíndricos considerando-se a junção de Placas e Cascas

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica do Centro Técnico Científico da PUC-Rio. Aprovada pela Comissão Examinadora abaixo assinada.

Prof. Ivan Fabio Mota Menezes
Orientador
Departamento de Engenharia Mecânica – PUC-Rio

Prof. Carlos Alberto de Almeida
Co-orientador
Departamento de Engenharia Mecânica – PUC-Rio

Prof. Anderson Pereira
Departamento de Engenharia Mecânica – PUC-Rio

Prof. Marcelo de Andrade Dreux
Departamento de Engenharia Mecânica – PUC-Rio

Prof. Márcio da Silveira Carvalho
Coordenador Setorial do Centro
Técnico Científico – PUC-Rio

Rio de Janeiro, 05 de setembro de 2018

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1612787/CA

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, do autor e do orientador.

Wallace Moreira Adame

Graduado em engenharia mecânica na Universidade Estadual do Rio de Janeiro em 2008.

Ficha Catalográfica

Adame, Wallace Moreira

Análise do comportamento de vasos de pressão cilíndricos considerando-se a junção de placas e cascas / Wallace Moreira Adame ; orientador: Ivan Fabio Mota Menezes ; co-orientador: Carlos Alberto de Almeida. – 2018.

124 f. : il. color. ; 30 cm

Dissertação (mestrado)–Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Engenharia Mecânica, 2018.

Inclui bibliografia

1. Engenharia Mecânica – Teses. 2. Cascas cilíndricas. 3. Placas circulares. 4. Cascas de paredes finas e espessas. 5. Elementos finitos. 6. Modelos axissimétricos. I. Menezes, Ivan Fabio Mota de. II. Almeida, Carlos Alberto de. III. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Engenharia Mecânica. IV. Título.

CDD: 621

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1612787/CA

Agradecimentos

A Deus, que me sustenta e conforta em todos os momentos de minha vida.

Aos meus pais, José Marcio Adame e Maria Eliza Moreira Adame, pelo incentivo nas minhas iniciativas de desenvolvimento profissional, por todo o trabalho para garantir a formação e educação dos filhos e pelos valores e ensinamentos dedicados todos esses anos.

A minha companheira, Hanny Vianna da Silva, por me apoiar nos momentos mais difíceis.

Ao meu orientador, Professor Carlos Alberto de Almeida, pela paciência, por todos os ensinamentos e compreensão durante todo este processo de orientação.

A todos os colegas e amigos que fiz durante o curso. Desejo a todos um futuro brilhante.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1612787/CA

Resumo

Adame, Wallace Moreira; Menezes, Ivan Flavio Mota; de Almeida, Carlos Alberto. **Análise do comportamento de vasos de pressão cilíndricos considerando-se a junção de Placas e Cascas.** Rio de Janeiro, 2018. 124p. Dissertação de Mestrado – Departamento de Engenharia Mecânica, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Este trabalho apresenta a análise numérica de vasos de pressão cilíndricos modelados por cascas e placas axissimétricas submetidas a carregamento de pressão interna uniformemente distribuída, utilizando-se a técnica de elementos finitos. São consideradas análises de junções entre superfícies com diferentes espessuras, tais como paredes finas (r/t>10) e moderadamente espessas (r/t<5). Os campos de deslocamento considerados são os referentes aos elementos planos axissimétricos. A partir deste modelo são avaliadas as tensões na transição entre as superfícies e os resultados comparados com soluções analíticas simplificadas. Conclui-se que a solução analítica aproximada é aceitável para uma grande faixa de valores envolvendo placas e cascas de espessuras moderadamente espessas, enquanto que, para paredes finas, a análise por elementos finitos é necessária para verificação do comportamento das tensões na junção. Testes numéricos utilizando o programa ANSYS são apresentados para demonstrar o desempenho de análises lineares axissimétricas, empregando elementos quadráticos em comparação com as soluções analíticas e avaliando também as limitações do modelo analítico na região da descontinuidade geométrica do modelo proposto.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1612787/CA

Palavras-chave

Cascas cilíndricas; placas circulares; cascas de paredes finas e espessas; elementos finitos; modelos axissimétricos.

Abstract

Adame, Wallace Moreira; Menezes, Ivan Flavio Mota (Advisor); de Almeida, Carlos Alberto (Co-Advisor). **On the analysis behaviour of cylindrical pressure vessels considering plate to shell junction.** Rio de Janeiro, 2018. 124p. Dissertação de Mestrado – Departamento de Engenharia Mecânica, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

This work presents the numerical analysis of cylindrical pressure vessels, modeled using axisymmetric shells and plates elements under internal pressure loads. The numerical analysis considers surface joints for various surface thickness ratios, from thin (r/t=10) to thick (r/t=5) shells. Element displacement fields of axisymmetric plane elements are used to evaluate the stress state at the surfaces junctions, and the obtained results are compared to simplified analytical solutions. It is concluded that analytical approximate results present an acceptable solution for a large range of plates to shells geometries up to moderately thick shells, whereas for thin shells the finite element solution is necessary to be considered in order to accurately verify the stresses at plate to shell junction. Numerical tests applying ANSYS program are presented to demonstrate the performance of linear axisymmetric analysis applying quadratic elements in comparison to the analytical solutions also evaluating the limitations of the analytical model in the region of the geometric discontinuity of the proposed model.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1612787/CA

Keywords

Axisymmetric shells and plates; thin and thick shells; finite elements; quadratic finite elements; axisymmetric linear analysis.

Sumário

1. Introdução 18

2. Definição do Problema 20

3. Modelo Matemático Analítico 22

3.1. Teoria clássica para cascas e placas de paredes finas (hipóteses de Kirchhoff) 22

3.1.1. Equação Diferencial para a deflexão radial da Casca Cilíndrica de paredes finas 23

3.1.2. Equação Diferencial para a deflexão transversal da Placa Circular de paredes finas 27

3.1.3. Flexão Axissimétrica de placas circulares de paredes finas 30

3.1.4. Condições de Contorno e Compatibilidade 33

3.1.5. Caracterização das tensões atuantes na casca e placa de paredes finas..... 36

3.2. Teoria de Mindlin-Reissner para placas moderadamente espessas 38

3.2.1. Equação Diferencial para a Deflexão transversal de Placas Cilíndricas moderadamente espessas 38

3.2.2. Condições de Contorno e Compatibilidade 41

3.3. Cilindros de Paredes Espessas – Solução de Lamé 42

3.3.1. Equação Diferencial para o deslocamento radial de cilindros de paredes espessas com extremidades livres. 43

3.3.2. Solução Particular I – Pressão externa e interna aplicadas 46

3.3.3. Solução Particular II – Cilindros de paredes espessas com extremidades fechadas 48

4. Formulação Numérica 49

4.1. Princípio dos Deslocamentos Virtuais 49

4.2. Método dos Elementos Finitos 51

4.3. Elementos Axissimétricos. 53

4.3.1. Elemento Axissimétricos – Deformações 54

4.3.2. Elemento Axissimétricos – Vetor de tensões 55

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1612787/CA

4.4. Elemento de estado plano de tensões retangular bilinear..... 56
4.4.1. Formação da Matriz de Rigidez do elemento 61
4.4.2. Vetor Carregamento – Forças de Superfície 62
4.5. Elementos Isoparamétricos 63
4.5.1. Elementos Isoparamétricos Retangulares – Funções de interpolação da Família Lagrange..... 63
4.5.2. Elementos Isoparamétricos Retangulares – Funções de interpolação da Família Serendipity..... 66
4.5.3. Formulação Isoparamétrica para Elementos Planos Lineares Axissimétricos da família de Lagrange (4 nós/8GDL)..... 67
4.5.4. Formulação Isoparamétrica para Elementos Planos Parabólicos Axissimétricos da família de Lagrange (9 nós/18GDL) 72

5. Resultados..... 76
5.1. Modelo Proposto para o caso Paredes Finas..... 76
5.1.1. Análise de Convergência da Malha para o modelo de paredes finas.....77
5.1.2. Resultados Obtidos para Casca & Placa de Paredes Finas..... 79
5.2. Modelo Proposto para o caso Placas Moderadamente Espessas e Cascas de Paredes Finas..... 83
5.2.1. Análise de Convergência da Malha para o modelo de casca de paredes finas e placa moderadamente espessa..... 84
5.2.2. Resultados Obtidos para Casca de Paredes Finas e Placa moderadamente espessa. 86
5.3. Modelo Proposto para o caso Casca Moderadamente Espessa e Placa de paredes finas. 89
5.3.1. Análise de Convergência da Malha para o modelo de casca de paredes moderadamente espessa e placa de paredes finas..... 90
5.3.2. Resultados Obtidos para Casca de Paredes Moderadamente Espessas e Placa de Paredes Finas..... 92
5.3.3. Modelo Proposto para o caso Casca e Placa Moderadamente Espessas..... 98
5.3.4. Análise de Convergência da Malha para o modelo de casca e placa moderadamente espessa. 99
5.3.5. Resultados Obtidos para o caso Casca e Placa Moderadamente Espessa..... 101

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1612787/CA

6. Concentração de tensões na região de descontinuidade geométrica do modelo 110

7. Conclusão 113

8. Referências bibliográficas..... 115

Anexo I – Cálculo dos esforços internos M0 e Q0 117

Apêndice I – Refinamento da malha (tp/tc=1) x SCFs (Ansys® V18.1).. 122

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1612787/CA

Lista de Figuras

Figura 1 - Tanques de armazenamento 20
Figura 2 - Forças e momentos atuantes em uma seção da casca cilíndrica .. 23
Figura 3 - Coordenadas polares em placas circulares 27
Figura 4 - Forças e momentos atuantes em uma seção da placa circular 29
Figura 5 - Esforços atuando na casca cilíndrica e na tampa plana 33
Figura 6 - Cilindro de paredes espessas com as extremidades fechadas 43
Figura 7 - Elemento infinitesimal – Cilindro de paredes Espessas. 44
Figura 8 - Vaso de pressão paredes espessas - Pressão externa e interna aplicada. 46
Figura 9 - Corpo sólido 3D com elemento sólido de 8 nós 51
Figura 10 - Estrutura axissimétrica com seção transversal de origem. 53
Figura 11 - Sistema de coordenadas cilíndricas. 54
Figura 12 - Volume Elementar 55
Figura 13 - Elemento retangular bilinear. 56
Figura 14 - Deformação elemento retangular bilinear. 57
Figura 15 - Graus de liberdade do elemento retangular bilinear 58
Figura 16 - Representação da atuação das forças de superfície. 63
Figura 17 - Ordem do Polinômio de Lagrange. 64
Figura 18 - Seleção dos termos no triângulo de Pascal para elementos finitos da família *Lagrangeana* 64
Figura 19 - Exemplo de elementos finitos bilinear da família de Lagrange 65
Figura 20 - Sequência de numeração nodal adotada para o elemento isoparamétrico bilinear de Lagrange. 66
Figura 21 - Exemplo de elementos finitos bilinear da família Serendipity 66
Figura 22 - Seleção dos termos no triângulo de Pascal para elementos finitos da família Serendipity. 67
Figura 23 - Elemento Finito Isoparamétrico bilinear 68
Figura 24 - Gráfico das funções $N_i\eta, \xi$ – Elemento Bilinear de Lagrange 69
Figura 25 - Elemento Finito Isoparamétrico Bilinear 72
Figura 26 - Funções de Interpolação para elemento plano 9 nós 73
Figura 27 - Elemento Plano Isoparametrico com 16 nós Lagrangeano. 75

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1612787/CA

Figura 28 - Modelo Axissimétrico 76
Figura 29 - Convergência para o deslocamento radial máximo da casca (x/h=0.5) 78
Figura 30 - Convergência para o deslocamento transversal máximo da placa (r=0) 78
Figura 31 - Deflexão da casca cilíndrica (R/tc>10) – Resultados obtidos a partir da superfície média 79
Figura 32 - Deflexão transversal máxima da placa (R/tp>10) – plano médio.. 80
Figura 33 - Tensões circunferênciais ao longo da casca cilíndrica (R/tc>10) – superfície média 81
Figura 34 - a) Distribuição das tensões equivalentes de von Mises; b) Distribuição das tensões axiais afastado da extremidade. 81
Figura 35 - Distribuição das tensões de axiais na junta casca e placa de paredes finas. 82
Figura 36 - Tensões circunferenciais desenvolvidas no plano superior da placa 83
Figura 37 - Modelo Axissimétrico – Placa Moderadamente Espessa (R/tp<5) x Casca paredes finas (R/tc>10) 83
Figura 38 - Convergência para o deslocamento radial máximo da casca (x/h=0.5) 85
Figura 39 - Convergência para o deslocamento transversal máximo da placa (r=0). 85
Figura 40 - Deflexão da casca cilíndrica (R/tc>10) – Resultados obtidos a partir da superfície média 86
Figura 41 - Deflexão transversal máxima da placa moderadamente espessa (R/tp<5) – plano médio. 87
Figura 42 - Tensões circunferênciais ao longo da casca cilíndrica (R/tc>10) – superfície média 87
Figura 43 - a) Distribuição das tensões equivalentes de von Mises; b) Distribuição das tensões axiais afastado da extremidade 88
Figura 44 - Distribuição das tensões de axiais na junta casca de paredes finas e placa moderadamente espessa. 88
Figura 45 - Tensões circunferenciais desenvolvidas na superfície superior da placa moderadamente espessa (R/tp<5) 89

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1612787/CA

Figura 46 - Modelo Axissimétrico – Placa de paredes finas e casca moderadamente espessas. 90
Figura 47 - Convergência para o deslocamento radial máximo da casca (x/h=0.5). 91
Figura 48 - Convergência para o deslocamento transversal máximo da placa (r=0). 92
Figura 49 - Deslocamento radial da casca cilíndrica moderadamente espessa (R/tc<5) - superfície média. 93
Figura 50 - Deflexão transversal máxima da placa de paredes finas (R/tp>10) – Superfície média. 94
Figura 51 - Tensões circunferênciais ao longo da casca cilíndrica moderadamente espessa – superfície média 95
Figura 52 - a) Tensões equivalentes de von Mises; b) Linearização das tensões de von Mises 95
Figura 53 - Linearização das tensões na casca moderadamente espessa 96
Figura 54 - Distribuição das tensões longitudinais afastado da extremidade 97
Figura 55 - Distribuição das tensões de axiais na junta casca moderadamente espessa (R/tc<5) e placa de paredes finas (R/tp>10). 97
Figura 56 - Tensões circunferenciais desenvolvidas na superfície superior da placa 98
Figura 57 - Modelo Axissimétrico – Placa & Casca Moderadamente Espessa 99
Figura 58 - Convergência para o deslocamento radial máximo da casca (x/h=0.5). 100
Figura 59 - Convergência para o deslocamento transversal máximo da placa (r=0). 101
Figura 60 - Deflexão da casca cilíndrica moderadamente espessa (R/tc<5) - superficie média. 102
Figura 61 - Deflexão transversal máxima da placa moderadamente espessa (R/tp<5) – plano médio. 103
Figura 62 - Tensões circunferênciais ao longo da casca cilíndrica moderadamente espessa – superfície média. 104
Figura 63 - a) Tensões equivalentes de von Mises b) Localização da linearização das tensões de von Mises 104

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1612787/CA

Figura 64 - Linearização das tensões de von Mises – Casca e Placa Moderadamente Espessas. 105
Figura 65 - Distribuição das tensões longitudinais afastado da extremidade 105
Figura 66 - Distribuição das tensões axiais na junta da casca e placa moderadamente espessas..... 106
Figura 67 - Variação das tensões radiais na casca cilíndrica de paredes moderadamente espessas (x/h=0.5) 106
Figura 68 - Variação das tensões circunferenciais na casca cilíndrica de paredes moderadamente espessas (x/h=0.5)..... 107
Figura 69 - Variação das Tensões de Cisalhamento máxima na casca cilíndrica de paredes moderadamente espessas (x/h=0.5)..... 107
Figura 70 - Variação do deslocamento radial na casca cilíndrica de paredes moderadamente espessas (x/h=0.5). 108
Figura 71 - Tensões circunferenciais desenvolvidas no plano superior da placa 109
Figura 72 - Fatores de Concentração de tensões..... 111
Figura 73 - Refinamento da malha para valores crescentes de SCF.....124

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1612787/CA

Lista de Tabelas

Tabela 1 - Parâmetros Geométricos e Propriedades Mecânicas 21
Tabela 2 - Condições de contorno e compatibilidade..... 34
Tabela 3 - Condições de contorno e compatibilidade..... 41
Tabela 4 - Adição de nós elemento bilinear 65
Tabela 5 - Análise de Convergência – Modelo Paredes Finas..... 77
Tabela 6 - Análise de Convergência – Modelo Paredes Moderadamente Espessas (Placa) 84
Tabela 7 - Análise de Convergência – Modelo Paredes Moderadamente Espessas (Placa) 91
Tabela 8 - Análise de Convergência – Modelo Placa e Casca Moderadamente Espessas..... 100
Tabela 9 - Fatores de concentração de tensão 110
TABELA 10 - SCF para a razão tp/tc = ¼.....111

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1612787/CA

Lista de Símbolos

n	Avaliador de rigidez da tampa plana e cilindro
p_{int}	Pressão interna (MPa)
ri	Raio interno (m)
r	Raio médio (m)
ri	Raio interno (m)
r	Raio médio (m)
R	Raio externo (m)
t_c	Espessura da casca cilíndrica (mm)
h	Altura da casa cilíndrica (m)
t_t	Espessura da tampa plana (mm)
L	Diâmetro externo da tampa plana (m)
ν	Coeficiente de Poisson
E	Módulo de Elasticidade (GPa)
G	Módulo de Cisalhamento (GPa)
Ks	Fator de correção ao cisalhamento
S_E	Limite de Escoamento (MPa)
S_R	Tensão de Ruptura (MPa)
x, y, z	Componentes cartesianas
r, θ, ζ	Componentes locais
N_x, N_y, N_z	Componente de força de membrana por unidade de comprimento
M_x, M_y, M_z	Componente de momento fletor por unidade de comprimento
ϵ_x, ϵ_y, ϵ_z	Componente de deslocamento
Q_x, Q_y, Q_z	Componente de esforço cortante por unidade de comprimento
M_r, M_θ, M_t	Componente de momento fletor por unidade de comprimento em coordenadas polares
$\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_t$	Componente de tensão radial, circunferencial e tangencial
θ_c	Rotação da casca cilíndrica

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1612787/CA

θ_t	Rotação da tampa plana
M_0	Momento fletor na junção
N_1	Força de membrana na junção na direção x
w_c	Deslocamento radial da casca cilindrica
w_t	Deslocamento radial da tampa plana
Π	Indicador funcional da energia potencial total
$\overline{U}^{(m)}$	Vetor deslocamento nodal
$\overline{\epsilon}^{(m)}$	Tensor de deformações
$B^{(m)}$	Matriz de compatibilidade geométrica
$k^{(m)}$	Matriz de rigidez global
R	Vetor carregamento nodal
$C^{(m)}$	Matriz Constitutiva
$H^{(m)}$	Matriz função de interpolação dos deslocamentos
δ	Vetor deslocamento nodal
N_i	Função de interpolação lagrangeana
J	Matriz Jacobiana
k_e	Matriz de rigidez do elemento
v	Coeficiente de Poisson

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1612787/CA

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1612787/CA

A menos que modifiquemos a nossa maneira de pensar, não seremos capazes de resolver os problemas causados pela forma como nos acostumamos a ver o mundo.

Albert Einstein

1.
Introdução

O emprego de modelos axissimétricos na engenharia para estudar o comportamento de estruturas submetidas a carregamentos axissimétricos tem sido comumente feito em diversas áreas de aplicação [1], principalmente em função da relação entre a eficiência e a simplificação conferida ao modelo através de uma análise 2D e da precisão dos resultados obtidos [2].

Algumas estruturas nas áreas de engenharia podem ser modeladas como estruturas axissimétricas, dentre elas destacam-se vasos de pressão, conexões bipartidas, conectores, válvulas, entre outros, são normalmente representadas por modelos de cascas e placas cilíndricas. A utilização do Método de Elementos Finitos para análise de estruturas axissimétricas utilizando elementos planos isoparamétricos é reportada na literatura [3].

Equipamentos de processo com tampas planas são utilizados em vasos de pressão cilíndricos principalmente em função da facilidade na fabricação desses tipos de tampo. No entanto, sua aplicação limita-se a baixas pressões de serviço em função das tensões localizadas na região de descontinuidade acentuada na junção entre os modelos de casca e placa.

A avaliação do comportamento desse tipo de estrutura é proposta por algumas referências, entre elas [4] e [5]. Elas propõem a utilização de grupos adimensionais com objetivo de obter os esforços internos e as tensões atuantes para o caso de vasos de paredes finas. Em [6] utiliza-se da combinação de variáveis envolvendo os esforços aplicados à estrutura tanto para o caso de paredes finas quanto moderadamente espessas, fazendo uso ainda de algumas constantes para discretizar o comportamento na junção.

Atualmente novas formulações de elementos finitos utilizando o método das penalidades estão sendo desenvolvidas para analisar o comportamento na junção de estruturas envolvendo os modelos de placas e cascas através de elementos de cascas isoparamétricos [7].

O objetivo deste trabalho é comparar o resultado da distribuição de tensões e deslocamentos obtidos para um vaso de pressão composto por superfícies cilíndricas e tampas planas de espessuras variáveis com o modelo analítico proposto, verificando também o comportamento das tensões na região da junção por meio da técnica de análise por elementos finitos.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1612787/CA

O presente trabalho está organizado da seguinte forma:

A seção 2 apresenta as características geométricas e propriedades mecânicas do modelo proposto para análise.

Na seção 3 são apresentados, através de uma revisão bibliográfica, os conceitos básicos sobre cascas e placas de dimensões de espessura correspondentes a paredes finas, moderadamente espessas e espessas, além de equações diferenciais para o deslocamento, condições de contorno e compatibilidade para as diversas combinações entre placas e cascas. Nesta seção, apresenta-se o modelo matemático analítico.

Na seção 4 é feita uma introdução aos conceitos básicos do Método dos Elementos Finitos e a sua formulação. Nessa seção é obtida a equação de equilíbrio do sistema empregando o Princípio dos Deslocamentos Virtuais, e através de técnicas de discretização são obtidas as equações do equilíbrio estático representado pelas matrizes e vetores associados ao problema axissimétrico correspondente.

A seção 5 apresenta os resultados comentados obtidos através de simulações utilizando o programa comercial Ansys®, empregando os elementos quadráticos de 8 nós *PLANE183*, que possibilita representar o campo de deslocamentos devido aos esforços de flexão aplicados na estrutura adequadamente e os compara com o modelo teórico descrito na seção 2 e suas limitações. O elemento proposto é indicado para análises axissimétricas e possui graus de liberdade suficientes para representar os efeitos de flexão que a estrutura é submetida.

Com relação à malha proposta, para cada modelo um estudo de convergência é apresentado para verificação do comportamento dos deslocamentos radiais e transversais obtidos na casca cilíndrica e na tampa plana, respectivamente.

A seção 6 apresenta os resultados relacionados à região da junção entre os modelos de placas e cascas com diferentes espessuras.

Finalmente na seção 7 apresentam-se as devidas conclusões e propostas para desenvolvimentos de trabalhos futuros.

Por fim, são dadas as referências bibliográficas.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1612787/CA

2.
Definição do Problema

O problema em estudo trata da combinação de um cilindro e tampa plana de espessuras variadas entre paredes finas e espessas submetidos à pressão interna, ilustrativamente apresentado na Figura 1 por tanques de armazenamento.

Figura 1: Tanques de Armazenamento

Observa-se uma descontinuidade na interface entre a casca cilíndrica e a tampa plana. É proposto, então, um modelo de discretização do problema considerando a presença da pressão interna aplicada ao modelo. A solução analítica é investigada para obter a equação que rege o deslocamento da casca cilíndrica e da tampa plana. Por fim, a modelagem em elementos finitos é avaliada e seus resultados estudados, discutidos e comparados com o analítico.

A Tabela 1 apresenta as propriedades geométricas e mecânicas da casca e placa (tampa plana) cilíndricas.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1612787/CA

Parâmetro (unidade)	Símbolo	Valor	
Avaliador de rigidez da tampa plana e cilindro	n	*1* (paredes finas)	*2* (paredes espessas)
Pressão interna (MPa)	p_{int}	*2.5*	
Raio interno (m)	ri	*0.275*	
Raio médio (m)	r	*0.287*	
Raio externo (m)	R	*0.3*	
Espessura da casca cilíndrica (mm)	t_c	*25,4*	*50,8*
Altura da casa cilíndrica (m)	h	*1*	
Espessura da tampa plana (mm)	t_t	*25,4*	*50,8*
Diâmetro externo da tampa plana (m)	L	*0.6*	
Coeficiente de Poisson	ν	*0,3*	
Módulo de Elasticidade (GPa)	E	*200*	
Módulo de Cisalhamento (GPa)	G	*76,92*	
Fator de correção ao cisalhamento	Ks	*0.83*	
Limite de Escoamento (MPa)	S_E	*470*	
Tensão de Ruptura (MPa)	S_R	*745*	

Tabela 1: Parâmetros Geométricos e Propriedades Mecânicas

As propriedades mecânicas mencionadas na tabela acima são características do aço AISI 4340, muito utilizado na indústria de óleo e gás.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1612787/CA

3.
Modelo Matemático Analítico

Nesta seção são apresentados os conceitos básicos sobre cascas e placas necessários para descrever o comportamento destes modelos quando submetidos à ação da pressão interna, considerando ainda o efeito na variação da espessura tanto para a casca quanto para a placa. Também são apresentadas as equações diferenciais para o deslocamento, condições de contorno e compatibilidade para as diversas combinações entre placas e cascas.

3.1
Teoria clássica para cascas e placas de paredes finas (hipóteses de *Kirchhoff*)

A teoria clássica proposta por [9] e posteriormente desenvolvida por outros autores, como por exemplo em [10], avalia o comportamento de paredes finas e é válida se estes deslocamentos da placa ou casca são pequenos quando comparados à espessura. Sendo assim, uma boa aproximação do comportamento de flexão pode ser feita, considerando somente deformações devido à flexão, tomando as seguintes considerações segundo o modelo proposto por Kirchhoff:

O plano médio pode ser considerado indeformável, permanecendo neutro durante a flexão. Isso é válido se os deslocamentos transversais são pequenos quando comparados à espessura da placa.

Retas normais ao plano médio da placa ou casca indeformada deverão continuar sendo consideradas normais ao plano médio deformado (desprezando assim as distorções devido ao cisalhamento).

As tensões axiais podem ser desprezadas.

Com essas considerações, o problema é traduzido matematicamente em um operador diferencial de quarta ordem, que pode ser solucionado impondo-se duas condições de contorno para as extremidades tendo, ainda, todas as componentes de tensão expressas em termos dos deslocamentos transversais.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1612787/CA

3.1.1
Equação Diferencial para a deflexão radial da Casca Cilíndrica de paredes finas

A Figura 2 ilustra uma vista em corte da casca cilíndrica. Por simetria observa-se que os esforços atuantes nas extremidades da casca são constantes:

$$N_{x\varphi} = N_{\varphi x}$$

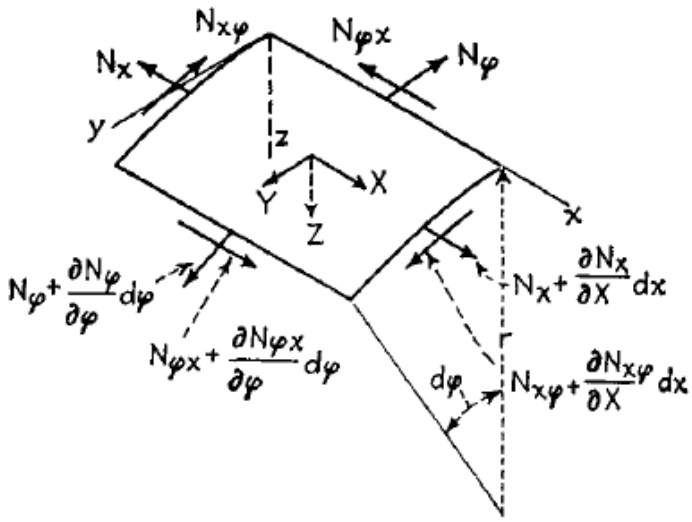


Figura 2: Forças e momentos atuantes em uma seção da casca cilíndrica [9]

Através do equilíbrio de forças e momentos, considerando a simetria observada na Figura 2, três equações resultam da projeção de forças e momentos em relação ao eixo y:

$$\frac{dN_x}{dx} R dx d\varphi = 0 \tag{3.0}$$

$$\frac{dQ_x}{dx} R dx d\varphi + N_\varphi dx d\varphi + p_{int} R dx d\varphi = 0 \tag{3.1}$$

$$\frac{dM_x}{dx} R dx d\varphi - Q_x R dx d\varphi = 0 \tag{3.2}$$

A equação (3.0) indica que as forças de membrana N_x são constantes, uma vez que suas derivadas são nulas. O efeito da flexão influenciada por estas forças é suposto desprezível. Portanto, tem-se:

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1612787/CA

$$\frac{dQ_x}{dx} + \frac{1}{R}N_\varphi = -p_{int} \tag{3.3}$$

$$\frac{dM_x}{dx} - Q_x = 0 \tag{3.4}$$

O conjunto de equações (3.3) e (3.4) fornece três incógnitas: N_φ, Q_x e M_x. Para resolver este problema é preciso considerar os deslocamentos u, v e w nas respectivas direções x, y e z.

$$\varepsilon_x = \frac{du}{dx} \tag{3.5}$$

$$\varepsilon_y = \frac{dv}{dy} \tag{3.6}$$

$$\varepsilon_z = \frac{dw}{dz} \tag{3.7}$$

$$\varepsilon_\varphi = -\frac{w}{R} \tag{3.8}$$

No entanto, somente os deslocamentos u e w ocorrem. O deslocamento circunferencial φ pode ser desprezado [10]. Aplicando a Lei de Hooke às expressões (3.3) e (3.4) resulta-se nos esforços de membrana axial N_x e circunferencial N_φ respectivamente:

$$N_x = \frac{Et_c}{1-\nu^2}\left(\varepsilon_x + \nu\varepsilon_\varphi\right) = \frac{Et_c}{1-\nu^2}\left(\frac{du}{dx} - \nu\frac{w}{R}\right) = 0 \tag{3.9}$$

$$N_\varphi = \frac{Et_c}{1-\nu^2}\left(\varepsilon_\varphi + \nu\varepsilon_x\right) = \frac{Et_c}{1-\nu^2}\left(-\frac{w}{R} + \nu\frac{du}{dx}\right) \tag{3.10}$$

Das expressões (3.9) e (3.10) conclui-se que:

$$\frac{du}{dx} = \nu\frac{w}{R}$$

$$N_\varphi = -\frac{Et_c w}{R} \tag{3.11}$$

Considerando o efeito do momento fletor, observa-se, também por simetria, que não existe mudança na curvatura na direção circunferencial. A curvatura na direção x, por sua vez, está relacionada com a segunda derivada em w:

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1612787/CA

$$M_x = -D_c \frac{d^2 w}{dx^2}$$
$$M_\varphi = \nu M_x \tag{3.12}$$

onde D_c representa a rigidez à flexão da casca cilíndrica:

$$D_c = \frac{E {t_c}^3}{12(1-\nu^2)}; \quad [Nm]$$

As tensões radiais e circunferenciais atuando na casca cilíndrica são dadas por:

$$\sigma_r = \frac{N_x}{t_c} + \frac{6M_x}{t_c^3}$$
$$\sigma_\varphi = \frac{N_\varphi}{t_c} + \frac{6M_\varphi}{t_c^3} \tag{3.13}$$

Como o cortante é dado pela derivada do momento fletor, substituindo esta relação na equação (3.3) e, em seguida, usando-se as expressões (3.10) e (3.13) para as variáveis N_φ e M_x, finalmente, obtém-se a fórmula para cascas cilíndricas com carregamento axissimétrico, dada na equação abaixo.

$$Q_x = \frac{dM_x}{dx} \rightarrow \frac{d^2 M_x}{dx^2} + \frac{1}{R} N_\varphi = -p_{int}$$
$$\Downarrow$$
$$\frac{d^2}{dx^2}\left(D_c \frac{d^2 w}{dx^2}\right) + \frac{E t_c w}{R^2} = p_{int} \tag{3.14}$$

Assumindo a espessura da casca t_c uniforme, a equação (3.14) é resumida à:

$$D_c \frac{d^4 w}{dx^4} + \frac{E t_c w}{R^2} = p_{int} \tag{3.15}$$

Em [10], recomenda-se reescrever a equação (3.15) em função do coeficiente β, o qual representa os parâmetros geométricos envolvidos no problema representado por:

$$\beta^4 = \frac{3(1-\nu^2)}{R^2 {t_c}^2}; \quad [1/m]$$

A equação (3.15) passa, então, a ser:

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1612787/CA

$$\frac{d^4w}{dx^4} + 4\beta^4 w = \frac{p_{int}}{D_c} \tag{3.16}$$

A solução da equação (3.16) é dada pela soma entre as parcelas homogênea e particular:

$$w = w_h + w_p \tag{3.17}$$

A solução homogênea é do tipo: $w_h = Ce^{kx}$. Conforme [10], recomenda-se reescrever a equação (3.16) na forma a seguir:

$$\frac{d^4w}{dx^4} + 4\beta^4 w = 0 \rightarrow k^4 + 4\beta^4 = 0$$

A solução será do tipo:

$$k_{1,2} = (1 \pm i)\beta, k_{3,4} = -(1 \pm i)\beta$$

Assim, a solução homogênea passa a ser escrita da seguinte forma:

$$w_h = e^{\beta x}\left(C_1 e^{i\beta x} + C_2 e^{-i\beta x}\right) + e^{-\beta x}\left(C_3 e^{i\beta x} + C_4 e^{-i\beta x}\right),$$

sendo $C_1, \dots C_4$ constantes de integração.

Aplicando a formulação de Euler, a solução homogênea passa a ser função de senos e cossenos:

$$e^{i\varphi} = cos\varphi + isen\varphi, e^{-i\varphi} = cos\varphi - isen\varphi$$

$$\Downarrow$$

$$w_h = e^{-\beta x}\left(A_1 sen(\beta x) + A_2 cos(\beta x)\right) + e^{\beta x}\left(A_3 sen(\beta x) + A_4 cos(\beta x)\right) \tag{3.18}$$

A solução particular da equação (3.17) está associada ao carregamento que a casca cilíndrica está submetida. Para o problema em questão, a pressão interna é a única carga atuante. Logo,

$$w_p = \frac{p_{int}}{4\beta^4 D_c} = \frac{p_{int}R^2}{Et_c}\left(1 - \frac{\nu}{2}\right) \tag{3.19}$$

A solução geral corresponde à soma das parcelas homogênea e particular equação:

$$w(x) = e^{-\beta x}\left(A_1 sen(\beta x) + A_2 cos(\beta x)\right) + e^{\beta x}\left(A_3 sen(\beta x) + A_4 cos(\beta x)\right) + \frac{p_{int}R^2}{Et_c}\left(1 - \frac{\nu}{2}\right) \tag{3.20}$$

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1612787/CA

Ou ainda em termos de funções hiperbólicas:

$$w(x) = C_1 sen(\beta x) \cdot senh(\beta x) + C_2 sen(\beta x) \cdot cosh(\beta x) + C_3 cos(\beta x) \cdot senh(\beta x) + C_4 cos(\beta x) \cdot cosh(\beta x) + \frac{p_{int} R^2}{E t_c}\left(1 - \frac{\nu}{2}\right) \quad (3.21)$$

$C_1, \dots, C_4$ são constantes obtidas a partir das condições de contorno.

3.1.2
Equação Diferencial para a deflexão transversal da Placa Circular de paredes finas

Problemas axissimétricos caracterizam-se por possuir geometrias com eixo único de simetria e obtidas da rotação de uma área entorno deste eixo. Além de estarem submetidas a carregamentos com estas mesmas características de simetria e sob similares condições de contorno.

Devido a estas características geométricas em problemas axissimétricos as relações básicas são representadas em coordenadas polares. Desta forma, as coordenadas polares (r, θ) relacionam-se com as coordenadas cartesianas *(x,y)* através das seguintes equações, conforme mostrado na Figura 3:

$$x = r cos(\theta) \qquad r = (x^2 + y^2)^{1/2} \quad (3.22)$$

$$y = r sin(\theta) \qquad \theta = arctang\left(\frac{y}{x}\right) \quad (3.23)$$

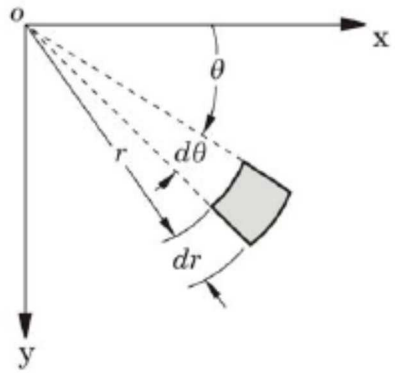


Figura 3: Coordenadas polares em placas circulares [10]

Pode-se ainda definir:

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1612787/CA

$$\frac{dr}{dx} = \frac{x}{r} = cos(\theta) \qquad \frac{dr}{dy} = \frac{y}{r} = sin(\theta) \tag{3.24}$$

$$\frac{d\theta}{dx} = -\frac{y}{r^2} = -\frac{sin(\theta)}{r} \qquad \frac{d\theta}{dy} = \frac{x}{r^2} = \frac{cos(\theta)}{r} \tag{3.25}$$

Considerando que o deslocamento vertical é uma função de r e θ, as equações acima conduzem a:

$$\frac{dw}{dx} = \frac{dw}{dr}\frac{dr}{dx} + \frac{dw}{d\theta}\frac{d\theta}{dx} \quad ou \quad \frac{dw}{dx} = \frac{dw}{dx}\cos(\theta) - \frac{1}{r}\frac{dw}{d\theta}sin(\theta) \tag{3.26}$$

Para avaliar a segunda derivada $\frac{d^2w}{dx^2}$ é necessário repetir o mesmo procedimento empregado na equação (3.26).

$$\frac{d^2w}{dx^2} = = \cos(\theta)\frac{d}{dr}\left(\frac{dw}{dx}\right) - \frac{1}{r}sin(\theta)\frac{d}{d\theta}\left(\frac{dw}{dx}\right) \tag{3.27}$$

Desenvolvendo a expressão acima,

$$\frac{d^2w}{dx^2} = \frac{d^2w}{dr^2}\cos^2(\theta) - 2\frac{d^2w}{d\theta dr}\frac{sin\theta cos\theta}{r} + \frac{dw}{dr}\frac{\sin^2(\theta)}{r} + 2\frac{dw}{d\theta}\frac{sin\theta cos\theta}{r^2} + \frac{d^2w}{d\theta^2}\frac{\sin^2\theta}{r^2} \tag{3.28}$$

Similarmente,

$$\frac{d^2w}{dy^2} = \frac{d^2w}{dr^2}\sin^2(\theta) - 2\frac{d^2w}{d\theta dr}\frac{sin\theta cos\theta}{r} + \frac{dw}{dr}\frac{\cos^2(\theta)}{r} + 2\frac{dw}{d\theta}\frac{sin\theta cos\theta}{r^2} + \frac{d^2w}{d\theta^2}\frac{\cos^2\theta}{r^2} \tag{3.29}$$

$$\frac{d^2w}{dxdy} = \frac{d^2w}{dr^2}\sin(\theta)cos(\theta) + \frac{d^2w}{d\theta dr}\frac{cos2\theta}{r} - \frac{dw}{d\theta}\frac{\cos(2\theta)}{r^2} - \frac{dw}{dr}\frac{sin\theta cos\theta}{r} - \frac{d^2w}{d\theta^2}\frac{\sin\theta cos\theta}{r^2} \tag{3.30}$$

Substituindo as equações (3.28) e (3.29) na equação (3.30) obtém-se o operador laplaciano na forma:

$$\nabla^2 w = \left(\frac{d^2w}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dw}{dr} + \frac{1}{r^2}\frac{d^2w}{d\theta^2}\right) \tag{3.31}$$

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1612787/CA

Os momentos e forças de cisalhamento em um elemento infinitesimal de espessura t, em coordenadas polares, são representados na Figura 4.

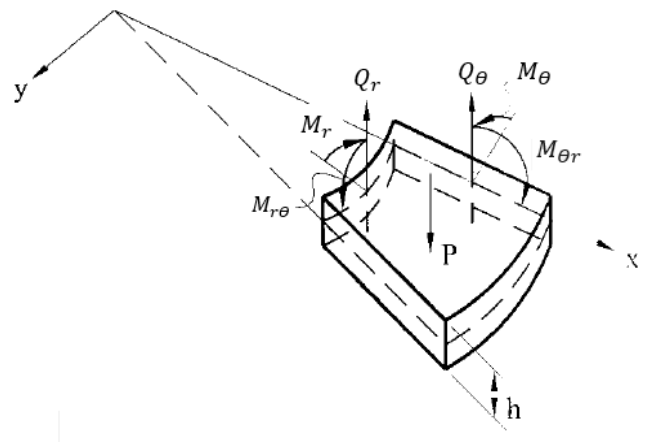


Figura 4: Forças e momentos atuantes em uma seção da placa circular [12]

Tomando-se $\theta = 0$ nas equações (3.28), (3.29) e (3.30) e substituindo nas equações abaixo, é possível obter as componentes de momento radial M_r e circunferencial M_θ e as componentes do cortante nas mesmas direções.

$$M_r = -D_t \left[\frac{d^2w}{dr^2} + v\left(\frac{1}{r}\frac{dw}{dr} + \frac{1}{r^2}\frac{d^2w}{d\theta^2}\right)\right] \tag{3.32}$$

$$M_\theta = -D_t \left[\frac{1}{r}\frac{dw}{dr} + \frac{1}{r^2}\frac{d^2w}{d\theta^2} + v\frac{d^2w}{dr^2}\right] \tag{3.33}$$

$$M_{\theta r} = -(1-v)D_t \left[\frac{1}{r}\frac{d^2w}{drd\theta} - \frac{1}{r^2}\frac{dw}{d\theta}\right] \tag{3.34}$$

$$Q_r = -D_t \frac{d}{dr}\left[\nabla^2 w\right] \tag{3.35}$$

$$Q_\theta = -D_t \frac{1}{r}\frac{d}{d\theta}\left[\nabla^2 w\right] \tag{3.36}$$

onde D_t representa a rigidez à flexão da placa $-D_t = \frac{Et_t^3}{12(1-v^2)}$.

As componentes de tensão para o estado plano podem ser expressas da seguinte forma:

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1612787/CA

$$\sigma_r = \frac{12M_r}{t^3}\, z \qquad \sigma_\theta = \frac{12M_\theta}{t^3}\, z \qquad \tau_{r\theta} = \frac{12M_{r\theta}}{t^3}\, z \tag{3.37}$$

Portanto, a equação diferencial para a deflexão transversal de placas circulares em coordenadas polares é:

$$\nabla^4 w = \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr} + \frac{1}{r^2}\frac{d^2}{d\theta^2}\right)\left(\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr} + \frac{1}{r^2}\frac{d^2 w}{d\theta^2}\right) = \frac{p}{D_t} \tag{3.38}$$

3.1.3
Flexão Axissimétrica de placas circulares de paredes finas

Quando um carregamento e as condições de apoio aplicadas à placa circular são independentes do ângulo θ, a deflexão da placa e as tensões resultantes irão depender somente da posição radial *r* da placa. Tal comportamento é característico de placas axissimétricas sob flexão e as simplificações abaixo são aplicáveis:

$$\frac{\partial^k (M_\theta)}{\partial \theta^k} = M_{r\theta} = Q_\theta = 0; k = 1,2,3,4. \tag{3.39}$$

Os momentos e forças de cisalhamento em uma placa circular sob carregamento axissimétrico são dados pelas equações a seguir:

$$M_r = -D_t\left[\frac{d^2 w}{dr^2} + v\left(\frac{1}{r}\frac{dw}{dr}\right)\right] \tag{3.40}$$

$$M_\theta = -D_t\left[\frac{1}{r}\frac{dw}{dr} + v\frac{d^2 w}{dr^2}\right] \tag{3.41}$$

$$Q_r = -D_t\,\frac{d}{dr}\left[\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dw}{dr}\right] = -D_t\,\frac{d}{dr}\left[\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r}\frac{dw}{dr}\right)\right] \tag{3.42}$$

As equações para obter as tensões radiais e circunferenciais atuando numa placa circular com carregamento axissimetrico são respectivamente:

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1612787/CA

$$\sigma_r = -z\frac{E}{1-v^2}\left(\frac{d^2w}{dr^2}+\frac{v}{r}\frac{dw}{dr}\right) \tag{3.43}$$

$$\sigma_\Theta = -z\frac{E}{1-v^2}\left(\frac{1}{r}\frac{dw}{dr}+v\frac{d^2w}{dr^2}\right) \tag{3.44}$$

As deformações por sua vez em coordenadas polares são:

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E}\left(\sigma_r + v\sigma_\Theta\right) \tag{3.45}$$

$$\varepsilon_\Theta = \frac{1}{E}\left(\sigma_\Theta + v\sigma_r\right) \tag{3.46}$$

$$\gamma_{r\Theta} = \frac{\tau_{r\Theta}}{G} \tag{3.47}$$

Utilizando o operador Laplaciano e considerando as simplificações adotadas para o caso da placa circular com carregamento axissimétrico, pode-se escrever novamente a equação diferencial de 4 ordem da deflexão:

$$\nabla^4 w = \left(\frac{d^2}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\right)\left(\frac{d^2w}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dw}{dr}\right) = \frac{p}{D_t} \tag{3.48}$$

Reescrevendo a equação (3.48) na forma:

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left\{r\frac{d}{dr}\left[\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dw}{dr}\right)\right]\right\} = \frac{p}{D} \tag{3.49}$$

A solução geral para equação (3.49) é dada pela soma da solução homogênea (w_h) com a solução particular (w_p).

A solução homogênea é dada pela expressão abaixo:

$$w_h = C_1\ln(r) + C_2 r^2\ln(r) + C_3 r^2 + C_4 \tag{3.50}$$

onde as constantes $C_1 \dots C_4$ são determinadas através das condições de contorno de cada problema.

A solução particular w_p é obtida através de sucessivas integrações da equação (3.50). No caso de carregamento uniformemente distribuído tem-se:

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1612787/CA

$$w_p = \frac{\mathrm{p}r^4}{64D_t} \tag{3.51}$$

Portanto, a solução geral para a deflexão transversal de uma placa circular de paredes finas submetida a um carregamento axissimétrico uniformemente distribuído é dada por:

$$\mathrm{w} = C_1 \ln(r) + C_2 r^2 \ln(r) + C_3 r^2 + C_4 \ + \frac{\mathrm{p}r^4}{64D_t} \tag{3.52}$$

Reescrevendo as expressões para a rotação, momento e o cortante em função das constantes:

$$\theta_t(x) = \frac{\mathrm{dw}}{\mathrm{dr}} = C_1 \frac{1}{\mathrm{r}} \ + C_2(2r\ln(r) + r) + 2C_3 r + \frac{\mathrm{p}r^3}{16D_t} \tag{3.53}$$

$$M_r = -D_t \left[-C_1 \left(\frac{1-v}{r^2} \right) + 2C_2(1+v)\ln(r) + C_2(3+v) + 2C_3(1+v) + \frac{\mathrm{p}r^2}{16D_t}(3+v) \right] \tag{3.54}$$

$$M_t = -D_t \left[-C_1 \left(\frac{1-v}{r^2} \right) + 2C_2(1+v)\ln(r) + C_2(1+3v) + 2C_3(1+v) + \frac{\mathrm{p}r^2}{16D_t}(1+3v) \right] \tag{3.55}$$

$$Q_r = -4D_t \left(C_2 \frac{1}{r} + \frac{\mathrm{p}r}{8D_t} \right) \tag{3.56}$$

Verifica-se que as constantes C1 e C2 que envolvem logaritmos produzem deslocamentos infinitos em r = 0 para todos os valores de C1 e C2 exceto zero, por isso C1=C2=0 é o único valor que satisfaz a solução geral para a deflexão da placa. Assim, a equação para a solução geral da deflexão da placa se reduz a:

$$\mathrm{w} = C_3 r^2 + C_4 \ + \frac{\mathrm{p}r^4}{64D_t} \tag{3.57}$$

As constantes C3 e C4 são determinadas através das condições de contorno do problema.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1612787/CA

3.1.4
Condições de Contorno e Compatibilidade

Esta seção apresenta a compatibilização entre os deslocamentos radiais e rotações da casca e placa cilíndrica de paredes finas através de um sistema de compatibilidade, com objetivo de se obter os esforços autoequilibrantes M_0 e Q_0.

A Figura 5 ilustra os esforços atuantes na junção (conexão) entre casca e placa, onde:

θ_c – Rotação da casca cilíndrica.

θ_t – Rotação da tampa plana.

M_0 – Momento fletor na junção.

N_0 – Força de membrana na junção na direção x.

Q_0 – Cortante na junção na direção radial.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1612787/CA

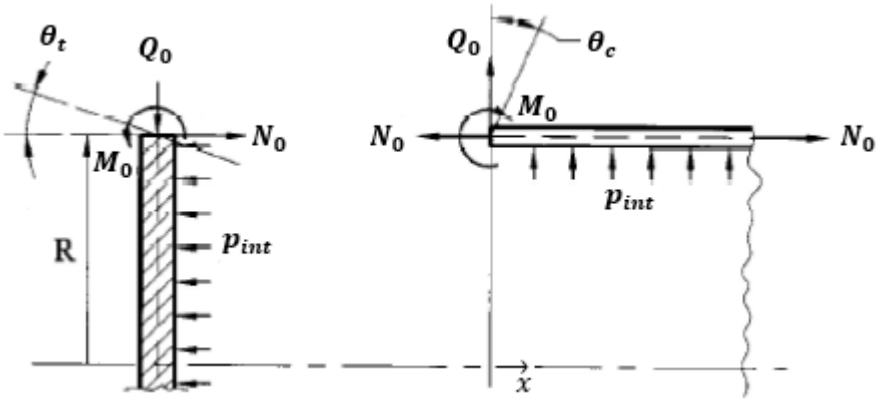


Figura 5: **Esforços atuando na casca cilíndrica e na tampa plana [12]**

As condições de contorno são apresentadas na Tabela 2. Porém, tais condições somente são válidas para cascas com grandes comprimentos, i.e., que obedecem à desigualdade abaixo:

$$L \gg 2{,}3\sqrt{Rt_c} \tag{3.58}$$

Condições de Contorno & Compatibilidade	$w_c(0,R) = w_t(0,R)$	(3.59)
	$\theta_c(0,R) = \theta_t(0,R)$	(3.60)

Tabela 2: Condições de contorno e compatibilidade

Onde, w_c e w_t representam os deslocamentos radiais da casca e da placa respectivamente.

Dado que a solução geral para a casca cilíndrica depende das constantes na equação (3.20), algumas simplificações podem ser tomadas para determinação destes parâmetros. A casca em questão atende a condição da equação (3.58), desta forma, quando avaliada na extremidade onde se encontra a tampa, $x = 0$, o segundo termo da expressão (3.20) é muito pequeno se comparado aos demais. Sendo assim, assume-se as constantes $A_3 = A_4 = 0$ e a solução geral passa a ser:

$$w(x) = e^{-\beta x}\big(A_1 sen(\beta x) + A_2 cos(\beta x)\big) + \frac{p_{int}R^2}{Et_c}\left(1 - \frac{\nu}{2}\right) \tag{3.61}$$

Vale ressaltar que, na análise dos pontos longe da extremidade, as constantes A_3 e A_4 devem ser calculadas. Por sua vez, as constantes A_1 e A_2 podem ser determinadas pelas condições abaixo para o momento fletor e cortante.

$$-D_C \frac{\partial^2 w_c}{\partial x^2}\bigg|_{x=0} = M_0 \quad \& \quad -D_C \frac{\partial^3 w_c}{\partial x^3}\bigg|_{x=0} = Q_0$$

Derivando a equação (3.61) duas e três vezes, encontra-se:

$$A_1 = \frac{M_0}{2\beta^2 D_c}; \quad A_2 = \frac{1}{2\beta^3 D_c}(Q_0 + \beta M_0) \tag{3.62}$$

Reescrevendo a solução geral para a deflexão da casca cilíndrica em função dos valores encontrados para as constantes:

$$w(x) = \frac{M_0}{2\beta^2 D_c} e^{-\beta x}\big(sen(\beta x) - cos(\beta x)\big) + \frac{Q_0}{2\beta^3 D_c} e^{-\beta x} cos(\beta x) - \frac{p_{int}R^2}{Et_c}\left(1 - \frac{\nu}{2}\right) \tag{3.6}$$

Reescrevendo as equações para rotação, momentos fletores e esforço cortante da casca cilíndrica, tem-se:

$$\theta_c(x) = \frac{dw}{dx} = \frac{M_0}{\beta D_c} e^{-\beta x}\big(cos(\beta x)\big) - \frac{Q_0}{2\beta^2 D_c} e^{-\beta x}(cos(\beta x) + \sin(\beta x)) \tag{3.6}$$

$$M_r(x) = -D_c \frac{d^2 w}{dx^2} = M_0 e^{-\beta x}(cos(\beta x) + \sin(\beta x)) + \frac{Q_0}{\beta} e^{-\beta x}(sin(\beta x) - D_c \frac{d^2 wp}{dx^2} \tag{3.6}$$

$$M_c(x) = \nu M_r(x) \tag{3.6}$$

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1612787/CA

$$Q_r(x) = -D_c \frac{d^3 w}{dx^3} = -2M_0 \beta e^{-\beta x}(\sin(\beta x)) + Q_0 e^{-\beta x}(cos(\beta x) - \sin(\beta x) - D_c \frac{d^3(w_{p)}}{dx^3} \quad (3.6)$$

A deflexão e a rotação na extremidade (x=0) da casca cilíndrica agora podem ser determinadas, conforme as equações (3.68) e (3.69). O termo dependente do coeficiente de Poisson (ν) foi introduzido por [6] para quantificar o efeito da pressão na direção axial.

$$w_c|_{x=0} = \left[-\frac{M_0}{2\beta^2 D_c} + \frac{Q_0}{2\beta^3 D_c} - \frac{p_{int} R^2}{E t_c}\left(1 - \frac{\nu}{2}\right)\right] \quad (3.68)$$

$$\theta_c|_{x=0} = \frac{M_0}{\beta D_c} - \frac{Q_0}{2\beta^2 D_c} \quad (3.69)$$

Pode-se agora escrever o sistema de equações que compatibiliza os deslocamentos radiais e as rotações na casca e na placa de paredes finas proposta nas equações (3.59) e (3.60). O momento M_0 e o cortante Q_0 que caracterizam os esforços internos na junção são obtidos pelo sistema de equações abaixo:

$$\begin{cases} -\frac{M_0}{2\beta^2 D_c} + \frac{Q_0}{2\beta^3 D_c} - \frac{p_{int} R^2}{E t_c}\left(1 - \frac{\nu}{2}\right) = -\frac{Q_0 r}{E t_t}(1 - \nu) \\ \frac{M_0}{\beta D_c} - \frac{Q_0}{2\beta^2 D_c} = \frac{p_{int} R^3}{8 D_t (1 + \nu)} + \frac{M_0 R}{D_t (1 + \nu)} \end{cases} \quad (3.70)$$

A função que descreve a deflexão transversal e a rotação da placa em função do raio *r* foi obtida através da superposição de dois casos de carregamentos, visto que a placa cilíndrica simplesmente apoiada em suas extremidades é submetida à pressão interna uniformemente distribuída ao longo de sua superfície, assim como suporta momentos fletores também uniformemente distribuídos atuando em sua borda. Esta solução é apresentada por [8]:

$$w_t = \frac{p_{int}(r^2 - R^2)^2}{64 D_t}\left(\frac{5 + \nu}{1 + \nu}\right) + \frac{M_0(r^2 - R^2)}{2 D_t (1 + \nu)}$$
$$\theta_t = \frac{p_{int} r (r^2 - R^2)}{16 D_t (1 + \nu)} + \frac{M_0(r)}{D_t (1 + \nu)} \quad (3.71)$$

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1612787/CA

A condição de apoio com extremidade fixa da placa também foi utilizada no modelo de paredes espessas. Para esta condição de apoio, verifica-se as seguintes expressões para a deflexão transversal e rotação da placa [6], considerando também a influência dos carregamentos uniformemente distribuídos devido à pressão interna e momento fletor.

$$w_t = \frac{p_{int}(r^2 - R^2)^2}{64D_t} + \frac{M_0(r^2 - R^2)}{2D_t(1+\nu)}$$
$$\theta_t = \frac{p_{int}r(r^2 - R^2)}{16D_t(1+\nu)} + \frac{M_0(r)}{D_t(1+\nu)} \tag{3.72}$$

A deflexão transversal máxima ocorre no centro da placa quando *(r=0)*, enquanto a rotação é nula no centro da placa.

O Anexo 1 apresenta os resultados para o momento fletor e o esforço cortante obtidos para esta combinação.

3.1.5
Caracterização das tensões atuantes na casca e placa de paredes finas

Para verificar a contribuição de cada parcela de tensão atuando tanto na casca cilíndrica quanto na placa, e principalmente na junção entre elas, esta seção apresentará as equações que regem o comportamento do vaso de pressão proposto.

Na junção entre a casca e placa as tensões circunferenciais atuando na casca consistem da combinação da tensão de membrana, devido à pressão interna, da tensão de flexão circunferencial e da componente da tensão de flexão axial [11] conforme equação (3.73):

$$\sigma_{c,combined,shell} = \left(\frac{pr}{t_t}\right) + \left|\left(\frac{\beta d(\beta M_0 + Q_0\,)}{t_t}\right)\right| + \left|\frac{\mu 6 M_0}{{t_t}^2}\right| \tag{3.73}$$

Para regiões suficientemente afastadas da extremidade (x/h>>2.5$\sqrt{Rt_c}$) [10], verifica-se a solução para vasos de paredes finas submetidos à pressão interna somente.

$$\sigma_r = \sigma_1 = p_{int} \tag{3.74}$$

$$\sigma_\theta = \sigma_2 = \frac{p_{int}D}{2t_c} \tag{3.75}$$

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1612787/CA

As tensões longitudinais podem ser determinadas através da aplicação do equilíbrio de forças na direção longitudinal. Porém, para um cilindro longo e aberto, sem a presença de tampos nas extremidades, a tensão longitudinal é nula. Para um cilindro fechado, a pressão atuante no tampo provocará uma força anular $p\frac{\pi(D-2t)^2}{4}$ que deverá ser equilibrada por uma outra força longitudinal que atua de forma distribuída na seção transversal do tubo. Igualando estas forças encontra-se:

$$\sigma_l = \sigma_3 = \frac{p_{int}D}{4t_c} \tag{3.76}$$

A força de membrana deve ser determinada através do equilíbrio de forças na direção axial. Considerando que a pressão externa é nula, tem-se:

$$N_0 \cdot 2\pi R = p_{int} \cdot \pi R^2$$

$$\Downarrow$$

$$N_0 = \frac{p_{int}R}{2} \tag{3.77}$$

As tensões mencionadas acima são as tensões principais atuantes na casca cilíndrica.

As tensões axiais atuando na casca na região da junção da casca cilíndrica com a tampa plana são representadas pelas parcelas da tensão axial devido à pressão interna e da tensão de flexão [11] conforme equação (3.78).

$$\sigma_{a,combined,shell} = \left(\frac{pr}{2t_s}\right) + \left|\frac{6M_0}{{t_s}^2}\right| \tag{3.78}$$

As tensões circunferenciais combinadas na junção atuando na placa são compostas pelas parcelas da tensão de cisalhamento e da tensão de flexão circunferencial devido à pressão interna.

$$\sigma_{c,combined,plate} = \left(\frac{Q_0}{t_t}\right) + \left|\frac{6M_0}{{t_t}^2} - \frac{3Q_0}{t_t} - \frac{6p\left(\frac{d}{t_t}\right)^2(1-v)}{32}\right| \tag{3.79}$$

As tensões máximas desenvolvida na tampa plana são obtidas através das equações (3.80) e (3.81) [11].

$$\sigma_{r,max} = \sigma_1 = 6\frac{M_{r,max}}{{t_t}^2} \tag{3.80}$$

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1612787/CA

$$\sigma_{t,max} = \sigma_2 = 6\frac{M_{t,max}}{{t_t}^2} \tag{3.81}$$

A tensão axial combinada atuando na placa na junção é composta pela tensão de cisalhamento e da tensão de flexão axiais devido à ação da casca na tampa plana.

$$\sigma_{a,combined.plate} = \left(\frac{Q_0}{t_t}\right) + \left|\frac{6M_0}{{t_t}^2} - 3\frac{Q_0}{t_t}\right| \tag{3.82}$$

3.2
Teoria de Mindlin-Reissner para placas moderadamente espessas

Esta seção aborda a condição de placas moderadamente espessas onde considera-se o efeito do cisalhamento transversal segundo a teoria de Mindlin-Reissner.

A teoria de Mindlin-Reissner, também conhecida como Teoria de Deformação de Primeira Ordem, considera o efeito do cisalhamento transversal uniforme ao longo da espessura. Outros modelos que consideram o campo de deslocamento variável ao longo da espessura também já estão desenvolvidos, como por exemplo, o modelo proposto por [12].

As hipóteses de Reissner-Mindlin que são consideradas válidas para placas moderadamente espessas, utilizadas para efeitos de representação do campo de descolamentos e das tensões em placas com isotropias totais submetidas a ações normais ao plano médio, são:

- O plano médio da placa pode ser considerado indeformável, permanecendo neutro durante a flexão. Isso é válido se os deslocamentos transversais são pequenos quando comparados à espessura da placa.
- Retas normais à superfície de referência indeformada permanecerão retas após a deformação, porém não mais serão necessariamente normais ao plano médio.
- A componente de tensão normal é desprezível.

3.2.1
Equação Diferencial para a Deflexão transversal de Placas Cilíndricas moderadamente espessas

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1612787/CA

A partir dos esforços representados na Figura 4 e utilizando a transformação de coordenadas polares apresentadas na seção 3.1.5, pode-se estabelecer uma correlação entre o modelo de Kirchoff e o de Mindlin-Reissner e obter a deflexão transversal, rotação, entre outros comportamentos para placas circulares moderadamente espessas submetidas a carregamentos axissimétricos.

Para estabelecer a correlação entre o modelo de placa da teoria clássica com o modelo proposto por Mindlin-Reissner, primeiramente é necessário estabelecer a seguinte definição:

$$k = Modelo\ de\ Kirchoff$$

$$M = Modelo\ de\ Mindlin$$

Outro parâmetro utilizado é o somatório dos momentos radiais (M_r) e tangenciais (M_θ) conhecido como *Marcus Moment*:

$$\mu = \frac{M_r + M_\theta}{(1+v)} \tag{3.83}$$

Utilizando as expressões já desenvolvidas anteriormente para o modelo de Kirchoff, pode-se escrever as seguintes relações para os momentos radiais e tangenciais:

$$M_{rr}^k = -D_t\left[\frac{d^2w_0^k}{dr^2} + \frac{v}{r}\left(\frac{dw_0^k}{dr}\right)\right] \qquad M_{\theta\theta}^k = -D_t\left[v\frac{d^2w_0^k}{dr^2} + \frac{1}{r}\left(\frac{dw_0^k}{dr}\right)\right] \tag{3.84}$$

Introduzindo no somatório de momentos proposto na equação (3.83)

$$\mu = -D_t\left[\frac{d^2w_0^k}{dr^2} + \frac{1}{r}\left(\frac{dw_0^k}{dr}\right)\right] \tag{3.85}$$

onde

$$\mu^k = -D_t\left[\frac{d^2w_0^k}{dr^2} + \frac{1}{r}\left(\frac{dw_0^k}{dr}\right)\right] = -D_t\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left[r\left(\frac{dw_0^k}{dr}\right)\right] \tag{3.86}$$

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left[r\left(\frac{d\mu^k}{dr}\right)\right] = -q \tag{3.87}$$

Desta forma é possível estabelecer as seguintes relações, baseado no desenvolvimento feito até o momento:

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1612787/CA

$$\frac{r\,d\mathfrak{r}^k}{dr} = \frac{d}{dr}\left(rM_{rr}^k\right) - M_{\theta\theta}^k = rQ_r^k \tag{3.88}$$

Similarmente, desenvolvendo o mesmo processo para o somatório de momentos segundo o modelo de Mindlin-Reissner:

$$\mathfrak{r}^M = -D_t\left[\frac{d\phi_r^M}{dr} - \frac{1}{r}\phi_r^M\right] = -D_t\frac{1}{r}\frac{d}{dr}[r\phi_r^M] \tag{3.89}$$

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left[r\left(\frac{d\mathfrak{r}^M}{dr}\right)\right] = -q \tag{3.90}$$

$$\frac{r\,d\mathfrak{r}^M}{dr} = \frac{d}{dr}\left(rM_{rr}^M\right) - M_{\theta\theta}^M = rQ_r^M \tag{3.91}$$

As seguintes correlações podem ser expressas entre o modelo de Kirchoff *e* Mindlin-Reissner para placas moderadamente espessas:

Relação entre os esforços cortantes

$$rQ_r^M = rQ_r^k + C1 \tag{3.92}$$

Relação entre os somatórios do momento radial e tangencial

$$\frac{r\,d\mathfrak{r}^M}{dr} = r\frac{d\mathfrak{r}^k}{dr} + C1 \qquad ou \qquad \mathfrak{r}^M = \mathfrak{r}^k + C1logr + C2 \tag{3.93}$$

Relação entre as rotações

$$\phi_r^M = -\frac{dw_0^k}{dr} + \frac{C1r}{4D_t}(2logr - 1) + \frac{C2r}{2D_t} + \frac{C3}{rD_t} \tag{3.94}$$

Relação entre os momentos radiais e tangenciais

$$M_{rr}^M = M_{rr}^k + C1\left(\frac{1+v}{2}logr - \frac{1-v}{4}\right) + C2\frac{1+v}{2} - C3\frac{1-v}{r^2} \tag{3.95}$$

$$M_{\theta\theta}^M = M_{\theta\theta}^k + C1\left(\frac{1+v}{2}logr - \frac{1-v}{4}\right) + C2\frac{1+v}{2} + C3\frac{1-v}{r^2} \tag{3.96}$$

Finalmente, a correlação entre as deflexões segundo o modelo de Kirchoff com o modelo proposto por Mindlin-Reissner para placas circulares moderadamente espessas submetidas a carregamento uniforme axissimétrico é dada por:

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1612787/CA

$$w_0^M = w_0^k + \frac{\mathrm{M}^k}{K_s G t_t} + \frac{C1r^2}{4D_t}(1 - logr) + \frac{C1}{K_s G t_t} logr - \frac{C2r^2}{4D_t} - \frac{C3logr}{D_t} + \frac{C4}{D_t} \quad (3.97)$$

As quatro constantes de integração (C1...C4) são determinadas utilizando as condições de contorno para cada problema estudado. Na equação (3.97) observa-se a presença do fator de cisalhamento transversal para a deflexão de Mindlin representado pelo constante K_s, cujo valor para materiais isotrópicos encontra-se definido na Tabela 1. Além disso, w_0^k representa a deflexão para o modelo de Kirchoff para o caso de placas de paredes finas representada na seção anterior.

3.2.2
Condições de Contorno e Compatibilidade

Esta seção apresenta a compatibilização entre os deslocamentos radiais e rotações da casca cilíndrica de paredes finas e a placa moderadamente espessa através de um sistema de compatibilidade, com objetivo de se obter os esforços internos M_0 e Q_0. O comportamento da casca cilíndrica de paredes finas já está discretizado na seção 3.1.1.

As condições de contorno aplicadas a esta combinação entre casca e placa encontra-se na Tabela 3:

Condições de Contorno Essenciais	$w_c^k(0,R) = w_t^k(0,R) = w_t^M(0,R)$	(3.98)
	$\theta_c^k(0,R) = \theta_t^k(0,R) = \theta_t^M(0,R)$	(3.99)
Condições de Contorno de Compatibilidade	$rM_{rr}^M(0,R) = rM_{rr}^k(0,R) = 0$ $w_0^k(0,R) = w_0^M(0,R)$	(3.100)

Tabela 3: Condições de contorno e compatibilidade

Novamente, o equilíbrio é estabelecido através do deslocamento radial da placa moderadamente espessa, que deve ser igual ao deslocamento radial da casca cilíndrica na extremidade. Assim, o sistema de compatibilidade resultante é dado por:

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1612787/CA

$$\begin{cases} -\dfrac{M_0}{2\beta^2 D_c} + \dfrac{Q_0}{2\beta^3 D_c} - \dfrac{p_{int}R^2}{Et_c}\left(1-\dfrac{\nu}{2}\right) = -\dfrac{Q_0 r}{Et_t}(1-\nu) \\ \dfrac{M_0}{\beta D_c} - \dfrac{Q_0}{2\beta^2 D_c} = \dfrac{p_{int}R^3}{16D_t(1+\nu)} + \dfrac{M_0 R}{D_t(1+\nu)} \end{cases}$$

As constantes de integração presentes na equação (3.97) são encontradas através das condições de contorno da Tabela 3, representadas pelas equações (3.92), (3.94), (3.95) e (3.96), aplicadas ao conjunto de relações entre os modelos de Kirchoff e Mindlin. Desta forma, obtém-se C1=C2=C3= 0 e $C4 = \frac{\bar{\mathfrak{M}}^k}{K_s G t_t}$:

Onde:

$$\bar{\mathfrak{M}}^k = \frac{D_t(1-\nu)}{\nu}\frac{d^2 w_0^k}{dr^2}\bigg|_{r=R} \tag{3.101}$$

Logo, a equação (3.97) para a deflexão transversal da placa pode ser expressa por:

$$w_t^M = w_t^k + \frac{\mathfrak{M}^k}{K_s G t_t} - \frac{(1-\nu)}{K_s G t_t \nu}\frac{d^2 w_0^k}{dr^2}\bigg|_{r=R} \tag{3.102}$$

A rotação, por sua vez, aplicando os valores para as constantes de integração mencionadas acima e obtidas em função das condições de contorno da Tabela 3, resulta na igualdade entre as rotações para os modelos de Mindlin e Kirchoff.

$$\phi_r^M = -\frac{dw_0^k}{dr} + \frac{C1r}{4D_t}(2logr - 1) + \frac{C2r}{2D_t} + \frac{C3}{rD_t} \rightarrow \quad \phi_r^M = -\frac{dw_0^k}{dr} \tag{3.103}$$

3.3
Cilindros de Paredes Espessas – Solução de Lamé

Quando a espessura do vaso de pressão é relativamente grande (R/t<10), a variação das tensões desenvolvidas entre a superfície interna e externa do cilindro devem ser verificadas. Sendo assim, os efeitos de deflexão e rotação apresentados para a seção de paredes finas não se aplicam.

Para a análise do comportamento das tensões e deslocamentos de um cilindro de paredes espessas, as seguintes hipóteses devem ser consideradas:

- Carregamento Axissimétrico.
- Problema desenvolvido em coordenadas polares.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1612787/CA

- Deslocamento circunferencial nulo ($u_\theta = 0$).
- Tensões e deslocamentos não variam com θ.
- Estado plano de deformações ($\varepsilon_z = 0$). Tensões e deformações axiais estão desacopladas das tensões e deformações no plano produzidas pela pressão interna.

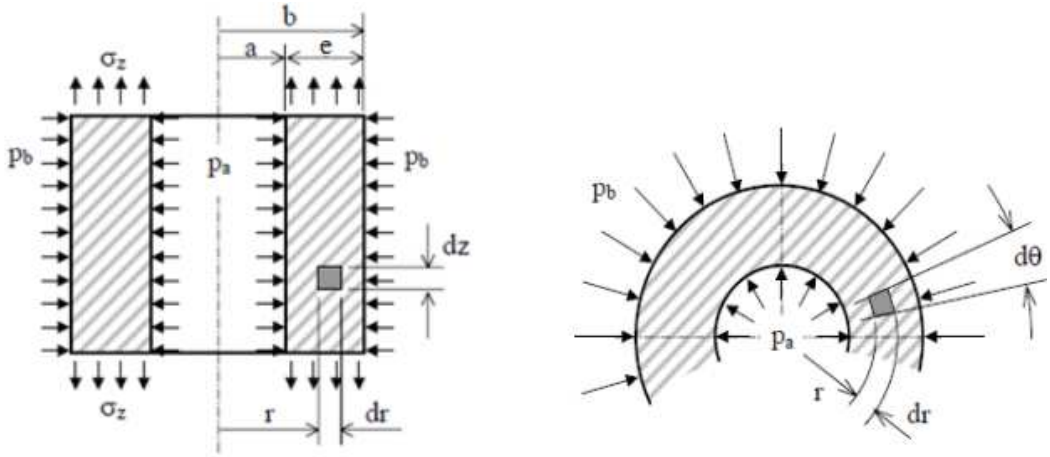


Figura 6: Cilindro de paredes espessas com as extremidades fechadas [5]

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1612787/CA

3.3.1
Equação Diferencial para o deslocamento radial de cilindros de paredes espessas com extremidades livres

Considerando o cilindro de paredes espessas da Figura 6 sujeito a uma pressão interna e/ou externa, pode-se verificar que a deformação é simétrica em relação ao eixo z. Por isso, as equações de equilíbrio e de deformação especifica ε se aplicam para qualquer ponto em um círculo de comprimento unitário.

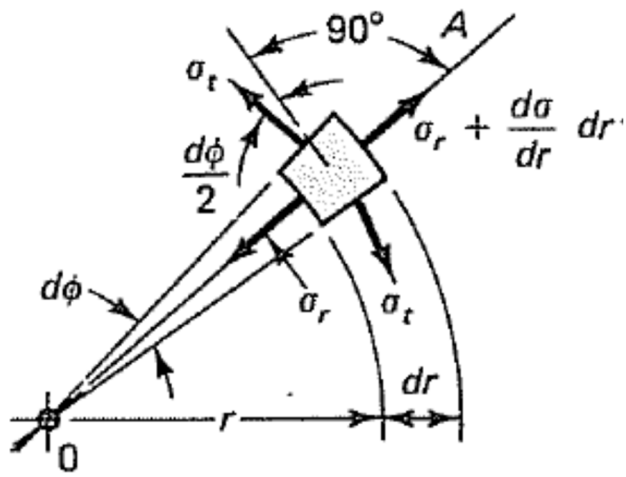


Figura 7: Elemento infinitesimal - Cilindro de paredes Espessas [12]

Dado o elemento infinitesimal acima, delimitado por dois planos radiais separados por um pequeno ângulo $d\theta$ e por dois arcos com comprimento $rd\theta$ e $(rdr)d\theta$, a tensão tangencial desenvolvida nas extremidades do elemento da Figura 7 é representada por σ_t, enquanto que a tensão radial é representada por σ_r e varia ao longo da espessura:

$$\sigma_r = \frac{d\sigma_r}{dr} dr \tag{3.104}$$

Propondo o equilíbrio de forças atuando no elemento infinitesimal proposto na Figura 8, tem-se:

$$\sigma_r rd\theta \ + \ \sigma_t drd\theta - \left(\sigma_r + \frac{d\sigma_r}{dr} dr\right)(r + dr)d\theta = 0 \tag{3.105}$$

Eliminando as derivadas de ordem superior, obtém-se:

$$\sigma_t - \sigma_r - r\frac{d\sigma_r}{dr} = 0 \tag{3.106}$$

A equação (3.106) fornece uma relação entre as tensões tangenciais e radiais. Uma segunda relação pode ser obtida a partir da deformação da casca cilíndrica, assumindo que as deformações longitudinais de todas as fibras da casca cilíndrica são iguais. Desta forma, a deformação da casca cilíndrica é simétrica com relação ao eixo axial e consistente com o deslocamento radial em toda a espessura da casca cilíndrica. Assim, o deslocamento é constante na direção circunferencial, mas varia com a posição radial.

Sendo u_r o deslocamento radial na superfície $r + dr$:

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1612787/CA

$$u_r = u + \frac{du}{dr}dr \tag{3.107}$$

Portanto, o elemento infinitesimal proposto possui uma deformação total na direção radial dada por:

$$\varepsilon_r = \frac{du}{dr}\frac{dr}{dr} = \frac{du}{dr} \tag{3.108}$$

A deformação do elemento infinitesimal na direção tangencial:

$$\varepsilon_t = \frac{u}{r} \tag{3.109}$$

Se as extremidades deste cilindro estiverem abertas, tensão longitudinal ($\sigma_z = 0$), tem-se um estado plano de tensões. Aplicando a Lei de Hooke, as deformações radiais e tangenciais podem ser expressas por:

$$\varepsilon_r = \frac{du}{dr} = \frac{1}{E}\,(\sigma_r - v\sigma_\theta) \tag{3.110}$$

$$\varepsilon_t = \frac{u}{r} = \frac{1}{E}\,(\sigma_\theta - v\sigma_r) \tag{3.111}$$

Portanto, as tensões radiais e circunferenciais podem ser representadas por:

$$\sigma_r = \frac{E}{1-v^2}\,(\varepsilon_r + v\varepsilon_\theta) = \frac{E}{1-v^2}\left(\frac{du}{dr} + v\frac{u}{r}\right) \tag{3.112}$$

$$\sigma_t = \frac{E}{1-v^2}\,(\varepsilon_\theta + v\varepsilon_r) = \frac{E}{1-v^2}\left(\frac{u}{r} + v\frac{du}{dr}\right) \tag{3.113}$$

As tensões acima são independentes, uma vez que elas são representadas em termos do deslocamento u. Substituindo as expressões (3.112) e (3.113) na equação (3.106), obtém-se a equação diferencial de segunda ordem para o deslocamento radial:

$$\frac{d^2u}{d\,r^2} + \frac{1}{r}\frac{du}{dr} - \frac{u}{r^2} = 0 \tag{3.114}$$

A solução geral para a equação (3.114) pode ser obtida pela expressão abaixo:

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1612787/CA

$$u_r = C1r + \frac{C2}{r} \tag{3.115}$$

onde as constantes C1 e C2 são obtidas através das condições de contorno do problema.

3.3.2
Solução Particular I – Pressão externa e interna aplicadas

Considerando que o vaso de pressão está submetido à pressão externa (p_0) e interna (p_i), conforme a Figura 8, as seguintes condições de contorno são aplicáveis:

Condições de Contorno Essenciais	$\sigma_r\,\vert_{r=a} = -p_i$ $\qquad$ $\sigma_r\,\vert_{r=b} = -p_0$ $\qquad$ (3.116)

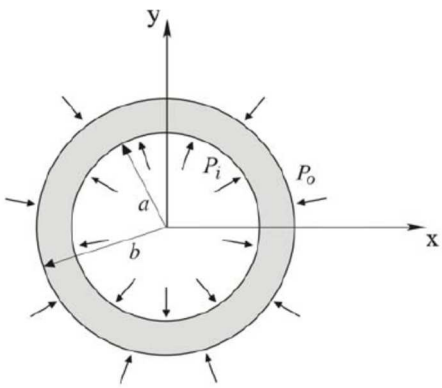


Figura 8: Vaso de pressão paredes espessas - Pressão externa e interna aplicada

Fazendo a derivada para o deslocamento radial em relação ao raio, obtém-se:

$$\frac{du_r}{dr} = C1 - \frac{C2}{r^2} \tag{3.117}$$

Substituindo nas equações (3.112) e (3.113) tem-se:

$$\sigma_r = \frac{E}{1-v^2}\left[C1(1+v) - \frac{C2(1-v)}{r^2}\right] \tag{3.118}$$

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1612787/CA

$$\sigma_t = \frac{E}{1-v^2}\left[C1(1+v) + \frac{C2(1-v)}{r^2}\right] \tag{3.119}$$

Substituindo as condições de contorno mencionadas em (3.116):

$$C_1 = \frac{1-v}{E}\left(\frac{a^2 p_i - b^2 p_0}{b^2 - a^2}\right) \tag{3.120}$$

$$C_2 = \frac{1+v}{E} a^2 b^2 \left(\frac{p_i - p_0}{b^2 - a^2}\right) \tag{3.121}$$

Portanto, as equações para as tensões e para o deslocamento radial u em um vaso de pressão com cilindros de paredes espessas submetido à pressão interna e externa são:

$$\sigma_r = \left(\frac{a^2 p_i - b^2 p_0}{b^2 - a^2}\right) - \frac{a^2 b^2}{r^2}\left(\frac{p_i - p_0}{b^2 - a^2}\right) \tag{3.122}$$

$$\sigma_t = \left(\frac{a^2 p_i - b^2 p_0}{b^2 - a^2}\right) + \frac{a^2 b^2}{r^2}\left(\frac{p_i - p_0}{b^2 - a^2}\right) \tag{3.123}$$

$$u_r = \frac{1-v}{E}\left(\frac{a^2 p_i - b^2 p_0}{b^2 - a^2}\right) r + \frac{1+v}{E}\left(\frac{p_i - p_0}{b^2 - a^2}\right)\frac{a^2 b^2}{r} \tag{3.124}$$

Como σ_r e σ_t são as tensões principais desenvolvidas neste caso no vaso de pressão de paredes espessas, a tensão de cisalhamento máxima é obtida pela metade da diferença entre elas:

$$\tau_{max} = \frac{1}{2}(\sigma_t - \sigma_r) \tag{3.125}$$

A τ_{max} ocorrerá em um plano que faz 45° com o plano onde atuam as tensões σ_r e σ_t. A tensão que iniciará o escoamento do vaso de pressão pode ser obtida fazendo $\tau_{max} = \frac{\sigma_{esc}}{2}$ na equação (3.126).

$$p_{esc} = \frac{(b^2 - a^2)\sigma_{esc}}{2b^2} \tag{3.126}$$

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1612787/CA

3.3.3
Solução Particular II – Cilindros de paredes espessas com extremidades fechadas

Neste caso, deve-se considerar a tensão longitudinal desenvolvida ao longo da espessura do vaso de pressão diferente de zero, porém constante, dado que sua variação ocorrerá apenas em função da coordenada z. Sendo assim, tem-se um estado triaxial de tensões, definido conforme as equações abaixo; considerando ainda a atuação da pressão interna e externa aplicadas, pode-se obter as seguintes relações:

$$\sigma_r = -\frac{\left(\frac{b^2}{r^2}-1\right)}{\left(\frac{b^2}{a^2}-1\right)}p_i - \frac{\left(\frac{b^2}{a^2}-\frac{b^2}{r^2}\right)}{\left(\frac{b^2}{a^2}-1\right)}p_0 \tag{3.127}$$

$$\sigma_t = -\frac{\left(\frac{b^2}{r^2}+1\right)}{\left(\frac{b^2}{a^2}-1\right)}p_i - \frac{\left(\frac{b^2}{a^2}+\frac{b^2}{r^2}\right)}{\left(\frac{b^2}{a^2}-1\right)}p_0 \tag{3.128}$$

$$\sigma_z = \sigma_0 = \frac{1}{\left(\frac{b^2}{a^2}-1\right)}p_i - \frac{1}{\left(\frac{b^2}{a^2}-1\right)}p_0 \tag{3.129}$$

$$u_r = \frac{1-v}{E}\left(\frac{a^2p_i - b^2p_0}{b^2-a^2}\right)r + \frac{1+v}{E}\left(\frac{p_i - p_0}{b^2-a^2}\right)\frac{a^2b^2}{r} - \frac{vr}{E}\sigma_0 \tag{3.130}$$

Onde as tensões mencionadas nas equações acima são as tensões principais desenvolvidas na parede do cilindro.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1612787/CA

4.
Formulação Numérica

A formulação analítica para cascas e placas apresentada na seção 3 é agora verificada através do Método do Elementos Finitos. Através deste método é possível subdividir o domínio considerado em pequenos subdomínios, chamados de elementos finitos, que são compostos por nós, onde são calculados os deslocamentos, rotações, tensões etc., a depender da formulação de cada elemento utilizado na análise.

Em função da geometria e da condição de carregamento, é proposta uma discretização axissimétrica tanto para casca quanto para a placa, representando os elementos segundo as coordenadas cilíndricas no sistema global, e a nível do elemento, segundo o sistema de coordenadas locais, ξ na direção radial e η na direção longitudinal.

A equação de equilíbrio estático do sistema associada aos deslocamentos é obtida através do princípio dos deslocamentos virtuais na formulação numérica por Elementos Finitos.

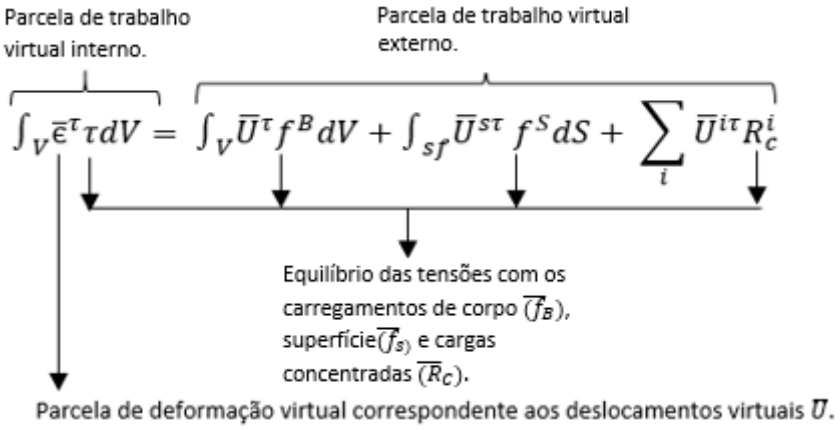
PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1612787/CA

4.1
Princípio dos Deslocamentos Virtuais

Na formulação do método de Elementos Finitos a equação de equilíbrio do sistema associada aos deslocamentos é obtida através do Princípio dos Deslocamentos Virtuais. Segundo [13], o equilíbrio de um corpo é satisfeito para qualquer campo de deslocamento pequeno e compatível quando o trabalho virtual interno for igual ao trabalho virtual externo. Portanto, não havendo influência do meio externo tem-se:

$$W_{interno} = W_{externo} \tag{4.0}$$

Sendo assim, a condição de equilíbrio estático num corpo é satisfeita quando o trabalho realizado pelas forças externas (forças de corpo $\bar{f}_B$, forças de superfície $\bar{f}_s$, tensões iniciais e forças concentradas $\bar{R}_C$) for igual ao trabalho resultante das tensões e deformações internas do corpo.



(4.1)

Onde $\bar{U}$ são os deslocamentos virtuais e $\bar{\epsilon}^\tau$ corresponde às deformações virtuais. O adjetivo “virtual” significa que os deslocamentos não são os deslocamentos reais de um corpo ou elemento finito devido ao carregamento aplicado. Os deslocamentos virtuais são completamente independentes do deslocamento real do corpo. Essa condição é equivalente à condição de minimização da energia potencial total de um corpo elástico linear contínuo [13]. Assim, a energia potencial total é descrita da seguinte forma:

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_V \bar{\epsilon}^\tau \bar{\sigma} dV - \int_V \bar{U}^\tau \bar{f}_B dV - \int_s \bar{U}_s^\tau \bar{f}_s dS - \sum \bar{U}_C^\tau \bar{R}_C \tag{4.2}$$

Em que, Π é um elemento matemático funcional, $\bar{\epsilon}^\tau$ e $\bar{\sigma}$ são vetores contendo as componentes dos tensores das deformações e tensões. As deformações e tensões relacionam-se através das equações constitutivas envolvendo a matriz constitutiva C, correspondente para cada elemento:

$$\bar{\sigma} = C\bar{\epsilon} \tag{4.3}$$

$\bar{F}_A, \bar{F}_B$ *e* $\bar{R}_C$, são os vetores representativos das forças de superfície, forças de corpo e carregamentos concentrados respectivamente. Finalmente, o vetor $\bar{U}^\tau$ contém os deslocamentos nas três coordenadas globais de um ponto do corpo.

A partir da condição de estacionariedade do funcional Π, ou seja, avaliando a variação $\delta\Pi = 0$ em relação ao deslocamento, obtém-se a equação de equilíbrio do sistema:

$$\delta\Pi = 0 \rightarrow \int_V \delta\bar{\epsilon}^\tau C\bar{\epsilon} dV = \int_V \delta\bar{U}^\tau \bar{F}_B dV + \int_A \delta\bar{U}_A^\tau \bar{F}_A dA - \sum \delta\bar{U}_C^\tau \bar{R}_C \tag{4.4}$$

Onde, $\delta\bar{U}^\tau$, $\delta\bar{U}_A^\tau$ e $\delta\bar{U}_C^\tau$ são as variações dos deslocamentos associados às forças de corpo, superfície e carregamentos concentrados, respectivamente, e $\delta\bar{\epsilon}^\tau$ corresponde à variação das deformações do corpo.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1612787/CA

4.2
Método dos Elementos Finitos

O Método dos Elementos Finitos é uma técnica numérica de resolução das equações diferenciais parciais representativas das condições de contorno, compatibilidade geométrica e constitutiva. Nesse método o domínio estudado é subdividido em elementos conectados por pontos nodais.

Considerando-se a Figura 9, através da análise por elementos finitos é possível representar o corpo pela montagem por elementos finitos interconectados através dos seus pontos nodais. As coordenadas dos deslocamentos no interior do elemento são relacionadas com as coordenadas dos deslocamentos dos pontos nodais através de uma matriz de interpolação dos deslocamentos $H^{(m)}(x, y, z)$:

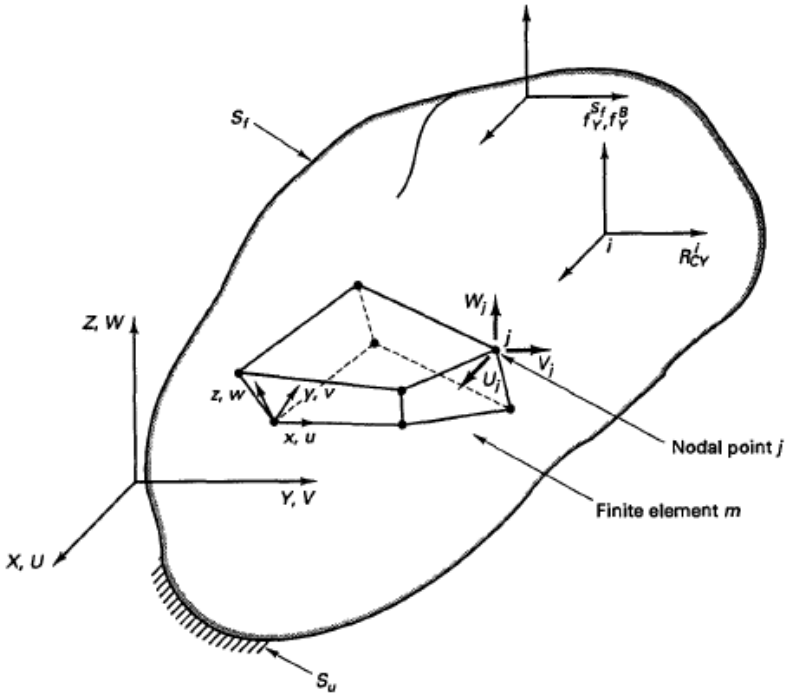


Figura 9: Corpo sólido 3D com elemento sólido de 8 nós [13].

$$u^{(m)}(x, y, z) = H^{(m)}(x, y, z)\overline{U} \tag{4.5}$$

Onde $u^{(m)}(x, y, z)$ representa o vetor que contém as componentes dos deslocamentos nas coordenadas globais x,y,z e $\overline{U}$ é o vetor dos deslocamentos nodais formado pelos 3 deslocamentos globais $U_i, V_i\ e\ W_i$ dos i nós do elemento (m).

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1612787/CA

$$\overline{U}^{(m)} = [U_1, V_2, W_3 \dots U_k, V_k, W_k] \tag{4.6}$$

A construção da matriz de interpolação dos deslocamentos $H^{(m)}(x, y, z)$ depende da geometria do elemento, do número de elementos nodais e da quantidade de graus de liberdade associados e dos critérios de convergência.

Através do campo de deslocamentos da equação (4.5) obtém-se a equação para as medidas das deformações:

$$\epsilon^{(m)}(x, y, z) = B^{(m)}(x, y, z)\overline{U} \tag{4.7}$$

que são obtidas, no problema linear para pequenos deslocamentos, das derivadas das componentes dos deslocamentos $u^{(m)}(x, y, z)$, definidos em (4.5), em relação às coordenadas globais.

Na equação (4.7) $B^{(m)}$ é a matriz que relaciona as deformações com os deslocamentos nodais do elemento (m). A forma da matriz $B^{(m)}$ para um elemento retangular bilinear em coordenadas globais cartesianas e cilíndricas encontra-se definida na seção 4.4.

Substituindo-se os campos de deslocamentos e deformações na equação de equilíbrio (4.4), obtida através da estacionariedade do funcional Π, para todos os elementos e integrando sobre cada domínio, obtém-se o sistema linear que governa o comportamento da estrutura, na forma:

$$K\overline{U} = R \tag{4.8}$$

Onde $\overline{U}$ é o vetor dos deslocamentos contendo todos os graus de liberdade associados aos pontos nodais, K é matriz de rigidez global e $\hat{R}$ é o vetor dos carregamentos nodais equivalentes. Combinando-se a matriz deformação-deslocamento $B^{(m)}$ obtida na equação (4.7) e a matriz constitutiva C, resulta em:

$$K = \sum_m \int_V B^{(m)^T} C^{(m)} B^{(m)} dV^m \tag{4.9}$$

O vetor carregamento R resulta da adição dos vetores das forças de corpo, de superfície e das cargas concentradas:

$$R = R_B + R_S + R_C \tag{4.10}$$

Em que R_B é o vetor de forças de corpo, R_S é o vetor de forças de superfície e R_C é o vetor de carregamento concentrado que podem ser obtidos através das equações abaixo:

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1612787/CA

$$
\begin{aligned}
R_B &= \sum_m \int_V H^{(m)^T} f^{B(m)} dV^m \\
R_S &= \sum_m \int_S H^{(m)^T} f^{S(m)} dS^m \\
R_C &= \sum_m \int_V B^{(m)^T} \tau^{(m)} dV^m
\end{aligned}
\tag{4.11}
$$

4.3 Elementos Axissimétricos

Um sólido axissimétrico é definido como um corpo tridimensional que é desenvolvido pela rotação da seção plana sobre o eixo central [14]. Se, além da geometria, for também garantida a isotropia do material e a condição de carregamento aplicada, incluindo o carregamento externo, verifica-se o comportamento axissimétrico da estrutura. A análise de tensões em corpos de revolução submetidos a carregamento axissimétrico com relação ao eixo de simetria do corpo é chamada de análise de tensões axissimétricas. Os elementos utilizados nesta análise pelo método dos elementos finitos são chamados de elementos axissimétricos.

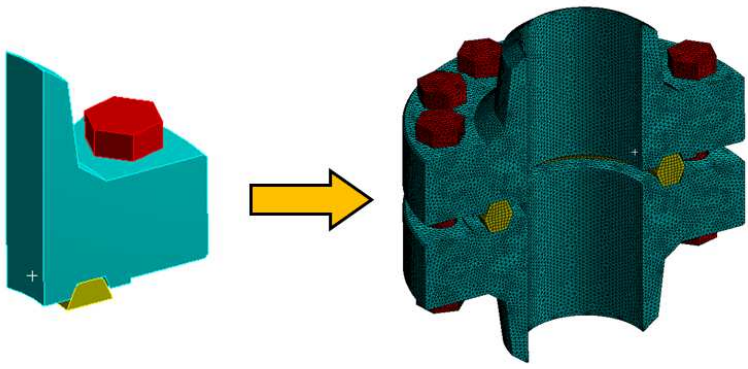


Figura 10: Exemplo estrutura axissimétrica.

Dada a existência de um eixo de revolução, os problemas axissimétricos podem ser definidos num sistema de coordenadas cilíndricas. Devido à simetria, duas componentes de deslocamentos em qualquer seção plana do corpo que contém o eixo de revolução definem o estado de deformações e, portanto, o estado de tensões.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1612787/CA

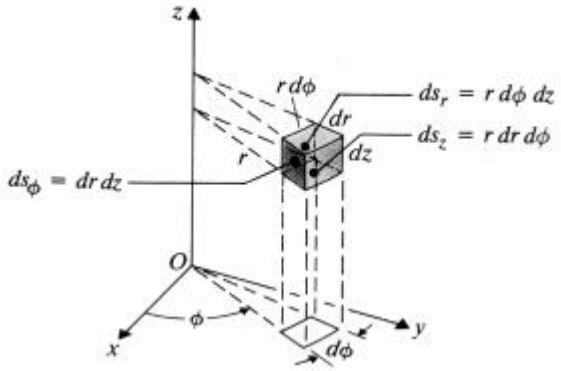


Figura 11: Sistema de coordenadas cilíndricas.

Embora a casca axissimétrica se encontre definida no espaço tridimensional, esta pode ser definida no plano que contém o eixo de revolução como uma seção transversal. Apesar da existência de tensões e deformações perpendiculares ao plano de análise, estas tensões e deformações são constantes ao longo da coordenada angular de revolução, φ, devido à simplificação axissimétrica.

Do ponto de vista prático, a identificação da existência das condições de axissimetria em um problema de elasticidade tridimensional permite efetuar a resolução do problema pelo Método dos Elementos Finitos, sem a necessidade de efetuar um modelo tridimensional, ou seja, sem a necessidade de utilizar um número muito grande de graus de liberdade, tornando a solução muito mais rápida em comparação ao modelo estrutural tridimensional do sólido.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1612787/CA

4.3.1
Elementos Axissimétricos – Deformações

O vetor de deformações para o caso axissimétrico é semelhante ao caso do estado plano de tensões e deformações. Uma vez estabelecido o sistema de coordenadas cilíndricas (r, θ, z) na Figura 12, qualquer ponto do elemento axisssimétrico pode ser definido através da coordenada radial (r) e axial (z). Os deslocamentos genéricos correspondentes de uma seção transversal axissimétrica são dadas por u e v que ocorrem nas direções r e z, respectivamente. Para a condição axissimétrica a translação w na direção θ e as deformações cisalhantes correspondentes são nulas.

Os pontos nodais de um elemento típico retangular axissimétrico descrevem linhas circunferenciais conforme representado na Figura 12. As deformações circunferenciais desenvolvidas em função dos deslocamentos

radiais provocam as tensões independentes da coordenada θ. A Figura 12 demonstra o comportamento das deformações através de um volume elementar axissimétrico.

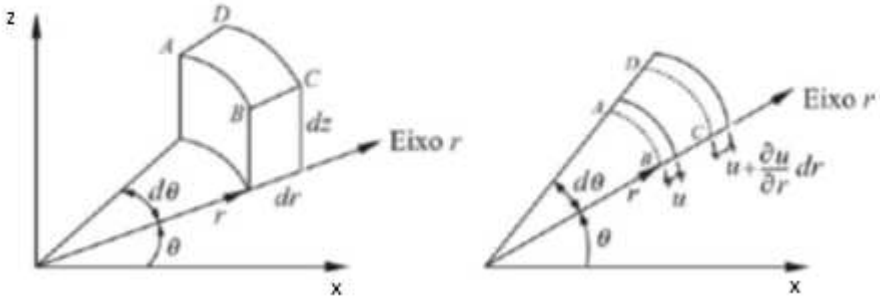


Figura 12: Volume Elementar [11]

Através da Figura 12, verifica-se que antes da deformação o comprimento do arco AB é $rd\theta$ e, após a deformação, o arco passa ter comprimento $(r+u)d\theta$. A deformação correspondente será:

$$\varepsilon_\theta = \frac{(r+u)d\theta - rd\theta}{rd\theta} = \frac{u}{r} \tag{4.12}$$

Portanto, o vetor de deformações do elemento axissimétrico é:

$$\varepsilon = \begin{Bmatrix} \varepsilon_r \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{rz} \\ \varepsilon_\theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{du}{dr} \\ \frac{dv}{dz} \\ \frac{du}{dz} + \frac{dv}{dr} \\ \frac{u}{r} \end{Bmatrix} \tag{4.13}$$

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1612787/CA

4.3.2
Elementos Axissimétricos – Vetor de tensões

Para um elemento axissimétrico isotrópico as componentes das deformações são dadas por [11]:

$$\varepsilon_r = -\frac{v\sigma_z}{E} + \frac{\sigma_r}{E} - \frac{v\sigma_\theta}{E} \tag{4.14}$$

$$\varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{E} - \frac{v\sigma_r}{E} - \frac{v\sigma_\theta}{E} \tag{4.15}$$

$$\gamma_{rz} = \frac{2(1+v)\tau_{rz}}{E} \tag{4.16}$$

$$\varepsilon_\theta = -\frac{v\sigma_z}{E} - \frac{v\sigma_r}{E} + \frac{\sigma_\theta}{E} \tag{4.17}$$

Utilizando as expressões acima para as deformações pode-se obter o vetor de tensões para o elemento axissimétrico isotrópico:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_z \\ \tau_{rz} \\ \sigma_\theta \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1+v)(1-2v)} \begin{bmatrix} 1-v & v & 0 & v \\ v & 1-v & 0 & v \\ 0 & 0 & \frac{1-2v}{2} & 0 \\ v & v & 0 & 1-v \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_r \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{rz} \\ \varepsilon_\theta \end{Bmatrix} \tag{4.18}$$

Utilizando a matriz constitutiva que representa as propriedades mecânicas do elemento o vetor de tensões pode ser representado de forma simplificada:

$$[C] = \frac{E}{(1+v)(1-2v)} \begin{bmatrix} 1-v & v & 0 & v \\ v & 1-v & 0 & v \\ 0 & 0 & \frac{1-2v}{2} & 0 \\ v & v & 0 & 1-v \end{bmatrix} \tag{4.19}$$

$$\{\sigma\} = [C]\{\varepsilon\} \tag{4.20}$$

4.4
Elemento de estado plano de tensões retangular bilinear

Elementos de estado plano de tensões ou deformações podem ser empregados em estruturas consideradas de paredes finas e apresentam apenas graus de liberdade de translação. São elementos extremamente simples, porém excessivamente rígidos, para problemas em que os resultados são muito influenciados pelos esforços de flexão. A Figura 13 representa um elemento bilinear retangular.

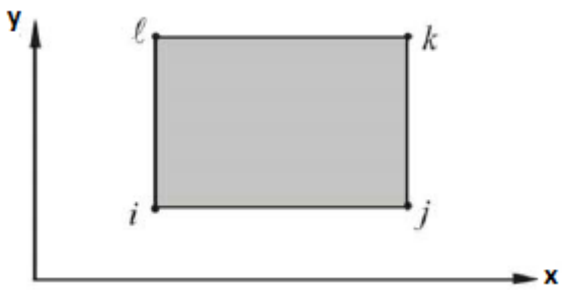


Figura 13: Elemento retangular bilinear.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1612787/CA

A limitação quanto à rigidez excessiva deste elemento é representada pela Figura 14, que mostra o comportamento do elemento deformado sob a influência de um momento fletor qualquer *M1*. Como este elemento possui somente graus de liberdade de translação, a flexão não é adequadamente representada e a configuração deformada do elemento não representa a deformação esperada.

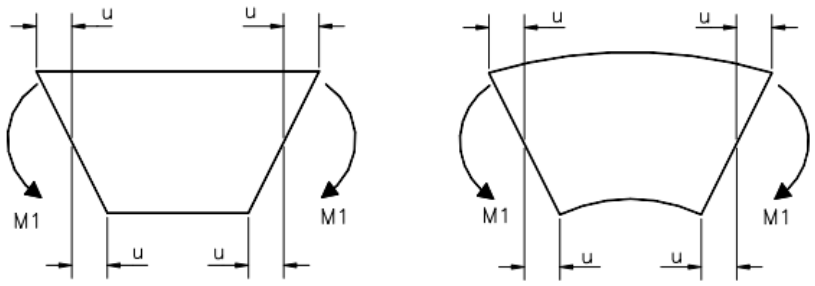


Figura 14: Esquerda: Configuração deformada somente representando os efeitos de translação. Direita: Configuração deformada considerando efeitos de flexão.

Para que os resultados obtidos utilizando este tipo de elemento representem adequadamente a deformação devido à ação de esforços fletores é necessário refinar a malha utilizada até que o modelo possa representar de maneira satisfatória o comportamento da estrutura.

O campo de deslocamentos do elemento retangular bilinear no sistema global de coordenadas pode ser obtido através das funções de interpolações dos deslocamentos mencionadas abaixo:

$$u(x,y) = C1 + C2x + C3xy + C4y \qquad (4.21)$$
$$v(x,y) = C5 + C6x + C7xy + C8y$$

Deve-se especificar uma função de interpolação de deslocamentos que defina de forma única o estado de deslocamentos em todos os pontos dentro do elemento, em termos dos graus de liberdade dos nós, permitindo, a partir dos deslocamentos nodais conhecidos, determinar os deslocamentos dentro do elemento. A função de interpolação escolhida deve representar o elemento deformado o mais próximo possível do seu comportamento real. Por este motivo, a função polinomial como uma série de potências é amplamente utilizada como função de interpolação. Os coeficientes *C1...Cn* a determinar estão associados ao grau de liberdade do elemento. Neste caso, *C1...C8* estão correlacionados aos 8 graus de liberdade do elemento retangular bilinear.

A Figura 15 representa os graus de liberdade associados a cada nó do elemento retangular bilinear.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1612787/CA

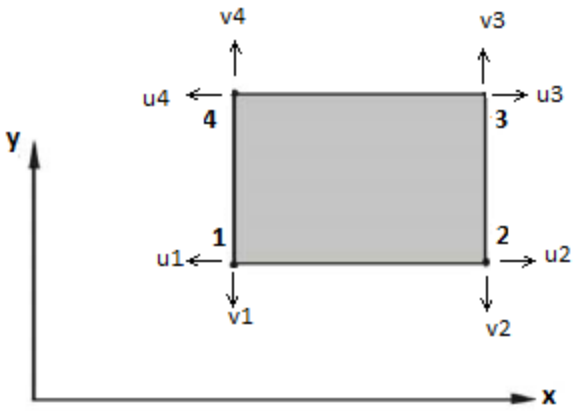


Figura 15: Graus de liberdade do elemento retangular bilinear – coordenadas nodais (x1, y1...x4,y4).

Os deslocamentos nodais associados seguem a seguinte formatação:

$$quando\ x = x_1\ e\ y = y_1 \longrightarrow\ u(x_1, y_1) =\ u_1 \tag{4.22}$$

Utilizando a equação (4.21) para descrever o deslocamento nodal:

$$\begin{aligned} u_1 &= C1 + C2x_1 + C3x_1y_1 + C4y_1 \\ u_2 &= C1 + C2x_2 + C3x_2y_2 + C4y_2 \\ u_3 &= C1 + C2x_3 + C3x_3y_3 + C4y_3 \\ u_4 &= C1 + C2x_4 + C3x_4y_4 + C4y_4 \end{aligned} \tag{4.23}$$

Na forma matricial tem-se:

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1y_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & x_2y_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & x_3y_3 & y_3 \\ 1 & x_4 & x_4y_4 & y_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C1 \\ C2 \\ C3 \\ C4 \end{Bmatrix} \tag{4.24}$$

Ou em função das constantes:

$$\begin{Bmatrix} C1 \\ C2 \\ C3 \\ C4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1y_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & x_2y_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & x_3y_3 & y_3 \\ 1 & x_4 & x_4y_4 & y_4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} \tag{4.25}$$

Cuja solução para as constantes é dada por:

$$C1 = C1_1u_1 + C1_2u_2 + C1_3u_3 + C1_4u_4$$

$$C2 = C2_1u_1 + C2_2u_2 + C2_3u_3 + C2_4u_4$$

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1612787/CA

$$C3 = C3_1u_1 + C3_2u_2 + C3_3u_3 + C3_4u_4 \tag{4.26}$$

$$C4 = C4_1u_1 + C4_2u_2 + C4_3u_3 + C4_4u_4$$

Onde $C1_i, C2_i, C3_i$ e $C4_i$ são funções das coordenadas globais $x_i e\ y_i$ com *i=(1...4).*

Substituindo a equação (4.24) na equação (4.21) obtém-se:

$$\begin{aligned} u(x,y) = {} & C1_1u_1 + C1_2u_2 + C1_3u_3 + C1_4u_4 + (C2_1u_1 + C2_2u_2 + C2_3u_3 \\ & + C2_4u_4)x + (C3_1u_1 + C3_2u_2 + C3_3u_3 + C3_4u_4)xy + (C4_1u_1 \\ & + C4_2u_2 + C4_3u_3 + C4_4u_4)y \end{aligned} \tag{4.27}$$

Reescrevendo a equação acima em função dos deslocamentos nodais:

$$\begin{aligned} u(x,y) = {} & (C1_1 + C2_1x + C3_1xy + C4_1y)u_1 + (C1_2 + C2_2x + C3_2xy + C4_2y)u_2 \\ & + (C1_3 + C2_3x + C3_3xy + C4_3y)u_3 \\ & + (C1_4 + C2_4x + C3_4xy + C4_4y)u_4 \end{aligned} \tag{4.28}$$

A equação acima, por sua vez, pode ser expressa em função das funções de interpolação de deslocamento que, neste caso, assumem a seguinte forma para o elemento retangular bilinear:

$$u(x,y) = (H_1)u_1 + (H_2)u_2 + (H_3)u_3 + (H_4)u_4 \tag{4.29}$$

Onde:

$$\begin{aligned} H_1(x,y) &= C1_1 + C2_1x + C3_1xy + C4_1y \\ H_2(x,y) &= C1_2 + C2_2x + C3_2xy + C4_2y \\ H_3(x,y) &= C1_3 + C2_3x + C3_3xy + C4_3y \\ H_4(x,y) &= C1_4 + C2_4x + C3_4xy + C4_4y \end{aligned} \tag{4.30}$$

Na forma matricial, tem-se:

$$u(x,y) = [H_1\ H_2\ H_3\ H_4] \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} \tag{4.31}$$

O mesmo procedimento pode ser adotado para $v(x,y)$, logo:

$$v(x,y) = [H_1\ H_2\ H_3\ H_4] \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{Bmatrix} \tag{4.32}$$

Combinando as equações (4.29) e (4.30) obtém-se a forma matricial abaixo:

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1612787/CA

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} H_1 & 0 & H_2 & 0 & H_3 & 0 & H_4 & 0 \\ 0 & H_1 & 0 & H_2 & 0 & H_3 & 0 & H_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix} \tag{4.31}$$

Ou ainda, de forma compacta:

$$\{\phi(x,y)\} = [H(x,y)]\{\delta\} \tag{4.32}$$

Onde, $\{\phi(x,y)\}$ é o vetor campo de deslocamentos, $[H(x,y)]$ é a matriz que contém as funções de interpolação de deslocamentos e $\{\delta\}$ é o vetor formado pelos deslocamentos nodais do elemento.

A escolha do elemento irá afetar diretamente a matriz $H(x,y)$ dado que a sua forma modifica-se em função da geometria do elemento, o número de nós e a quantidade de graus de liberdade.

Necessita-se agora estabelecer uma correlação entre as deformações e os deslocamentos nodais do elemento, uma vez que qualquer deslocamento nodal provoca alteração no campo de deformações. Sendo assim, introduz-se a matriz $B(x,y)$, que estabelece o comportamento do elemento, ou seja, dado os deslocamentos nodais, permite calcular as deformações dentro do elemento. Esta matriz é conhecida como Matriz Deslocamento-Deformação.

Através das equações (4.21), (4.26) e (4.31), pode-se obter a forma da matriz $B(x,y)$ para um elemento retangular bilinear em coordenadas globais cartesianas:

$$\varepsilon = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dfrac{du}{dx} \\ \dfrac{dv}{dy} \\ \dfrac{du}{dy} + \dfrac{dv}{dx} \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \dfrac{dH_1}{dx} & 0 & \dfrac{dH_2}{dx} & 0 & \dfrac{dH_3}{dx} & 0 & \dfrac{dH_4}{dx} & 0 \\ 0 & \dfrac{dH_1}{dy} & 0 & \dfrac{dH_2}{dy} & 0 & \dfrac{dH_3}{dy} & 0 & \dfrac{dH_4}{dy} \\ \dfrac{dH_1}{dy} & \dfrac{dH_1}{dx} & \dfrac{dH_2}{dy} & \dfrac{dH_2}{dx} & \dfrac{dH_3}{dy} & \dfrac{dH_3}{dx} & \dfrac{dH_4}{dy} & \dfrac{dH_4}{dx} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix} \tag{4.33}$$

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1612787/CA

Na forma matricial compacta, tem-se:

$$\{\varepsilon\} = [B(x,y)]\{\delta\} \tag{4.34}$$

Através da equação 4.28 pode-se obter os coeficientes da matriz $B(x,y)$.

De forma análoga, pode-se explicitar a forma da matriz $B(x,y)$ para um elemento axissimétrico isotrópico em coordenadas cilíndricas. Utilizando novamente a equação (4.13), chega-se ao seguinte resultado:

$$\varepsilon = \begin{Bmatrix} \varepsilon_r \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{rz} \\ \varepsilon_\theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dfrac{du}{dr} \\ \dfrac{dv}{dz} \\ \dfrac{du}{dz} + \dfrac{dv}{dr} \\ \dfrac{u}{r} \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \dfrac{dH_1}{dr} & 0 & \dfrac{dH_2}{dr} & 0 & \dfrac{dH_3}{dr} & 0 & \dfrac{dH_4}{dr} & 0 \\ 0 & \dfrac{dH_1}{dz} & 0 & \dfrac{dH_2}{dz} & 0 & \dfrac{dH_3}{dz} & 0 & \dfrac{dH_4}{dz} \\ \dfrac{dH_1}{dz} & \dfrac{dH_1}{dr} & \dfrac{dH_2}{dz} & \dfrac{dH_2}{dr} & \dfrac{dH_3}{dz} & \dfrac{dH_3}{dr} & \dfrac{dH_4}{dz} & \dfrac{dH_4}{dr} \\ \dfrac{H_1}{r} & 0 & \dfrac{H_2}{r} & 0 & \dfrac{H_3}{r} & 0 & \dfrac{H_4}{r} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix} \tag{4.35}$$

As tensões para o modelo axissimétrico podem ser obtidas utilizando as equações (4.15) e (4.35) na sua forma matricial compacta:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_z \\ \tau_{rz} \\ \sigma_\theta \end{Bmatrix} = \{\sigma\} = [C]\{\varepsilon\} = [C][B]\{\delta\} \tag{4.36}$$

Onde a matriz $[C]$ corresponde à matriz constitutiva apresentada na equação (4.19) para o caso axissimétrico, a matriz $[B]$ corresponde às relações de deformações-deslocamentos da equação (4.35) e $\{\delta\}$ é o vetor de deslocamento nodal.

4.4.1
Formação da Matriz de Rigidez do elemento

A matriz de rigidez de elementos axissimétricos pode ser obtida através da seguinte expressão [13]:

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1612787/CA

$$[k]_e = \iiint [B]^T[C][B]dV \tag{4.37}$$

Integrada ao longo do contorno circunferencial:

$$[k]_e = 2\pi\iint [B]^T[C][B]rdrdz \tag{4.38}$$

Neste caso, a matriz $[B]$ é uma função das coordenadas globais do sistema de coordenadas cilíndricas.

4.4.2
Vetor Carregamento – Forças de Superfície

O vetor carregamento pode ser caracterizado da seguinte forma, carregamento atuando em todo volume do corpo, superfície, tensões iniciais e forças concentradas. Para os problemas de carga distribuída uniformemente sobre a superfície de uma placa ou cilindro o vetor de carregamento a ser aplicado é o de superfície. Para obter os esforços atuando em cada nó do elemento a seguinte equação deve ser aplicada [13]:

$$R_S = \iint [H]^{S^T(m)} f^{S(m)} ds \tag{4.39}$$

Onde $[H(x,y)]$ é a matriz que contém as funções de interpolação de deslocamentos e $f^{S(m)}$ é a força de superfície por unidade de comprimento atuando no elemento. O índice *m* indica o elemento da malha.

Para o caso axissimétrico, o vetor de carregamento possui a seguinte forma:

$$R_S = \iint [H]^{S(m)} \begin{Bmatrix} f^{Sr(m)} \\ f^{Sz(m)} \end{Bmatrix} ds \tag{4.40}$$

Onde, $f^{Sr(m)}$ e $f^{Sz(m)}$ são as pressões nas direções radial e axial, respectivamente representadas na Figura 16 atuando numa das extremidades de um elemento plano bilinear.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1612787/CA

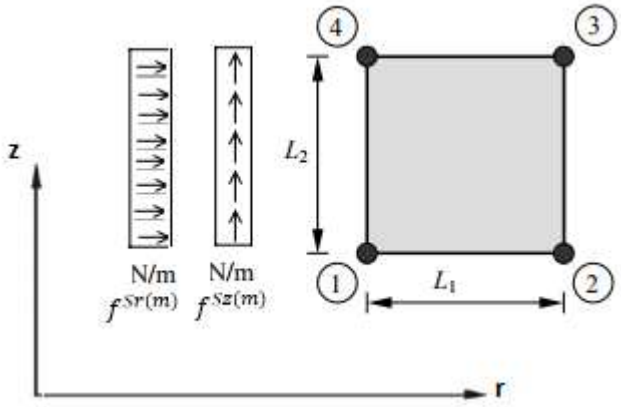


Figura 16: Representação da atuação das forças de superfície [3].

4.5
Elementos Isoparamétricos

Nas seções 4.3 e 4.4 foi apresentada a formulação para elementos finitos utilizando funções de interpolação para os deslocamentos definidas em coordenadas globais cartesianas e cilíndricas. Apesar de facilitar o entendimento do fenômeno físico, as funções de interpolação definidas através do sistema global (cartesiano ou cilíndrico) não apresenta vantagens computacionais. Como o método dos elementos finitos deve ser implementado computacionalmente, a manipulação das funções de interpolação em notação matricial deve ser efetuada do modo mais eficiente possível. Surge então a necessidade de introduzir uma nova forma de representar as mesmas funções de interpolação dos elementos, utilizando o sistema de coordenadas natural, chamada de função de interpolação isoparamétrica.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1612787/CA

4.5.1
Elementos Isoparamétricos Retangulares – Funções de interpolação da Família Lagrange

Uma maneira de se obter funções de interpolação para o elemento de qualquer ordem é através da multiplicação apropriada de polinômios [3].

Considerando o elemento apresentado na Figura 17, que apresenta uma série de nós externos e internos ao elemento, para se obter a função de interpolação correspondente ao nó destacado, é necessário multiplicar um polinômio de 5ª ordem na direção radial da coordenada natural η que tenha valor unitário no nó considerado e nulo para os demais pontos por outro de 4ª ordem na direção longitudinal ξ tendo também valor unitário para o nó considerado e zero

para os demais, satisfazendo, assim, a condição de continuidade. Polinômios desenvolvidos ao longo de uma coordenada possuem esta característica e são chamados de *polinômios de Lagrange*.

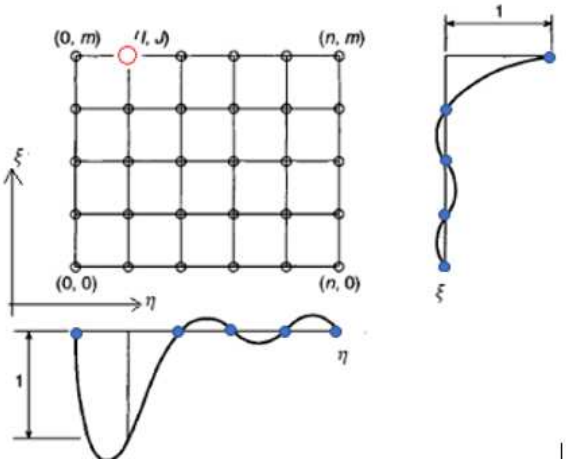


Figura 17: Ordem do Polinômio de Lagrange.

A construção destes polinômios segue a formação do triângulo de Pascal, representado na Figura 18, que permite explorar uma grande variedade de polinômios.

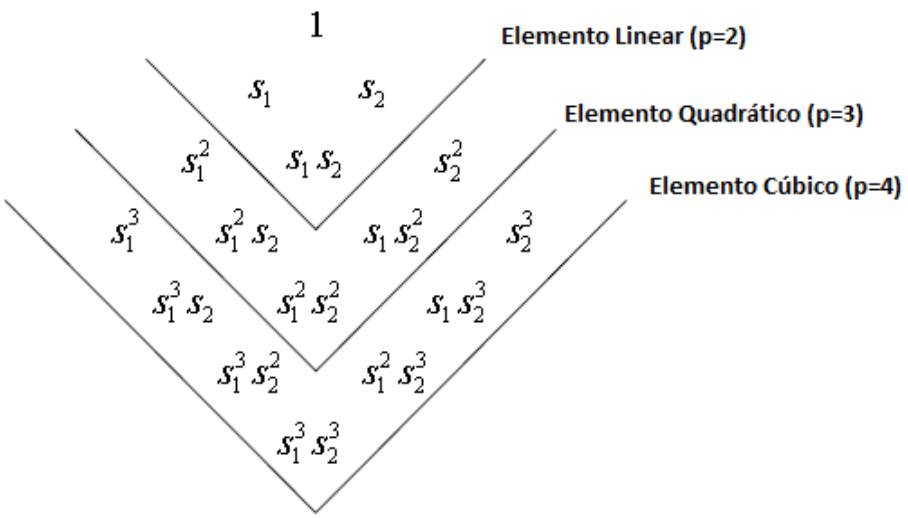


Figura 18: Seleção dos termos no triângulo de Pascal para elementos finitos da família *Lagrangeana*

A partir da combinação de cada conjunto de termos do triângulo de Pascal irá resultar uma formulação distinta para um dado elemento finito, sendo necessário averiguar a ordem do polinômio formado e a sua continuidade. Os elementos bidimensionais da família Lagrangeana são quadriláteros com p^2 nós, onde p representa o número de nós de um lado do elemento conforme mostra a Figura 19.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1612787/CA

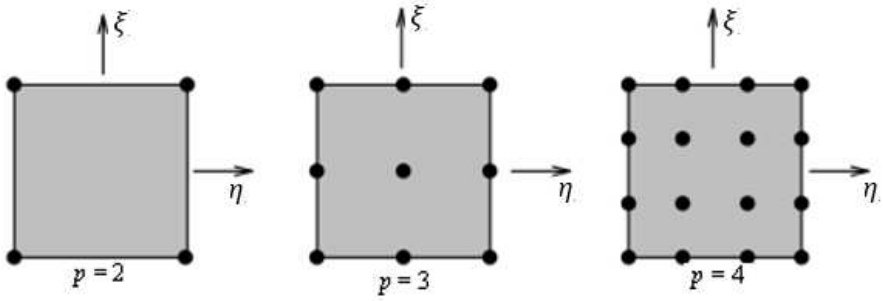


Figura 19: Exemplo de elementos finitos bilinear da família de Lagrange

Aumentando o número de nós no elemento, as funções modificam-se para garantir a continuidade, seja ela linear, parabólica ou cúbica, ajustando assim ao número de nós adicionados ao elemento. Portanto, para obter a forma da função de interpolação para um elemento linear, o produto dos polinômios de Lagrange retorna à seguinte formação:

$$N_i(\eta,\xi) = \frac{1}{4}(1+\eta_i\eta)(1+\xi_i\xi) \qquad i = 1 \dots n \tag{4.41}$$

A adição de nós ao elemento bilinear resulta na introdução de novos graus de liberdade. Sendo assim, para garantir a continuidade, as funções de interpolação são modificadas conforme a Tabela 4.

	Aplicar coluna se o nó i estiver presente no elemento				
	i = 5	i = 6	i = 7	i = 8	i = 9
$N_1 = 1/4\ .\ (1-\xi)(1-\eta)$	$-1/2\ .\ N_5$			$-1/2\ .\ N_8$	$+1/4\ .\ N_9$
$N_2 = 1/4\ .\ (1+\xi)(1-\eta)$	$-1/2\ .\ N_5$	$-1/2\ .\ N_6$			$+1/4\ .\ N_9$
$N_3 = 1/4\ .\ (1+\xi)(1+\eta)$		$-1/2\ .\ N_6$	$-1/2\ .\ N_7$		$+1/4\ .\ N_9$
$N_4 = 1/4\ .\ (1-\xi)(1+\eta)$			$-1/2\ .\ N_7$	$-1/2\ .\ N_8$	$+1/4\ .\ N_9$
$N_5 = 1/2\ .\ (1-\xi^2)(1-\eta)$					$-1/2\ .\ N_9$
$N_6 = 1/2\ .\ (1+\xi)(1-\eta^2)$					$-1/2\ .\ N_9$
$N_7 = 1/2\ .\ (1-\xi^2)(1+\eta)$					$-1/2\ .\ N_9$
$N_8 = 1/2\ .\ (1-\xi)(1-\eta^2)$					$-1/2\ .\ N_9$
$N_9 = (1-\xi^2)(1-\eta^2)$					

Tabela 4: Adição de nós elemento bilinear

A ordem para as funções de interpolação apresentadas na Tabela 4 seguem a numeração nodal especificada no elemento isoparamétrico quadrático quadrilateral de 9 nós apresentado na Figura 20.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1612787/CA

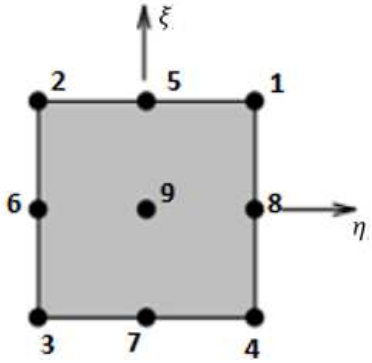


Figura 20: Sequência de numeração nodal adotada para o elemento isoparamétrico bilinear de Lagrange.

4.5.2
Elementos Isoparamétricos Retangulares – Funções de interpolação da Família Serendipity

A família de Lagrange possui funções de interpolação obtidas através do polinômio de Lagrange. Nesta concepção de elemento, a disposição dos nós ocorre no interior do elemento, ao contrário dos elementos da família Serendipity, onde os nós estão dispostos ao longo da aresta do elemento.

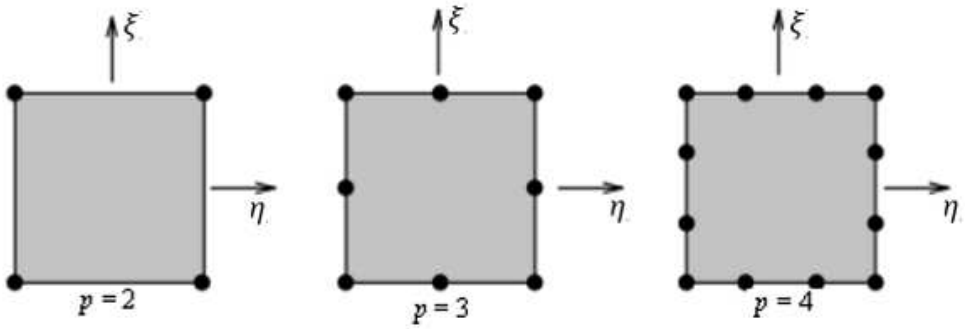


Figura 21: Exemplo de elementos finitos bilineares da família Serendipity

O número de nós de cada elemento Serendipity varia conforme a expressão *4(p-1),* sendo *p* o número de nós de uma aresta do elemento. A Figura 22 apresenta o critério de seleção de termos no triângulo de Pascal para o caso de elementos da família Serendipity.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1612787/CA

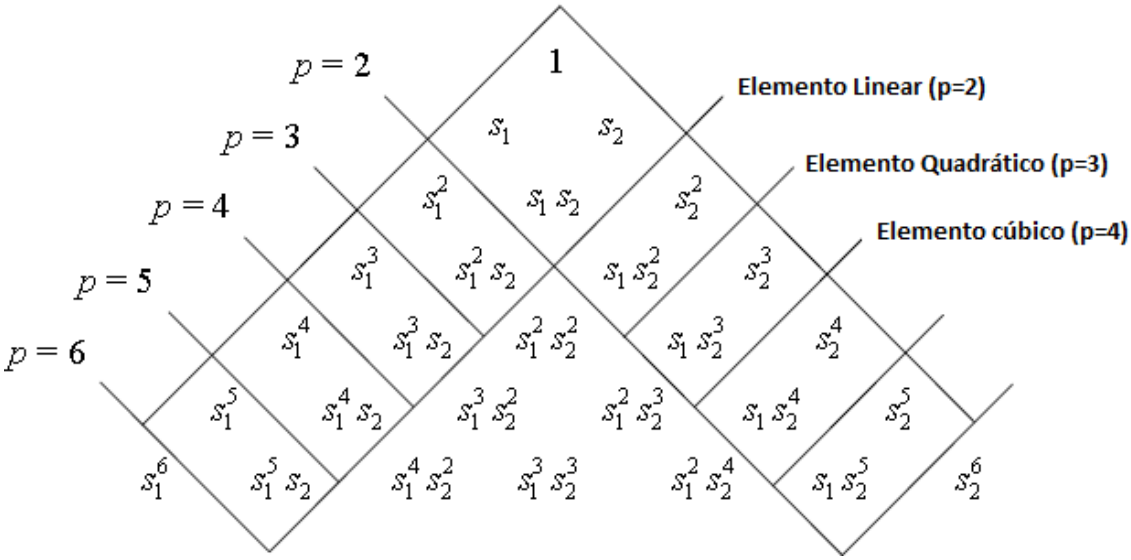


Figura 22: Seleção dos termos no triângulo de Pascal para elementos finitos da família Serendipity.

Pode-se observar através da Figura 22 que um elemento linear da família *Serendipity* terá a mesma formação da função de interpolação da família *Lagrangeana*, pois envolvem os mesmos termos do triângulo de Pascal. No entanto, para um elemento quadrilateral quadrático *(p=3),* os termos de formação da função de interpolação *Lagrangeana* diferem-se dos termos de formação da função de interpolação *Serendipity*, pois alguns termos intermediários da função de interpolação *Serendipity* não são incluídos, ao contrário da formulação *Lagrangena*. Por este motivo, elementos que utilizam as funções de interpolação *Lagrangeanas* apresentam resultados melhores do que a interpolação *Serendipity* [2].

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1612787/CA

4.5.3
Formulação Isoparamétrica para Elementos Planos Lineares Axissimétricos da família de Lagrange (4 nós/8GDL)

As funções de interpolação *Lagrangeana* para o elemento axissimétrico plano bilinear quadrilateral representado na Figura 23, proposto em coordenadas globais cilíndricas, possuem o seguinte formato segundo o triângulo de Pascal para elementos lineares:

$$N_i(\eta,\xi) = \frac{1}{4}(1+\eta_i\eta)\,(1+\xi_i\xi) \qquad i = 1 \dots 4 \tag{4.42}$$

Estas funções interpolam os deslocamentos internos do elemento e devem retornar o valor 1 para o grau de liberdade i e zero nos demais pontos nodais do elemento, conforme mostra a Figura 23 (*i=2*).

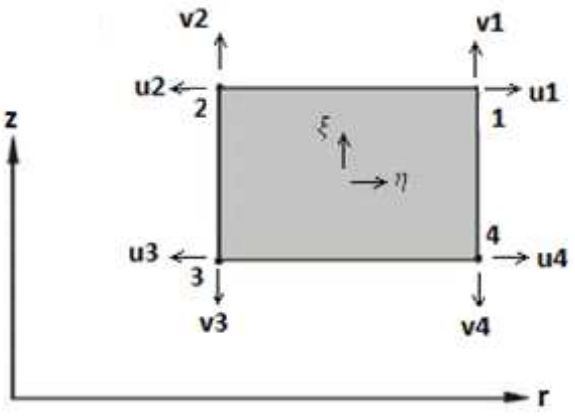


Figura 23: Elemento Finito Isoparamétrico bilinear

Impondo as condições de interpolação de *Lagrange* a cada nó do elemento finito isoparamétrico bilinear da Figura 23, tem-se:

$$N_1 = \frac{1}{4}(1+\eta)(1+\xi)$$

$$N_2 = \frac{1}{4}(1-\eta)\,(1+\xi)$$

$$N_3 = \frac{1}{4}(1-\eta)\,(1-\xi) \qquad (4.43)$$

$$N_4 = \frac{1}{4}(1+\eta)\,(1-\xi)$$

A Figura 24 demonstra o comportamento linear da função de interpolação para os pontos nodais do elemento bilinear isoparamétrico.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1612787/CA

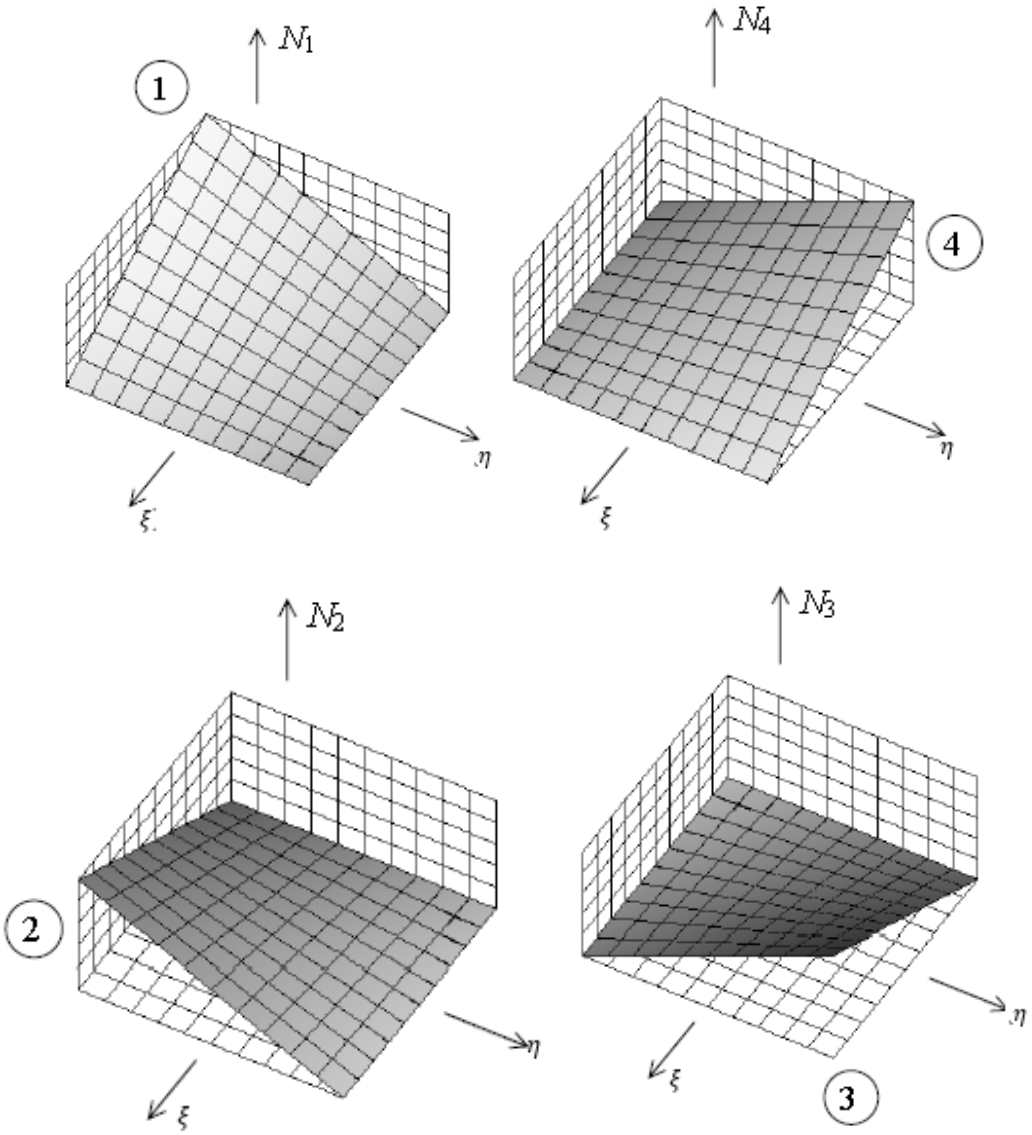


Figura 24: Gráfico das funções $\boldsymbol{N_i(\eta,\xi)}$ - Elemento Bilinear de *Lagrange* [3].

A interpolação do campo de deslocamentos para o elemento proposto é dada por:

$$u(\eta,\xi) = \sum_{i=1}^{4} N_i u_i$$
$$v(\eta,\xi) = \sum_{i=1}^{4} N_i v_i \tag{4.44}$$

Efetuando o somatório para cada ponto nodal do elemento:

$$u(\eta,\xi) = \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)u_1 + \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)u_2 + \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)u_3 + \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)u_4 \tag{4.45}$$

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1612787/CA

$$v(\eta,\xi) = \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)v_1 + \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)v_2 + \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)v_3 + \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)v_4$$

Derivando a expressão (4.45) em relação as coordenadas globais *r* e *z*, obtém-se as seguintes relações para a deformação:

$$\varepsilon_r = \frac{du}{dr} = \frac{dN_1}{dr}u_1 + \frac{dN_2}{dr}u_2 + \frac{dN_3}{dr}u_3 + \frac{dN_4}{dr}u_4$$

$$\varepsilon_z = \frac{dv}{dz} = \frac{dN_1}{dz}v_1 + \frac{dN_2}{dz}v_2 + \frac{dN_3}{dz}v_3 + \frac{dN_4}{dz}v_4$$

$$\gamma_{rz} = \frac{dN_1}{dr}u_1\frac{dN_1}{dz}v_1 + \frac{dN_2}{dr}u_2\frac{dN_2}{dz}v_2 + \frac{dN_3}{dr}u_3\frac{dN_3}{dz}v_3 + \frac{dN_4}{dr}u_4\frac{dN_4}{dz}v_4 \tag{4.46}$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{N_1}{r} + \frac{N_2}{r} + \frac{N_3}{r} + \frac{N_4}{r}$$

A equação (4.46) permite calcular as deformações em função dos deslocamentos nodais, desempenhando papel fundamental na definição da matriz de rigidez do elemento finito, dado que a matriz de rigidez do elemento depende fundamentalmente do conhecimento das relações deslocamento-deformação.

No entanto, as relações obtidas na equação (4.46) não podem ser obtidas diretamente, pois as funções de interpolação N_i são dadas em função do sistema de coordenadas naturais (η,ξ). Desta forma, o cálculo das derivadas parciais $\frac{dN_i}{dr}, \frac{dN_i}{dz}$, necessita de alguns cuidados, pois essas funções não são conhecidas explicitamente. A correspondência entre o sistema de coordenadas locais e o sistema de coordenadas globais é estabelecida utilizando a regra da cadeia do cálculo diferencial, onde:

$$\frac{dN_i}{d\eta} = \frac{dN_i}{dr}\frac{dr}{d\eta} + \frac{dN_i}{dz}\frac{dz}{d\eta}$$

$$\frac{dN_i}{d\xi} = \frac{dN_i}{dr}\frac{dr}{d\xi} + \frac{dN_i}{dz}\frac{dz}{d\xi} \tag{4.47}$$

Na forma matricial:

(4.48)

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1612787/CA

$$\begin{Bmatrix} \frac{dN_i}{d\eta} \\ \frac{dN_i}{d\xi} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{dr}{d\eta} & \frac{dz}{d\eta} \\ \frac{dr}{d\xi} & \frac{dz}{d\xi} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{dN_i}{dr} \\ \frac{dN_i}{dz} \end{Bmatrix}$$

A matriz quadrada que relaciona as derivadas no sistema local com as derivadas no sistema natural chama-se matriz Jacobiana ou operador Jacobiano. Assim:

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{dr}{d\eta} & \frac{dz}{d\eta} \\ \frac{dr}{d\xi} & \frac{dz}{d\xi} \end{bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \frac{dN_i}{d\eta} \\ \frac{dN_i}{d\xi} \end{Bmatrix} = [J] \begin{Bmatrix} \frac{dN_i}{dr} \\ \frac{dN_i}{dz} \end{Bmatrix} \tag{4.49}$$

Como o objetivo é obter as derivadas parciais $\frac{dN_i}{dr}, \frac{dN_i}{dz}$:

$$\begin{Bmatrix} \frac{dN_i}{dr} \\ \frac{dN_i}{dz} \end{Bmatrix} = [J]^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{dN_i}{d\eta} \\ \frac{dN_i}{d\xi} \end{Bmatrix} \tag{4.50}$$

Desta forma, conhecendo-se as derivadas parciais acima, pode-se obter as deformações da equação (4.46) e consequentemente obtém-se as relações deformações-deslocamentos do elemento isoparamétrico axissimétrico bilinear.

$$\varepsilon = \begin{Bmatrix} \varepsilon_r \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{rz} \\ \varepsilon_\theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{du}{dr} \\ \frac{dv}{dz} \\ \frac{du}{dz} + \frac{dv}{dr} \\ \frac{u}{r} \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{dN_1}{dr} & 0 & \frac{dN_2}{dr} & 0 & \frac{dN_3}{dr} & 0 & \frac{dN_4}{dr} & 0 \\ 0 & \frac{dN_1}{dz} & 0 & \frac{dN_2}{dz} & 0 & \frac{dN_3}{dz} & 0 & \frac{dN_4}{dz} \\ \frac{dN_1}{dz} & \frac{dN_1}{dr} & \frac{dN_2}{dz} & \frac{dN_2}{dr} & \frac{dN_3}{dz} & \frac{dN_3}{dr} & \frac{dN_4}{dz} & \frac{dN_4}{dr} \\ \frac{N_1}{r} & 0 & \frac{N_2}{r} & 0 & \frac{N_3}{r} & 0 & \frac{N_4}{r} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix} \tag{4.51}$$

Finalmente, para se obter a matriz de rigidez do elemento utilizando coordenadas locais deve-se utilizar a equação (4.52):

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1612787/CA

$$[k]_e = 2\pi \iint [B]^T [C][B] r dr dz \tag{4.52}$$

$|J|$ é o determinante do operador Jacobiano. Portanto, uma consequência para garantir a transformação entre os sistemas de coordenadas natural para o local é a necessidade da matriz quadrada proposta na equação (4.49) possuir inversa, ou seja, não podendo ser singular (det[J]≠0).

A existência da matriz inversa do Jacobiano traduz uma correspondência biunívoca entre o sistema natural e o sistema local de coordenadas do elemento. Quando o elemento possui distorções elevadas, essa relação única entre os sistemas não existe, acarretando na singularidade do operador Jacobiano.

4.5.4
Formulação Isoparamétrica para Elementos Planos Parabólicos Axissimétricos da família de Lagrange (9 nós/18GDL)

As funções de interpolação *Lagrangeanas* para o elemento plano axissimétrico representado na Figura 25 são similares às funções obtidas para o elemento isoparamétrico bilinear da seção anterior, porém deve-se considerar a influência dos nós adicionados ao elemento para que se garanta a condição de continuidade característica das funções de interpolação.

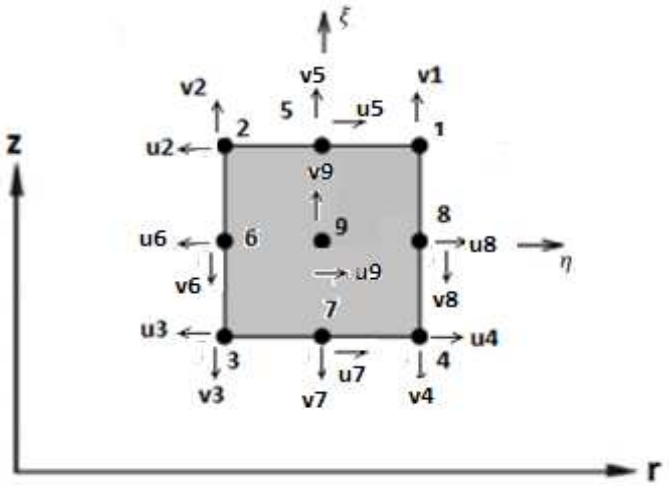


Figura 25: Elemento Finito Isoparamétrico Bilinear

A Figura 26 exemplifica o comportamento parabólico da função de interpolação obtida para os nós 2 e 8 do elemento plano com 9 nós.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1612787/CA

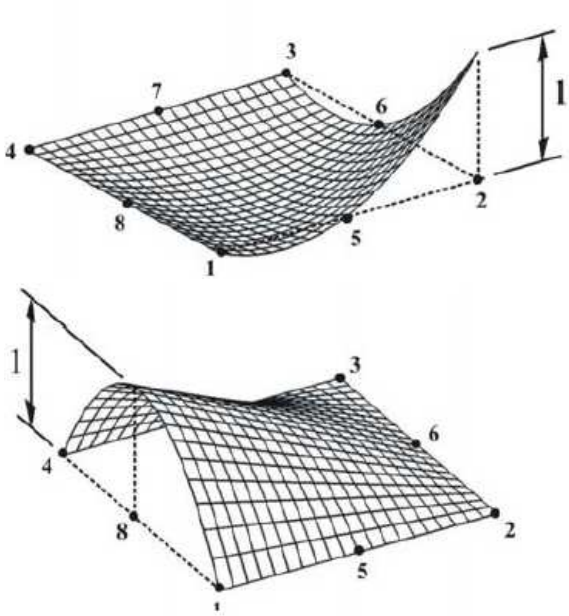


Figura 26: Funções de Interpolação para elemento plano 9 nós [3]

As funções de interpolação para o elemento acima são [13]:

$$
\begin{aligned}
N_1 &= \frac{1}{4}(1+\eta)(1+\xi) - \frac{1}{2}N_5 - \frac{1}{2}N_8 - \frac{1}{4}N_9 \\
N_2 &= \frac{1}{4}(1-\eta)\,(1+\xi) - \frac{1}{2}N_5 - \frac{1}{2}N_6 - \frac{1}{4}N_9 \\
N_3 &= \frac{1}{4}(1-\eta)\,(1-\xi) - \frac{1}{2}N_6 - \frac{1}{2}N_7 - \frac{1}{4}N_9 \\
N_4 &= \frac{1}{4}(1+\eta)\,(1-\xi) - \frac{1}{2}N_7 - \frac{1}{2}N_8 - \frac{1}{4}N_9 \\
N_5 &= \frac{1}{2}(1-\eta^2)\,(1+\xi) - \frac{1}{2}N_9 \\
N_6 &= \frac{1}{2}(1-\eta)\,(1-\xi^2) - \frac{1}{2}N_9 \\
N_7 &= \frac{1}{2}(1-\eta^2)\,(1-\xi) - \frac{1}{2}N_9 \\
N_8 &= \frac{1}{2}(1+\eta)\,(1-\xi^2) - \frac{1}{2}N_9 \\
N_9 &= \frac{1}{2}(1-\eta^2)\,(1-\xi^2) - \frac{1}{2}N_9
\end{aligned}
\tag{4.53}
$$

A interpolação do campo de deslocamentos para o elemento proposto novamente é obtida por:

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1612787/CA

$$u(\eta,\xi) = \sum_{i=1}^{9} N_i u_i$$
$$v(\eta,\xi) = \sum_{i=1}^{9} N_i u_i \tag{4.54}$$

Efetuando o somatório utilizando as expressões da equação (4.53) para cada ponto nodal:

$$\begin{aligned} u(\eta,\xi) = &\left[\frac{1}{4}(1+\eta)(1+\xi) - \frac{1}{2}N_5 - \frac{1}{2}N_8 - \frac{1}{4}N_9\right] u_1 \\ &+ \left[\frac{1}{4}(1-\eta)\,(1+\xi) - \frac{1}{2}N_5 - \frac{1}{2}N_6 - \frac{1}{4}N_9\right] u_2 + \cdots \\ &+ \left[\frac{1}{2}(1+\eta)\,(1-\xi^2) - \frac{1}{2}N_9\right] u_9 \end{aligned} \tag{4.55}$$

$$\begin{aligned} v(\eta,\xi) = &\left[\frac{1}{4}(1+\eta)(1+\xi) - \frac{1}{2}N_5 - \frac{1}{2}N_8 - \frac{1}{4}N_9\right] v_1 \\ &+ \left[\frac{1}{4}(1-\eta)\,(1+\xi) - \frac{1}{2}N_5 - \frac{1}{2}N_6 - \frac{1}{4}N_9\right] v_2 + \cdots \\ &+ \left[\frac{1}{2}(1+\eta)\,(1-\xi^2) - \frac{1}{2}N_9\right] v_9 \end{aligned}$$

Derivando a expressão (4.55) em relação às coordenadas globais *r* e *z*, obtém-se as seguintes relações para a deformação:

$$\varepsilon_r = \frac{du}{dr} = \frac{dN_1}{dr}u_1 + \frac{dN_2}{dr}u_2 + \frac{dN_3}{dr}u_3 + \frac{dN_4}{dr}u_4 + \cdots + \frac{dN_9}{dr}u_9$$

$$\varepsilon_z = \frac{dv}{dz} = \frac{dN_1}{dz}v_1 + \frac{dN_2}{dz}v_2 + \frac{dN_3}{dz}v_3 + \frac{dN_4}{dz}v_4 + \cdots + \frac{dN_9}{dz}z_9$$

$$\begin{aligned} \gamma_{rz} = &\frac{dN_1}{dr}u_1\frac{dN_1}{dz}v_1 + \frac{dN_2}{dr}u_2\frac{dN_2}{dz}v_2 + \frac{dN_3}{dr}u_3\frac{dN_3}{dz}v_3 + \frac{dN_4}{dr}u_4\frac{dN_4}{dz}v_4 + \cdots \\ &+ \frac{dN_9}{dr}u_9\frac{dN_9}{dz}v_9 \end{aligned} \tag{4.56}$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{N_1}{r} + \frac{N_2}{r} + \frac{N_3}{r} + \frac{N_4}{r} + \cdots + \frac{N_9}{r}$$

Para obter as derivadas parciais $\frac{dN_i}{dr}, \frac{dN_i}{dz}$ segue-se a mesma metodologia adotada na seção anterior, ou seja, utiliza-se novamente o operador Jacobiano:

$$\begin{Bmatrix} \dfrac{dN_i}{dr} \\ \dfrac{dN_i}{dz} \end{Bmatrix} = [J]^{-1} \begin{Bmatrix} \dfrac{dN_i}{d\eta} \\ \dfrac{dN_i}{d\xi} \end{Bmatrix} \tag{4.57}$$

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1612787/CA

Obtendo as derivadas parciais acima, encontra-se as deformações da equação e consequentemente obtém-se as relações deformações-deslocamentos do elemento plano parabólico axissimétrico.

$$\varepsilon = \begin{Bmatrix} \varepsilon_r \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{rz} \\ \varepsilon_\theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dfrac{du}{dr} \\ \dfrac{dv}{dz} \\ \dfrac{du}{dz} + \dfrac{dv}{dr} \\ \dfrac{u}{r} \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \dfrac{dN_1}{dr} & 0 & \dfrac{dN_2}{dr} & 0 & & \dfrac{dN_9}{dr} & 0 \\ 0 & \dfrac{dN_1}{dz} & 0 & \dfrac{dN_2}{dz} & \cdots \quad \cdots & 0 & \dfrac{dN_9}{dz} \\ \dfrac{dN_1}{dz} & \dfrac{dN_1}{dr} & \dfrac{dN_2}{dz} & \dfrac{dN_2}{dr} & & \dfrac{dN_9}{dz} & \dfrac{dN_9}{dr} \\ \dfrac{N_1}{r} & 0 & \dfrac{N_2}{r} & 0 & & \dfrac{N_9}{r} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ u_9 \\ v_9 \end{Bmatrix} \tag{4.58}$$

Finalmente, para se obter a matriz de rigidez do elemento utilizando coordenadas locais deve-se utilizar a equação (4.59):

$$[k]_e = 2\pi \iint [B]^T [C][B] r dr dz \tag{4.59}$$

O processo mencionado acima aplica-se também para a formulação Isoparamétrica dos elementos planos Cúbicos, ou seja, 16 nós com 32 graus de liberdade associados. Neste caso, as funções de interpolação são funções do terceiro grau conforme recomenda o triângulo de Pascal. A Figura 27 representa um elemento plano com 16 nós isoparamétrico *Lagrangeano*.

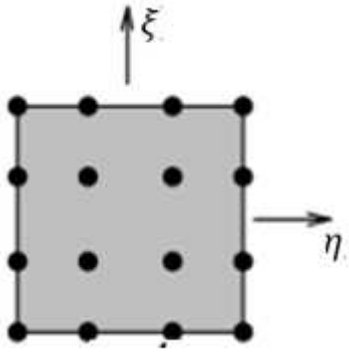


Figura 27: Elemento Plano Isoparamétrico com 16 nós Lagrangeano

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1612787/CA

5.
Resultados

Nesta seção apresentam-se os resultados obtidos através da análise numérica do comportamento de um vaso de pressão utilizando o método dos elementos finitos através do programa comercial ANSYS.

O elemento *PLANE183*, que pertence à biblioteca do ANSYS, pode ser usado em análises estruturais axissimétricas. Possui 8 nós com 2 graus de liberdade de translação associados e função de interpolação de ordem quadrática, o que possibilita capturar os efeitos de flexão adequadamente quando comparado com o elemento *PLANE182*, que possui apenas 4 nós conforme apresentado na seção 4.4.

5.1
Modelo Proposto para o caso Paredes Finas

O modelo axissimétrico proposto para análise do caso casca e placa de paredes finas segue representado na Figura 28. A axissimetria é proposta em relação ao eixo y. O ANSYS requer, para modelos axissimétricos, que a geometria esteja completamente definida no quadrante positivo.

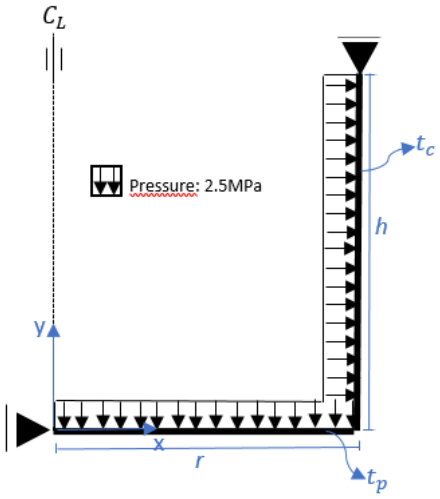


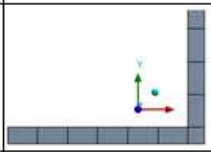
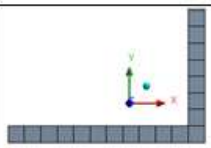
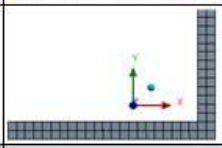
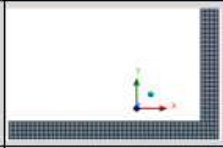
Figura 28: Modelo Axissimétrico

A Tabela 1 apresenta as dimensões do modelo estudado considerando *n=1* (avaliador da rigidez) tanto para a casca quanto para a placa. Os resultados apresentados nesta seção estão de acordo com o sistema global de coordenadas demonstrado na Figura 28. As condições de contorno estabelecidas para este caso estão apresentadas na seção 3.1.4.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1612787/CA

5.1.1
Análise de Convergência da Malha para o modelo de paredes finas

Para verificar o comportamento da malha utilizada na análise do modelo proposto para o caso de paredes finas, foi realizado um estudo de convergência que segue representado na Tabela 5. As Figuras 29 e 30 apresentam os deslocamentos radiais e transversais obtidos para cada malha tanto para a casca quanto para a placa respectivamente.

Estudo de Convergência para o modelo de Paredes Finas						
CASCA (x/h=0.5)		PLACA (r=0)		Parâmetros		
*$u_{r\,(máx)}$ - Deslocamento Radial (mm)	***Diferença % ((u_r máx))	*$u_{t\,(máx)}$ - Deslocamento transversal (mm)	***Diferença % ((u_t máx))	# Elementos	Modelo representativo da Malha	
0,033622	0,015	-1,1257	4,763113367	26		1 Elemento na espessura
0,033623	0,012	-1,1352	3,959390863	52		
0,033626	0,003	-1,1686	0,011336717	101		2 Elementos
0,033627	0,000	-1,182	0	202		4 Elementos
0,033627	0,000	-1,182	0	404		8 Elementos

* Valores Obtidos a partir da superficie média da casca e da placa
** Valores obtidos na superficie superior da placa submetida a pressão interna
*** Valores normalizados para a malha de 202 Elementos

Tabela 5: Análise de Convergência – Modelo Paredes Finas

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1612787/CA

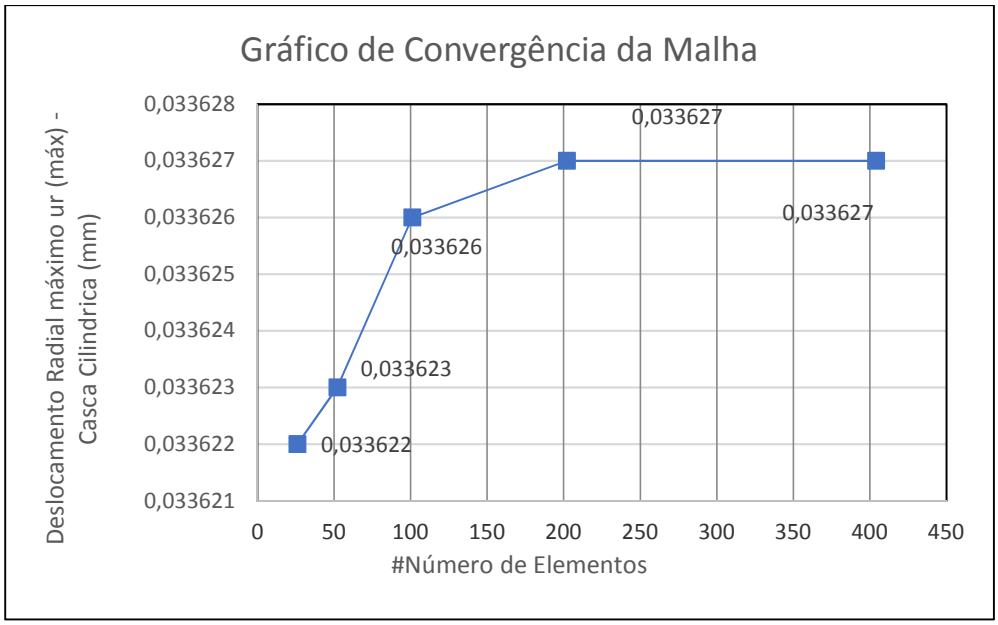


Figura 29: Convergência para o deslocamento radial máximo da casca (x/h=0.5)

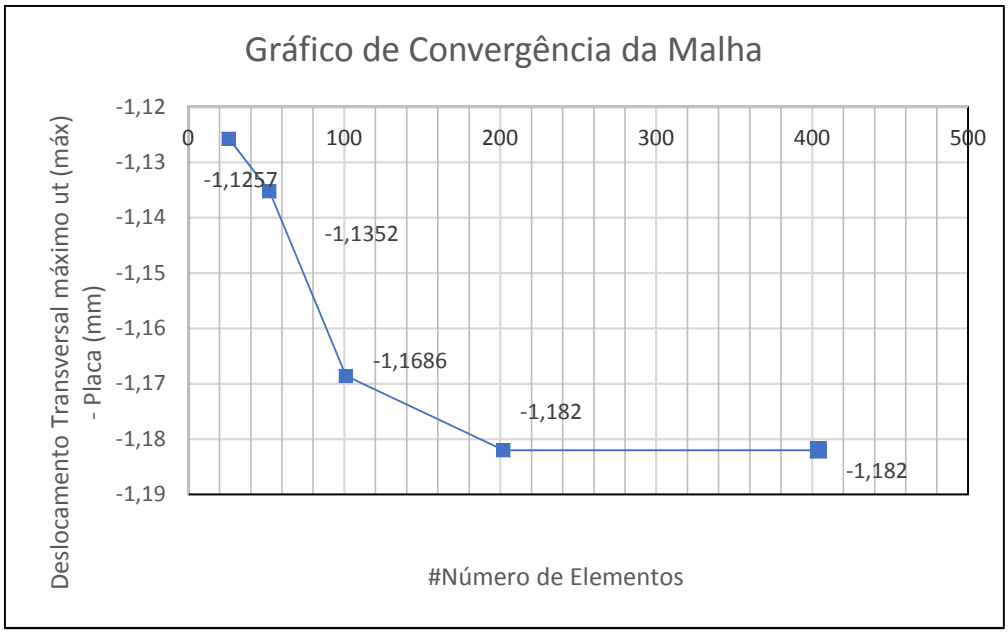


Figura 30: Convergência para o deslocamento transversal máximo da placa (r=0)

Observa-se que a malha com 202 elementos apresenta melhor comportamento para o modelo proposto, dado que a sua variação percentual em relação à malha com 404 elementos é muito próxima, tornando desnecessário um refinamento maior da malha em função do ganho na resposta para os deslocamentos. Desta forma, os resultados apresentados foram obtidos utilizando a malha com 202 elementos.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1612787/CA

5.1.2
Resultados Obtidos para Casca & Placa de Paredes Finas

A Figura 31 apresenta o deslocamento radial da casca cilíndrica obtido a partir da superfície média conforme a equação (3.63). A posição x=0 está localizada na junção entre o modelo de casca e placa de paredes finas representado na Figura 28. Observa-se também que o comportamento entre a resposta obtida pelo método dos elementos finitos e o modelo analítico convergem, apresentando erro máximo de 5.6%.

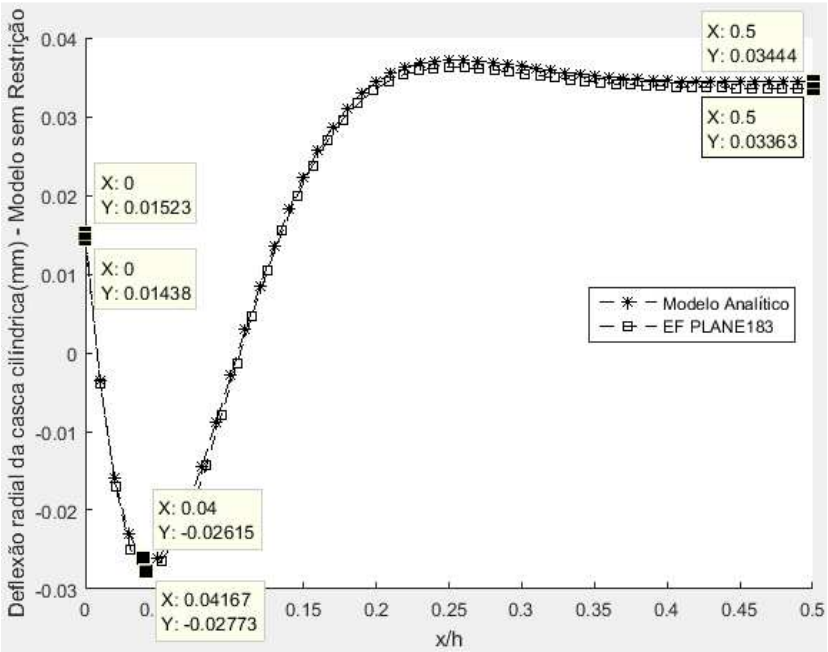


Figura 31: Deflexão da casca cilíndrica (R/tc>10) - Resultados obtidos a partir da superfície média

Os esforços internos M_0 e Q_0 dominam o comportamento da deflexão da casca cilíndrica próximo à extremidade. Isto ocorre devido ao efeito de borda que rapidamente desaparece numa proporção $2{,}5\sqrt{Rt_c}$ (x/h=0.21).

A deflexão transversal da placa obtida a partir do plano médio é apresentada na Figura 32 e foi obtida conforme a equação (3.71). Verifica-se a convergência entre os resultados analíticos e elementos finitos onde o erro máximo obtido foi de 2%. Na extremidade (r=0.3) verifica-se um pequeno deslocamento transversal na placa devido ao deslocamento axial da casca cilíndrica.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1612787/CA

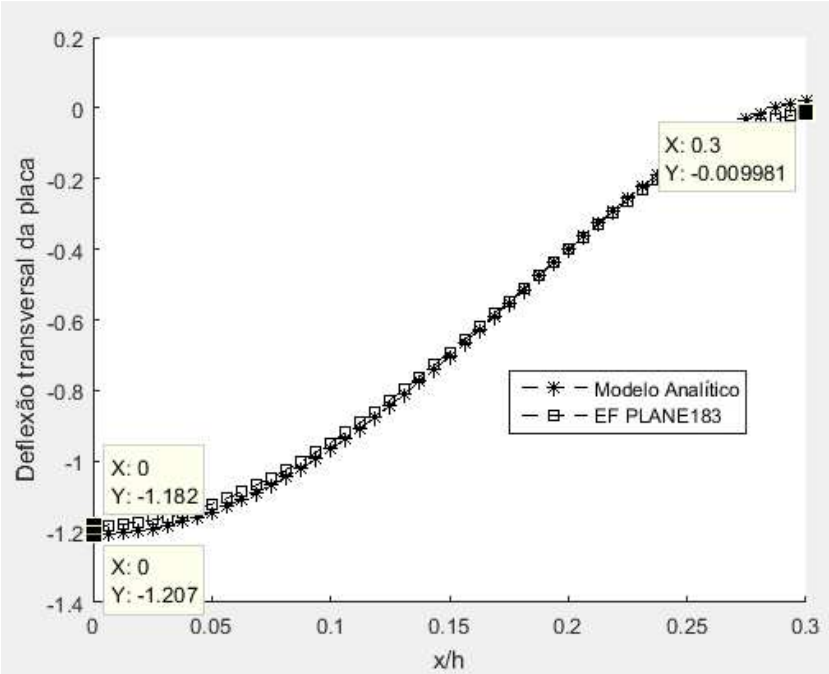


Figura 32: Deflexão transversal máxima da placa (R/tp>10) – plano médio.

A Figura 33 apresenta o comportamento das tensões circunferenciais ao longo do comprimento da casca cilíndrica obtidas conforme a equação (3.13).

Na junção entre a casca e placa as tensões circunferenciais atuando na casca consistem da combinação da tensão de membrana e flexão conforme representada na equação (3.73).

Pode-se observar novamente que próximo à extremidade a tensão circunferencial possui comportamento dominado pelos esforços de flexão, que decaem rapidamente à medida que se afasta da extremidade casca & placa. Para regiões suficientemente afastadas da extremidade (x/h>>2.5$\sqrt{Rt_c}$) [10], verifica-se a solução para vasos de paredes finas submetidos à pressão interna somente. O erro máximo entre o modelo analítico e elementos finitos foi de 4.5%.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1612787/CA

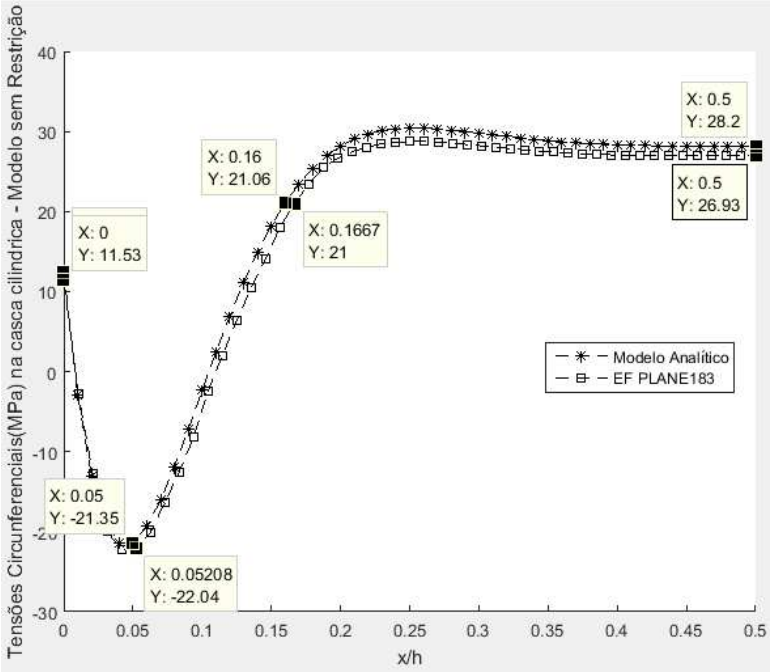


Figura 33: Tensões circunferenciais ao longo da casca cilíndrica (R/tc>10) - superfície média

A Figura 34a apresenta o comportamento das tensões equivalentes de von Mises na junta onde se pode verificar que as tensões de alta ordem se distribuem uniformemente ao redor da região de concentração de tensões ocasionada pela descontinuidade entre a casca e a placa do modelo proposto. A seção 6 descreve o comportamento das tensões nesta região do modelo onde a solução analítica proposta apresenta limitações. Afastado da junta, verifica-se a solução para as tensões de membrana em paredes finas submetidas à pressão interna somente (Figura 34b).

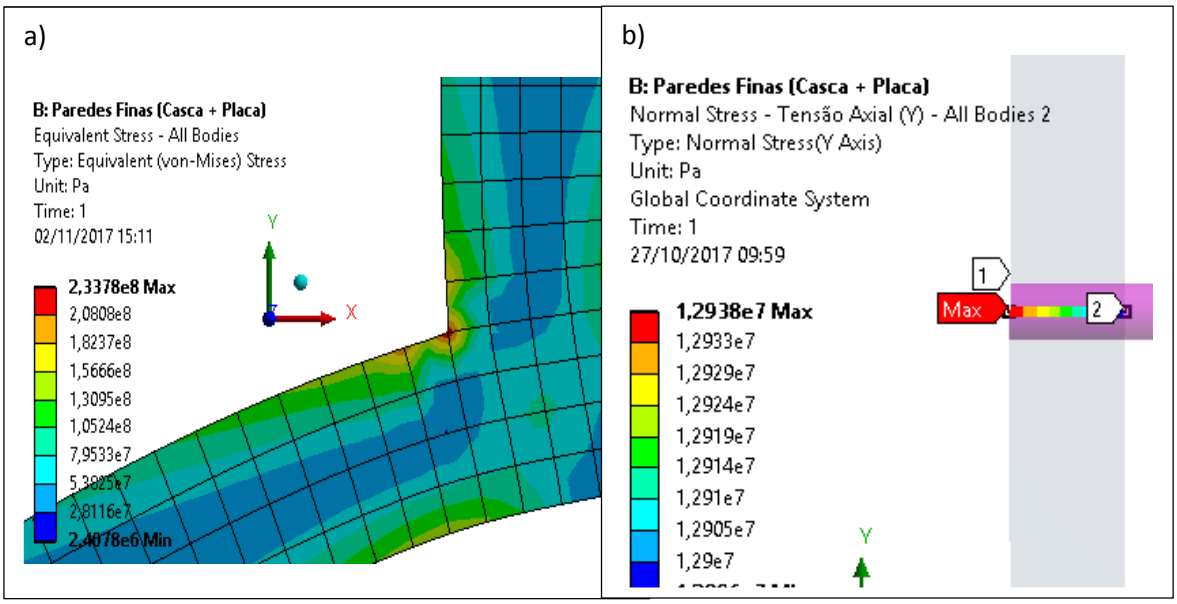


Figura 34: a) Distribuição das tensões equivalentes de von Mises; b) Distribuição das tensões axiais afastado da extremidade (Ansys® V18.1).

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1612787/CA

A Figura 35 apresenta o comportamento das tensões axiais atuando na junta onde se pode verificar que as tensões de alta ordem se concentram na placa conforme a equação (3.79).

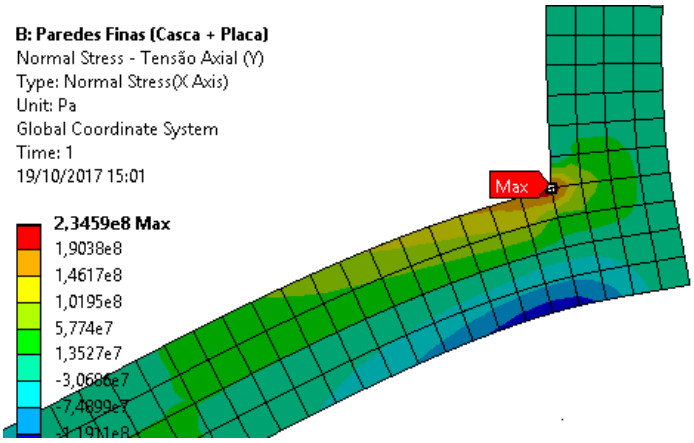


Figura 35: Distribuição das tensões axiais na junta casca e placa de paredes finas (Ansys® V18.1).

A Figura 36 apresenta o comportamento das tensões circunferenciais obtidas conforme a equação (3.37) atuando na placa. Observa-se, neste caso, que a tensão de flexão circunferencial devido à pressão interna no centro da placa possui comportamento compressivo, enquanto que na extremidade possuem comportamento trativo. O erro máximo obtido entre o modelo de elementos finitos e o analítico foi de 4.7%.

A presença de tensões elevadas na extremidade da placa é devido à região de concentração de tensões oriundas da descontinuidade do modelo de placa e casca proposto. A seção 6 descreve as limitações do modelo analítico proposto.

As tensões circunferenciais combinadas na junção atuando na placa são compostas pelas parcelas da tensão de cisalhamento e da tensão de flexão circunferencial devido à pressão interna.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1612787/CA

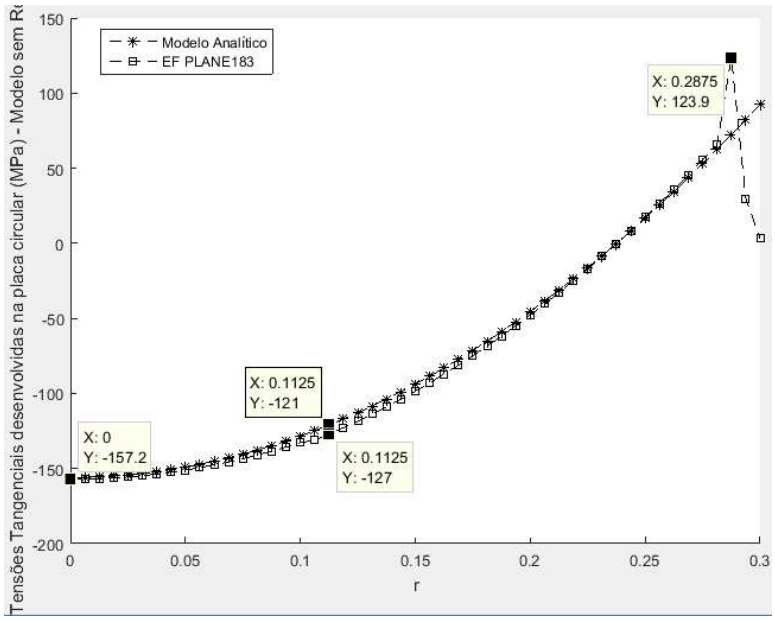


Figura 36: Tensões circunferenciais desenvolvidas no plano superior da placa

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1612787/CA

5.2
Modelo Proposto para o caso Placas Moderadamente Espessas e Cascas de Paredes Finas

O modelo axissimétrico proposto para análise do caso cascas de paredes finas e placas moderadamente espessas segue representado na Figura 37, com o sistema de coordenadas globais.

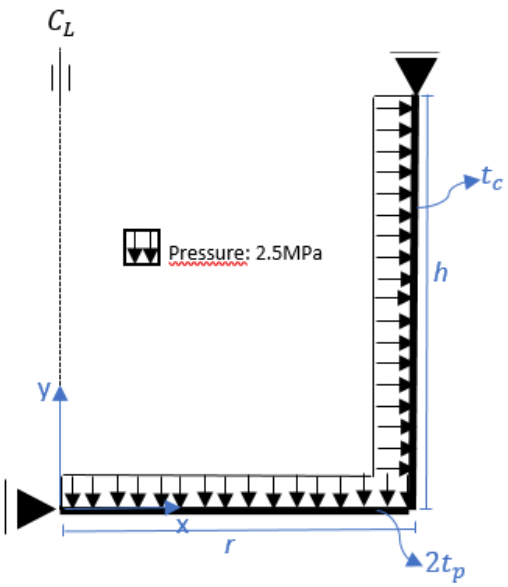
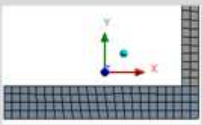
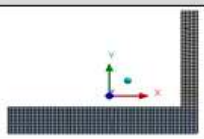
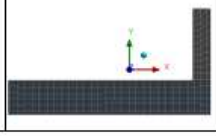


Figura 37: Modelo Axissimétrico – Placa Moderadamente Espessa (R/tp<5) x Casca paredes finas (R/tc>10)

A Tabela 1 apresenta as dimensões do modelo estudado com *n=1* para a casca e *n=2* para a placa. As condições de contorno estabelecidas para este caso estão apresentadas na seção 3.2.2.

5.2.1
Análise de Convergência da Malha para o modelo de casca de paredes finas e placa moderadamente espessa

O estudo de convergência segue representado na Tabela 6. As figuras 38 e 39 apresentam os deslocamentos obtidos associados a cada malha tanto para a casca quanto para a placa.

Estudo de Convergência para o modelo de Paredes Finas						
CASCA (x/h=0.5)		PLACA (r=0)		Parâmetros		
*$u_{r\,(máx)}$ - Deslocamento Radial (mm)	***Diferença % ((u_r máx))	*$u_{t\,(máx)}$ - Deslocamento transversal (mm)	***Diferença % ((u_t máx))	# Elementos	Modelo representativo da Malha	
0,033667	0,000	-2,65E-01	0	90		2 x 4 Elementos
0,033665	-0,006	-2,73E-01	0,02950339	180		4 x 8 Elementos
0,033664	0,009	-2,74E-01	3,283538478	360		8 x 16 Elementos

* Valores Obtidos a partir da superficie média da casca e da placa
** Valores obtidos na superficie superior da placa submetida a pressão interna
*** Valores normalizados para a malha de 90 Elementos

Tabela 6: Análise de Convergência – Modelo Paredes Moderadamente Espessas (Placa)

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1612787/CA

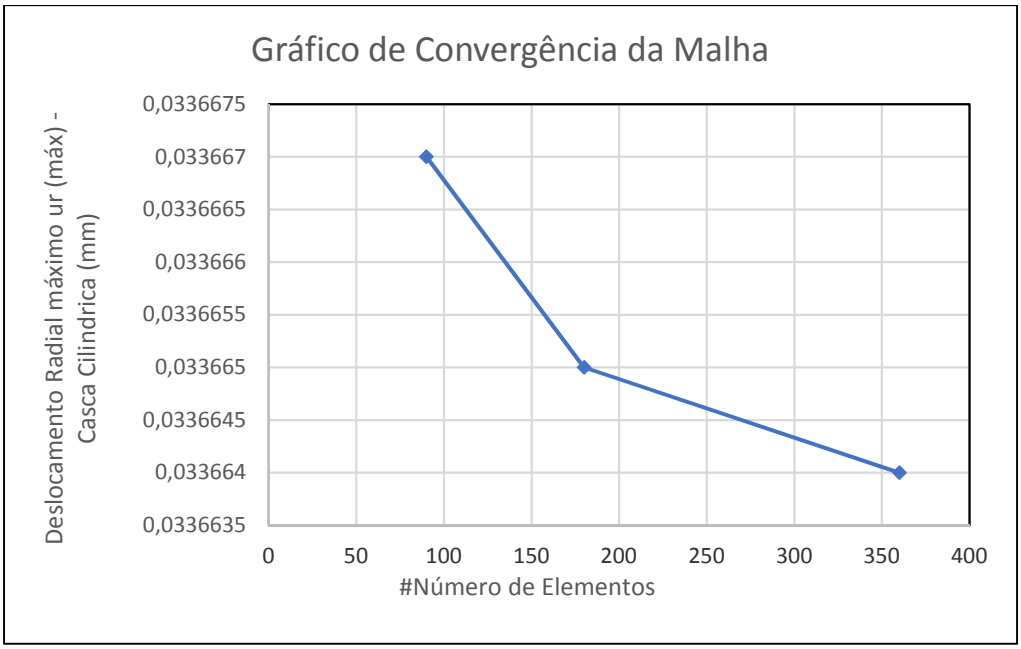


Figura 38: Convergência para o deslocamento radial máximo da casca (x/h=0.5).

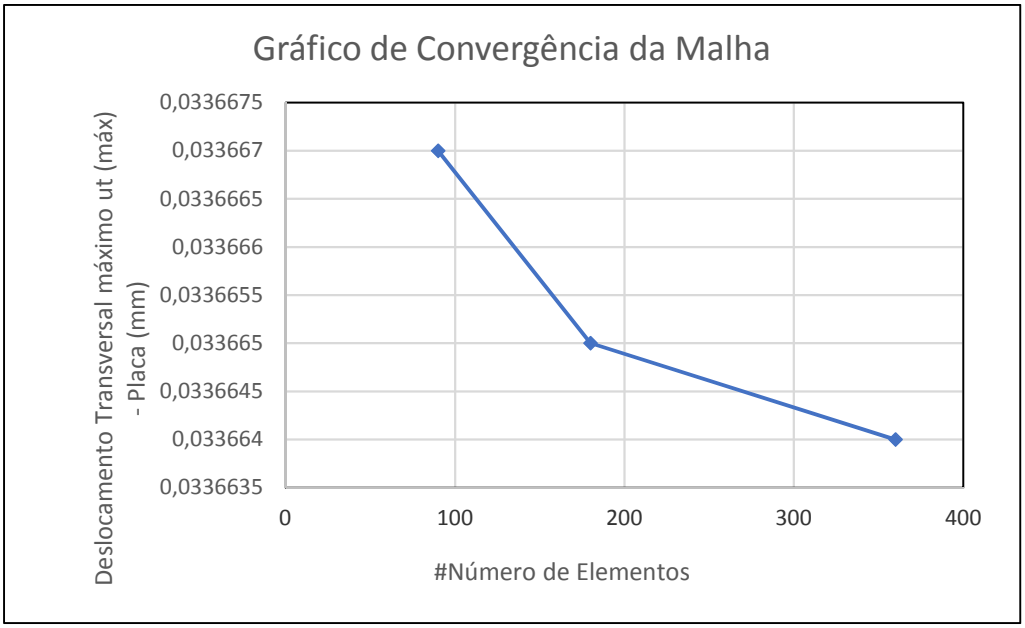


Figura 39: Convergência para o deslocamento transversal máximo da placa (r=0).

Observa-se que a malha com 90 elementos é suficiente para representar o comportamento para o modelo proposto, dado que a sua variação percentual em relação às malhas com 180 e 360 elementos são muito próximas. Desta forma, os resultados apresentados nesta seção foram obtidos utilizando a malha com 90 elementos. O gráfico de convergência apresentado acima apresenta apenas 3 pontos em função da limitação de graus de liberdade para a licença do ANSYS.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1612787/CA

5.2.2
Resultados obtidos para casca de paredes finas e placa moderadamente espessa

A Figura 40 apresenta o deslocamento radial da casca cilíndrica obtido a partir da superfície média conforme a equação (3.63). Observa-se que o comportamento entre a resposta obtida pelo método dos elementos finitos utilizando o elemento plano de 8 nós (PLANE183) e o modelo analítico convergem, apresentando erro máximo de 6.3%.

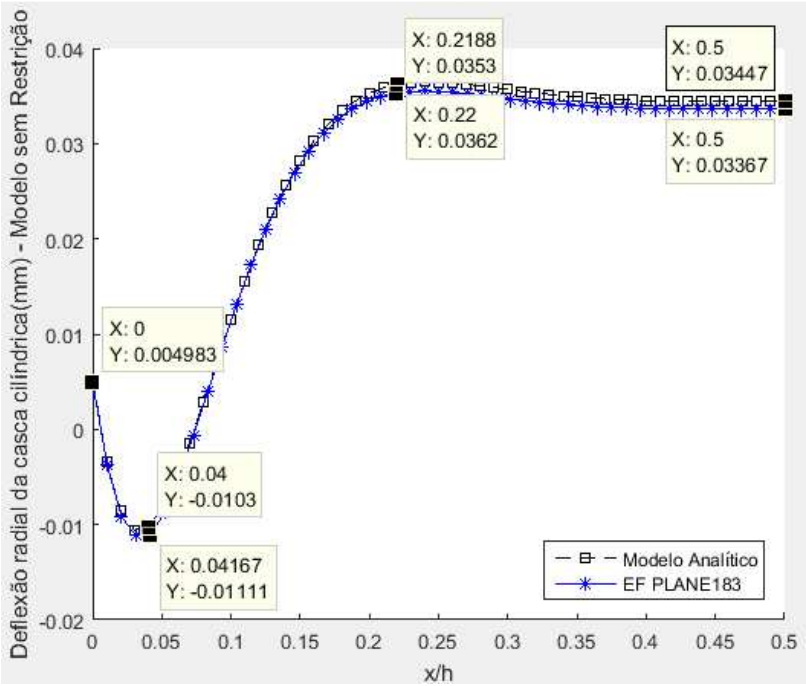


Figura 40: Deflexão da casca cilíndrica (R/tc>10) – Resultados obtidos a partir da superfície média

Novamente a presença do efeito de borda domina o comportamento inicial da deflexão radial da casca cilíndrica de paredes finas. Verifica-se também que o deslocamento radial máximo nesta região é inferior ao deslocamento obtido para o modelo de paredes finas. Isto ocorre em função dos valores inferiores obtidos para os esforços internos M_0 e Q_0 através do sistema de compatibilidade apresentado no Anexo (1). No entanto, para regiões afastadas da extremidade, verifica-se os deslocamentos radiais obtidos para o caso de paredes finas.

O comportamento da deflexão transversal da placa moderadamente espessa é apresentado na Figura 41 e foi obtido conforme a equação (3.102) através do plano médio para a condição de apoio simplesmente apoiada e a presença da parcela de cisalhamento transversal. A diferença na resposta entre o

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1612787/CA

modelo analítico e a resposta por elementos finitos foi da ordem de 7% aproximadamente, quando considerada a malha com 4 elementos na espessura da placa e 3.5% para uma malha com 16 elementos na espessura.

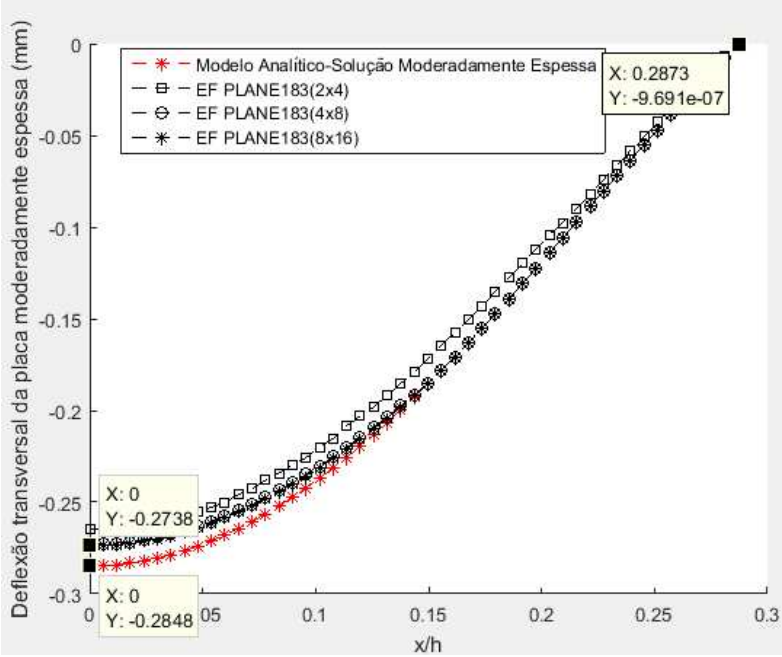


Figura 41: Deflexão transversal máxima da placa moderadamente espessa (R/tp<5) - plano médio.

A Figura 42 apresenta o comportamento das tensões circunferenciais ao longo do comprimento da casca cilíndrica obtidas conforme a equação (3.13). O erro máximo obtido entre os modelos foi de 5.5%.

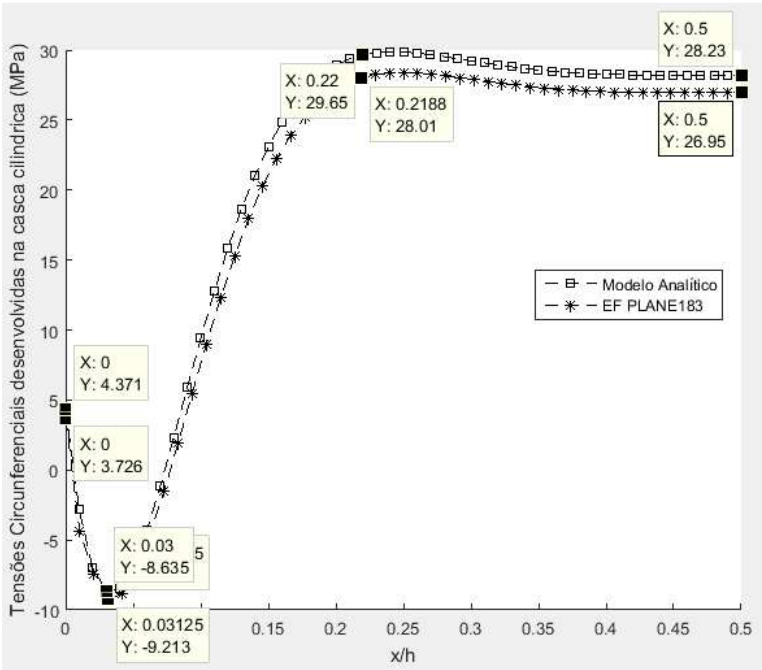


Figura 42: Tensões circunferênciais ao longo da casca cilíndrica (R/tc>10) - superfície média

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1612787/CA

A Figura 43a apresenta o comportamento das tensões equivalentes de von Mises atuando na junta onde pode-se verificar que as tensões de alta ordem se concentram na casca cilíndrica de paredes finas. Isto ocorre em função da combinação das tensões nesta região, conforme apresentado na equação (3.73). Novamente, obtém-se em regiões afastadas da junta a solução para as tensões radiais de paredes finas na casca cilíndrica.

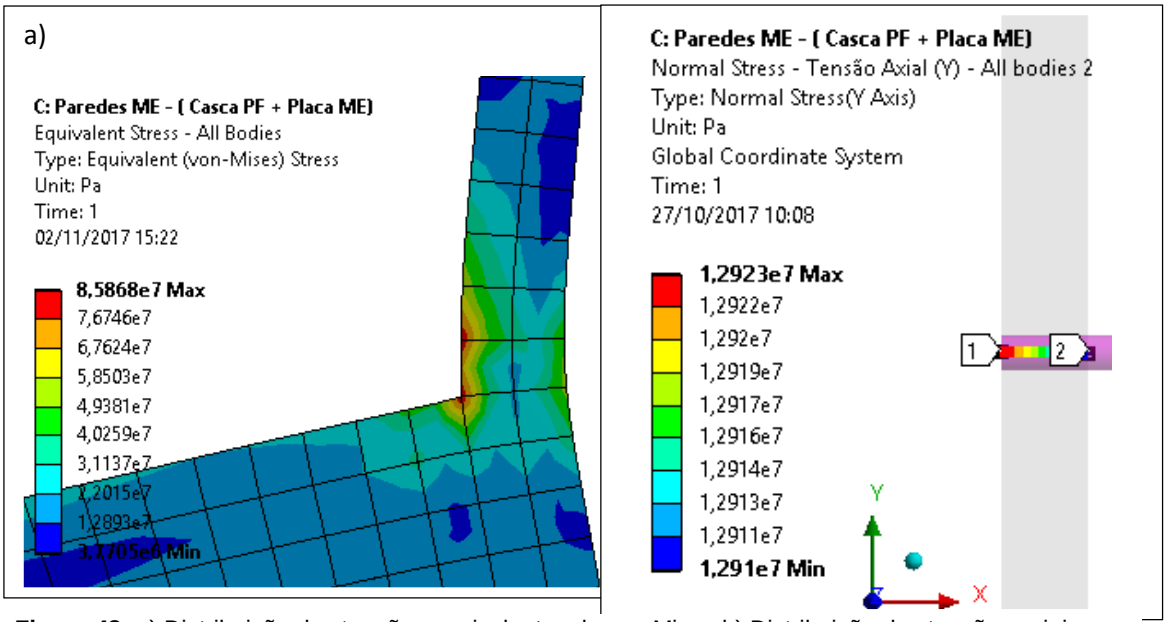


Figura 43: a) Distribuição das tensões equivalentes de von Mises b) Distribuição das tensões axiais afastado da extremidade (Ansys® V18.1).

A Figura 44 apresenta o comportamento das tensões axiais atuando na junta onde pode-se verificar que as tensões de alta ordem se concentram na casca cilíndrica de paredes finas. Isto ocorre em função da combinação das tensões nesta região, conforme apresentado na equação (3.73).

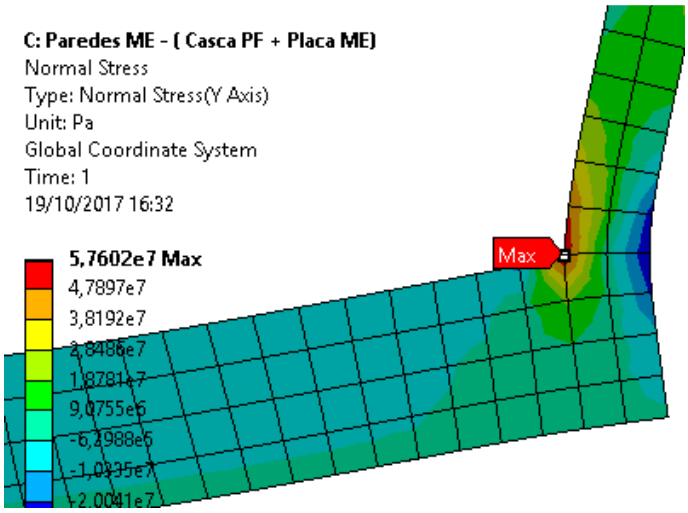


Figura 44: Distribuição das tensões de axiais na junta casca de paredes finas e placa moderadamente espessa (Ansys® V18.1).

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1612787/CA

A distribuição da tensão circunferencial na placa moderadamente espessa foi obtida conforme equação (3.13) considerando as tensões desenvolvidas na superfície superior em contato direto com a pressão interna aplicada ao modelo. A Figura 45 apresenta o comportamento das tensões circunferenciais na placa.

Observa-se novamente que a tensão de flexão circunferencial devido à pressão interna no centro da placa atribui o comportamento compressivo enquanto que na extremidade o comportamento é trativo. A seção 6 descreve as limitações do modelo analítico proposto.

A presença de tensões elevadas na extremidade da placa é devido à região de concentração de tensões oriundas da descontinuidade do modelo de placa e casca proposto. O erro máximo obtido entre o modelo de elementos finitos e o analítico foi de 2.7%.

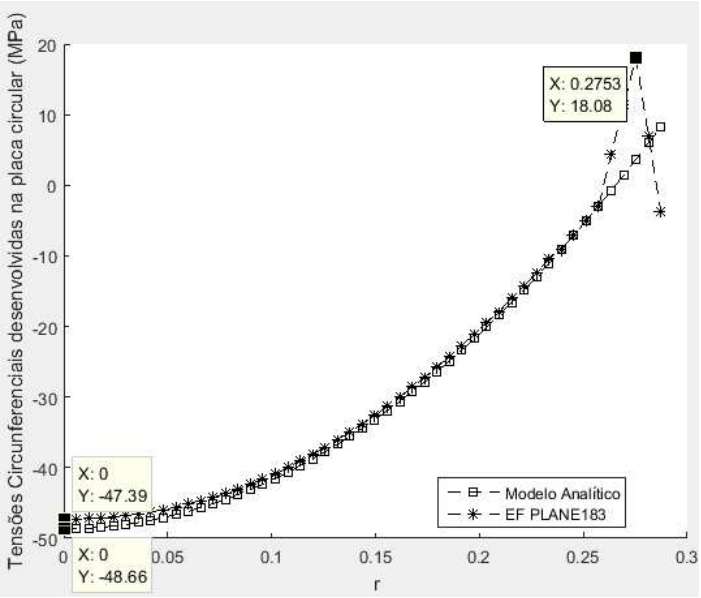


Figura 45: Tensões circunferenciais desenvolvidas na superfície superior da placa moderadamente espessa (R/tp<5)

5.3
Modelo Proposto para o caso Casca Moderadamente Espessa e Placa de Paredes Finas

O modelo axissimétrico proposto para análise do caso casca de paredes moderadamente espessas e placa de paredes finas segue representado na Figura 46.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1612787/CA

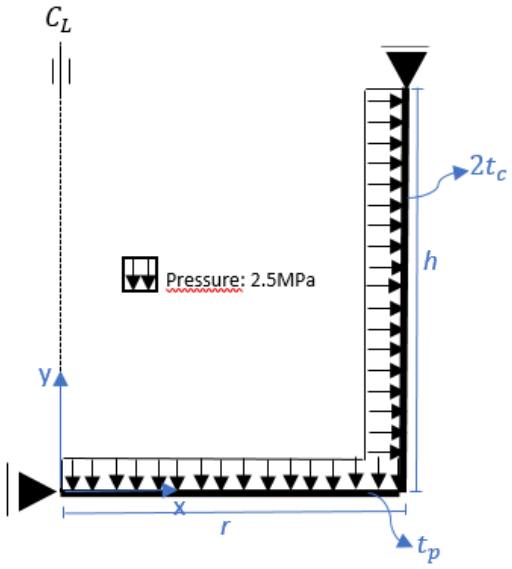


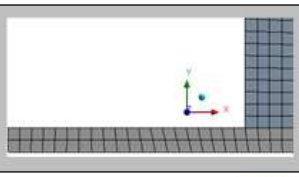
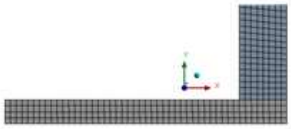
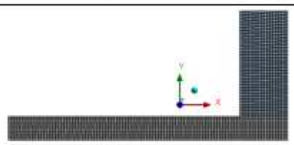
Figura 46: Modelo Axissimétrico – Placa de paredes finas e casca moderadamente espessas.

A Tabela 1 apresenta as dimensões do modelo estudado para n=2 (casca) e n=1 (placa).

5.3.1
Análise de Convergência da Malha para o modelo de casca de parede moderadamente espessa e placa de paredes finas

O estudo de convergência da malha segue representado na Tabela 7. As figuras 47 e 48 apresentam os deslocamentos obtidos associados a cada malha tanto para a casca quanto para a placa.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1612787/CA

Estudo de Convergência para o modelo casca ME e placa PF						
CASCA (x/h=0.5)		PLACA (r=0)				
*$u_{r\,(máx)}$ - Deslocamento Radial (mm)	***Diferença % ((u_r máx))	*$u_{t\,(máx)}$ - Deslocamento transversal (mm)	***Diferença % ((u_t máx))	# Elementos	Modelo representativo da Malha	
0,015013	0,000	-0,6864	0	90		2 x 4
0,015014	0,007	-0,68889	0,36145103	180		4 x 8
0,015015	0,013	-0,69047	0,58945356	360		8 x 16

* Valores Obtidos a partir da superficie média da casca e da placa
** Valores obtidos na superficie superior da placa submetida a pressão interna
*** Valores normalizados para a malha de 90 Elementos

Tabela 7: Análise de Convergência – Modelo Paredes Moderadamente Espessas (Placa)

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1612787/CA

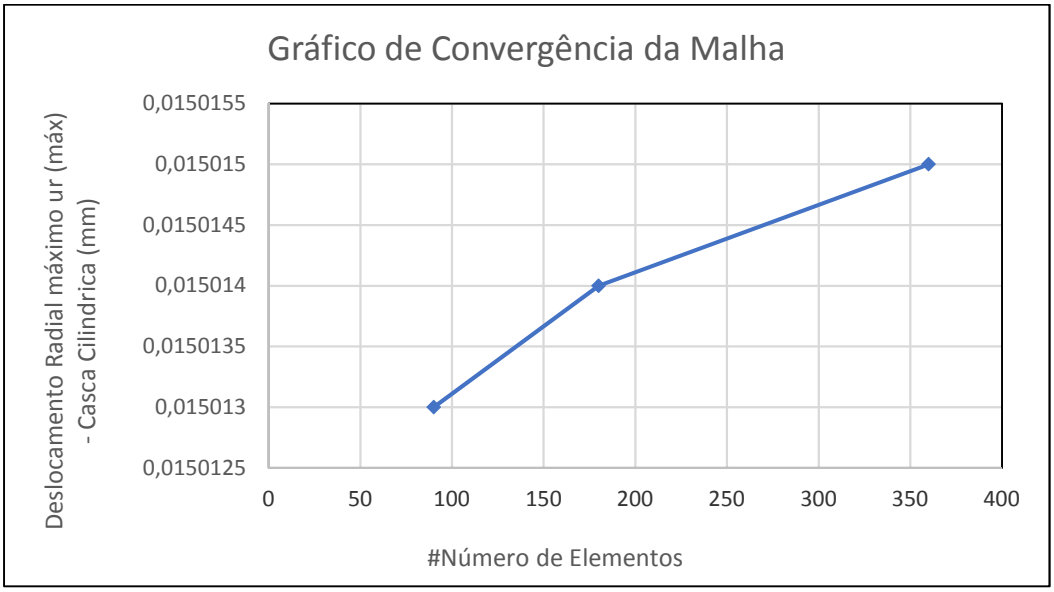


Figura 47: Convergência para o deslocamento radial máximo da casca (x/h=0.5).

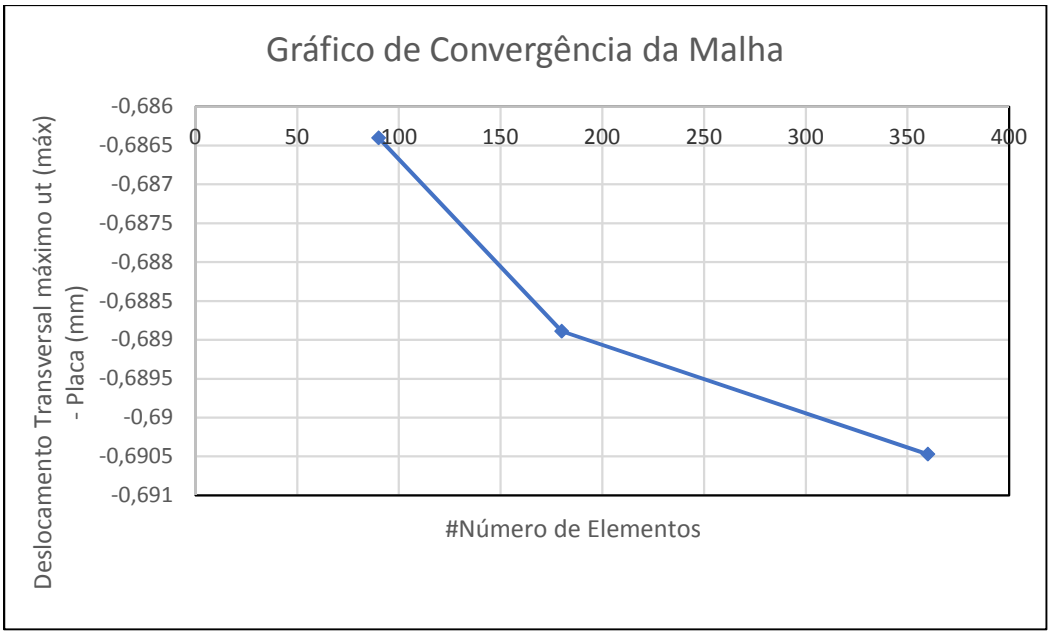


Figura 48: Convergência para o deslocamento transversal máximo da placa (r=0).

Observa-se, que a malha com 90 elementos é suficiente para representar o comportamento para o modelo proposto, dado que a sua variação percentual em relação às malhas com 180 e 360 elementos são muito próximas. Desta forma, os resultados apresentados foram obtidos utilizando a malha com 90 elementos.

5.3.2
Resultados Obtidos para Casca de Paredes Moderadamente Espessas e Placa de Paredes Finas

A Figura 49 apresenta o deslocamento radial da casca cilíndrica moderadamente espessa obtido a partir da superfície média. A posição x/h=0 indica o local da junção do modelo de casca moderadamente espessa e da placa de paredes finas.

Neste caso, o modelo analítico utilizado para verificação do deslocamento radial da casca cilíndrica foi o deslocamento radial obtido através da equação (3.130) para vasos de paredes espessas. Vale lembrar que o deslocamento radial representado foi obtido através da superfície média (raio médio) da casca cilíndrica e afastado dos efeitos de fronteira (x/h>>2.5$\sqrt{Rt_c}$). O equilíbrio radial para obtenção dos esforços internos autoequilibrantes M_0 e Q_0 encontra-se no Anexo I.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1612787/CA

Desta forma, a resposta obtida pelo método dos elementos finitos utilizando o elemento plano de 8 nós *(PLANE183*) e o modelo analítico proposto apresenta erro máximo de 4.2% (x/h=0.3438).

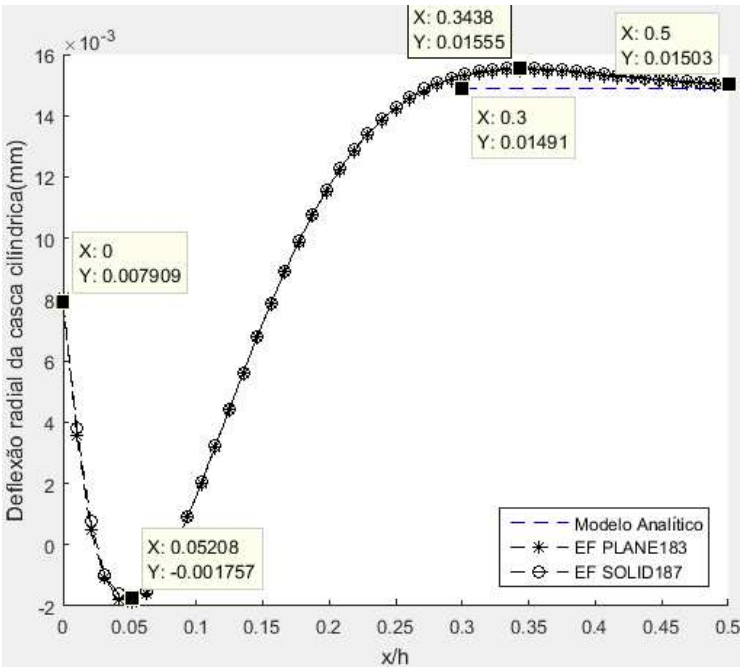


Figura 49: Deslocamento radial da casca cilíndrica moderadamente espessa (R/tc<5) - superfície média.

O comportamento da deflexão transversal da placa de paredes finas é apresentado na Figura 50 e foi comparado através das soluções analíticas para o caso de placas simplesmente apoiadas (3.71) e com suas extremidades engastadas (3.72) submetidas a carregamento uniformemente distribuído.

Pode-se observar que a deflexão transversal da placa no modelo de cascas de paredes moderadamente espessas apresenta melhores resultados para a condição de extremidades engastadas, apresentando erro máximo de 2% (x/h=0) em relação à resposta obtida por elementos finitos. Isto ocorre em função da pequena influência da componente de deslocamento radial na casca cilíndrica, aproximando o comportamento do modelo ao caso de extremidades engastadas.

A diferença na resposta entre o modelo analítico com extremidades simplesmente apoiadas e a resposta por elementos finitos foi da ordem de 8.4% (x/h=0) aproximadamente.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1612787/CA

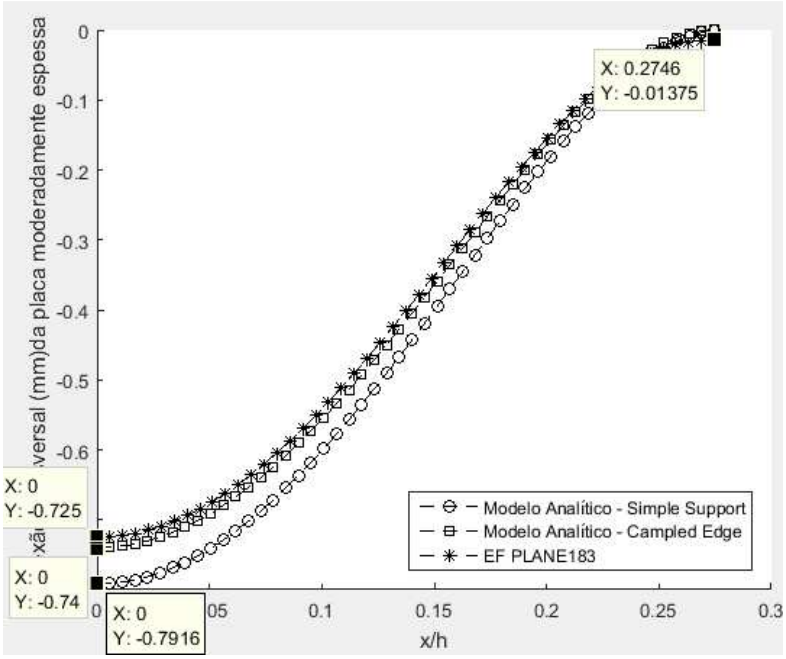


Figura 50: Deflexão transversal máxima da placa de paredes finas (R/tp=10) – superfície média.

A Figura 51 apresenta o comportamento das tensões circunferenciais ao longo do comprimento da casca cilíndrica. Neste caso, o modelo analítico utilizado para comparar com a resposta por elementos finitos foi a solução para as tensões circunferenciais para o caso de cilindros de paredes espessas submetidos à pressão interna somente dada pela equação (3.128). Novamente, esta comparação é válida somente em regiões suficientemente afastadas da junção entre casca e placa.

O erro máximo obtido para as tensões circunferenciais entre a resposta por elementos finitos e o modelo de paredes espessas foi de 3.2% (x/h=0.33).

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1612787/CA

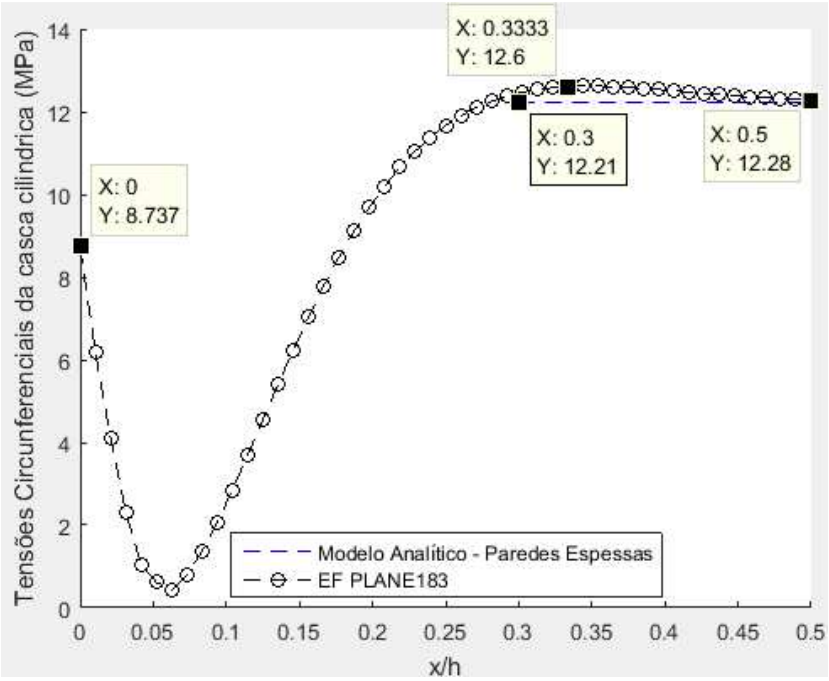


Figura 51: Tensões circunferenciais ao longo da casca cilíndrica moderadamente espessa – superfície média

A Figura 52a apresenta o comportamento das tensões equivalentes de Von Mises atuando na junta onde pode-se verificar que as tensões de alta ordem se concentram na placa de paredes finas. Isto ocorre em função da combinação das tensões nesta região conforme apresentado na equação (3.79). A Figura 52b apresenta a localização onde as tensões de von Mises foram linearizadas com objetivo de verificar a contribuição de cada componente de tensão separadamente conforme apresenta a Figura 53.

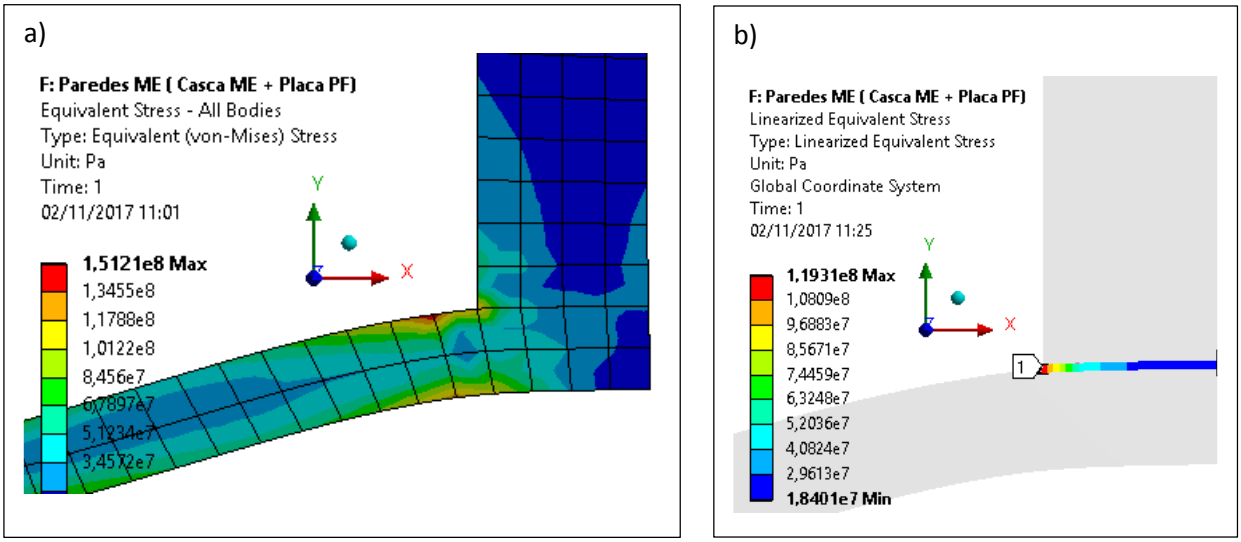


Figura 52: a) Tensões equivalentes de von Mises b) Linearização das tensões de von Mises (Ansys® V18.1).

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1612787/CA

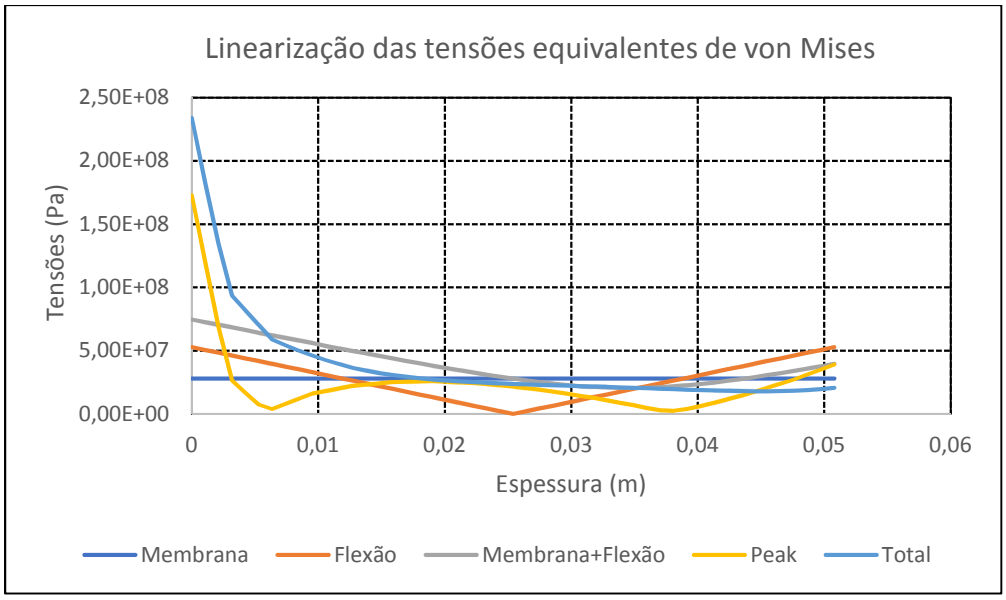


Figura 53: Linearização das tensões na casca moderadamente espessa

A linearização e classificação das tensões apresentadas na Figura 53 foram obtidas através da análise linear elástica [15] e têm como finalidade verificar a contribuição de cada parcela de tensão para posteriormente avaliar a condição estrutural do vaso de pressão. Portanto, na junção entre casco e tampo (x=0), mostrado na figura, verifica-se a presença das componentes de tensão de membrana primária local e da tensão secundária de flexão provocadas pela pressão interna aplicada ao modelo estudado.

A tensão de membrana primária localizada é a tensão equivalente linearizada através da espessura de parede da casca cilíndrica moderadamente espessa. Já a tensão secundária de flexão são tensões autoequilibradas, ou seja, necessárias para satisfazer a continuidade da estrutura. Ela ocorre em estruturas com descontinuidades acentuadas. Já as tensões de Pico (Peak) são tensões que não causam qualquer deformação apreciável e são apenas uma possível fonte de ruptura por fadiga ou fratura frágil.

A Figura 54 apresenta o comportamento das tensões longitudinais atuando em regiões afastadas da junta, onde verifica-se a solução para as tensões longitudinais apresentadas na equação (3.129) para cilindros fechados de paredes espessas submetidos à pressão interna (erro máximo 5% - x/h=0.5).

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1612787/CA

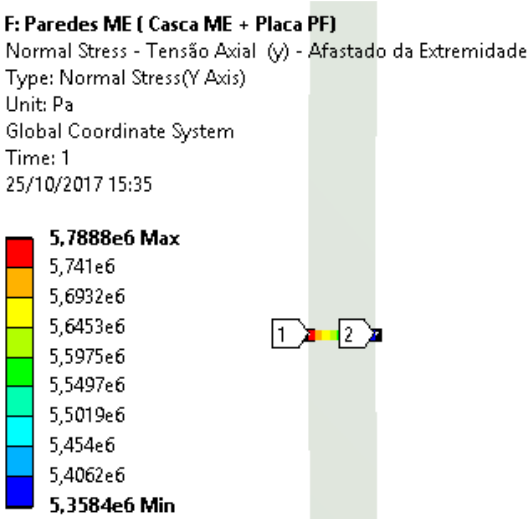


Figura 54: Distribuição das tensões longitudinais afastado da extremidade

A Figura 55 apresenta o comportamento das tensões axiais atuando na junta onde pode-se verificar que as tensões de alta ordem se concentram na placa de paredes finas. Isto ocorre em função da combinação das tensões nesta região conforme apresentado na equação (3.79).

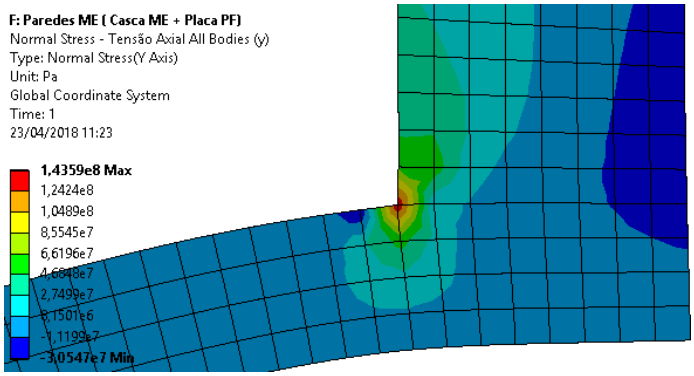


Figura 55: Distribuição das tensões de axiais na junta casca moderadamente espessa (R/tc<5) e placa de paredes finas (R/tp>10) (Ansys® V18.1).

A distribuição da tensão circunferencial na placa de paredes finas foi obtida conforme equação (3.37) considerando as tensões desenvolvidas na superfície superior em contato direto com a pressão interna aplicada ao modelo. A Figura 56 apresenta o comportamento das tensões circunferenciais na placa.

Observa-se novamente que a tensão de flexão circunferencial devido à pressão interna no centro da placa atribui o comportamento compressivo enquanto que na extremidade o comportamento é trativo. A seção 6 descreve as limitações do modelo analítico proposto.

A presença de tensões elevadas na extremidade da placa é devido à região de concentração de tensões oriundas da descontinuidade do modelo de

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1612787/CA

placa e casca proposto. O erro máximo obtido entre o modelo de elementos finitos e o analítico foi de 2.8%.

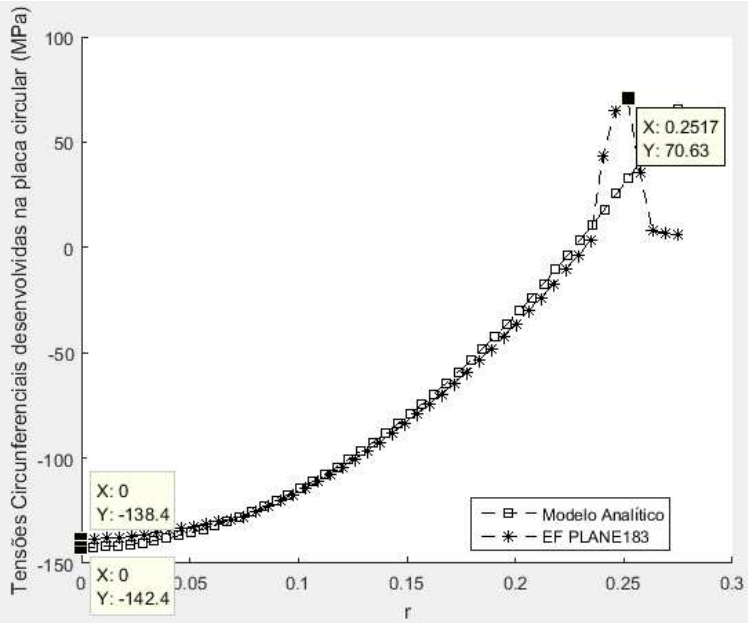


Figura 56: Tensões circunferenciais desenvolvidas na superfície superior da placa

As tensões circunferenciais, radiais e longitudinais desenvolvidas ao longo da espessura da casca cilíndrica serão apresentadas e discutidas na seção 5.3.3 para o caso casca e placa moderadamente espessas.

5.3.3
Modelo Proposto para o caso Casca e Placa Moderadamente Espessas

O modelo axissimétrico proposto para análise do caso casca e placa moderadamente espessas segue representado na Figura 57 com o sistema de coordenadas globais.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1612787/CA

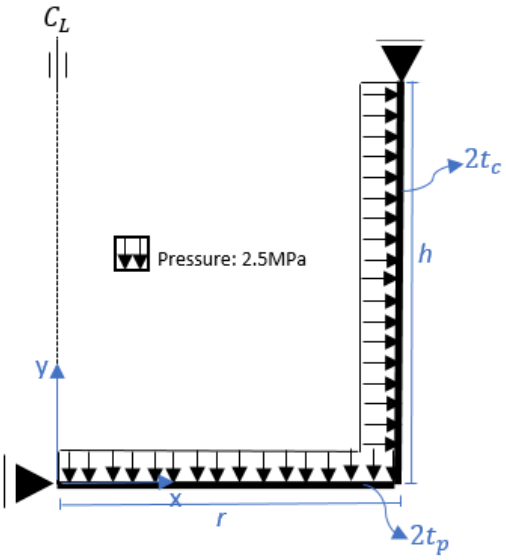


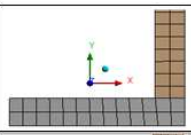
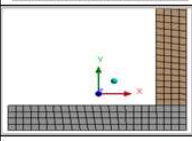
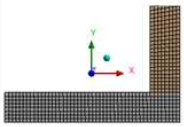
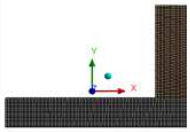
Figura 57: Modelo Axissimétrico – Placa & Casca Moderadamente Espessas

A Tabela 1 apresenta as dimensões do modelo estudado para n=2 (casca & placa).

5.3.4
Análise de Convergência da Malha para o modelo de casca e placa moderadamente espessas

Para verificar o comportamento da malha utilizada na análise do modelo proposto, foi realizado um estudo de convergência que segue representado na Tabela 8. As figuras 58 e 59 apresentam os deslocamentos obtidos associados a cada malha.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1612787/CA

Estudo de Convergência para o modelo de paredes espessas						
CASCA		PLACA				
*$u_{r\,(máx)}$ - Deslocamento Radial (mm)	***Diferença % ((u_r máx))	*$u_{t\,(máx)}$ - Deslocamento transversal (mm)	***Diferença % ((u_t máx))	# Elementos	Modelo representativo da Malha	
0,015045	0,000	-0,13561	0	48		2 x2 Elementos na espessura
0,015046	0,007	-0,13565	0,029487652	95		4 x4
0,015047	0,013	-0,13666	0,768330162	190		8 x 8
0,015047	0,013	-0,13712	1,101225204	380		16 x 16

* Valores Obtidos a partir da superficie média da casca e da placa
** Valores obtidos na superficie superior da placa submetida a pressão interna
*** Valores normalizados para a malha de 48 Elementos

Tabela 8: Análise de Convergência – Modelo Placa e Casca Moderadamente Espessas

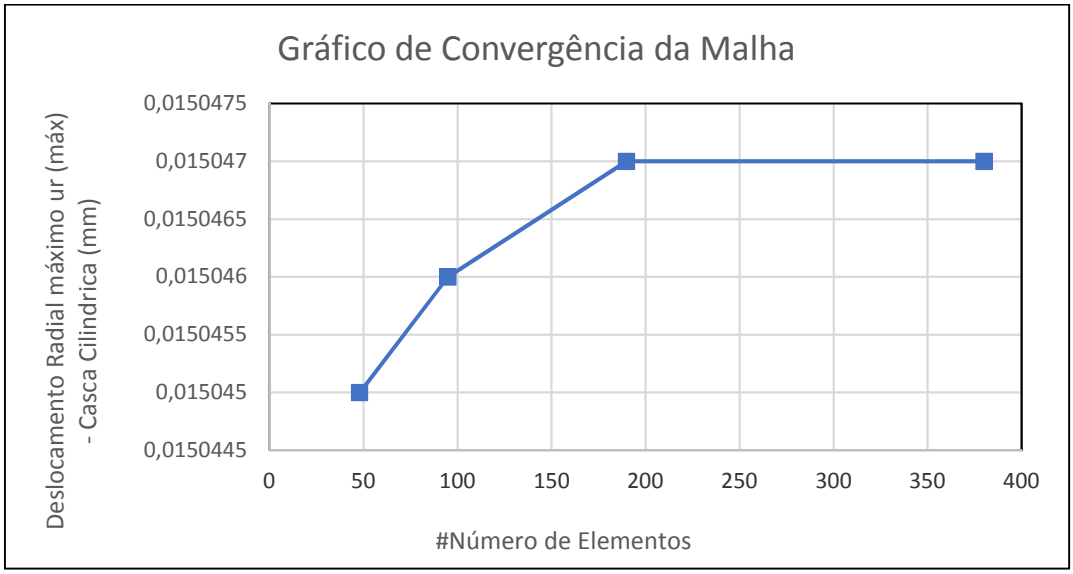


Figura 58: Convergência para o deslocamento radial máximo da casca (x/h=0.5).

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1612787/CA

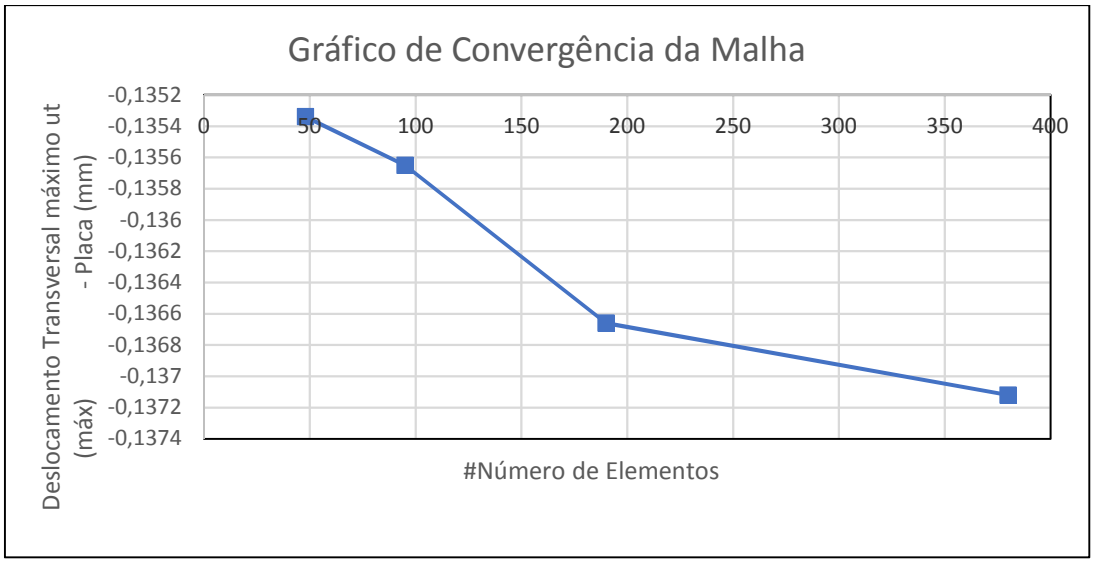


Figura 59: Convergência para o deslocamento transversal máximo da placa (r=0).

Observa-se que a malha com 95 elementos representa melhor o modelo proposto, porque a variação percentual em relação à malha com 190 e 380 elementos estão muito próximas. Desta forma, os resultados apresentados foram obtidos utilizando a malha com 95 elementos.

5.3.5
Resultados Obtidos para o caso Casca e Placa Moderadamente Espessa

A Figura 60 apresenta o deslocamento radial da casca cilíndrica moderadamente espessa obtido a partir da linha média.

O modelo analítico utilizado para verificação do deslocamento radial da casca cilíndrica foi o deslocamento radial obtido através da equação (3.127) para vasos de paredes espessas.

A resposta foi obtida pelo método dos elementos finitos utilizando o elemento plano de 8 nós (*PLANE183*) e o modelo analítico proposto apresenta erro máximo de 3.9%.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1612787/CA

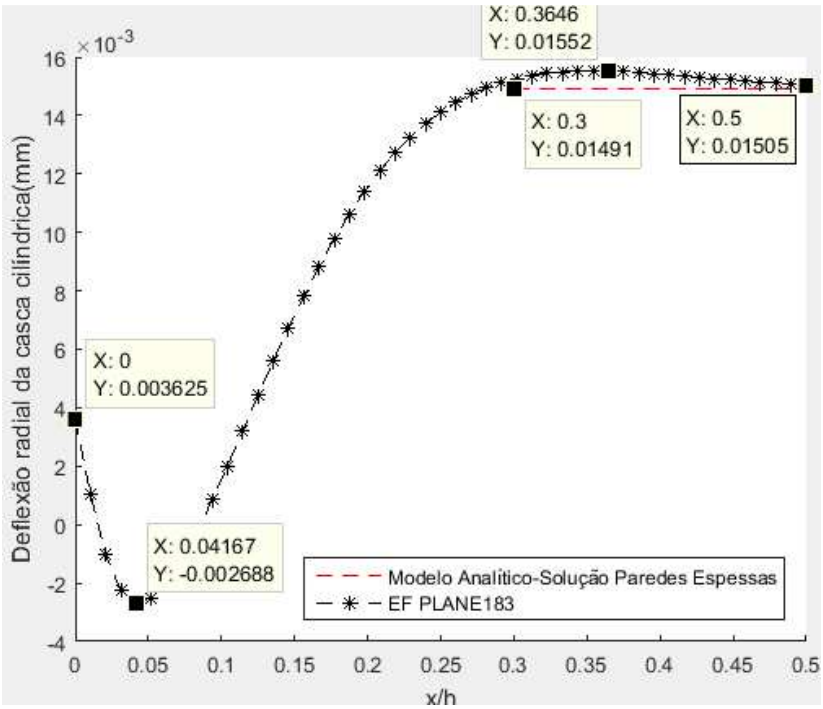


Figura 60: Deflexão da casca cilíndrica moderadamente espessa (R/tc=5) - superficie média

Verifica-se na junção (x/h=0) que o deslocamento radial é pequeno quando comparado com o deslocamento radial obtido na Figura 49 para o modelo casca cilíndrica de paredes espessas e placa de paredes finas. Isto ocorre em função da compatibilidade dos deslocamentos radiais imposta em cada modelo.

O comportamento da deflexão transversal da placa moderadamente espessa é apresentado na Figura 61 e foi obtido conforme a equação (3.102) através do plano médio considerando a condição de extremidades engastadas. A diferença na resposta entre o modelo analítico e a resposta por elementos finitos foi da ordem de 6.7% aproximadamente.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1612787/CA

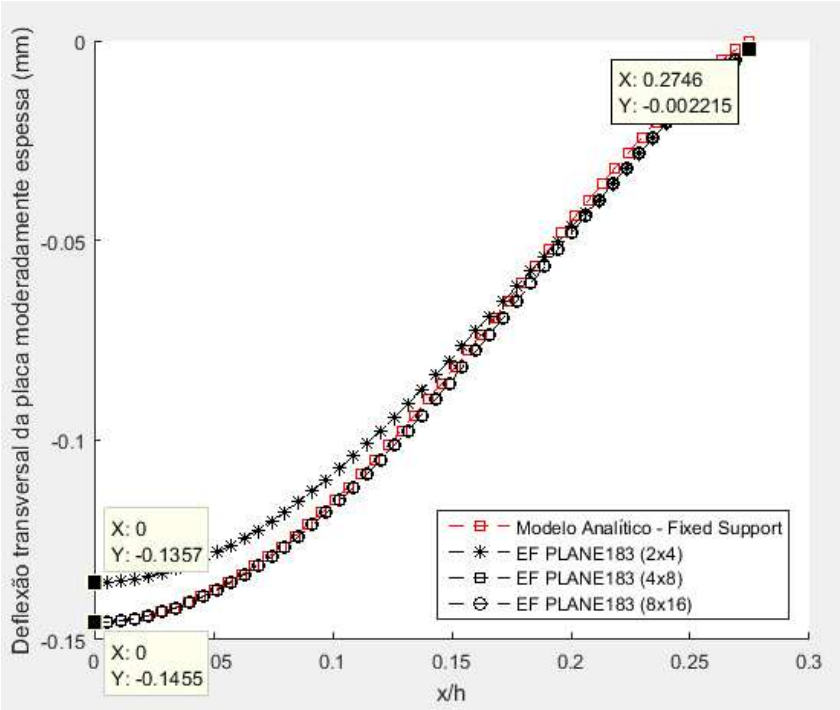


Figura 61: Deflexão transversal máxima da placa moderadamente espessa (R/tp=5) – plano médio.

A Figura 62 apresenta o comportamento das tensões circunferenciais ao longo do comprimento da casca cilíndrica. Neste caso, o modelo analítico utilizado para comparar com a resposta por elementos finitos foi a solução para as tensões circunferenciais para o caso de cilindros de paredes espessas submetidos à pressão interna somente dada pela equação (3.128). Verifica-se também que, em função da condição de equilíbrio radial imposta entre placa e casca, os valores dos esforços internos M_0 e Q_0 são menores e, portanto, as tensões de flexão resultantes na junta são inferiores.

O erro máximo obtido para as tensões circunferenciais entre a resposta por elementos finitos e o modelo de paredes espessas foi de 3.17%.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1612787/CA

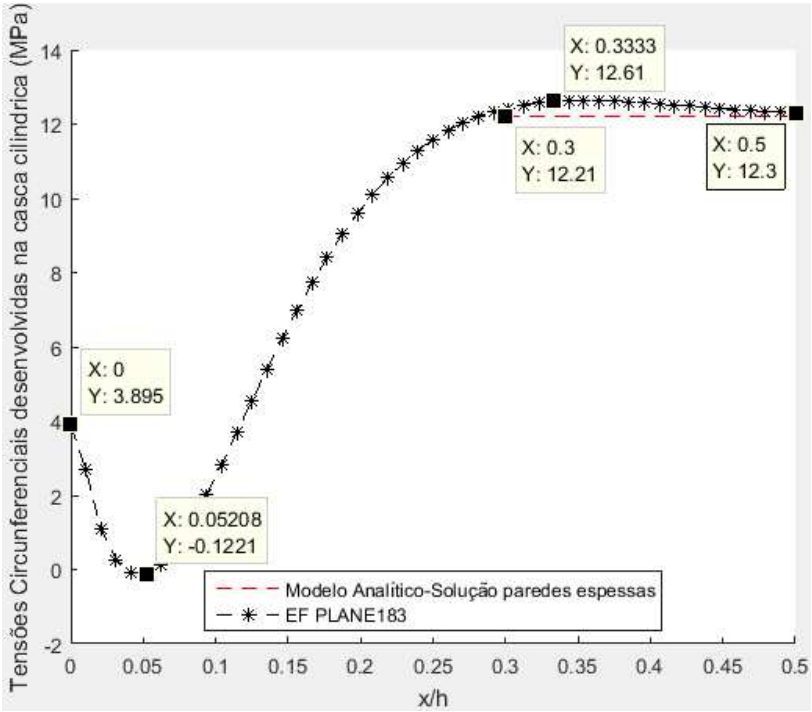


Figura 62: Tensões circunferenciais ao longo da casca cilíndrica moderadamente espessa – superfície média.

A Figura 63a apresenta o comportamento das tensões equivalentes de von Mises atuando na junta onde pode-se verificar que as tensões de alta ordem se distribuem de forma uniforme tanto na casca quanto na placa moderadamente espessa em função da geometria do modelo. A concentração de tensões fica evidente na descontinuidade entre casca e placa.

A Figura 63b apresenta a localização onde as tensões de von Mises foram linearizadas com objetivo de verificar a contribuição de cada componente de tensão separadamente conforme apresenta a Figura 64.

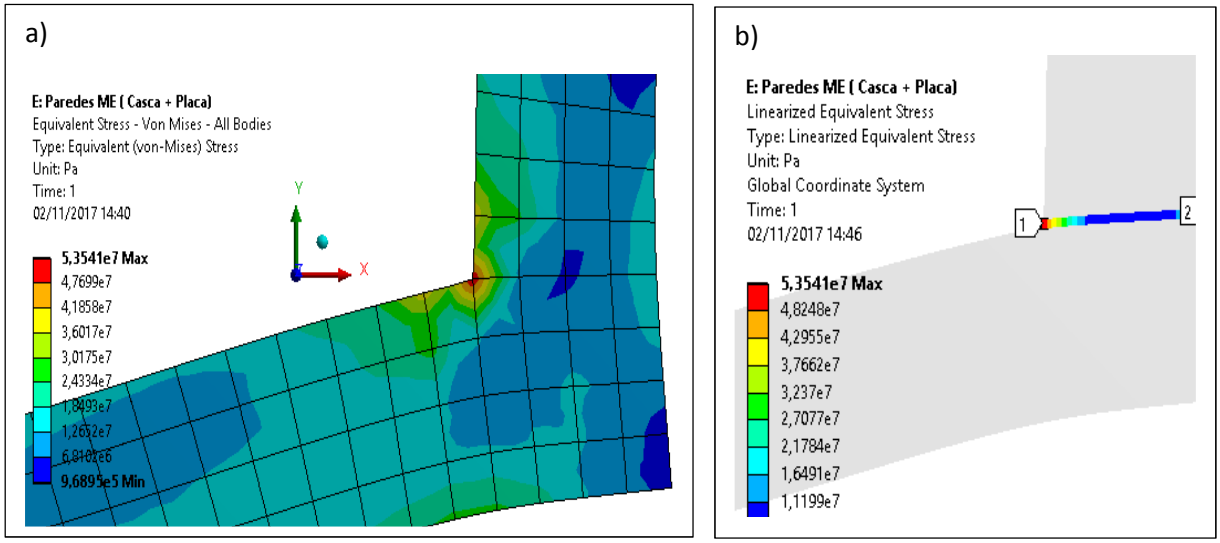


Figura 63: a) Tensões equivalentes de von Mises b) Localização da linearização das tensões de von Mises (Ansys® V18.1).

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1612787/CA

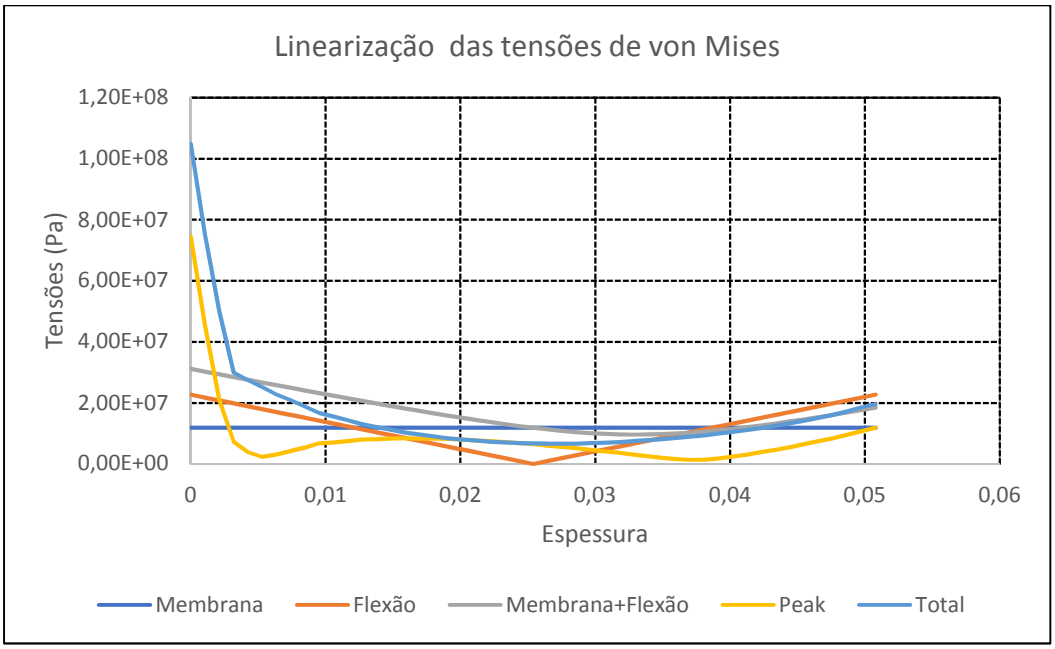


Figura 64: Linearização das tensões de von Mises – Casca e Placa Moderadamente Espessas

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1612787/CA

Em regiões afastadas da junta verificam-se as tensões longitudinais atuando no cilindro de paredes espessas submetido à pressão interna (erro máximo 5.5%) representadas na Figura 65.

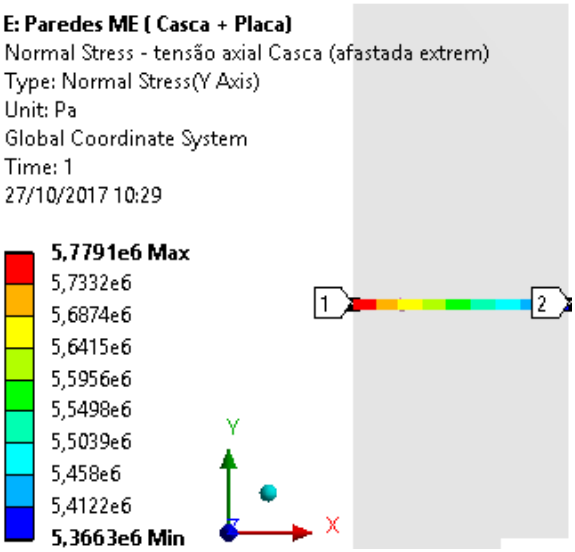


Figura 65: Distribuição das tensões longitudinais numa região afastada da extremidade (Ansys® V18.1)

A Figura 66 apresenta o comportamento das tensões axiais atuando na junta onde pode-se verificar que as tensões de alta ordem se concentram na casca cilíndrica de paredes moderadamente espessas.

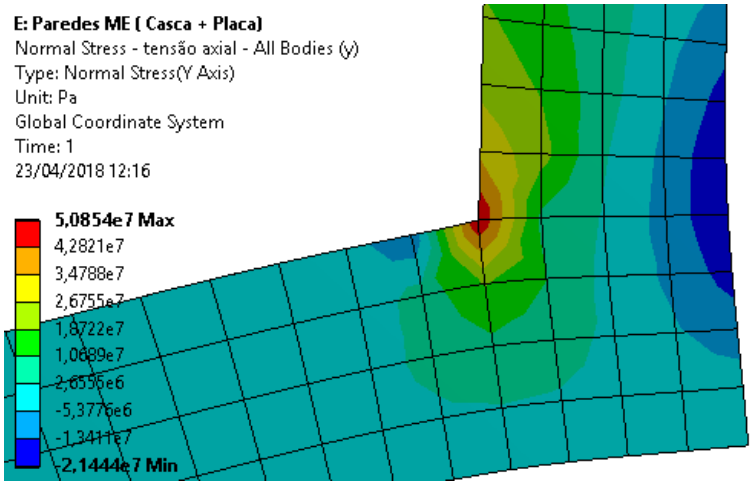


Figura 66: Distribuição das tensões axiais na junta da casca e placa moderadamente espessas (Ansys® V18.1).

As tensões radiais, circunferenciais e longitudinais desenvolvidas ao longo da espessura da casca cilíndrica foram obtidas conforme as equações (3.127), (3.128) e (3.129) e comparadas com a reposta obtida pelo método dos elementos finitos através do elemento plano de 8 nós (PLANE183). As figuras 67, 68 e 69 apresentam os resultados obtidos para as tensões radiais, circunferenciais e cisalhantes respectivamente desenvolvidas longe da extremidade casca x placa (x/h=0.5m).

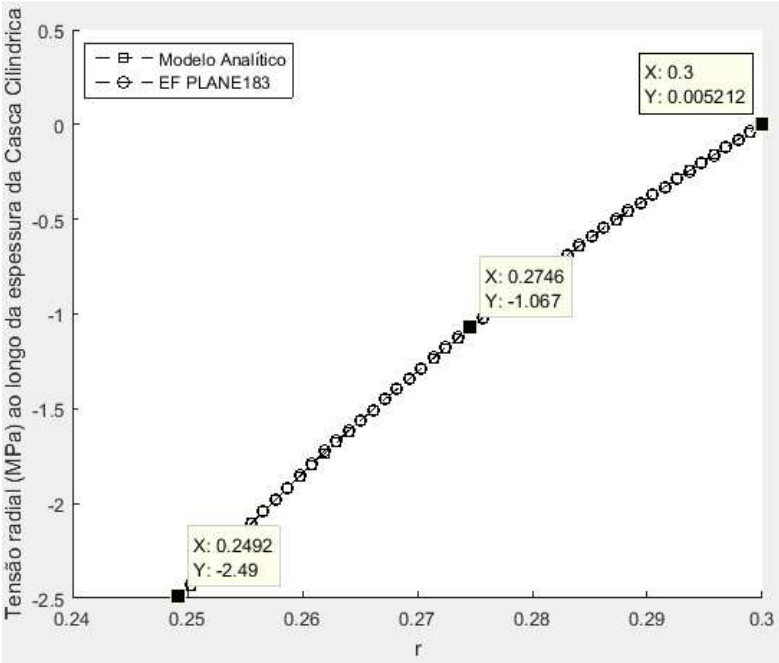


Figura 67: Variação das tensões radiais na casca cilíndrica de paredes moderadamente espessas (x/h=0.5)

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1612787/CA

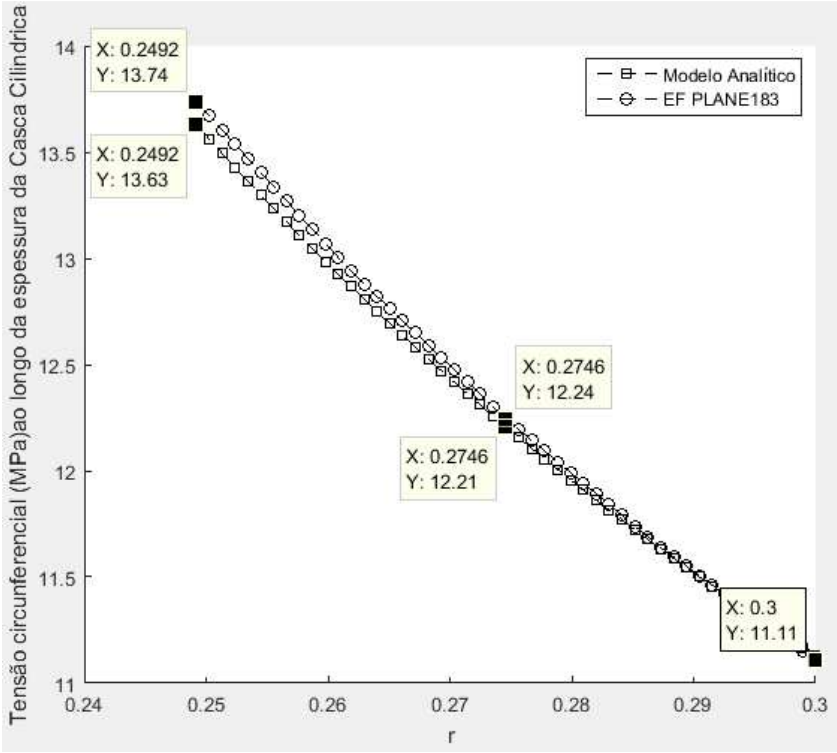


Figura 68: Variação das tensões circunferenciais na casca cilíndrica de paredes moderadamente espessas (x/h=0.5)

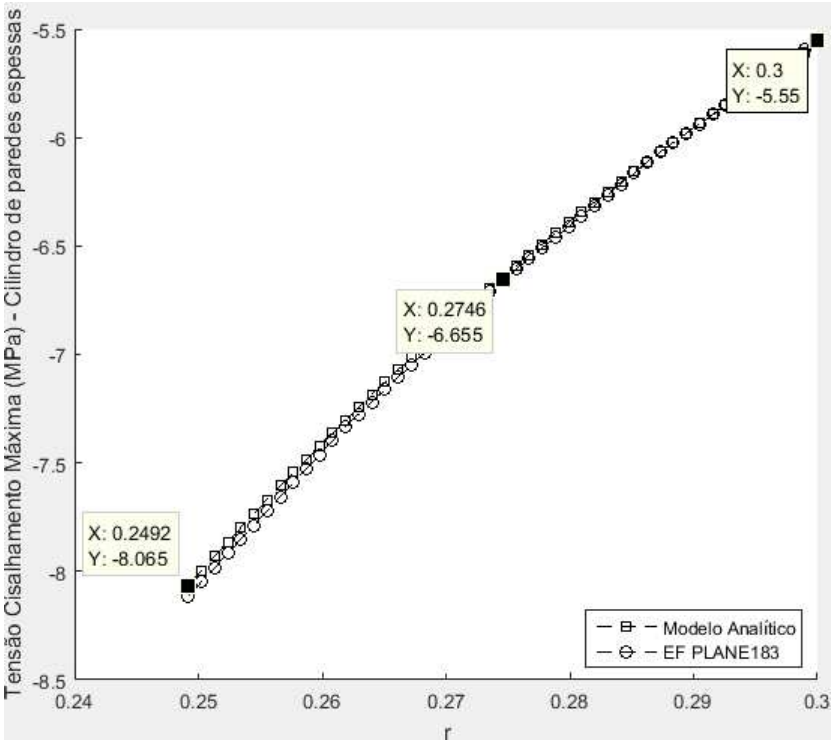


Figura 69: Variação das Tensões de Cisalhamento máxima na casca cilíndrica de paredes moderadamente espessas (x/h=0.5).

O deslocamento radial apresentado na Figura 70 foi obtido através da equação (3.130) para o caso de cilindros de paredes espessas submetidos à pressão interna somente. O erro máximo foi de 0.4%.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1612787/CA

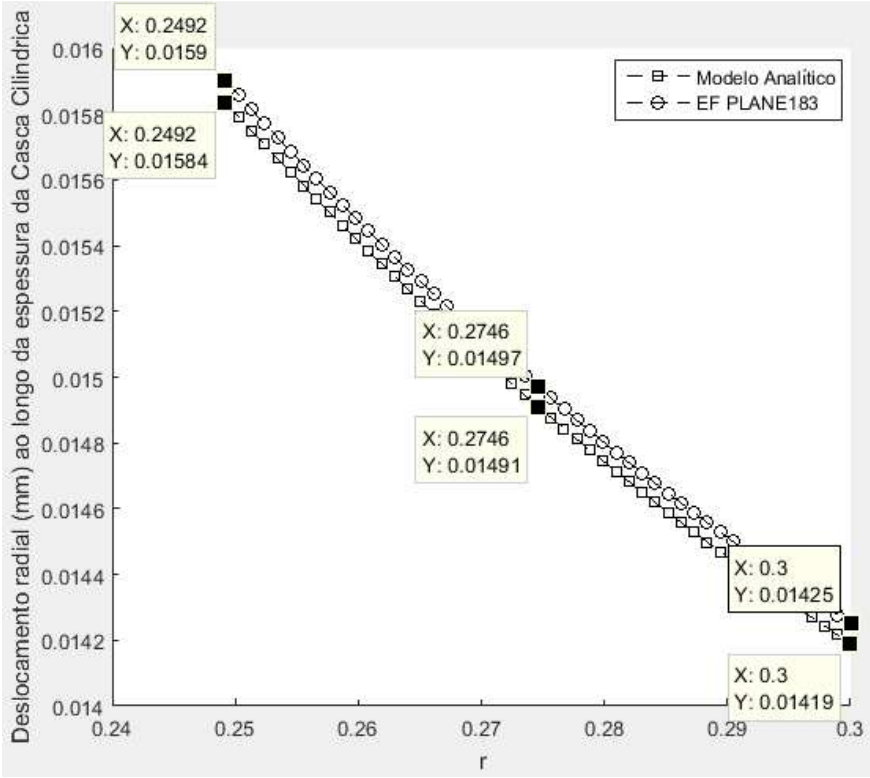


Figura 70: Variação do deslocamento radial na casca cilíndrica de paredes moderadamente espessas (x/h=0.5).

A distribuição da tensão circunferencial na placa moderadamente espessa foi obtida conforme equação (3.128) considerando as tensões desenvolvidas no plano superior em contato direto com a pressão interna aplicada ao modelo. A Figura 71 apresenta o comportamento das tensões circunferenciais na placa.

Observa-se novamente que a tensão de flexão circunferencial devido à pressão interna no centro da placa atribui o comportamento compressivo enquanto que na extremidade o comportamento é trativo. A seção 6 descreve as limitações do modelo analítico proposto.

A presença de tensões elevadas na extremidade da placa é devido à região de concentração de tensões oriundas da descontinuidade do modelo de placa e casca proposto. O erro máximo obtido entre o modelo de elementos finitos e o analítico foi de 1.49%.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1612787/CA

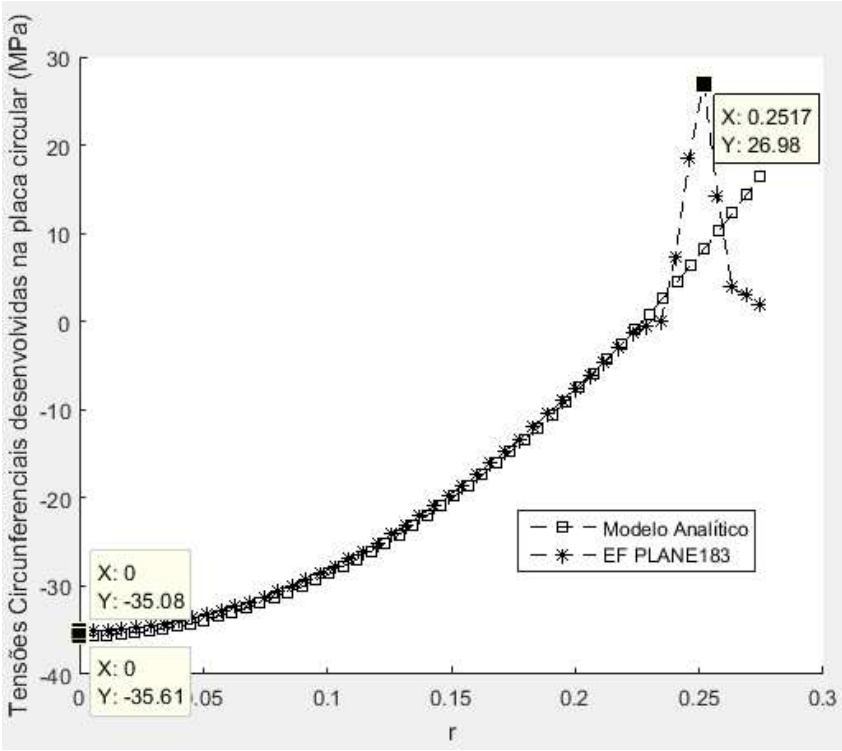


Figura 71: Tensões circunferenciais desenvolvidas no plano superior da placa

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1612787/CA

6.
Concentração de tensões na região de descontinuidade geométrica do modelo

A solução analítica apresenta limitações evidentes na região da descontinuidade em função da concentração de tensões oriundas da geometria adotada. Esta seção verifica o comportamento das tensões nesta região considerando as diferentes geometrias propostas.

Por motivos de comparação, a concentração de tensões na junção é normalmente expressa como função de uma tensão máxima que ocorre nesta região pela tensão de membrana (σ_{hoop}) na casca cilíndrica [4].

$$SCF = \sigma_{max}/\sigma_{hoop} \tag{6.1}$$

onde $\sigma_{hoop} = pR/2t_s$.

Para obter a tensão máxima em cada caso estudado verificou-se a contribuição das componentes de tensão axiais, circunferenciais e radias atuando na superfície interna da casca cilíndrica e da tampa plana para cada geometria. Em seguida, o SCF foi obtido utilizando a equação (6.1), considerando a tensão de membrana para cada caso. Desta forma, a Tabela 9 apresenta os resultados obtidos para os fatores de concentração de tensão para cada geometria estudada.

	Casca (rc/tc = 5)	Casca (rc/tc = 10)	
Placa (rp/tp = 5)	7,76	6,65	SCF
Placa (rp/tp= 10)	24,04	13,63	

Tabela 9: Fatores de concentração de tensão

A Figura 72 apresenta os resultados obtidos para várias composições geométricas de placas e cascas para verificar o comportamento da concentração de tensões que fornecem a melhor combinação entre a razão de espessuras da tampa e da casca cilíndrica (tp/tc). Segue um exemplo de como foram obtidos os valores para os SCFs considerando a razão entre espessuras tp/tc = ¼.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1612787/CA

SCF	Espessuras	Razão tp/tc	Razão dc/tc	Razões rc/tc & rp/tp	Classificação
10,2	ts=100mm;th=25mm	tp/tc=1/4	dc/tc=6	rc/tc= 2,75 ; rp/tp = 11	rc/tc= (ME) e rp/tp (PF)
15,2	ts=50mm;th=12,5mm	tp/tc=1/4	dc/tc=12	rc/tc= 5,5 ; rp/tp= 22	rc/tc= (ME) e rp/tp(PF)
18,9	ts=30mm;th=7,5mm	tp/tc=1/4	dc/tc=20	rc/tc= 9,16; rp/tp= 36,67	rc/tc=(PF) e rp/tp(PF)
19,2	ts=24mm;th=6,25mm	tp/tc=1/4	dc/tc=25	rc/tc= 11,46 ; rp/tp= 44	rc/tc=(PF) e rp/tp(PF)
31,8	ts=12mm;th=3mm	tp/tc=1/4	dc/tc=50	rc/tc= 22,9 ; rp/tp =91	rc/tc=(PF) e rp/tp(PF)
71,9	ts=6mm;th=1.5mm	tp/tc=1/4	dc/tc=100	rc/tc= 45,83 ;rp/tp =183	rc/tc=(PF) e rp/tp(PF)
81,1	ts=3mm;th=0.75mm	tp/tc=1/4	dc/tc=200	rc/tc= 91,66 ; rp/tp =366	rc/tc=(PF) e rp/tp(PF)
ME = Moderadamente Espessa					
PF = Paredes Finas					

Tabela 10: SCF para a razão tp/tc = 1/4

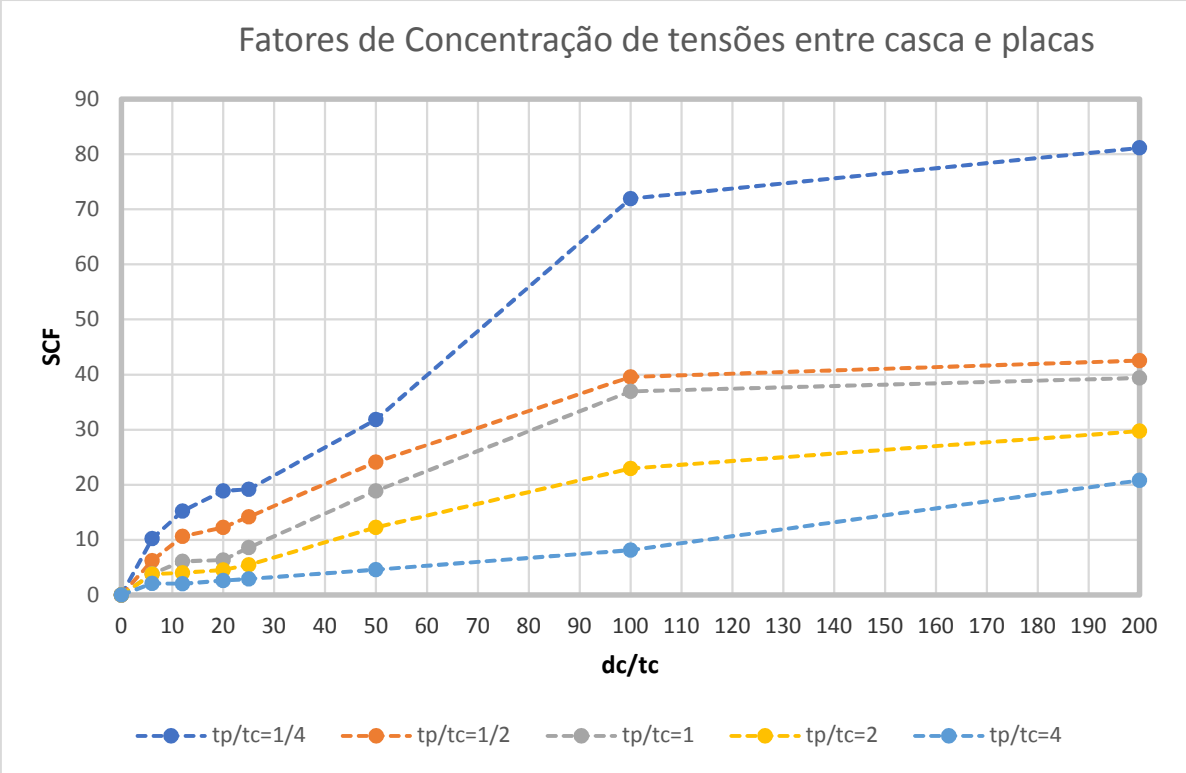


Figura 72: Fatores de Concentração de tensões

Verifica-se através da Tabela 10 e da Figura 72 que, para razões entre espessuras da tampa superiores ao da casca cilíndrica (tp/tc), obtêm-se SCFs menores enquanto que para razões onde a espessura da casca cilíndrica é superior à da tampa tem-se fatores de concentração muito elevados para diferentes razões (dc/tc). Isto ocorre em função das tensões de flexão localizadas na casca cilíndrica, que são muito maiores do que a tensão de membrana, mesmo utilizando tampos com espessuras superiores [4]. Felizmente, na condição de comportamento estático da estrutura, este efeito muito localizado tende a ser "dissipado" rapidamente, evitando o comprometimento da estrutura.

Os resultados da Figura 72 foram obtidos através de uma malha padrão (4x8), sendo assim, após sucessivos refinamentos da malha, a tensão na junção

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1612787/CA

tende a infinito. Complementarmente, um estudo para a razão tp/tc=1, considerando o efeito do refinamento de malha nos valores dos SCFs, é apresentado no Apêndice I. Considerando-se os resultados apresentados na Figura 73, verifica-se que os valores para SCFs tendem a valores sempre crescentes.

Com relação aos aspectos de projeto, a geometria proposta não é usual em função da descontinuidade geométrica. Desta forma, razões do tipo tp/tc=4 podem não atender às condições de integridade do projeto em termos de tensões.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1612787/CA

7.
Conclusão

Neste trabalho verificou-se através do método dos elementos finitos o comportamento das tensões e deslocamentos na junção entre os modelos de placas e cascas circulares com espessuras variáveis ($5 \leq R/t \leq 10$).

Desenvolveu-se uma solução analítica comparativa para o comportamento de placas e cascas submetidas a carregamentos axissimétricos. O modelo axissimétrico representativo da estrutura foi desenvolvido para contemplar as diferentes composições entre placas e cascas avaliadas. O modelo numérico utilizou o elemento plano de 8 nós com 2 graus de liberdades associados através do software comercial ANSYS®. O elemento *SHELL182*, também disponível na biblioteca do Ansys®, poderia ser aplicado ao modelo em estudo, porém para casos axissimétricos no Ansys® *workbench* este elemento não está disponível. Por último, o elemento quadrático de 4 nós *PLANE182* não foi utilizado em função da rigidez elevada que este elemento possui para representar os efeitos de flexão. Neste caso, uma malha muito mais refinada seria necessária para obter a mesma performance do elemento *PLANE183*.

Verificou-se que a limitação do modelo analítico para discretização do comportamento das tensões na junção entre os modelos de placas e cascas com paredes finas apresenta divergência superior quando comparado com a resposta obtida para o modelo de paredes moderadamente espessas. Isto ocorre em função das hipóteses simplificadoras adotadas para o caso de paredes finas, que desprezam as distorções devido ao cisalhamento. Em função desta diferença significativa para o modelo de paredes finas analisou-se o comportamento das tensões na junção entre a casca e a placa com espessuras variadas a fim de avaliar a influência na concentração de tensão na região de descontinuidade geométrica.

O comportamento das tensões na junção entre a casca e a placa com espessuras variadas foi analisado para verificar os efeitos da concentração de tensões localizadas. Observa-se que, quanto maior a espessura da placa em relação à casca cilíndrica, menores são os valores para SCF.

Considerando-se os resultados obtidos para o modelo axissimétrico, propõe-se para futuros trabalhos a aplicação de elementos sólidos (*SOLID187*) e o elemento de casca (*SHELL182*) através do ambiente Ansys® APDL como

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1612787/CA

alternativa para levantamento do comportamento na região da junção entre os modelos de casca e placa, assim como a utilização de um modelo elastoplástico do comportamento da estrutura.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1612787/CA

8.

Referências bibliográficas

[1] SURANA, Karan S. *Transition finite elements for axisymmetric stress analysis*. International Journal for numerical methods in engineering, Vol. 15, 809-832 (1980).

[2] COOK, Robert D. *Finite Element Modeling for Stress Analysis.* University of Wisconsin- Madison, Ed. John Wiley & Sons, INC, 1995.

[3] ZIENKIEWICZ, O.C., TAYLOR, R.L. *Finite Element Method*. 5th ed., Volume 1. Butterworth-Neinemann, 2000.

[4] BROWNELL, Lloyd E.; YOUNG, Edwin H. *Process Equipment Design*. Wiley-Interscience, 1959.

[5] MOSS, Dennis R.; BASIC, Michael. *Pressure Vessel Design Manual*. Elsevier Inc., Fourth Edition, 2013.

[6] YOUNG, Warren C.; BUDYNAS, Richard G. *Roark's Formulas for Stress and Strain.* 7TH ed. McGraw-Hill, 2002.

[7] YAMAZAKI, K.; TSUBOSAKA, N. (1997). *A stress analysis technique for plate and shell built-up structures with junctions and its application to minimum-weight design of stiffened structures*. Structural Optimization. 14. 173-183. 10.1007/BF01812520.

[8] WAN, F.Y.M.; WEINITSCHKE, H.J. Journal of Engineering Mathematics (1988) 22: 285. https://doi.org/10.1007/BF00058512

[9] TIMOSHENKO, S.P.; WOINOWSKY-KRIEGER, S. *Theory of Plates and Shells*. 2nd ed. McGraw-Hill, New York, 1959.

[10] VENTSEL, Eduard; KRAUTHAMMER, Theodor, *Thin Plates and Shells: Theory: Analysis, and Applications*. 1st Edition. CRC Press, 2001.

[11] JAWAD, Maan H.; FARR James R. *Structural Analysis And Design Of Process Equipment*. 1st Edition, John Wiley & Sons, 1984.

[12] WANG, C.M.; REDDY, J.N.; LEE, K.H. *Shear Deformable Beams And Plates Relationships with Classical Solutions*. 1st Edition, Elsevier, 2000.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1612787/CA

[13] BATHE, Klaus-Jurgen. *Finite Element Procedures In Engineering Analysis*. 1st Edition. Prentice Hall, 1982.

[14] WEAVER, William; JOHNSTON, Paul R. *Finite Elements for Structural Analysis*. 1st Edition. Prentice-Hall, 1984.

[15] AMERICAN SOCIETY OF MECHANICAL ENGINEERS, PTB-3-2013, *ASME Section VIII-Division 2* ,2013.

[16] GIL, S.S. (Ed.) *The Stress Analysis of Pressure Vessels and Pressure Vessel Components*, 1st Ed. Pergamon Press, 1970.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1612787/CA

Anexo I – Esforços internos M0 e Q0

Avaliação dos esforços internos M0 e Q0 através da condição de compatibilidade dos deslocamentos radiais da casca cilíndrica e da tampa plana na região da junção do modelo proposto.

1) Casca e placa de paredes finas

Parâmetros:

> $restart:$
> $Digits := 4:$
>

$p_{int} := 2.5\cdot 10^{6}:$ ## *pressão interna (Pa) -*

$t_c := 25.4\cdot 10^{-3}:$ ## *altura do cilindro (m)*

$t_t := 25.4\cdot 10^{-3}:$ ## *altura da tampa plana (m)*

$r := 0.3 - \frac{t_c}{2}:$ ## *raio medio do cilindro (m)*

$\nu := 0.3:$ ## *Poisson*

$E := 200\cdot 10^{9}:$ ## *módulo de Elasticidade (Pa)*

$S_E := 470:$ ## *Limite de escoamento (MPa)*

$S_R := 745:$ ## *Limite de ruptura (MPa)*

Constantes:

> $\beta := \left(\frac{3.\cdot\left(1-\nu^2\right)}{r^2\cdot t_c^2}\right)^{\frac{1}{4}}$ ## *(1/m)*

$$\beta := 15.04$$

> $Dc := \frac{E\cdot t_c^3}{12\cdot\left(1-\nu^2\right)}$ ## *parâmetro da tampa casa cilíndrica (N.m)*

$$Dc := 3.002\ 10^{5}$$

> $Dt := \frac{E\cdot t_t^3}{12\cdot\left(1-\nu^2\right)}$ ## *parâmetro da tampa plana (N.m)*

$$Dt := 3.002\ 10^{5}$$

Cálculo do momento e cortante na junta casca cilíndrica e placa de paredes finas:

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1612787/CA

>

$$eq1 := -\frac{M_0}{Dc\cdot\beta} + \frac{Q_0}{2\cdot Dc\cdot\beta^2} = \frac{M_0\cdot r}{Dt\cdot(1+\nu)} - \frac{p_{int}\cdot r^3}{8\cdot Dt\cdot(1+\nu)} :$$

$$eq2 := \frac{M_0}{2\cdot Dc\cdot\beta^2} - \frac{Q_0}{2\cdot Dc\cdot\beta^3} + \frac{p_{int}\cdot r^2}{E\cdot t_c}\cdot\left(1-\frac{\nu}{2}\right) = \frac{Q_0\cdot r}{E\cdot t_t}\cdot(1-\nu) :$$

> $sol := solve(\{eq1, eq2\}, \{M_0, Q_0\})$

$$sol := \{M_0 = 22770., Q_0 = 3.821\ 10^5\}$$

2) Casca cilíndrica de paredes finas e placa moderadamente espessa

> $restart :$
> $Digits := 4 :$
> $nc := 2 :$
> $nt := 1 :$
>

$p_{int} := 2.5\cdot 10^6 :$ ## *pressão interna (Pa)*

$t_c := nc\cdot 25.4\cdot 10^{-3} :$ ## *espessura do cilindro (m)*

$t_t := nt\cdot 25.4\cdot 10^{-3} :$ ## *espessura da tampa plana (m)*

$r := 0.3 - \left(\frac{t_c}{2}\right) :$ ## *raio medio do cilindro (m)*

$\nu := 0.3 :$ ## *Poisson*

$E := 200\cdot 10^9 :$ ## *módulo de Elasticidade (Pa)*

$S_E := 470 :$ ## *Limite de escoamento (MPa)*

$S_R := 745 :$ ## *Limite de ruptura (MPa)*

Constantes:

> $\beta := \left(\frac{3.\cdot(1-\nu^2)}{r^2\cdot t_c^2}\right)^{\frac{1}{4}}$ ## *(1/m)*

$$\beta := 10.88$$

> $Dc := \frac{E\cdot t_c^3}{12\cdot(1-\nu^2)}$ ## *parâmetro da tampa casa cilíndrica (N.m)*

$$Dc := 2.401\ 10^6$$

> $Dt := \frac{E\cdot t_t^3}{12\cdot(1-\nu^2)}$ ## *parâmetro da tampa plana (N.m)*

$$Dt := 3.002\ 10^5$$

> $k_s := \frac{3}{2}\cdot\left(\frac{1-\nu}{1+\nu}\right)$ ## *shear correction factor*

$$k_s := 0.8078$$

> $G := \frac{E}{2\cdot(1+\nu)}$ ## *módulo de cisalhamento*

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1612787/CA

$$G := 7.692\,10^{10}$$

Cálculo do momento e cortante na junta casca cilíndrica moderadamente espessa e placa de paredes finas:

>

$$eq5 := -\frac{M_0}{Dc\cdot\beta} + \frac{Q_0}{2\cdot Dc\cdot\beta^2} = \frac{M_0\cdot r}{Dt\cdot(1+\nu)} - \frac{p_{int}\cdot r^3}{8\cdot Dt\cdot(1+\nu)} :$$

$$eq6 := \frac{M_0}{2\cdot Dc\cdot\beta^2} - \frac{Q_0}{2\cdot Dc\cdot\beta^3} + \frac{p_{int}\cdot r^2}{E\cdot t_c}\cdot\left(1-\frac{\nu}{2}\right) = \frac{Q_0\cdot r}{E\cdot t_t}\cdot(1-\nu) :$$

> $sol := solve(\{eq5, eq6\}, \{M_0, Q_0\})$

$$sol := \{M_0 = 23030., Q_0 = 2.821\,10^5\}$$

3) Casca cilíndrica de paredes finas e placa moderadamente espessa

> $restart :$
> $Digits := 4 :$
> $nc := 1 :$
> $nt := 2 :$
>

$p_{int} := 2.5\cdot 10^6 :$ ## *pressão interna (Pa)*

$t_c := nc\cdot 25.4\cdot 10^{-3} :$ ## *espessura do cilindro (m)*

$t_t := nt\cdot 25.4\cdot 10^{-3} :$ ## *espessura da tampa plana (m)*

$r := 0.3 - \left(\frac{t_c}{2}\right) :$ ## *raio medio do cilindro (m)*

$\nu := 0.3 :$ ## *Poisson*

$E := 200\cdot 10^9 :$ ## *módulo de Elasticidade (Pa)*

$S_E := 470 :$ ## *Limite de escoamento (MPa)*

$S_R := 745 :$ ## *Limite de ruptura (MPa)*

Constantes:

> $\beta := \left(\frac{3.\cdot(1-\nu^2)}{r^2\cdot t_c^2}\right)^{\frac{1}{4}}$ ## *(1/m)*

$$\beta := 15.04$$

> $Dc := \frac{E\cdot t_c^3}{12\cdot(1-\nu^2)}$ ## *parâmetro da tampa casa cilíndrica (N.m)*

$$Dc := 3.002\,10^5$$

> $Dt := \frac{E\cdot t_t^3}{12\cdot(1-\nu^2)}$ ## *parâmetro da tampa plana (N.m)*

$$Dt := 2.401\,10^6$$

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1612787/CA

> $k_s := \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{1-\nu}{1+\nu} \right)$ ## shear correction factor

$k_s := 0.8078$

> $G := \frac{E}{2 \cdot (1+\nu)}$ ## módulo de cisalhamento

$G := 7.692\ 10^{10}$

Cálculo do momento e cortante na junta casca cilíndrica de paredes espessas e placa de paredes finas:

>

$$eq5 := -\frac{M_0}{Dc \cdot \beta} + \frac{Q_0}{2 \cdot Dc \cdot \beta^2} = \frac{M_0 \cdot r}{Dt \cdot (1+\nu)} - \frac{p_{int} \cdot r^3}{8 \cdot Dt \cdot (1+\nu)} :$$

$$eq6 := \frac{M_0}{2 \cdot Dc \cdot \beta^2} - \frac{Q_0}{2 \cdot Dc \cdot \beta^3} + \frac{p_{int} \cdot r^2}{E \cdot t_c} \cdot \left(1 - \frac{\nu}{2}\right) = \frac{Q_0 \cdot r}{E \cdot t_t} \cdot (1-\nu) :$$

> $sol := solve(\{eq5, eq6\}, \{M_0, Q_0\})$

$sol := \{M_0 = 13870., Q_0 = 2.684\ 10^5\}$

4) Casca e placa moderadamente espessas

> $restart :$
> $Digits := 4 :$
> $nc := 2 :$
> $nt := 2 :$
>

$p_{int} := 2.5 \cdot 10^6 :$ ## pressão interna (Pa)

$t_c := nc \cdot 25.4 \cdot 10^{-3} :$ ## espessura do cilindro (m)

$t_t := nt \cdot 25.4 \cdot 10^{-3} :$ ## espessura da tampa plana (m)

$r := 0.3 - \left(\frac{t_c}{2}\right) :$ ## raio medio do cilindro (m)

$\nu := 0.3 :$ ## Poisson

$E := 200 \cdot 10^9 :$ ## módulo de Elasticidade (Pa)

$S_E := 470 :$ ## Limite de escoamento (MPa)

$S_R := 745 :$ ## Limite de ruptura (MPa)

Constantes:

> $\beta := \left(\frac{3. \cdot (1-\nu^2)}{r^2 \cdot t_c^2} \right)^{\frac{1}{4}}$ ## (1/m)

$\beta := 10.88$

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1612787/CA

> $Dc := \frac{E \cdot t_c^3}{12 \cdot (1 - \nu^2)}$ ## *parâmetro da tampa casa cilíndrica (N.m)*

$Dc := 2.401\ 10^6$

> $Dt := \frac{E \cdot t_t^3}{12 \cdot (1 - \nu^2)}$ ## *parâmetro da tampa plana (N.m)*

$Dt := 2.401\ 10^6$

> $k_s := \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{1 - \nu}{1 + \nu} \right)$ ## *shear correction factor*

$k_s := 0.8078$

> $G := \frac{E}{2 \cdot (1 + \nu)}$ ## *módulo de cisalhamento*

$G := 7.692\ 10^{10}$

Cálculo do momento e cortante na junta casca cilíndrica e placa moderadamente espessas:

>

$$eq5 := -\frac{M_0}{Dc \cdot \beta} + \frac{Q_0}{2 \cdot Dc \cdot \beta^2} = \frac{M_0 \cdot r}{Dt \cdot (1 + \nu)} - \frac{p_{int} \cdot r^3}{8 \cdot Dt \cdot (1 + \nu)} :$$

$$eq6 := \frac{M_0}{2 \cdot Dc \cdot \beta^2} - \frac{Q_0}{2 \cdot Dc \cdot \beta^3} + \frac{p_{int} \cdot r^2}{E \cdot t_c} \cdot \left(1 - \frac{\nu}{2}\right) = \frac{Q_0 \cdot r}{E \cdot t_t} \cdot (1 - \nu) :$$

> $sol := solve(\{eq5, eq6\}, \{M_0, Q_0\})$

$sol := \{M_0 = 20410., Q_0 = 2.861\ 10^5\}$

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1612787/CA

Apêndice I – Refinamento da malha (tp/tc=1) x SCFs (Ansys® V18.1)

Verificação do SCF em função do refinamento da Malha para geometria Placa x Casca (tp/tc=1) Modelo Axissimétrico.

Dados Entrada:

Parâmetro (unidade)	Símbolo	Valor
Pressão interna (MPa)	p_{int}	*2.5*
Raio interno (m)	ri	*0.275*
Raio médio (m)	r	*0.287*
Raio externo (m)	R	*0.3*
Espessura da casca cilíndrica (mm)	t_c	*25,4*
Altura da casa cilíndrica (m)	h	*1*
Espessura da tampa plana (mm)	t_t	*25,4*
Diâmetro externo da tampa plana (m)	L	*0.6*
Coeficiente de Poisson	ν	*0,3*
Módulo de Elasticidade (GPa)	E	*200*
Módulo de Cisalhamento (GPa)	G	*76,92*
Fator de correção ao cisalhamento	Ks	*0.83*
Limite de Escoamento (MPa)	S_E	*470*
Tensão de Ruptura (MPa)	S_R	*745*

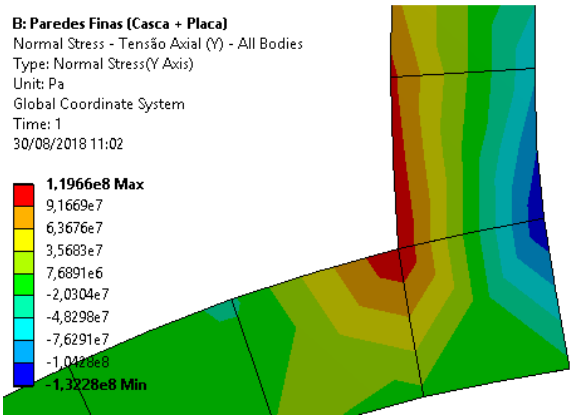
Análise Linear Elástica.

Elemento Plano 8 nós – 2 graus de translação por nó – 2 x 2 Pontos Gauss.

Modelo Axissimétrico.

Resultados:

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1612787/CA

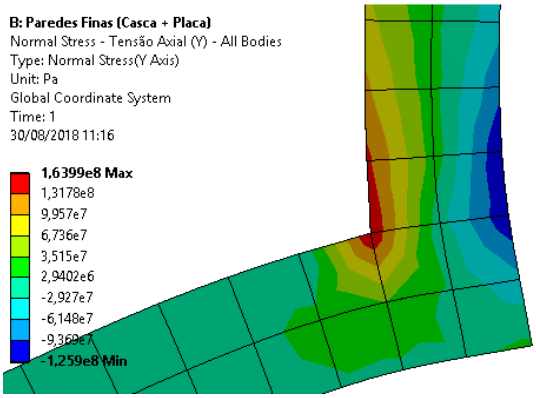


Tensão Máxima = 119 MPa

Tensão de Membrana = 12.89 MPa

SCF = σ_max/σ_hoop = 9.2

Razão de Aspecto = 1.11

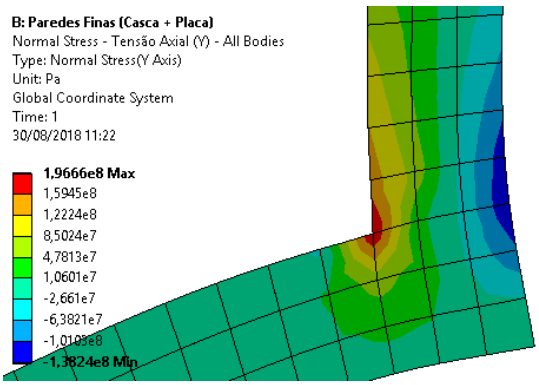


Tensão Máxima = 164 MPa

Tensão de Membrana = 12.91 MPa

SCF = σ_max/σ_hoop = 12.70

Razão de Aspecto = 1.00

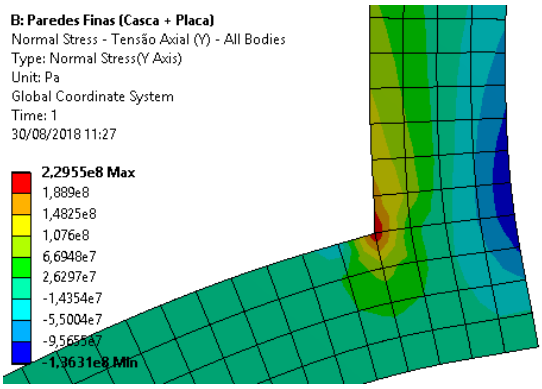


Tensão Máxima = 196 MPa

Tensão de Membrana = 12.93 MPa

SCF = σ_max/σ_hoop = 15.16

Razão de Aspecto = 1.00



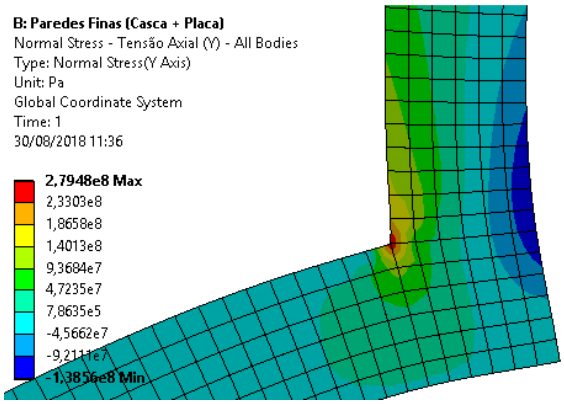
Tensão Máxima = 229 MPa

Tensão de Membrana = 12.93 MPa

SCF = σ_max/σ_hoop = 17.71

Razão de Aspecto = 1.00

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1612787/CA

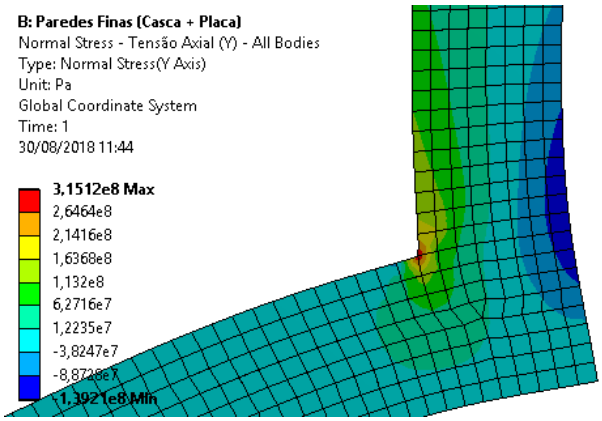


Tensão Máxima = 279 MPa

Tensão de Membrana = 12.94 MPa

SCF = σ_max/σ_hoop = 21.56

Razão de Aspecto = 1.00



Tensão Máxima = 315 MPa

Tensão de Membrana = 12.94 MPa

SCF = σ_max/σ_hoop = 24.34

Razão de Aspecto = 1.00

Obs: Limite Máximo da Licença ANSYS student

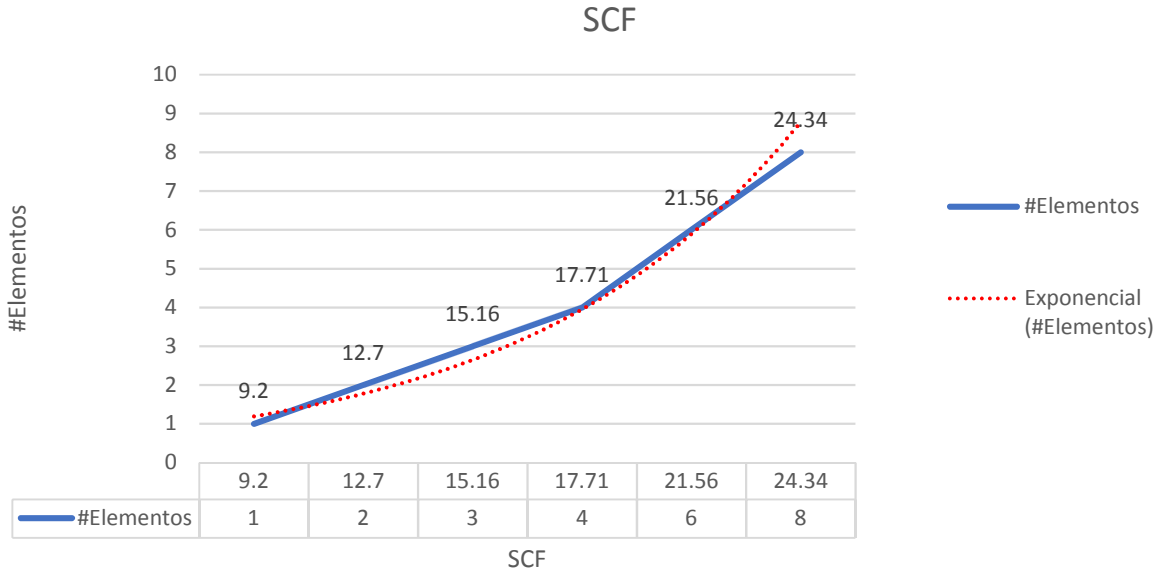


Figura 73: Refinamento da malha para valores crescentes de SCF

Conclui-se que o sucessivo refinamento da malha considerando a geometria proposta apresentará SCFs crescentes.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1612787/CA