PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA
DO RIO DE JANEIRO

Carlos Tesch Scistowicz

Análise biomecânica dos esforços sobre as articulações do corpo humano durante o movimento de arranque a partir de imagens de vídeo

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Colegiado do Curso de Engenharia Mecânica da Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, como requisito à obtenção do título de Engenheiro Mecânico.

Orientador: Ivan F. M. Menezes

Rio de Janeiro

Julho de 2018

Resumo

Este trabalho tem como objetivo desenvolver uma análise biomecânica do Arranque (Snatch), um dos movimentos associados ao levantamento de peso olímpico, por meio da utilização de métodos numéricos adequados para a solução das equações de Euler-Lagrange. A partir de imagens de vídeo, este trabalho desenvolverá um programa capaz de rastrear as articulações criando uma base de dados de mapeamento do corpo e, a partir desses dados, determinar os esforços mecânicos (compressão, cortante e flexão) sobre as articulações e as potências geradas pelo atleta durante a execução do levantamento.

Além disso criará uma metodologia e uma nova base de dados, para que futuros estudos possam ser realizados a partir deste.

Palavras chaves: Biomecânica. Articulações. Esforços Mecânicos. Arranque. Snatch.

Abstract

Biomechanical analysis of the stresses on the human body joints during the snatch through video images

This project aims to develop a biomechanical analysis of the Snatch, one of the movements associated to the Olympic weightlifting, through the use of numerical methods suitable for solving the Euler-Lagrange equations. From video images, this work will develop a program capable of tracking the joints by creating a database of body mapping and, from these data, determine the mechanical stresses (compression, shear and bend) on the joints and powers generated by the athlete during the lift.

In addition, it will create a methodology and a new database, so that future studies can be carried out from this.

Key-words: Biomechanics. Joints. Mechanical Stresses. Snatch.

Agradecimentos

Agradeço a PUC-Rio, que proporcionou um ensino de primeira qualidade e forneceu todas as ferramentas necessárias para que eu iniciasse a minha carreira profissional. Levarei para sempre os momentos e ensinamentos que tive aqui.

Aos meus professores, agradeço por todo conhecimento transmitido. Ao meu orientador, Ivan Fabio Mota de Menezes, minha eterna gratidão, por todos os conselhos que recebi durante o meu último semestre; por demonstrar um conhecimento não apenas intelectual, mas a manifestação do caráter e dedicação à educação e ao processo de formação profissional.

Agradeço imensamente a toda minha família pelo incentivo, carinho e confiança oferecidos durante toda a minha caminhada. Jamais teria conseguido chegar aqui sem a presença de vocês. Sou quem sou porque vocês estiveram e estão sempre ao meu lado.

Aos meus amigos, um muito obrigado por todas as vezes que compartilharam tantos momentos comigo, sejam de alegria sejam de angústia.

E a todos que participaram direta ou indiretamente da minha vida acadêmica, minha sincera gratidão.

Foi um caminho árduo, mas conseguimos chegar ao final. Este é um momento muito importante pois marca o início de uma nova etapa na minha vida.

Sumário

Resumo 2
Abstract 2
Agradecimentos 3
Lista de Símbolos 7
1 Introdução 8
2 Objetivos 8
3 O Arranque 9
3.1 Posição inicial 9
3.2 O Levantamento 9
4 A Base de Dados 10
4.1 Captação de Dados 10
4.2 Rastreamento 12
4.3 Pontos Rastreados 12
4.4 Tratamento de Dados 13
4.4.1 Posição 13
4.4.2 Sistema de Coordenadas 14
4.4.3 Caso Geral (Câmera em movimento) 14
4.4.4 Dimensões 15
4.4.5 Tempo 15
4.5 Resultado da base de Dados 15
5 Ângulos Articulares e Auxiliares 16
6 Equacionamento gerado a partir da Base de dados 19
7 Modelo Matemático do Corpo 21
7.1 Modelo do Corpo Humano 21
7.2 Propriedades Físicas dos Segmentos 22
7.2.1 Comprimentos 22
7.2.2 Massas 23
7.2.3 Momentos de Inércia 23
8 Formulação Matemática: Equação de Lagrange 25
8.1 Ângulos 26
8.2 Posições 26
8.3 Momentos 27
8.3.1 Energia 27
8.3.2 Lagrange 27

8.4 Forças Resultantes Axiais e Radiais 28
8.4.1 Energia 28
8.4.2 Lagrange 28
8.4.3 Equações para as forças orientadas 29
9 Resultados e Discussões 30
10 Conclusão 32
11 Desenvolvimentos Futuros 33
12 Referências Bibliográficas 34
13 Anexo 36
13.1 Gráficos 36
13.2 Programas 40
13.2.1 Visual Basic for Applications (VBA), Rastreamento 40
13.2.2 MATLAB, Lagrange 1 41
13.2.3 MATLAB, Lagrange 2 45
13.2.4 MATLAB, Posições 48
13.2.5 MATLAB, Modelo Snatch 51

Gráfico 1 - Calibração da Posição da Barra no Eixo Y de Coordenadas do Monitor de Imagem .14
Gráfico 2 - Posição de cada ponto no Eixo Y.....16
Gráfico 4 - Posição Espacial da Barra no Plano XY.....16
Gráfico 3 - Posição de cada ponto no Eixo X 16
Gráfico 5 - Ângulos Auxiliares antes da correção 18
Gráfico 6 - Ângulos Auxiliares após a correção 18
Gráfico 7 - Ângulos Articulares.....19
Gráfico 8 - Comprimento da projeção sagital de cada segmento.....23

Figura 1 - Fases do arranque 10
Figura 2 - Modelo de Posicionamento da Câmera e distorções 11
Figura 3- Distância Focal.....12
Figura 4 – Pontos Rastreados 13
Figura 5 - Segmentos e Ângulos Articulares 17
Figura 6 - Ângulos Auxiliares 17
Figura 7 - Simulação do arranque a partir da base de dados de rastreamento do corpo.....21
Figura 8 - Modelo das forças de reação verticais e horizontais atuantes na junta 28
Figura 9 – Orientação das forças com relação ao menisco.....29
Figura 10 - Orientação das reações axiais e radiais no tornozelo (a), joelho (b), quadril (c) e ombro (d). 30

Tabela 1 - Fases do arranque 19
Tabela 2 - Intervalos selecionados para o desenvolvimento das equações dos ângulos articulares 20
Tabela 3 - Segmentos do modelo e seus componentes relativos ao corpo humano.....22
Tabela 4 - Porcentagem da massa de cada parte do corpo humano.....23
Tabela 5 - Medidas antropométricas do atleta 25
Tabela 6 - Comprimento do pescoço.....25
Tabela 7 - Momento de inercia dos segmentos compostos 25
Tabela 8 - Momentos Máximos na primeira puxada e fase de transição 31
Tabela 9 - Momentos máximos na fase de Receptação 32

Lista de Símbolos

Símbolo	**Descrição**	**Unidade**
$X_{J_{(i)}}$	Posição de uma junta qualquer J no eixo X no instante i	$[pixels]\ ou\ [m]$
$Y_{J_{(i)}}$	Posição de uma junta qualquer J no eixo Y no instante i	$[pixels]\ ou\ [m]$
$\vec{P}_{J_{(i)}}$	Posição de uma junta qualquer J no instante i	$[pixels]\ ou\ [m]$
$\overrightarrow{P_{J/M}}$	Posição de uma junta qualquer J no sistema de coordenadas no monitor de imagem	$[pixels]\ ou\ [m]$
A	Coeficiente de transformação de pixels para metros	$[m/pixels]$
H	Altura	$[m]$
m	Massa	$[kg]$
$t_{(i)}$	Tempo	$[s]$
$\theta_{J_{(i)}}$	Ângulo articular de uma junta J qualquer no instante i	$[rad]$
$\theta_{f_{(i)}}$	Ângulo da junta do apoio do pé	$[rad]$
$\theta_{1_{(i)}}$	Ângulo Auxiliar do Tornozelo (A)	$[rad]$
$\theta_{2_{(i)}}$	Ângulo Auxiliar do Joelho (K)	$[rad]$
$\theta_{3_{(i)}}$	Ângulo Auxiliar do Quadril (H)	$[rad]$
$\theta_{4_{(i)}}$	Ângulo Auxiliar do Ombro (S)	$[rad]$
$\theta_J(t)$	Ângulo Articular de uma junta qualquer no tempo t	$[rad]$
$L_{seg_{(i)}}$	Comprimento de um segmento qualquer no instante i	$[m]$
R_J	Erro quadrado da equação de posição de uma junta qualquer J	$-$
I	Momento de Inercia	$[kg.m^2]$
i	Instante	$-$
A	Tornozelo (Ankle)	$-$
K	Joelho (Knee)	$-$
H	Quadril (Hip)	$-$
S	Ombro (Shoulder)	$-$
W	Barra/Peso (Weight)	$-$
E	Estabilizador	$-$
L	Função de Lagrange	$[J]$
T	Energia Cinética	$[J]$
V	Energia Potêncial	$[J]$
M	Momento	$[N.m]$
F	Força	$[N]$

1 Introdução

Usar uma técnica adequada em diferentes esportes é um fator inevitável. Neste estudo, a técnica para o levantamento de peso é avaliada matematicamente.

Encontrar a técnica ideal para um levantador de peso é uma questão principal para os treinadores. O ponto é que a melhor técnica deve ser determinada para cada levantador de peso. É razoável supor que padrões de movimento varie entre os atletas, uma vez que as dimensões do corpo antropométrico variam. Uma análise dos esforços mecânicos resultantes pode se mostrar importante na busca do aperfeiçoamento da técnica.

Pelo rastreamento e mapeamento do movimento executado pelo atleta são identificadas as trajetórias das principais articulações envolvidas no movimento.

O corpo do atleta será descrito por um modelo simplificado bidimensional no plano sagital de cinco segmentos, sendo eles: pé, perna, coxa, tronco e braço.

A análise biomecânica do movimento será feita por meio das equações de Euler-Lagrange (Mecânica Lagrangeana) e de técnicas numéricas apropriadas. O método a seguir busca desenvolver uma forma simples de rastreamento das articulações, e por meio de uma base de dados de mapeamento do corpo, desenvolver equações que calculem os esforços mecânicos (compressão, cortante e flexão) resultantes nas articulações e as potências geradas pelo atleta durante a execução do levantamento.

Para concluir será feita uma análise comparativa dos indicadores biomecânicos das fases de movimento.

2 Objetivos

Este trabalho tem como objetivo identificar as forças e momentos resultantes atuantes nas articulações do corpo humano durante o movimento de arranque. Esses resultados possibilitam que novos estudos na área de cinesiologia e biomecânica sejam realizados.

É importante ressaltar que a metodologia criada nesse estudo para identificar as fases do movimento, velocidades e potências exercidas em cada articulação podem ter um papel crucial para o desenvolvimento e aprimoramento da técnica dos atletas e praticantes da modalidade. Um estudo individualizado pode ajudar a encontrar erros de repetibilidade no padrão de movimento do atleta, que por sua vez, tem grandes consequências na carga levantada pelo mesmo.

Além disso, com os valores das forças resultantes (compressiva e cortante) e os momentos exercidos pela musculatura durante todo o movimento, futuros estudos podem ser realizados na área de cinesiologia e biomecânica, podendo inclusive gerar valores para as trações estimadas para tendões e ligamentos. Estes estudos por sua vez podem ter grande influência nas práticas esportivas com o objetivo de minimizar lesões e maximizar a eficiência do treinamento.

3 O Arranque

O arranque é considerado um dos movimentos mais complexos dos esportes olímpicos. Este pode ser descrito como simplesmente levantar uma barra do chão para cima em apenas um movimento. No entanto, essa descrição não chega nem perto de explicar complexidade deste movimento.

Para realização do mesmo, o atleta precisa ter uma combinação de força, coordenação, explosão, mobilidade e estabilidade não encontradas em nenhum outro exercício.

Um atleta deve aliar sua habilidade com a prática meticulosa para o aperfeiçoamento da sua execução. Quando o atleta aprende a realizar corretamente o movimento, sua capacidade de construir um poder explosivo se traduz em desempenho atlético.

Pesquisas sobre biomecânica dos levantadores de peso olímpico de elite pode fornecer informações valiosas sobre o exercício em questão. Determinar uma técnica adequada de rastreamento e ilustrar como ela melhorará o desempenho pode ser determinante no desenvolvimento do atleta.

3.1 Posição inicial

Para realizar o movimento com eficiência uma posição inicial bem ajustada é essencial. Embora existam variações devido à anatomia de cada indivíduo, algumas regras gerais devem ser levadas em consideração.

Primeiro, os pés são posicionados em uma "postura saltante", com os pés tão largos quanto os quadris. Esta é tipicamente a largura da postura que um atleta assumiria se fosse instruído a realizar um salto vertical de esforço máximo. A barra deve ser posicionada sobre os ossos metatarsais, e os pés devem estar apontados para a frente ou girados ligeiramente para fora, com variações individuais devido à altura, proporções e mobilidade do atleta. Um dorso neutro ou ligeiramente arqueado com o peito para cima e escápulas retraídas é importante para reduzir o risco de lesões e aumentar a transferência de energia do corpo para a barra. Os quadris costumam ser mais altos que os joelhos, mas as proporções de um atleta ditarão a colocação exata, e alguns atletas são capazes de assumir posições iniciais com os quadris mesmo com ou mais baixos que os joelhos. Os ombros devem ser posicionados diretamente acima ou ligeiramente na frente da barra.

3.2 O Levantamento

O arranque pode ser dividido em seis fases com base principalmente no ângulo da articulação do joelho.

A primeira fase, também chamada de primeira puxada, começa com a barra em repouso no chão e termina quando os joelhos alcançam a primeira extensão máxima. Durante esta fase, os joelhos e os quadris se estendem e os tornozelos se flexionam, mas o pé inteiro permanece em contato com o solo. O tronco também é mantido em um ângulo relativamente constante em relação ao solo. A manutenção desse ângulo do tronco é muito importante para a transferência eficiente de força nas fases posteriores.

A fase de transição, também conhecida como "*double knee bend*", segue a primeira puxada. Durante essa fase, os joelhos são flexionados e empurrados em direção à barra. Os joelhos flexionam cerca de 20 graus e esta fase termina na flexão máxima do joelho [1]. Essa flexão dos joelhos permite que o corpo use a energia elástica e os reflexos de estiramento dos extensores do joelho para desenvolver uma força muscular explosiva, posicionando melhor o corpo para a próxima fase [3].

A segunda puxada é a fase mais explosiva e poderosa do arranque. Começa quando os joelhos atingem a flexão máxima durante a fase de transição. Durante a segunda fase, os quadris, os joelhos e os tornozelos são todos violentamente estendidos. A flexão plantar dos tornozelos resulta na perda de contato dos calcanhares com o chão [1]. A posição final dessa fase é conhecida como "extensão tripla", já que os quadris, joelhos e tornozelos se aproximam da amplitude máxima de movimento.

A fase de Turnover começa na extensão máxima do joelho e termina quando a barra atinge sua altura máxima. O levantador começa a mover o corpo para baixo para ser posicionado sob a barra. Os pés deixam o chão e saltam para fora para uma postura de recepção ou de agachamento, geralmente na largura dos ombros. Os pés então restabelecem contato total com o solo antes do início da fase de recepção. A recepção da barra é realizada bloqueando os braços e estabilizando a barra sobre a cabeça enquanto diminui o movimento para baixo. Após a recepção, o levantador sobe da posição de agachamento para ficar totalmente ereto na conclusão do levantamento [1][3].

Desde o início do movimento até o início da segunda puxada, os ombros são estendidos à medida que a barra é puxada em direção ao levantador. Durante a Segunda Puxada e o *Turnover*, os ombros são flexionados rapidamente para posicionar o corpo para sustentar a barra [5]. Durante este período, um violento encolher de ombros e puxada com os braços deve ocorrer. Isso permite a elevação da barra enquanto o levantador se posiciona sob a mesma [1]. Deve-se notar que existe um debate sobre o efeito do encolher de ombros e puxar. Essa puxada permite alongar o caminho ascendente da barra e facilitar a entrada do atleta sob a barra [4]. Durante a pega e a elevação, a mobilidade do ombro é testada à medida que os ombros são flexionados a mais de 180 graus [2,5].

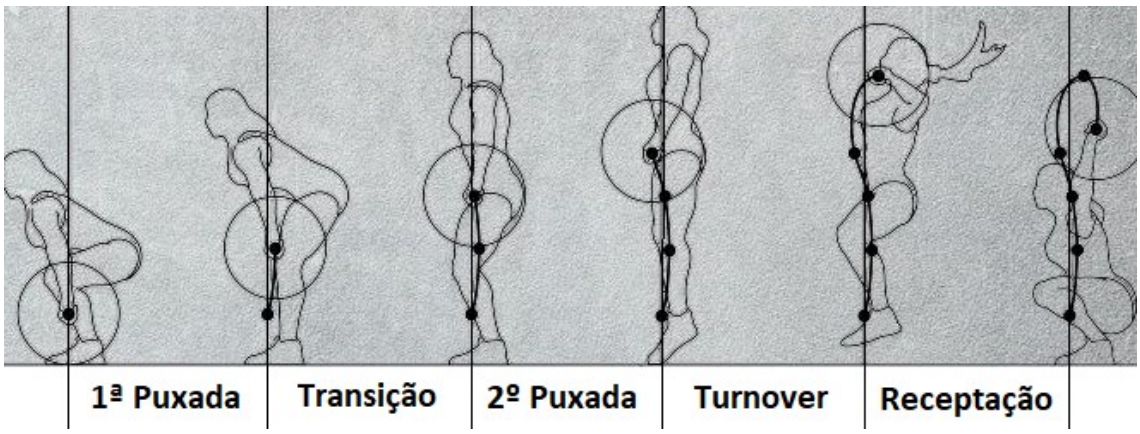


Figura 1 - Fases do arranque

4 A Base de Dados

4.1 Captação de Dados

A captação de dados é feita por meio do rastreamento e mapeamento das articulações e pontos determinados em uma filmagem do movimento sendo executado.

A gravação de imagens foi realizada no Centro de Levantamento de Peso do Centro de Educação Física Almirante Adalberto Nunes (CEFAN). O levantamento foi realizado pelo atleta Renan de Sena Fernandes, com uma carga de 110 kg (carga referente a aproximadamente 80% do seu 1RM[1]).

Para aumentar a precisão da medida foi necessário enquadrar o atleta de forma que ele ocupasse o maior espaço de tela possível. Com isso conseguimos uma maior amplitude de *pixels* utilizados. E para diminuir as distorções da imagem foi utilizada uma câmera de grande distância focal.

Câmeras com distancias focais maiores (Figura 3) permitem que enquadremos o atleta mesmo posicionando a câmera a distâncias maiores. A vantagem de posicionar a câmera longe do atleta se dá devido à diminuição do valor do ângulo α (Figura 2), com isso a posição da ponta da barra na imagem se aproxima melhor da posição real de onde o centro da barra se encontra.

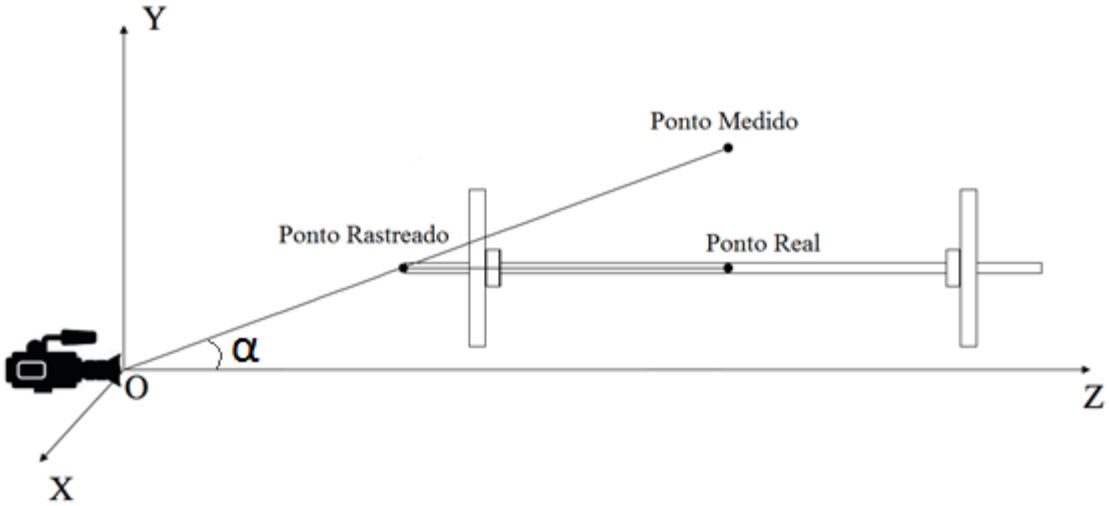


Figura 2 - Modelo de Posicionamento da Câmera e distorções

[1] 1RM - O teste de uma repetição máxima (1RM) ou teste de 1RM, em musculação, refere-se à quantidade de peso deslocado, em um determinado exercício de musculação, que resulta no movimento completo executado de forma correta, sem a capacidade de realizar o segundo movimento e constitui uma forma eficiente para avaliar a força muscular. O 1RM pode ser usado para determinar uma força máxima individual e é o método utilizado para determinar os vencedores em eventos como os de levantamento de peso básico e halterofilismo. O teste também pode ser utilizado como um limite superior, a fim de determinar a carga (intensidade) desejada para se realizar um exercício (como uma percentagem do 1RM).

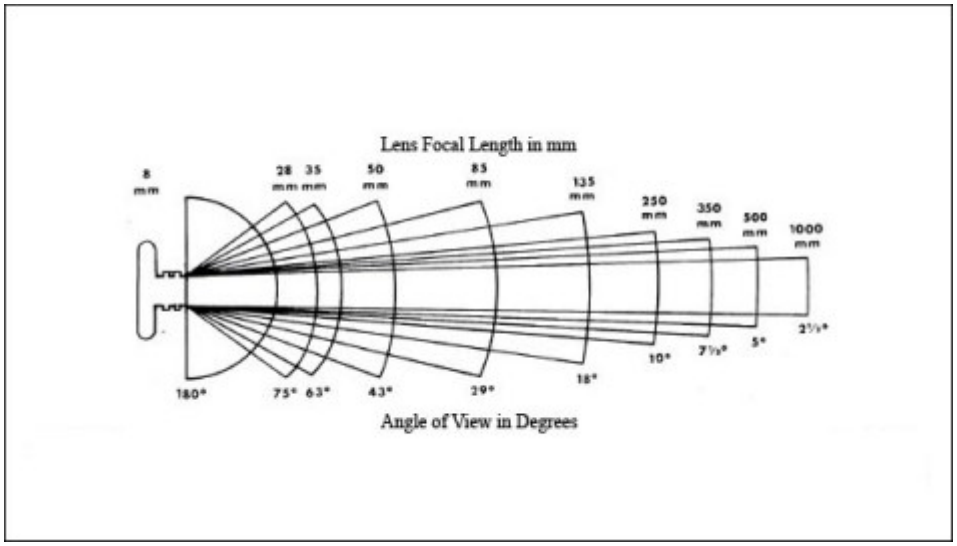


Figura 3- Distância Focal

4.2 Rastreamento

Foi desenvolvido, em Visual Basic for Applications (VBA), um programa [ANEXO 13.2.1] que rastreia a posição do cursor do *mouse* e retorna valores em X e Y em *pixels* ao longo do tempo, criando um vetor posição ($\overrightarrow{P_{(t)}}$). De forma manual, o cursor do *mouse* acompanha a posição das articulações desejadas no vídeo gravado. A câmera utilizada gravou a uma taxa de 240 frames por segundo e, para diminuir o erro no rastreamento dos pontos, o vídeo foi reproduzido em uma velocidade de 1/10 vezes do original. Foram captados 24 dados por segundo de vídeo. Portanto, em tempo real, obtivemos 240 captações de dados de posição por segundo para cada ponto (uma captura de dado por frame de vídeo).

A fim de evitar erros aleatórios e garantir uma melhor medição, o programa foi rodado cinco vezes para cada ponto, e a média aritmética calculada. No caso de alguma medição apresentar valores relativamente distantes da média a medição deve ser refeita e uma nova média calculada.

4.3 Pontos Rastreados

Como já citado anteriormente, o corpo foi dividido em cinco segmentos, sendo eles: pé, perna, coxa, tronco e braços. Cada um deles é definido pelos pontos em suas extremidades.

Figura 4 – Pontos Rastreados

No caso de segmentos que são conectados pelas articulações do tornozelo, joelho, quadril e ombro, o ponto é localizado no centro de rotação da mesma, que é descrito como ponto instantâneo sobre o qual uma articulação tende a rodar [8][9].

O ponto em comum do segmento perna e coxa é o joelho, sendo assim, o centro de rotação tibiofemoral define a ligação desses segmentos no modelo utilizado. O mesmo processo é feito para o tornozelo (encontro do segmento Pé com o segmento Perna), e com o ombro (segmento Tronco com o segmento Braço).

O segmento Pé é delimitado pelo tornozelo e pelo ponto médio onde a planta do pé faz contato com o solo no caso de uma extensão de tornozelo. Já o segmento Braço é delimitado pelo Ombro e a barra.

4.4 Tratamento de Dados

4.4.1 Posição

Mesmo utilizando uma câmera de grande distância focal, fez-se necessário a aplicação de uma equação de calibração para a posição da barra, visto que a distância do Ponto Rastreado e o Ponto Real da barra é consideravelmente maior do que nas articulações rastreadas [Figura 2]. Ou seja, o ponto rastreado da barra não se encontra no mesmo plano sagital que os outros pontos. Essa calibração é feita apenas na direção Y devido aos grandes deslocamentos da barra nessa direção. Não é necessário fazer nenhum ajuste de posição no Eixo X, visto que não existe nenhum grande deslocamento nessa direção.

Para realizar a calibração foram selecionados alguns instantes aleatórios na filmagem, mapeando o ponto anteriormente rastreado e a posição estimada para o centro de massa da barra. Com alguns desses dados é possível criar uma equação de calibração para o centro de massa do conjunto barra e anilhas.

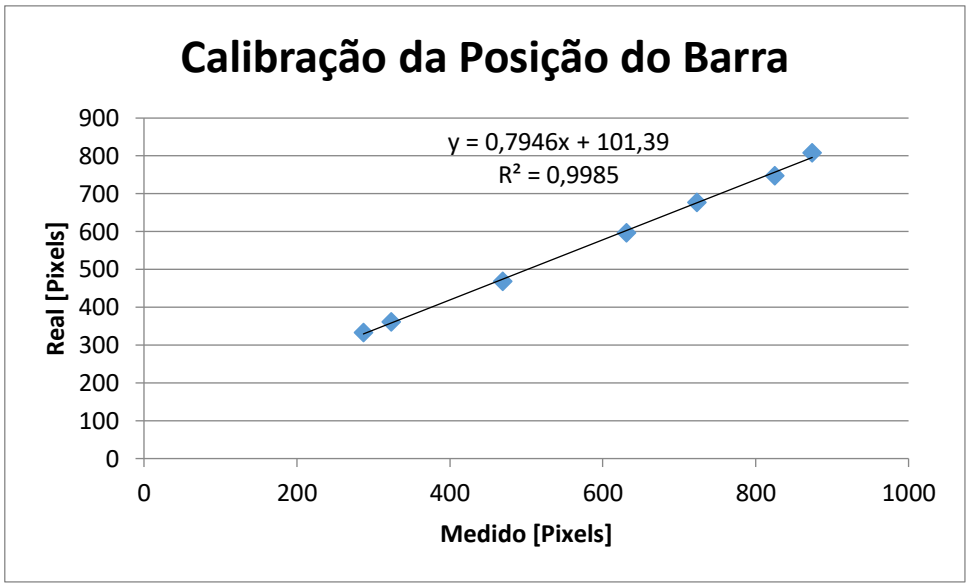


Gráfico 1 - Calibração da Posição da Barra no Eixo Y de Coordenadas do Monitor de Imagem

Portanto, o real posicionamento da barra em função do posicionamento medido pode ser representado pela seguinte equação:

$$\overrightarrow{Y_{W/M}}_{(i)}[pixels] = 0{,}7946 \cdot \overrightarrow{Y_{W*/M}}_{(i)}[pixels] + 101{,}39 \qquad [1]$$

4.4.2 Sistema de Coordenadas

O ponto (0,0) no monitor de imagem é o superior esquerdo, ou seja, X positivo para direita e Y positivo para baixo. Como na base de dados escolhida a origem é definida pela posição inicial do tornozelo, com X positivo para direita e Y positivo para cima, foi necessário transformar o sistema de coordenadas [10].

Com isso obtivemos a seguinte equação de transformação:

$$\vec{P}_{J(i)}[pixels] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \left(\overrightarrow{P_{J/M}}_{(i)}[pixels] - \overrightarrow{P_{A/M}}_{(0)}[pixels] \right) \qquad [2]$$

onde o vetor $\vec{P}_{J(i)}$ é a posição de uma articulação qualquer no momento $t = i$ no novo sistema de coordenadas, $\overrightarrow{P_{J/M}}_{(i)}$ é a posição de uma articulação qualquer no momento $t = i$ no sistema de coordenadas do monitor de imagem, e $\overrightarrow{P_{A/M}}_{(0)}$ é a posição do tornozelo no momento $t = 0$ no sistema de coordenadas do monitor de imagem.

4.4.3 Caso Geral (Câmera em movimento)

Para uma maior diversidade na base de dados podemos utilizar vídeos já prontos encontrados na internet, porém, em grande parte deles a câmera não se encontra totalmente estável. Nesses casos é necessário a criação de mais uma base de dados, denominada aqui de

Estabilizadora ($\overrightarrow{P_{E/M}}_{(i)}$). Esta é criada por meio do mesmo programa em VBA, porém, desta vez, selecionamos um ponto estável, como marcas no chão, por exemplo.

A partir dessa base de dados utilizamos uma nova equação de calibração:

$$\vec{P}_{J(i)}[pixels] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \left(\overrightarrow{P_{J/M}}_{(i)}[pixels] - \overrightarrow{P_{A/M}}_{(0)}[pixels] - \left(\overrightarrow{P_{E/M}}_{(i)}[pixels] - \overrightarrow{P_{E/M}}_{(0)}[pixels] \right) \right) \quad [3]$$

4.4.4 Dimensões

É necessário transformar a unidade do vetor posição de pixels para metros. Para tal transformação, selecionamos um ponto no topo da cabeça ($\vec{Y}_{head/M}$), e na sola do pé ($\vec{Y}_{foot/M}$) do atleta em um momento da filmagem em que ele se encontra totalmente de pé. Conhecendo o valor da sua altura do atleta (H), em metros, encontramos a seguinte relação:

$$A[pixels/m] = \frac{\vec{Y}_{head/M}[pixels] - \vec{Y}_{foot/M}[pixels]}{H[m]} \quad [4]$$

Com o valor de A, aplicamos a seguinte formula em toda a base de dados:

$$\vec{P}_{J(i)}[m] = A[m/pixels] \cdot \vec{P}_{J(i)}[pixels] \quad [5]$$

4.4.5 Tempo

Como foram captados 240 dados por segundo temos que:

$$t_{(i)}[s] = \frac{1}{240}(i-1) \quad [6]$$

4.5 Resultado da base de Dados

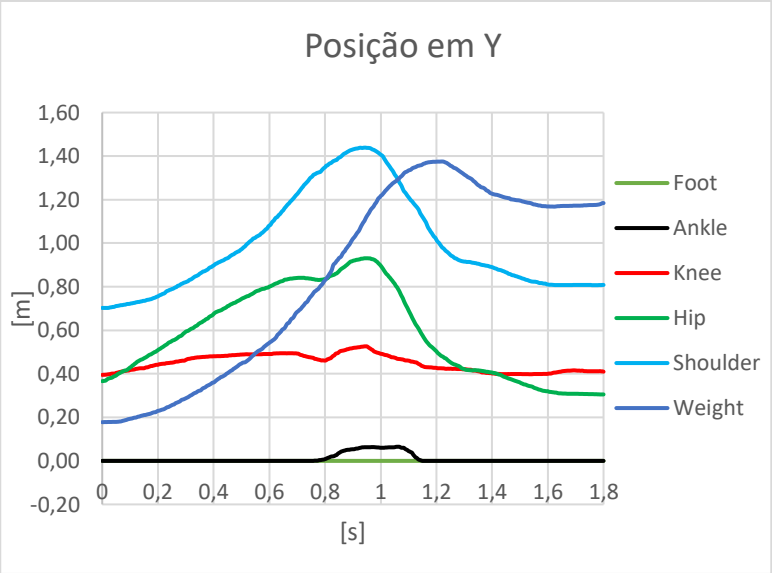


Gráfico 2 - Posição de cada ponto no Eixo Y

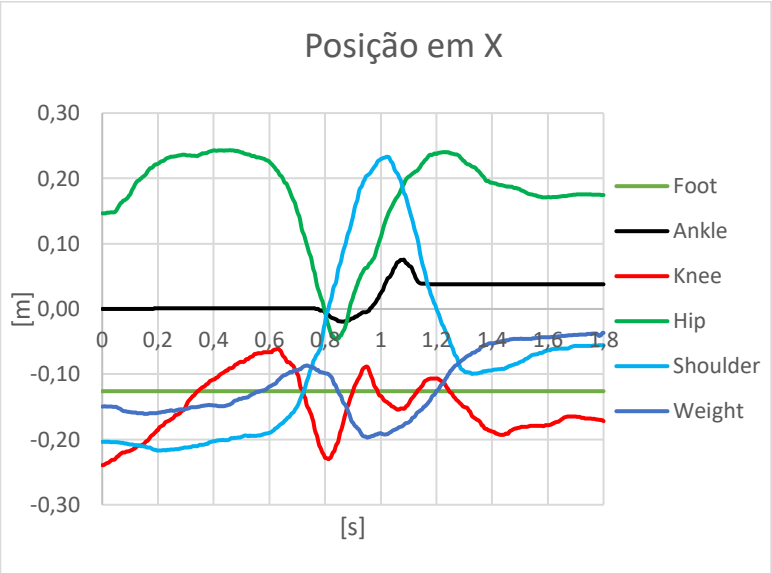


Gráfico 4 - Posição de cada ponto no Eixo X

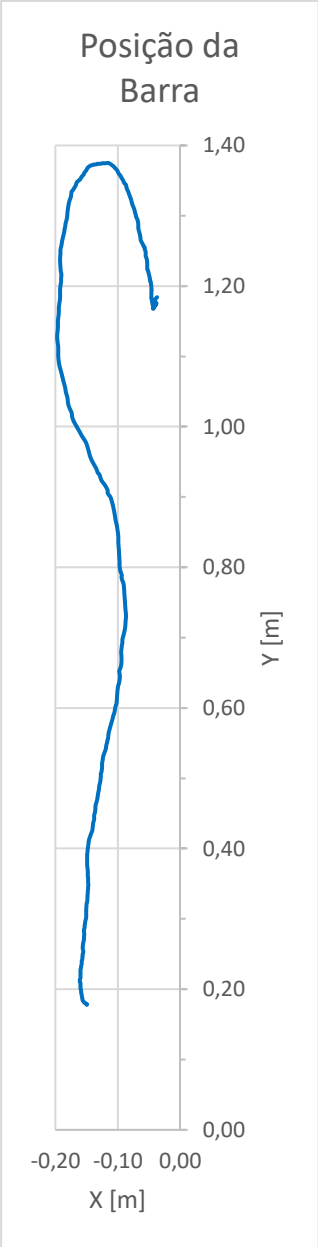


Gráfico 3 - Posição Espacial da Barra no Plano XY

Apesar da base de dados não demostrar, durante o intervalo de 0,95 s até 1,15 s a ponta do pé perde contato com o solo.

5 Ângulos Articulares e Auxiliares

Por meio das posições de cada junta articular podemos descobrir os ângulos que cada uma delas faz.

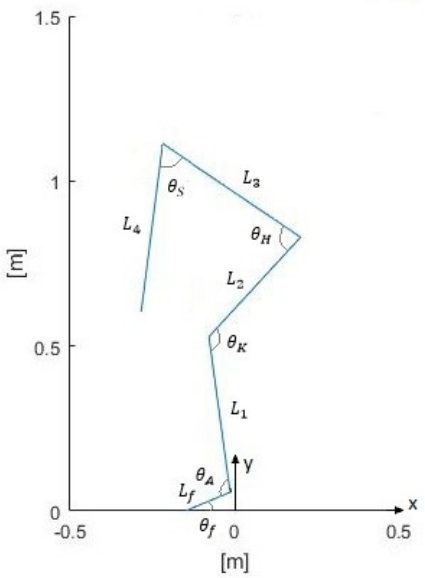


Figura 5 - Segmentos e Ângulos Articulares

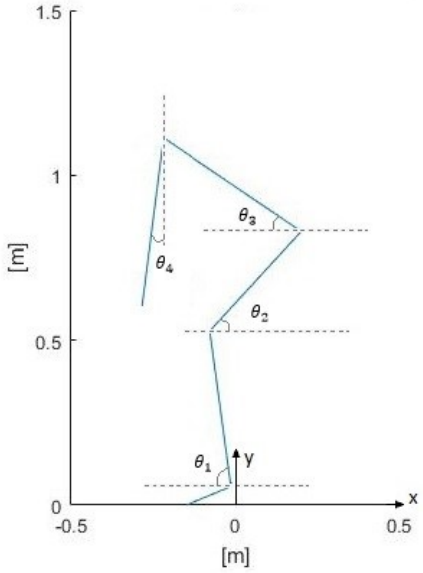


Figura 6 - Ângulos Auxiliares

Fez-se o uso de ângulos auxiliares, com o objetivo de facilitar a visualização e equacionamento do problema, definidos de forma que os ângulos articulares sejam uma combinação destes.

Com o valor da posição de todos os pontos ao longo do tempo, os valores dos ângulos auxiliares podem ser facilmente encontrados.

$$\theta_{f_{(i)}} = \tan^{-1}\left(\frac{Y_{A(i)} - Y_{f_{(i)}}}{X_{A(i)} - X_{f_{(i)}}}\right) \qquad \theta_{1_{(i)}} = \tan^{-1}\left(\frac{Y_{K(i)} - Y_{A(i)}}{X_{A(i)} - X_{K(i)}}\right)$$

$$\theta_{2_{(i)}} = \tan^{-1}\left(\frac{Y_{H(i)} - Y_{K(i)}}{X_{H(i)} - X_{K(i)}}\right) \qquad \theta_{3_{(i)}} = \tan^{-1}\left(\frac{Y_{S(i)} - Y_{H(i)}}{X_{H(i)} - X_{S(i)}}\right)$$

$$\theta_{4_{(i)}} = \tan^{-1}\left(\frac{X_{s(i)} - X_{w(i)}}{Y_{s(i)} - Y_{w(i)}}\right)$$

Sendo assim temos que:

$$\theta_{A(i)} = \theta_{f_{(i)}} + \theta_{1(i)} \qquad \theta_{K(i)} = \theta_{1(i)} + \theta_{2(i)}$$

$$\theta_{H(i)} = \theta_{2(i)} + \theta_{3(i)} \qquad \theta_{S(i)} = \theta_{4(i)} + \frac{\pi}{2} - \theta_{3(i)}$$

É importante notar que ângulos do segundo quadrante tem a sua tangente negativa, assim como ângulos do quarto quadrante. Sendo assim, quando algum ângulo auxiliar passa de 90 graus o resultado da $\tan^{-1}$ apresenta um ângulo do quarto quadrante.

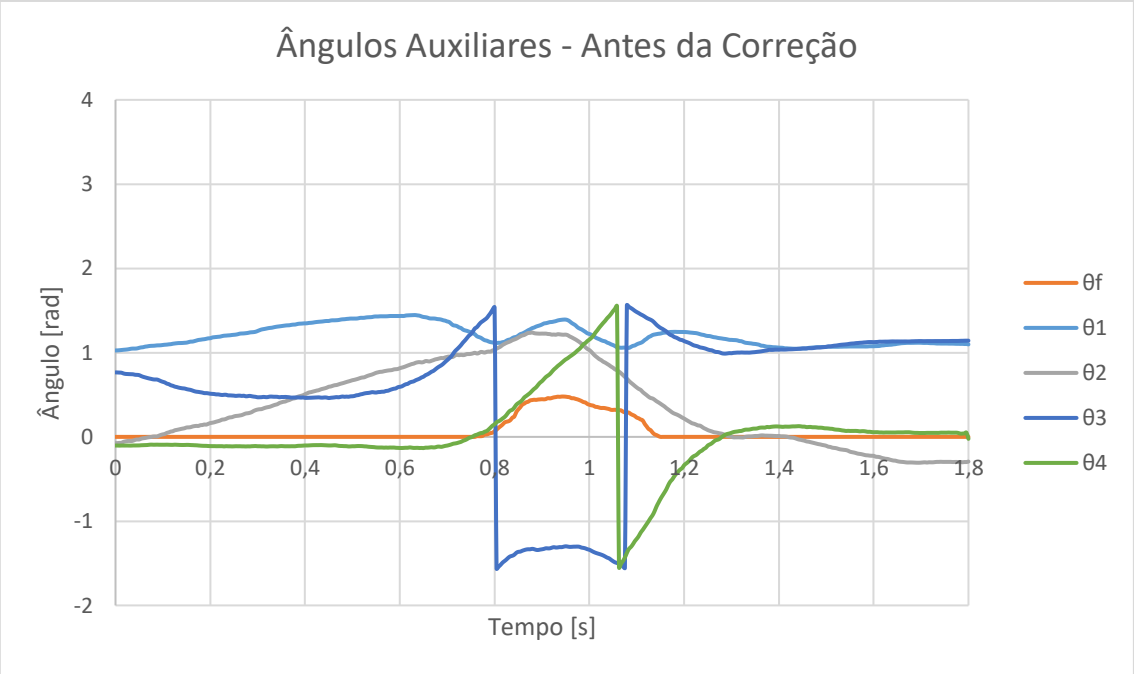


Gráfico 5 - Ângulos Auxiliares antes da correção

Para corrigir esse problema devemos somar π a este ângulo no intervalo onde o gráfico apresenta alguma descontinuidade; obtendo:

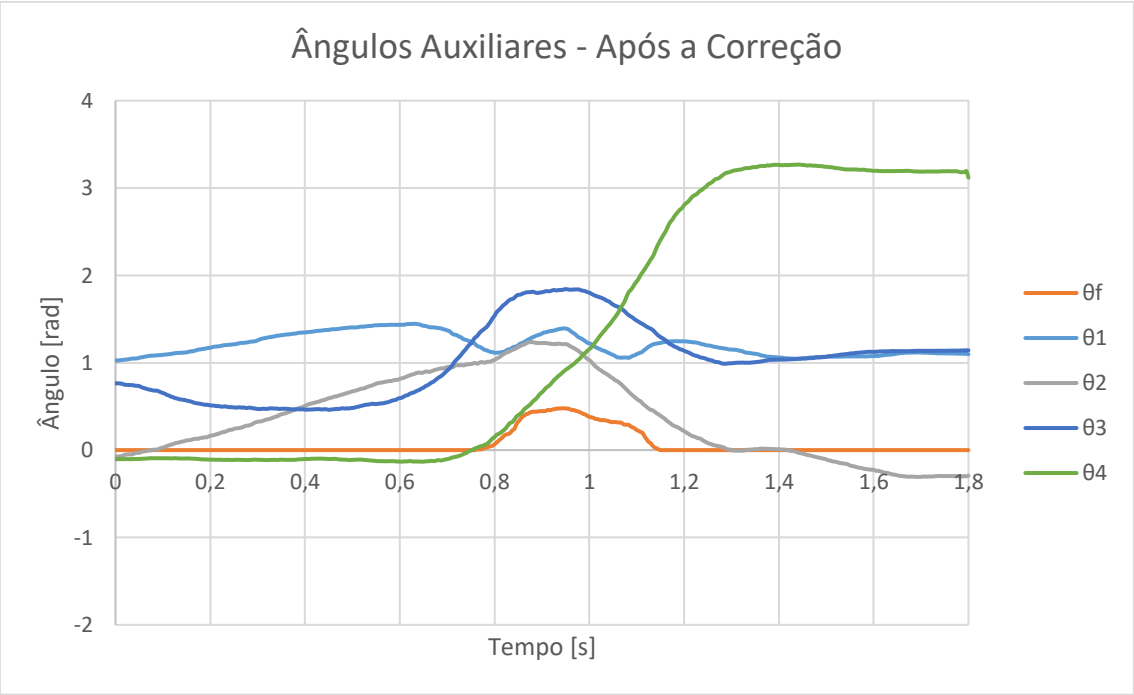


Gráfico 6 - Ângulos Auxiliares após a correção

Aplicando as equações acima temos:

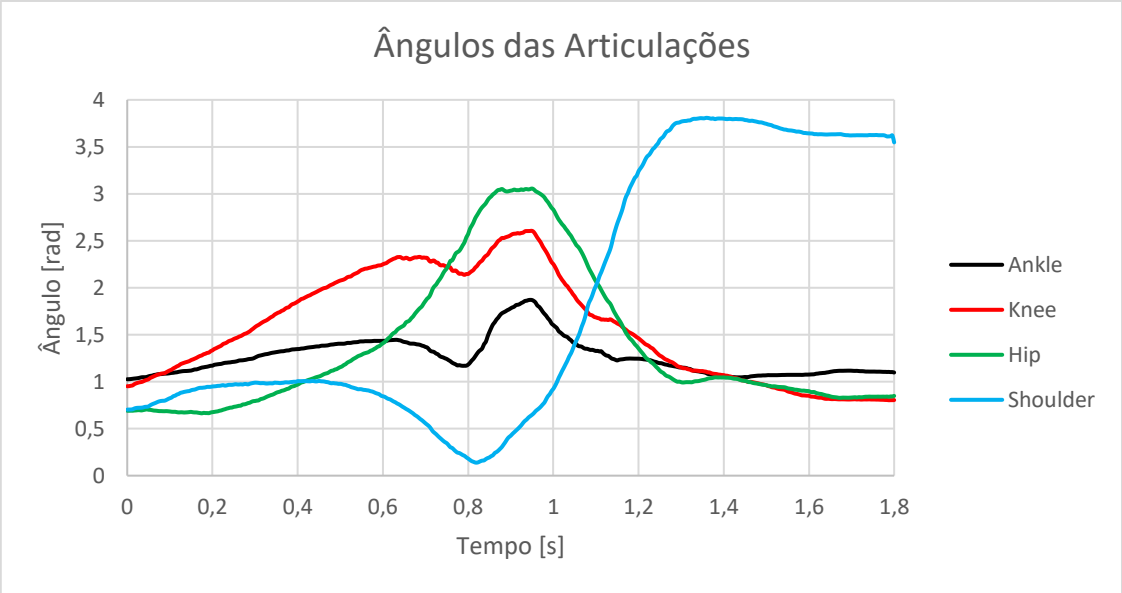


Gráfico 7 - Ângulos Articulares

A partir do gráfico dos ângulos das articulações e do posicionamento da barra podemos determinar com precisão as fases do movimento.

Fase do Movimento	**Início [s]**	**Final [s]**
Primeira Puxada	0	0,63
Transição	0,63	0,79
Segunda Puxada	0,79	0,94
Turnover	0,94	1,22
Receptação	1,22	-

Tabela 1 - Fases do arranque

6 Equacionamento gerado a partir da Base de dados

A partir do método dos mínimos quadrados, definimos equações que representam os ângulos principais. Estrategicamente dividimos o movimento em novos intervalos, tendo cada intervalo a sua própria equação, o que diminuiu o erro da equação com a base de dados.

Alguns centésimos de segundo antes do início da segunda puxada o tornozelo perde o contato com o chão. Esse instante fica definido como o marco final do primeiro intervalo de equacionamento.

Durante a segunda puxada existe um contato da barra com o quadril que gera algumas inconsistências no modelo proposto. Além do impacto, o que torna a equação de conservação de energia já determinada como falsa nesse instante, a força exercida pelo quadril reduz a força exercida pelo ombro. Com o método utilizado aqui é impossível determinar a intensidade dessa força, mantendo todas as reações indefinidas enquanto existe o contato barra-quadril.

O final do segundo intervalo e início do terceiro intervalo é definido pelo momento onde o tornozelo volta a tocar no chão, pois mais uma vez temos uma dissipação de energia.

Com os intervalos definidos dessa forma podemos determinar com muito mais precisão as equações de $\theta_f(t)$, visto que no intervalo 1 e 3 este permanecerá constante e igual a zero.

O segundo intervalo de equacionamento pode ser dividido em dois sub-intervalos. O primeiro, onde a barra está em contato com o quadril e a ponta do pé ainda em contato com o chão, e o segundo, assim que a ponta do pé perde o contato com o chão, até o momento em que o pé volta a entrar em contato por inteiro com o chão durante a fase de receptação da barra.

Intervalo	**Início [s]**	**Final [s]**
1	0	0,758
2.1	0,758	0,950
2.2	0,950	1,150
3	1,150	1,800

Tabela 2 - Intervalos selecionados para o desenvolvimento das equações dos ângulos articulares

A fim de encontrar uma melhor aproximação das equações com a base de dados foi definido um polinômio do sexto grau para representá-las.

Devido à descontinuidade da equação da energia nos intervalos selecionados, não se faz necessário que a equação de posição seja contínua entre esses intervalos. Utilizar equações contínuas só aumentaria o erro dos resultados, pois a definição de condições de contorno para essa equação aumentaria o erro quadrado da equação para a base de dados.

Intervalo 1

$$0 \leq t \leq 0{,}758\ s$$

$$\theta_f(t) = 0$$
$$\theta_A(t) = -71{,}455t^6 + 141{,}97t^5 - 107{,}53t^4 + 36{,}059t^3 - 4{,}6484t^2 + 0{,}8808t + 1{,}0218$$
$$\theta_K(t) = -72{,}323t^6 + 153{,}06t^5 - 128{,}05t^4 + 48{,}354t^3 - 6{,}5199t^2 + 2{,}1583t + 0{,}9377$$
$$\theta_H(t) = 13{,}116t^6 + 0{,}4964t^5 - 12{,}77t^4 + 1{,}6801t^3 + 6{,}3426t^2 - 1{,}6499t + 0{,}7693$$
$$\theta_S(t) = 131{,}67t^6 - 303{,}73t^5 + 255{,}29t^4 - 97{,}234t^3 + 14{,}215t^2 + 0{,}7195t + 0{,}692$$

$$R_f{}^2 = \#N/A$$
$$R_A{}^2 = 0{,}9982$$
$$R_K{}^2 = 0{,}9997$$
$$R_H{}^2 = 0{,}9989$$
$$R_S{}^2 = 0{,}9978$$

Intervalo 2

$$0{,}758\ s < t < 1{,}150\ s$$

$$\theta_f(t) = 4979{,}5(\mathrm{t} - 182/240)^6 - 8555{,}1(\mathrm{t} - 182/240)^5 + 5311{,}2(\mathrm{t} - 182/240)^4 - 1500{,}2(\mathrm{t} - 182/240)^3 + 180{,}16(\mathrm{t} - 182/240)^2 - 4{,}2978(\mathrm{t} - 182/240) + 0{,}029$$
$$\theta_A(t) = -9348{,}9(\mathrm{t} - 182/240)^6 + 6580(\mathrm{t} - 182/240)^5 + 70{,}678(\mathrm{t} - 182/240)^4 - 939{,}12(\mathrm{t} - 182/240)^3 + 202{,}08(\mathrm{t} - 182/240)^2 - 8{,}1409(\mathrm{t} - 182/240) + 1{,}2442$$
$$\theta_K(t) = -13701(\mathrm{t} - 182/240)^6 + 13596(\mathrm{t} - 182/240)^5 - 3899{,}9(\mathrm{t} - 182/240)^4 + 59{,}226(\mathrm{t} - 182/240)^3 + 88{,}841(\mathrm{t} - 182/240)^2 - 4{,}747(\mathrm{t} - 182/240) + 2{,}212$$
$$\theta_H(t) = 6330{,}8(\mathrm{t} - 182/240)^6 - 7538{,}9(\mathrm{t} - 182/240)^5 + 3569{,}7(\mathrm{t} - 182/240)^4 - 813{,}48(\mathrm{t} - 182/240)^3 + 53{,}389(\mathrm{t} - 182/240)^2 + 7{,}0846(\mathrm{t} - 182/240) + 2{,}2529$$
$$\theta_S(t) = -6585{,}3(\mathrm{t} - 182/240)^6 + 5702{,}6(\mathrm{t} - 182/240)^5 - 1306{,}5(\mathrm{t} - 182/240)^4 - 83{,}431(\mathrm{t} - 182/240)^3 + 78{,}885(\mathrm{t} - 182/240)^2 - 7{,}2534(\mathrm{t} - 182/240) + 0{,}3381$$

$$R_f{}^2 = 0{,}9897$$
$$R_A{}^2 = 0{,}9939$$
$$R_K{}^2 = 0{,}9974$$
$$R_H{}^2 = 0{,}9971$$
$$R_S{}^2 = 0{,}9993$$

$$x_A(t) = 1700(t - 182/240)^6 - 2022(t - 182/240)^5 + 844{,}4(t - 182/240)^4 - 151{,}93(t - 182/240)^3 + 13{,}388(t - 182/240)^2 - 0{,}6966(t - 182/240) + 0{,}0062$$

$$y_A(t) = 1293{,}3(t - 182/240)^6 - 1808(t - 182/240)^5 + 942{,}57(t - 182/240)^4 - 230{,}68(t - 182/240)^3 + 25{,}565(t - 182/240)^2 - 0{,}6656(t - 182/240) + 0{,}0049$$

$$R_{x_A}{}^2 = 0{,}9894$$

$$R_{y_A}{}^2 = 0{,}9858$$

Intervalo 3

$$1{,}150\ s \leq t \leq 1{,}800\ s$$

$$\theta_f(t) = 0$$

$$\theta_A(t) = -87{,}45(t - 1{,}15)^6 + 224(t - 1{,}15)^5 - 230{,}58(t - 1{,}15)^4 + 114{,}92(t - 1{,}15)^3 - 25{,}647(t - 1{,}15)^2 + 1{,}4028(t - 1{,}15) + 1{,}2254$$

$$\theta_K(t) = -495{,}25(t - 1{,}15)^6 + 932{,}73(t - 1{,}15)^5 - 636{,}66(t - 1{,}15)^4 + 183{,}33(t - 1{,}15)^3 - 14{,}969(t - 1{,}15)^2 - 3{,}2202(t - 1{,}15) + 1{,}6291$$

$$\theta_H(t) = -380{,}27(t - 1{,}15)^6 + 637{,}16(t - 1{,}15)^5 - 318{,}48(t - 1{,}15)^4 + 5{,}3951(t - 1{,}15)^3 + 36{,}168(t - 1{,}15)^2 - 9{,}2958(t - 1{,}15) + 1{,}7083$$

$$\theta_S(t) = -131{,}72(t - 1{,}15)^6 + 275{,}37(t - 1{,}15)^5 - 269{,}03(t - 1{,}15)^4 + 170{,}02(t - 1{,}15)^3 - 68{,}976(t - 1{,}15)^2 + 14{,}421(t - 1{,}15) + 2{,}6773$$

$$R_f{}^2 = \#N/A$$

$$R_A{}^2 = 0{,}9898$$

$$R_K{}^2 = 0{,}9986$$

$$R_H{}^2 = 0{,}9924$$

$$R_S{}^2 = 0{,}9973$$

Com essas equações já podemos criar uma simulação para o movimento [Anexo 13.2.5], como mostra a Figura 7.

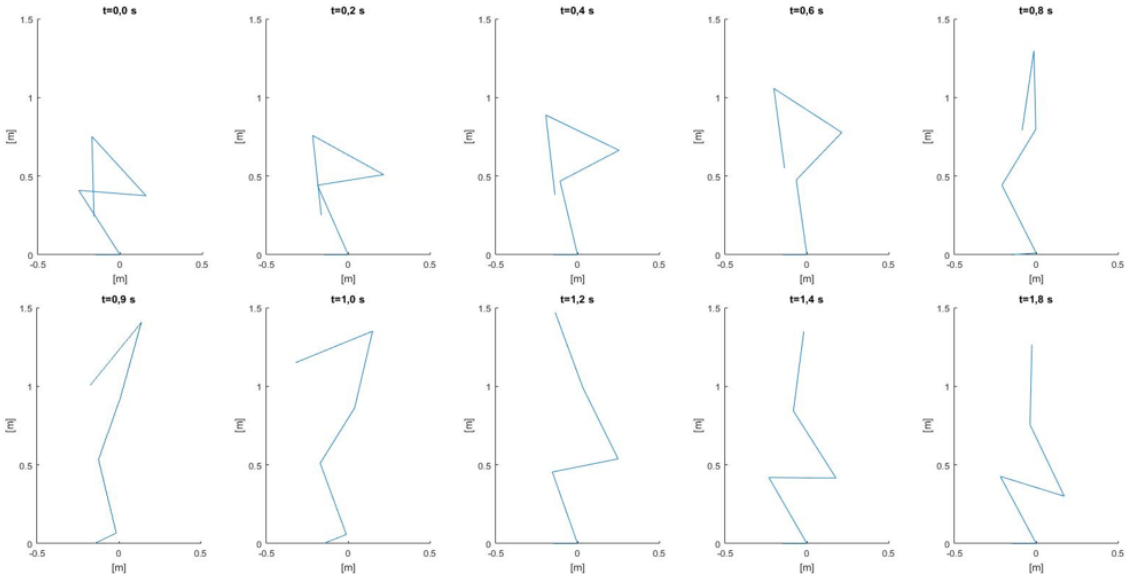


Figura 7 - Simulação do arranque a partir da base de dados de rastreamento do corpo

7 Modelo Matemático do Corpo

7.1 Modelo do Corpo Humano

Devido à grande complexidade do movimento, algumas suposições são necessárias para a criação de um modelo matemático do corpo humano.

O corpo do atleta será descrito por um modelo simplificado bidimensional no plano sagital de cinco segmentos, sendo eles: pé, perna, coxa, tronco e braço.

De acordo com as fases do levantamento foram utilizados os seguintes modelos:

a. Pêndulo quádruplo invertido no início e final do movimento, ou seja, nas fases onde o tornozelo tem contato com o solo;
b. Pêndulo quíntuplo invertido na fase onde o tornozelo perde o contato com o solo;
c. Pendulo quíntuplo sem fixação na fase onde o pé perde o contato completo com o solo.

Medidas precisas das massas dos segmentos[1][2], centro de massa, centro de articulações e momentos de inércia são necessárias. Tais dados podem ser obtidos de apresentações estatísticas baseadas na estatura, peso e algumas vezes no gênero.

Para a formulação de alguns dados físicos e matemáticos do problema algumas hipóteses devem ser adotadas para o seu desenvolvimento.

- Cada segmento tem massa específica constante em todo o volume do segmento ou sub-segmento;
- As articulações são consideradas juntas de rotações;
- As projeções sagitais dos comprimentos dos segmentos permanecem constantes durante o movimento.

Segmento	**Componentes**
f	Pé
1	Perna
2	Coxa
3	Troco e Cabeça
4	Braço e Antebraço

Tabela 3 - Segmentos do modelo e seus componentes relativos ao corpo humano

7.2 Propriedades Físicas dos Segmentos

7.2.1 Comprimentos

No modelo matemático utilizado as dimensões são definidas como constantes, apesar de existirem pequenas variações no ângulo que o cotovelo faz na fase da Segunda Puxada e de *Turnover* do movimento, e variações do tamanho da coxa na projeção sagital, devido a uma leve abertura das pernas quando o pé perde o contato com o solo, também na fase de *Turnover*. O comprimento de cada segmento é estabelecido pela média deste segmento no tempo, que por sua vez, é definido pelo teorema de Pitágoras.

$$L_{f_{(i)}} = \sqrt{\left(X_{f_{(i)}} - X_{A(i)}\right)^2 + \left(Y_{f_{(i)}} - Y_{A(i)}\right)^2} \qquad L_{1(i)} = \sqrt{\left(X_{A(i)} - X_{K(i)}\right)^2 + \left(Y_{A(i)} - Y_{K(i)}\right)^2}$$

$$L_{2(i)} = \sqrt{\left(X_{K(i)} - X_{H(i)}\right)^2 + \left(Y_{K(i)} - Y_{H(i)}\right)^2} \qquad L_{3(i)} = \sqrt{\left(X_{H(i)} - X_{S(i)}\right)^2 + \left(Y_{H(i)} - Y_{S(i)}\right)^2}$$

$$L_{4(i)} = \sqrt{\left(X_{S(i)} - X_{W(i)}\right)^2 + \left(Y_{S(i)} - Y_{W(i)}\right)^2}$$

Portanto:

$$L_f = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} L_{f\,(i)} \qquad L_1 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} L_{1(i)} \qquad L_2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} L_{2(i)} \qquad L_3 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} L_{3(i)} \qquad L_4 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} L_{4(i)}$$

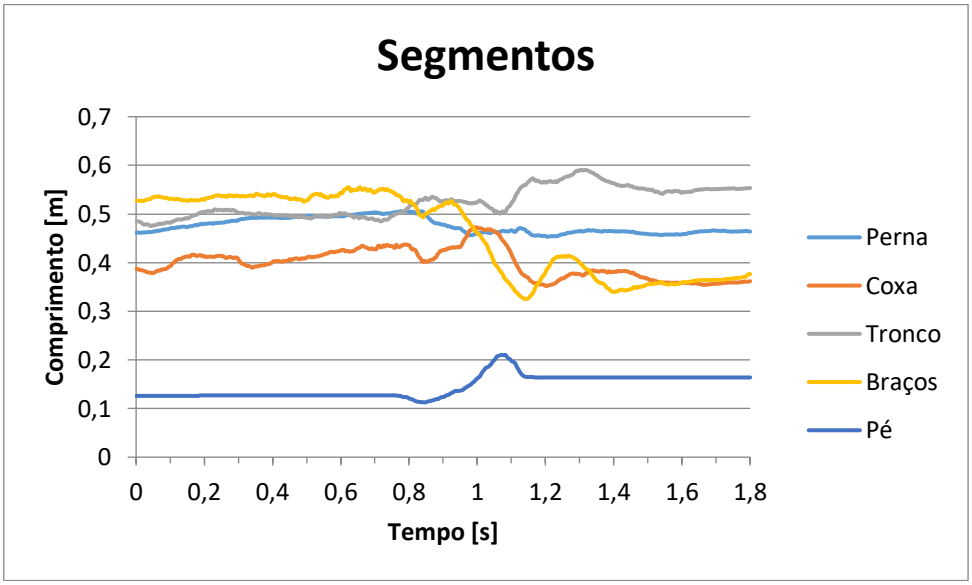


Gráfico 8 - Comprimento da projeção sagital de cada segmento

Já era esperado que houvesse alguma variação no tamanho dos braços durante o movimento, porém é possível observar uma variação considerável na medição do comprimento inicial para o final. Essa variação pode ser explicada pelos movimentos realizados pela escápula, que tem um papel fundamental na execução do levantamento. As variações no tamanho do tronco também podem ser explicadas por esse movimento escapular.

7.2.2 Massas

Para a estimativa da massa de cada segmento, foi utilizada a média da massa de cada parte do corpo humano obtida de apresentações estatísticas baseadas na estatura, peso e gênero [6][7], como ilustrado na Tabela 4.

Parte do Corpo	**Porcentagem da Massa Total [%]**
Braços[2] *(Ombro-Cotovelo)*	5,4%
Antebraços[2] *(Cotovelo-mão)*	4,6%
Cabeça	8,0%
Tronco	50,0%
Coxas[2]	20,2%
Pernas[2]	8,8%
Pés[2]	3,0%

Tabela 4 - Porcentagem da massa de cada parte do corpo humano

7.2.3 Momentos de Inércia

Para o cálculo do momento de inércia de cada segmento nesse estudo o corpo humano será modelado por formas geométricas simplificadas. O braço é representado por dois cilindros

[2] Valores referentes aos dois lados do corpo juntos.

(braço e antebraço), além dele, o pé, perna, coxa, troco e a barra também serão representados por cilindros, sendo a barra o único deles que gira em torno do eixo central, ou outros segmentos giram em torno de um diâmetro central que passa pelo centro de massa dos mesmos. A cabeça é representada por uma esfera.

Por definição, o momento de inércia I de uma partícula de massa m e que gira em torno de um eixo, a uma distância r dele, é:

$$I = m \cdot r^2$$

Se um corpo é constituído de n massas pontuais (partículas), seu momento de inércia total é igual à soma dos momentos de inércia de cada massa:

$$I = \sum_{i=1}^{n} m_{(i)} \cdot {r_{(i)}}^2$$

Sendo $m_{(i)}$ a massa de cada partícula, e $r_{(i)}$ sua distância ao eixo de rotação.

Para um corpo rígido, podemos transformar o somatório em uma integral, integrando para todo o corpo C o produto da massa m em cada ponto pelo quadrado da distância r até o eixo de rotação:

$$I_C = \int_C r^2 \, dm$$

Para qualquer corpo que gire em torno de um eixo que não passa pelo seu centro de gravidade seu momento de inercia pode ser definido a partir do teorema dos eixos paralelos:

$$I = I_G + md^2$$

onde d é a distância do centro de massa para o eixo de rotação, e I_G é o momento de inércia no centro de gravidade.

As formas geométricas, e seus respectivos momentos de inércia, que serão utilizadas nesse estudo são:

- Cilindro maciço de massa m e raio da base r, em torno do eixo central.

$$I = \frac{1}{2} m r^2$$

- Cilindro maciço de massa m, diâmetro D, comprimento L, em torno de um diâmetro central que passa pelo centro de massa.

$$I = \frac{1}{12} m \left(\frac{3}{4} D^2 + L \right)$$

- Esfera maciça de massa m e raio r, em torno de seu centro.

$$I = \frac{2}{5} m r^2$$

Sendo assim, temos que:

$$I_1 = \frac{1}{12} m_1 \left(\frac{3}{4} {D_1}^2 + {L_1}^2 \right) \qquad I_{4(1)} = \frac{1}{12} m_{4(1)} \left(\frac{3}{4} {D_{4(1)}}^2 + {L_{4(1)}}^2 \right)$$

$$I_2 = \frac{1}{12} m_2 \left(\frac{3}{4} {D_2}^2 + {L_2}^2\right) \qquad I_{4(2)} = \frac{1}{12} m_{4(2)} \left(\frac{3}{4} {D_{4(2)}}^2 + {L_{4(2)}}^2\right)$$

$$I_{3(1)} = \frac{1}{12} m_{3(1)} \left(\frac{3}{4} {D_{3(1)}}^2 + {L_{3(1)}}^2\right) \qquad I_{head} = \frac{1}{10} m_{head} \cdot {D_{head}}^2$$

$$I_B = \frac{1}{2} m_B \left(\frac{1}{2} D_B\right)^2$$

O centro de massa dos segmentos compostos é definido pela média ponderada do centro massa de cada elemento do segmento pelas suas respectivas massas. Sendo assim:

$$L_{c_3} = \frac{m_{3(1)} \frac{L_3}{2} + m_{head} \left(L_3 + L_{neck} + \frac{D_{head}}{2}\right)}{m_{3(1)} + m_{head}}$$

$$L_{c_4} = \frac{m_{4(1)} \frac{L_{4(1)}}{2} + m_{4(2)} \left(L_{4(1)} + \frac{L_{4(2)}}{2}\right)}{m_{4(1)} + m_{4(2)}}$$

Com isso, os momentos de inércia dos segmentos 3 e 4 são:

$$I_4 = I_{4(1)} + m_{4(1)}(D_{4(1)} - L_{c_4})^2 + I_{4(2)} + m_{4(2)}(D_{4(2)} - L_{c_4})^2$$

$$I_3 = I_{3(1)} + m_{3(1)}(D_{3(1)} - L_{c_3})^2 + I_{head} + m_{head}(D_{head} - L_{c_3})^2$$

Segmento	**% da massa corpórea**	**Massa** $[kg]$	**Circunferência**[3] $[m]$	**Comprimento** $[m]$	I $[kg.m^2]$
Braços	5,4%	4,644	0,38	0,250	0,0284
antebraço	4,6%	3,956	0,25	0,209	0,0160
Cabeça	8,0%	6,880	0,58	-	0,0235
Tronco	50,0%	43,000	0,85	0,525	1,1826
Coxa	20,2%	17,372	0,5	0,398	0,2573
Perna	8,8%	7,568	0,35	0,476	0,1485
Pé	3,0%	2,580	0,25	0,145	0,0056

Tabela 5 - Medidas antropométricas do atleta

Segmento	**Comprimento** $[m]$
Pescoço	0,10

Tabela 6 - Comprimento do pescoço

Segmentos Compostos	I $[kg.m^2]$
Braço + antebraço	0,1570
Tronco + cabeça	2,4315

Tabela 7 - Momento de inercia dos segmentos compostos

8 Formulação Matemática: Equação de Lagrange

A mecânica Lagrangiana combina a conservação do momento linear com a conservação de energia. A função de Lagrange é o elemento central da mecânica Lagrangiana. Ela é capaz de resumir toda a dinâmica de um sistema em uma simples expressão:

[3] A circunferência de cada segmento foi definida por uma média aproximada das seções do atleta.

$$L = T - V$$

onde T é a energia cinética total e V é a energia potencial total do sistema.

As equações de movimento na mecânica Lagrangiana são as equações Lagrangianas do segundo tipo, também conhecidas como as Equações de Euler-Lagrange:

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) = 0$$

onde $i = 1, 2, \ldots m$ representa o i-ésimo grau de liberdade, q_i são as coordenadas generalizadas, e $\dot{q}_i$ são as velocidades generalizadas.

Os sistemas de coordenadas generalizadas são definidos de forma conveniente para a análise do sistema.

No caso de um sistema não-conservativo (ou dissipativo), temos $\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) = Q_i^{ext}$ em que $Q_i^{ext} \sum_j^N \vec{F}_j^{ext} \cdot \frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_i}$ são as forças externas generalizadas.

Por meio das equações dos ângulos e dos valores das massas, momentos de inércia e comprimento dos segmentos, já podemos escrever a equação de Lagrange, e com isso encontrar as equações da dinâmica do corpo.

8.1 Ângulos

$$\theta_1(t) = \theta_A(t) - \theta_f(t)$$

$$\theta_2(t) = \theta_K(t) - \theta_A(t) + \theta_f(t)$$

$$\theta_3(t) = \theta_H(t) - \theta_K(t) + \theta_A(t) - \theta_f(t)$$

$$\theta_4(t) = \theta_S(t) - \frac{\pi}{2} + \theta_H(t) - \theta_K(t) + \theta_A(t) - \theta_f(t)$$

8.2 Posições

$$Intervalo\ 1\ e\ 3 \begin{cases} x_f(t) = -L_f \\ y_f(t) = 0 \\ x_a(t) = L_f\big(\cos(\theta_f(t)) - 1\big) \\ y_a(t) = L_f \sin\big(\theta_f(t)\big) \end{cases}$$

$$Intervalo\ 2 \begin{cases} x_f(t) = x_f(t) - L_f \cos\left(\theta_f(t)\right) \\ y_f(t) = y_f(t) - L_f \sin\left(\theta_f(t)\right) \\ x_a(t) = x_a(t) \\ y_a(t) = y_a(t) \end{cases}$$

$$x_k(t) = -L_1 \cos(\theta_1(t)) + x_a(t)$$
$$y_k(t) = L_1 \sin(\theta_1(t)) + y_a(t)$$

$$x_h(t) = L_2 \cos\big(\theta_2(t)\big) + x_k(t)$$
$$y_h(t) = L_2 \sin\big(\theta_2(t)\big) + y_k(t)$$

$$x_s(t) = -L_3 \cos\big(\theta_3(t)\big) + x_h(t)$$
$$y_s(t) = L_3 \sin\big(\theta_3(t)\big) + y_h(t)$$

$$x_w(t) = -L_4 \cos(\theta_4(t)) + x_s(t)$$
$$y_w(t) = -L_4 \sin\big(\theta_4(t)\big) + y_s(t)$$

$$x_{c_f}(t) = \frac{x_f(t) + x_a(t)}{2}$$

$$y_{c_f}(t) = \frac{y_f(t) + y_a(t)}{2}$$

$$x_{c_1}(t) = \frac{x_a(t) + x_k(t)}{2}$$

$$y_{c_1}(t) = \frac{y_a(t) + y_k(t)}{2}$$

$$x_{c_2}(t) = \frac{x_k(t) + x_h(t)}{2}$$

$$y_{c_2}(t) = \frac{y_k(t) + y_h(t)}{2}$$

$$x_{c_3}(t) = x_h(t) - L_{c_3}\cos(\theta_3(t)) \qquad y_{c_3}(t) = y_h(t) + L_{c_3}\sin(\theta_3(t))$$

$$x_{c_4}(t) = x_s(t) - L_{c_4}\sin(\theta_4(t)) \qquad y_{c_4}(t) = y_s(t) - L_{c_4}\cos(\theta_4(t))$$

8.3 Momentos

8.3.1 Energia

No cálculo das energias potenciais incluiremos as energias potenciais gravitacionais de todos os segmentos e do conjunto barra e anilha.

$$V = V_f + V_1 + V_2 + V_3 + V_4 + V_w$$

Para o cálculo da energia cinética incluiremos a energia cinética de translação e rotação de todos os segmentos, a energia cinética de translação do conjunto barra e anilhas e a energia cinética de rotação da barra. A energia cinética de rotação da anilha não é incluída no equacionamento, pois a barra possui um sistema de rolamentos que permite que as anilhas não girem durante o movimento com o objetivo de reduzir as forças exercidas pelo punho do atleta.

$$T = T_f + T_1 + T_2 + T_3 + T_4 + T_w$$

sendo cada termo dessas equações representado por:

$$V_f = m_f \cdot g \cdot \vec{y}_{c_f}(t) \qquad T_f = \frac{1}{2}m_f\left(\dot{x}_{c_f}(t)^2 + \dot{y}_{c_f}(t)^2\right) + \frac{1}{2}I_f \cdot \dot{\theta}_f(t)^2$$

$$V_1 = m_1 \cdot g \cdot \vec{y}_{c_1}(t) \qquad T_1 = \frac{1}{2}m_1\left(\dot{x}_{c_1}(t)^2 + \dot{y}_{c_1}(t)^2\right) + \frac{1}{2}I_1 \cdot \dot{\theta}_1(t)^2$$

$$V_2 = m_2 \cdot g \cdot \vec{y}_{c_2}(t) \qquad T_2 = \frac{1}{2}m_2\left(\dot{x}_{c_2}(t)^2 + \dot{y}_{c_2}(t)^2\right) + \frac{1}{2}I_2 \cdot \dot{\theta}_2(t)^2$$

$$V_3 = m_3 \cdot g \cdot \vec{y}_{c_3}(t) \qquad T_3 = \frac{1}{2}m_3\left(\dot{x}_{c_3}(t)^2 + \dot{y}_{c_3}(t)^2\right) + \frac{1}{2}I_3 \cdot \dot{\theta}_3(t)^2$$

$$V_4 = m_3 \cdot g \cdot \vec{y}_{c_3}(t) \qquad T_4 = \frac{1}{2}m_4\left(\dot{x}_{c_4}(t)^2 + \dot{y}_{c_4}(t)^2\right) + \frac{1}{2}I_4 \cdot \dot{\theta}_4(t)^2$$

$$V_w = m_w \cdot g \cdot \vec{y}_w(t) \qquad T_w = \frac{1}{2}m_w(\dot{x}_w(t)^2 + \dot{y}_w(t)^2) + \frac{1}{2}I_b \cdot \dot{\theta}_4(t)^2$$

8.3.2 Lagrange

$$L = T - V$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) = Q_i^{ext}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_A} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_A}\right) = 2M_A \qquad \frac{\partial L}{\partial \theta_K} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_K}\right) = 2M_K \qquad \frac{\partial L}{\partial \theta_H} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_H}\right) = 2M_H \qquad \frac{\partial L}{\partial \theta_S} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_S}\right) = 2M_S$$

O multiplicador 2 aparece na equação pois cada junta de rotação do modelo representa duas articulações em um corpo real. Sendo assim, $2M_K$é o momento exercido nos joelhos, onde M_K o momento exercido em cada um deles.

8.4 Forças Resultantes Axiais e Radiais

As forças apresentadas nesse capítulo não representam as forças de compressão e cortante reais nas articulações, e sim as reações geradas pelo movimento das massas do corpo do levantador, barra e anilhas. É importante perceber que para uma análise mais completa devemos incluir a força de compressão e cortante geradas pelos próprios músculos, que podem ser calculadas a partir dos momentos resultantes em cada articulação.

Para o cálculo das verdadeiras forças compressivas e cortantes é necessária uma análise mais completa da cinesiologia do exercício e anatomia humana. Entender o posicionamento da inserção e origem de cada músculo atuante no exercício, e a forma com que cada um deles se contrai para gerar o momento necessário é crucial para essa análise, mas que não cabe a esse estudo fazê-lo.

8.4.1 Energia

Para o cálculo das forças envolvidas devemos considerar o modelo como um corpo livre, assim podemos encontrar as reações a partir das equações de equilíbrio. Agora cortamos o modelo utilizado em uma seção transversal, inferior a junta desejada, criando um novo modelo (Figura 8). A partir das reações para manter o equilíbrio desse corpo, obtemos a força vertical F_{J_y} e horizontal F_{J_x} na junta.

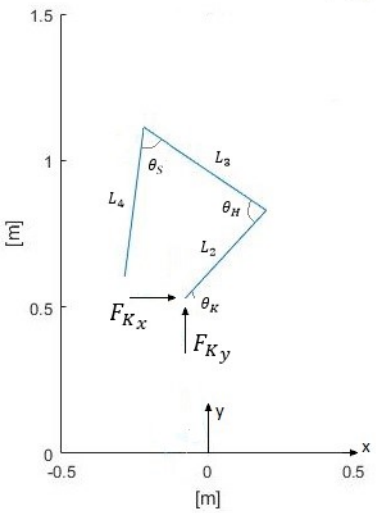


Figura 8 - Modelo das forças de reação verticais e horizontais atuantes na junta

Para o cálculo de energia do modelo criado para cada junta temos:

$$V_A = V_1 + V_2 + V_3 + V_4 + V_w \qquad T_A = T_1 + T_2 + T_3 + T_4 + T_w$$

$$V_K = V_2 + V_3 + V_4 + V_w \qquad T_K = T_2 + T_3 + T_4 + T_w$$

$$V_H = V_3 + V_4 + V_w \qquad T_H = T_3 + T_4 + T_w$$

$$V_S = V_4 + V_w \qquad T_S = T_4 + T_w$$

8.4.2 Lagrange

$$L_A = T_A - V_A \qquad L_K = T_K - V_K \qquad L_H = T_H - V_H \qquad L_S = T_S - V_S$$

$$\frac{\partial L_A}{\partial x_a} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L_A}{\partial \dot{x}_a}\right) = 2F_{A_x} \qquad \frac{\partial L_K}{\partial x_k} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L_K}{\partial \dot{x}_k}\right) = 2F_{K_x} \qquad \frac{\partial L_H}{\partial x_h} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L_H}{\partial \dot{x}_h}\right) = 2F_{H_x} \qquad \frac{\partial L_S}{\partial x_s} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L_S}{\partial \dot{x}_s}\right) = 2F_{S_x}$$

$$\frac{\partial L_A}{\partial y_a} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L_A}{\partial \dot{y}_a}\right) = 2F_{A_y} \qquad \frac{\partial L_K}{\partial y_k} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L_K}{\partial \dot{y}_k}\right) = 2F_{K_y} \qquad \frac{\partial L_H}{\partial y_h} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L_H}{\partial \dot{y}_h}\right) = 2F_{H_y} \qquad \frac{\partial L_S}{\partial y_s} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L_S}{\partial \dot{y}_s}\right) = 2F_{S_y}$$

8.4.3 Equações para as forças orientadas

Para encontrar as reações axiais e cortantes precisamos reorientar os vetores. Essa orientação é feita de forma que as direções dos novos vetores sejam facilmente correlacionas com a articulação em questão. Como exemplo podemos usar o joelho, as forças são orientadas para o menisco [Figura 9].

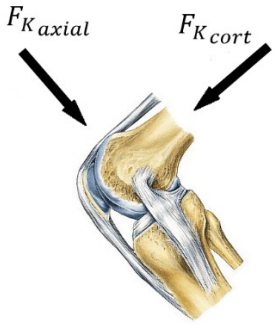


Figura 9 – Orientação das forças com relação ao menisco

- No tornozelo, as forças que agem no tálus apontam para a sola do pé e para a ponta do pé [Figura 10 (a)].
- No Joelho, as forças que agem no menisco têm direção axial e radial em relação ao segmento 1 [Figura 10 (b)].
- No quadril, as forças que agem na cabeça do fêmur têm direção axial e radial em relação ao segmento 2 [Figura 10 (c)].
- No ombro, as forças que agem na cabeça do úmero têm direção axial e radial em relação ao segmento 4 [Figura 10 (d)].

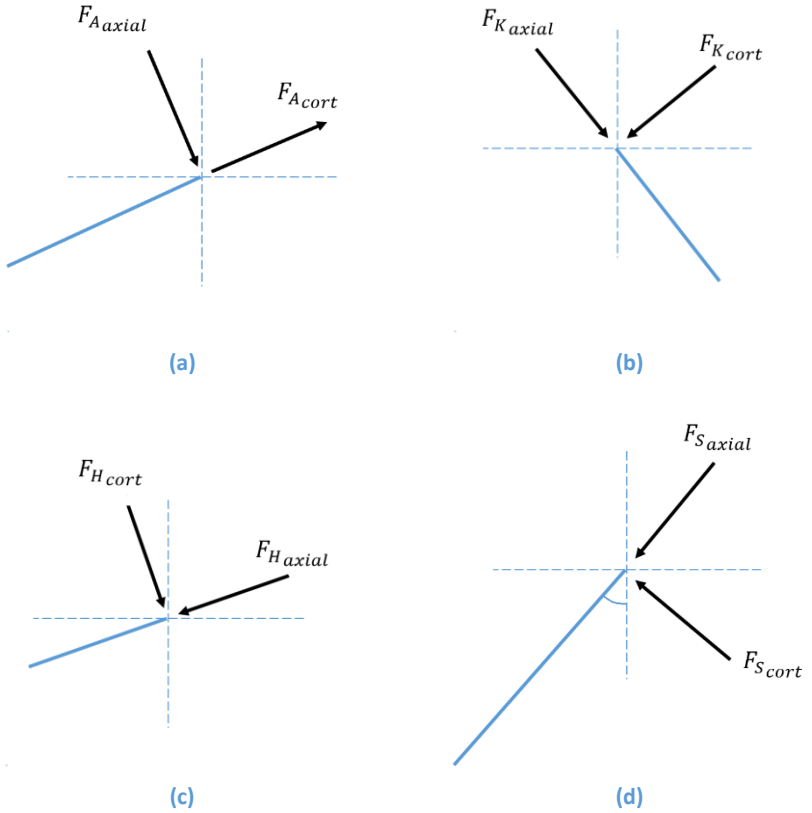


Figura 10 - Orientação das reações axiais e radiais no tornozelo (a), joelho (b), quadril (c) e ombro (d).

Equações:

$$F_{A_{axial}} = F_{A_y}\cos\theta_f - F_{A_x}\sin\theta_f \qquad F_{A_{cort}} = -F_{A_y}\sin\theta_f - F_{A_x}\cos\theta_f$$
$$F_{K_{axial}} = F_{K_y}\sin\theta_1 - F_{K_x}\cos\theta_1 \qquad F_{K_{cort}} = F_{K_y}\cos\theta_1 + F_{K_x}\sin\theta_1$$
$$F_{H_{axial}} = -F_{H_y}\sin\theta_2 - F_{H_x}\cos\theta_2 \qquad F_{H_{cort}} = F_{H_y}\cos\theta_2 - F_{H_x}\sin\theta_2$$
$$F_{S_{axial}} = -F_{S_y}\cos\theta_4 - F_{S_x}\sin\theta_4 \qquad F_{S_{cort}} = F_{S_y}\sin\theta_4 - F_{S_x}\cos\theta_4$$

9 Resultados e Discussões

Foram realizadas gravações de vídeo com o atleta Renan de Sena Fernandes, levantador de peso da classe 85 kg, com uma carga total de 110 kg. Por meio da imagem de vídeo, as articulações foram rastreadas por um programa em Visual Basic for Applications (VBA), o programa foi rodado um total de 30 vezes (5 vezes para cada ponto). O rastreamento foi realizado a uma taxa de 240 quadros por segundo de vídeo.

A análise levou em conta a trajetória do tornozelo, joelho, quadril, ombro, barra e o ponto onde a sola do pé faz contato com o solo durante uma extensão de tornozelo.

Uma correção para a posição da barra fez-se necessária, pois o ponto rastreado da mesma não se encontrava no mesmo plano sagital das articulações.

A partir do mapeamento das articulações o arranque foi dividido em seis fases de movimento.

O movimento foi descrito matematicamente usando a técnica dos mínimos quadrados.

A partir da análise biomecânica, realizada em MATLAB, foram destacadas as características cinemáticas de cada fase específica do movimento.

Além da massa do conjunto barra e anilhas, foram introduzidos os principais indicadores biométricos da análise: massa, circunferências e altura do atleta.

O comprimento de cada segmento do modelo foi determinado por meio da média aritmética da projeção sagital rastreada do corpo do atleta durante a execução do levantamento.

Assim como já esperado, os valores encontrados no intervalo de 0,758 até 1,150 segundos não coincidem com a realidade [Anexo 13.1]. Uma das possíveis causas para a grande oscilação das forças envolvidas nesse intervalo é a não variação do comprimento dos braços, mudando a orientação do vetor momento.

Entre 0,758 s e 0,950 s (intervalo onde existe um contato da barra com o quadril), durante a segunda puxada, o modelo apresentado aqui se torna inválido, pois o quadril imprime um impulso na barra, diminuindo a força feita pelos ombros.

Em 1,150 s o impacto do atleta no chão cria uma inconsistência na equação de Euler-Lagrange, devido às dissipações de energia. Portanto, qualquer valor perto desse ponto não responde conforme o esperado.

O intervalo 1 - primeira puxada e fase de transição - e a fase 3 - fim do *Turnover* e receptação - os valores apresentam uma boa confiabilidade.

É possível que exista - e provavelmente existe - oscilações nos gráficos do sexto grau devido a uma imprecisão no sistema de captação de dados. Equações de graus menores diminuem a percepção desse erro, criando um movimento mais "fluido", e que, portanto, podem se aproximar melhor da realidade.

É importante ressaltar que a metodologia criada nesse estudo para identificar as fases do movimento, velocidades e potências exercidas em cada articulação podem ter um papel crucial para o desenvolvimento e aprimoramento da técnica dos atletas e praticantes da modalidade. Um estudo individualizado pode ajudar a encontrar erros de repetibilidade no padrão de movimento do atleta, que por sua vez, tem grandes consequências na carga levantada pelo mesmo.

A partir da análise do gráfico [Anexo 13.1] dos momentos realizados pelas musculaturas em cada uma das equações podemos identificar que estes responderam como o esperado para cada fase do movimento, porém, agora podemos mensurá-los.

Intervalo 1 – Primeira puxada e início da fase de transição

Articulação	Momento Máximo $[N.m]$
Tornozelo	330
Joelho	63
Quadril	418
Ombro	-224

Tabela 8 - Momentos Máximos na primeira puxada e fase de transição

Na primeira fase de do movimento podemos ver grande atuação do quadril e do tornozelo, enquanto o joelho, que está sempre perto da barra no eixo X, tem pouca atuação. Já a musculatura do ombro exerce um momento de intensidade negativa, ou seja, ele tem papel

de manter a barra o mais próximo possível do corpo, mantendo o sistema com menor momento de inércia.

O atleta que mantém a barra próxima ao corpo no arranque faz com que o peso fique mais próximo do centro de gravidade do conjunto levantador/barra. Isso faz com que o atleta não transfira seu peso para a ponta dos pés antecipadamente, permitindo uma melhor extensão do quadril e mais equilíbrio no final da puxada.

No fim da primeira fase o quadril chega a imprimir uma potência de 1500 w.

Intervalo 3 – Receptação

Articulação	Momento Máximo $[N.m]$
Tornozelo	108
Joelho	228
Quadril	280
Ombro	-40

Tabela 9 - Momentos máximos na fase de Receptação

Durante a fase de recepção da barra e estabilização (Intervalo 3), existe uma projeção da posição do joelho para frente com o objetivo de reduzir os momentos nas articulações do ombro.

Potência Máxima gerada no primeiro intervalo = 1900 w

Assim como previsto, o primeiro intervalo gera baixos valores de potência máxima, o intervalo 2 é por sua vez mais explosivo, pois é quando a barra ganha velocidade de fato. Já no intervalo 3, a potência apresenta valores negativos na fase de recepção, e aproximadamente zero na fase de estabilização.

Quanto menor for o módulo da energia absorvida na fase de receptação, melhor será a eficiência do movimento. Isso significa que o atleta fará menor força nas fases de puxada, mas mesmo assim conseguirá executar o movimento.

É valido ressaltar que esse valor nunca chegará a zero pois o peso faz com que as componentes elástica dos músculos, tendões e ligamentos entre em ação, fazendo com que o equilíbrio não se deva apenas a contrações musculares.

10 Conclusão

Podemos identificar com facilidade cada fase do movimento por meio do rastreamento das articulações. A análise biomecânica do desempenho do levantador de peso destaca as características cinemáticas e dinâmicas das fases do levantamento.

A análise de vídeo enfatiza as características individuais de cada atleta, sendo capaz de identificar as necessidades para o aprimoramento da técnica a partir da morfologia do levantador. Um estudo individualizado pode ajudar a encontrar erros de repetibilidade no padrão de movimento do atleta, que por sua vez, tem grandes consequências na carga levantada pelo mesmo.

Foi possível criar uma metodologia para identificar com mais precisão as fases do movimento, velocidades e potências exercidas em cada articulação.

Foi possível criar uma base de dados de estimativa das forças que o levantamento gera nas articulações. Estas podem ter papel significativo para posteriores estudos, com o objetivo não só de estimar as tensões resultantes nos tendões e ligamentos envolvidos no movimento, como para melhor orientar o treinamento do atleta, buscando uma vida articular mais longa e melhor rendimento nos treinos.

11 Desenvolvimentos Futuros

A partir do estudo realizado e da base de dados já encontrada será possível realizar novos estudos mais aprofundados sobre a execução do movimento, podendo ser adicionadas condições para se prever as forças durante a segunda puxada, que é a fase mais explosiva do movimento e que deve apresentar maiores potências. Além disso, modelos com maiores graus de liberdade, incluindo variações do ângulo do cotovelo, movimento escapular e uma terceira dimensão para o movimento podem ser realizados.

As forças apresentadas nesse capítulo não representam as forças de compressão e cortante reais nas articulações, e sim as reações geradas apenas pelos movimentos das massas do corpo do levantador, barra e anilhas. É importante perceber que para uma análise mais completa devemos incluir a força de compressão e cortante geradas pelos próprios músculos que podem ser calculadas a partir dos momentos resultantes em cada articulação.

Para o cálculo das forças totais atuantes na articulação é necessária uma análise mais completa da cinesiologia do exercício e anatomia humana. Entender o posicionamento da inserção e origem de cada músculo atuante no exercício e a forma como cada músculo se contrai para gerar o momento necessário é crucial para essa análise, mas não cabia a esse estudo.

Com os valores das forças resultantes (compressiva e cortante) e os momentos exercidos pela musculatura durante todo o movimento, futuros estudos podem ser realizados na área de cinesiologia e biomecânica, podendo inclusive gerar valores para as trações estimadas para tendões e ligamentos. Estes estudos por sua vez podem ter grande influência nas práticas esportivas com o objetivo de minimizar lesões e maximizar a eficiência do treinamento.

12 Referências Bibliográficas

[1] Bartonietz, KE. *Biomechanics of the snatch: Towards a higher training efficiency*. Strength and Conditioning Journal 18(3): 24-31, 1996.

[2] Chen SK, Wu MT, Huang CH, Wu JH, Guo LY, and Wu WL. The analysis of upper limb movement and EMG activation during the snatch under various loading conditions. Journal of Mechanics in Medicine and Biology 13(1): 1-13, 2013.

[3] Gourgoulis V, Aggelousis N, Mavromatis G, and Garas A. *Three-dimensional kinematic analysis of the snatch of elite Greek weightlifters*. Journal of Sports Sciences 18: 643-652, 2000.

[4] Takano B. *Do shrug at the top of the pull!* Takanoathletics.com. 2012

[5] Wu WL, Ting YT, Huang CJ, Huang CH, Wang HJ, and Chen SK. *Muscle activation and three-dimensional kinematics of upper extremity in snatch weight lifting*. 26th International Conference on Biomechanics in Sports. Seoul, Korea, July 14-18, 2008.

[6] Plagenhoef, S., Evans, F.G. and Abdelnour, T. *Anatomical data for analyzing human motion*. Research Quarterly for Exercise and Sport 54, 169-178. 1983.

[7] Paolo de Leva. *Adjustments to Zatsiorsky-Seluyanov's Segment Inertia Parameters* . Journal of Biomechanics 29 (9), pp. 1223-1230. 1996.

[8] Bernardes C, Cañeiro J, Silveira L, Aldabe D, Araujo M, Loss J. *Comparação de métodos para determinação da trajetória do centro de rotação articular tibiofemoral*. Proc of 11thCBB; 2005.

[9] McGinnis P. *Biomecânica do Esporte e do Exercício*. Porto Alegre: Artmed, 2002.

[10] JOHNSTON, E. Russell Jr. e BEER, Ferdinand P. *Mecânica Vetorial para Engenheiros*. Tradução de Antônio Eustáquio de Melo Pertence e revisão técnica de Antonio Pertence Júnior. 9. ed. Porto Alegre : AMGH, 2012.

[11] MAIA, NUNO M: Introdução à Mecânica Analítica, IST Press

[12] GOLDSTEIN: Classical Mechanics, Addison-Wesley

[13] LEMOS, NIVALDO A.: Mecânica Analítica, Livraria da Física, 2ª ed.

[14] Y-C Liu[1] e W-C Chen. *A comparison of ISB-Recommendation and two-dimensional angle computing method on snatch joint angles analysis*. [1] Assistant Professor, Chang Jung Christian University, [2] Professor, National College of Physical Education and Sports, 2007.

[15] VIORELA, Ulareanu Marius, et al. *Biomechanical characteristics of movement phases of clean & jerk style in weightlifting performance*. Ecological University of Bucharest, 2013.

[16] NEJADIANA, Shahram Lenjan, et al. *Cost evaluation of different snatch trajectories by using dynamic programming method*. University of Isfahan, 2010.

[17] H-C Chen e K.B. Cheng. *Development of a simulation model for the snatch weight-lift*. Institute of Physical Education, Health, and Leisure Studies, National Cheng Kung University, Tainan, Taiwan, 2007.

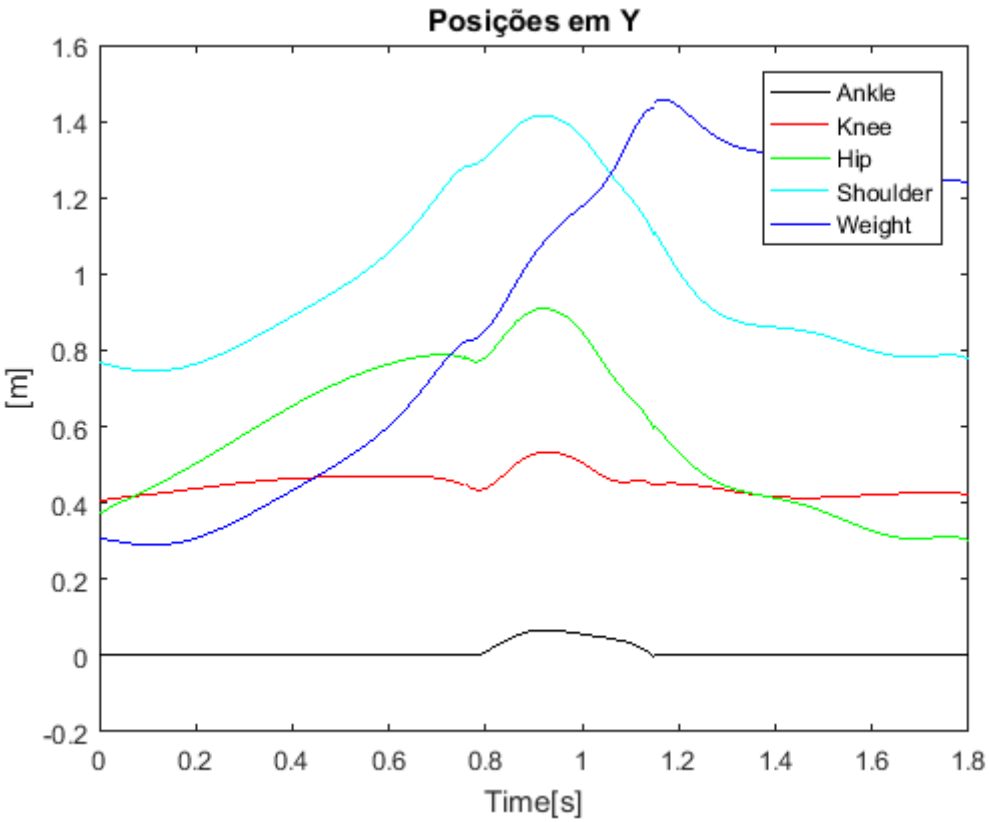
[18] ELTOUKHY, Moataz, et al. *Examination of a lumbar spine biomechanical model for assessing axial compression, shear, and bending moment using selected Olympic lifts*. Sports Medicine and Motion Analysis Laboratory, Department of Kinesiology and Sport Sciences, University of Miami, Coral Gables, FL, USA, 2015.

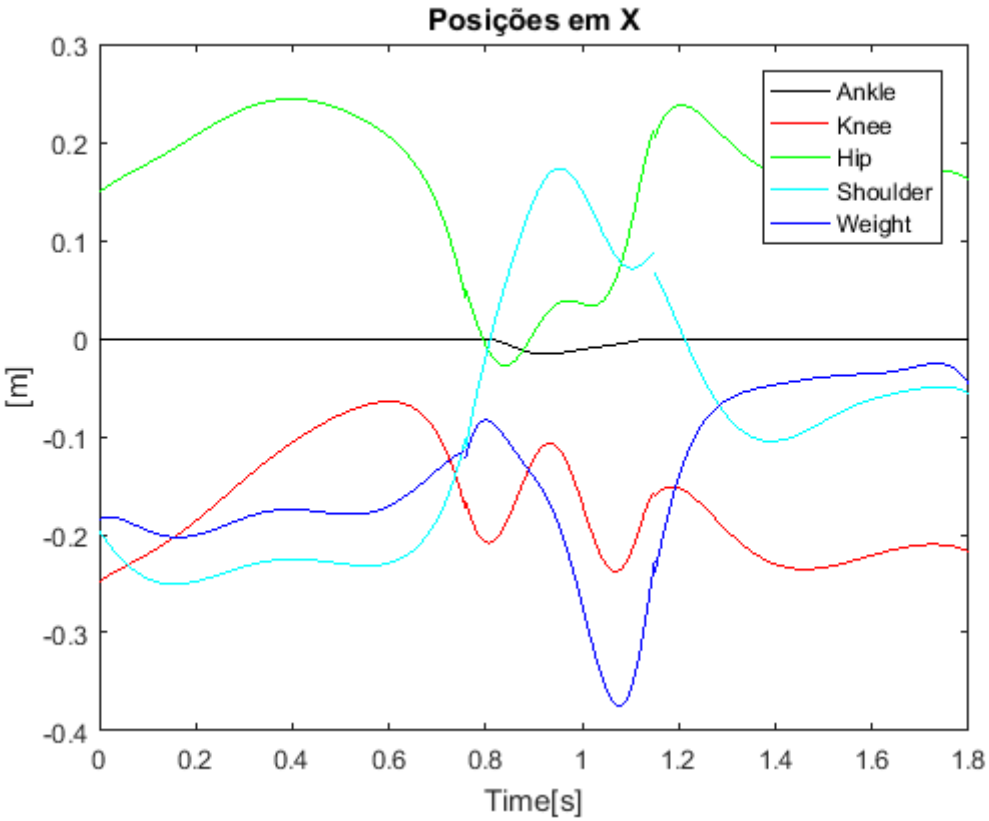
[19] RUSSI, Pedro Carlos. *Estudo de um modelo dinâmico para avaliação física do corpo humano*. Tese de Mestrado, Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá da Universidade Estadual Paulista, 2002.

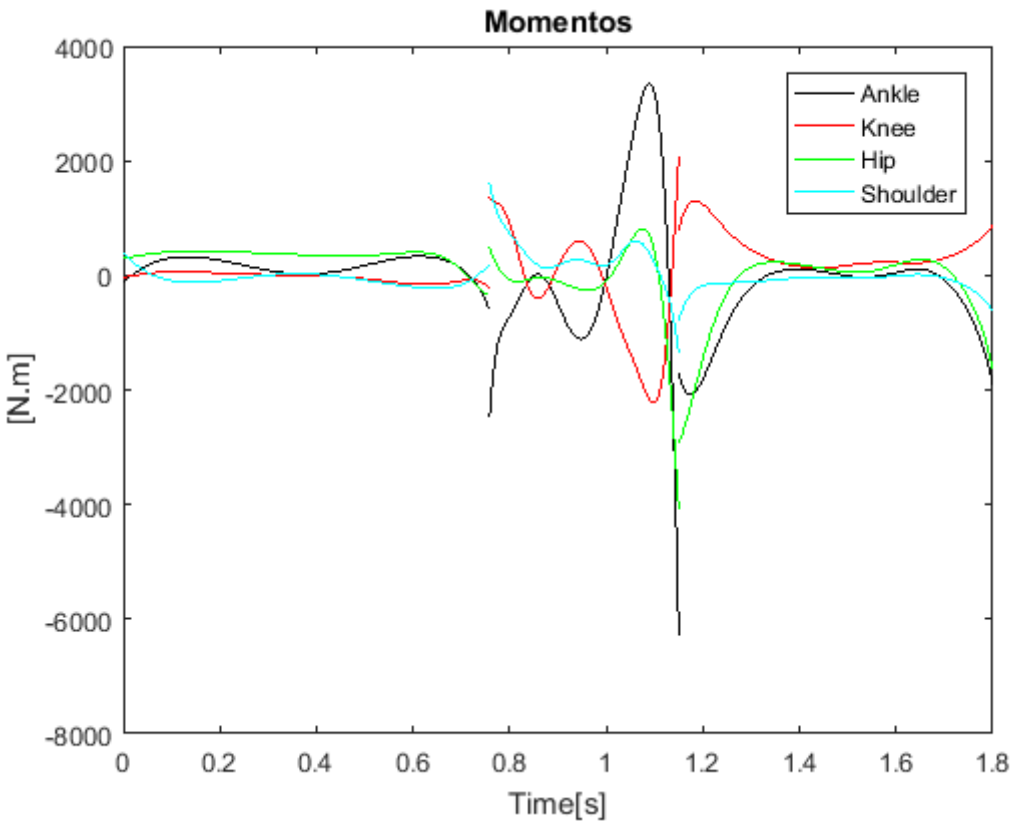
[20] NEJADIAN, Shahram Lenjan, et al. *Optimization of Barbell Trajectory During The Snatch Lift Technique By Using Optimal Control Theory*. Biomedical Engineering Faculty, Amirkabir University of Technology (AUT), 2008.
[21] Y.J Moon. *Performance Enhanced Model in Snatch Weightlifting Using the kinematic factors*. Korea Institute of Sports Science, 2007.
[22] S.M.A. Rahmati, M. Mallakzadeh. *Prediction of weightlifter's motor behavior to evaluate snatch weightlifting techniques based on a new method of investigation of consumed energy*. Department of Mechanical Engineering, Iran University of Science and Technology, 2014.
[23] CHEN, Shen-Kai, et al. *The analysis of upper limb movement and emg activation during the snatch under various loading conditions*. Department of Sports Medicine, Kaohsiung Medical University, 2012.
[24] CHAPRA, Steven C. e CANALE, Raymond P. *Métodos numéricos para engenharia*. Tradução técnica de Helena Castro. 5. ed. Porto Alegre : AMGH, 2011.
[25] INMAN, Daniel J. *Engineering Vibration*. 4th Edition. Virginia, USA : Pearson, 2014.
[26] https://journal.crossfit.com/article/the-full-snatch-2, 2018.

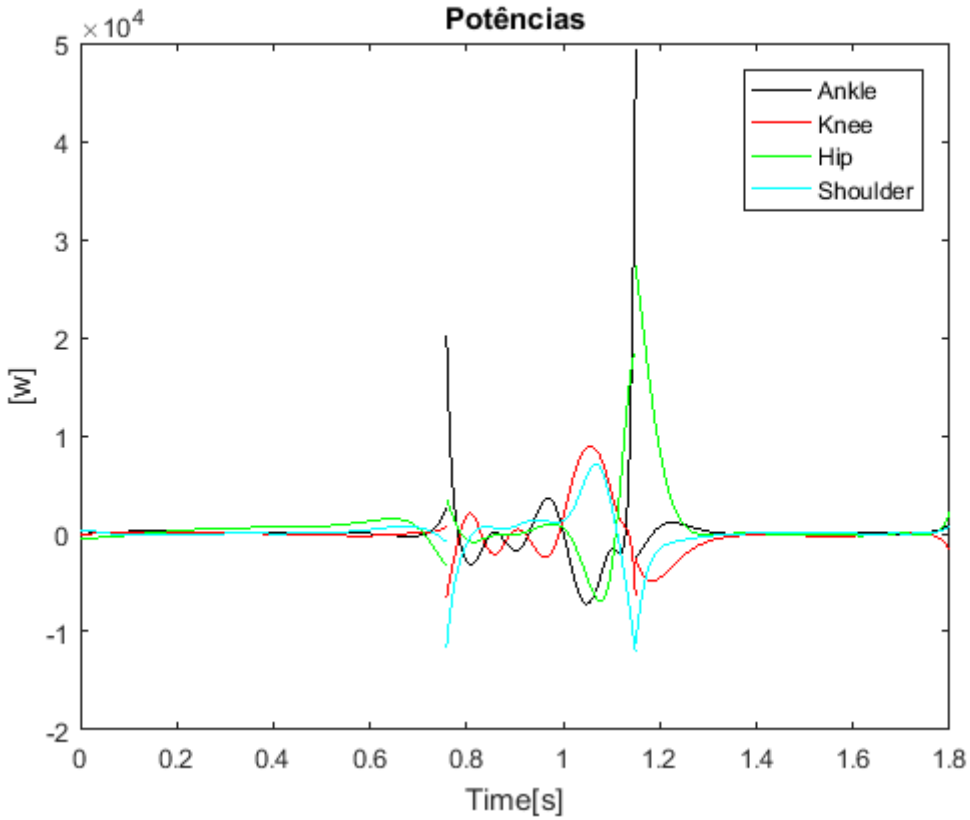
13 Anexo

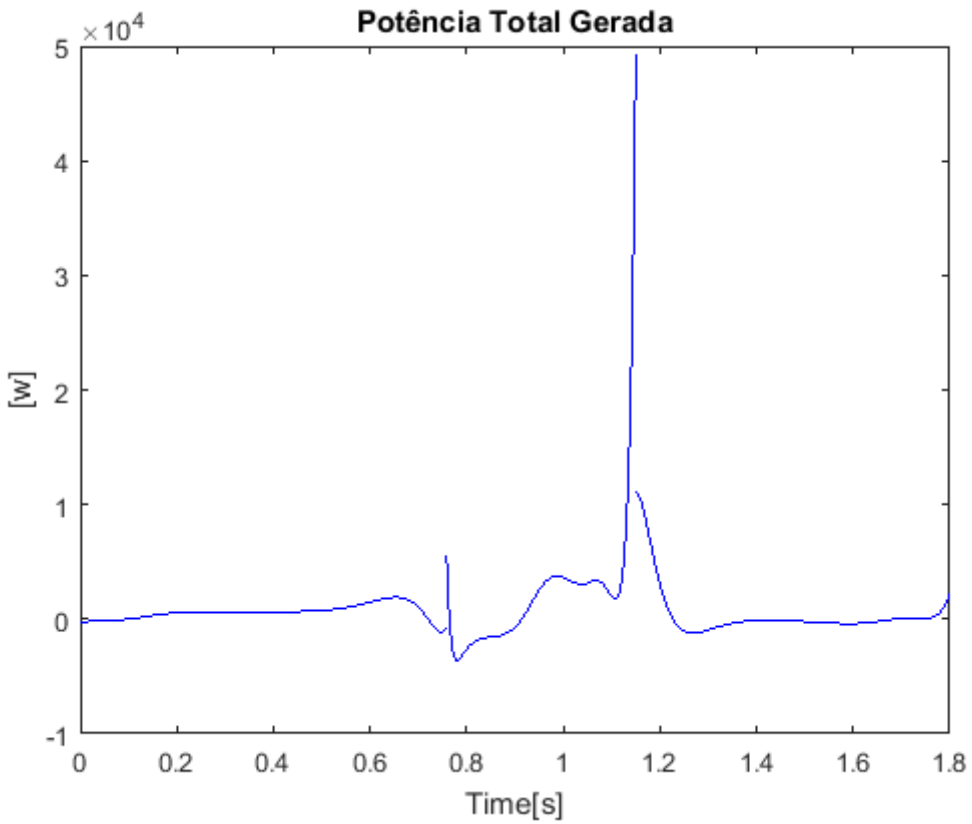
13.1 Gráficos

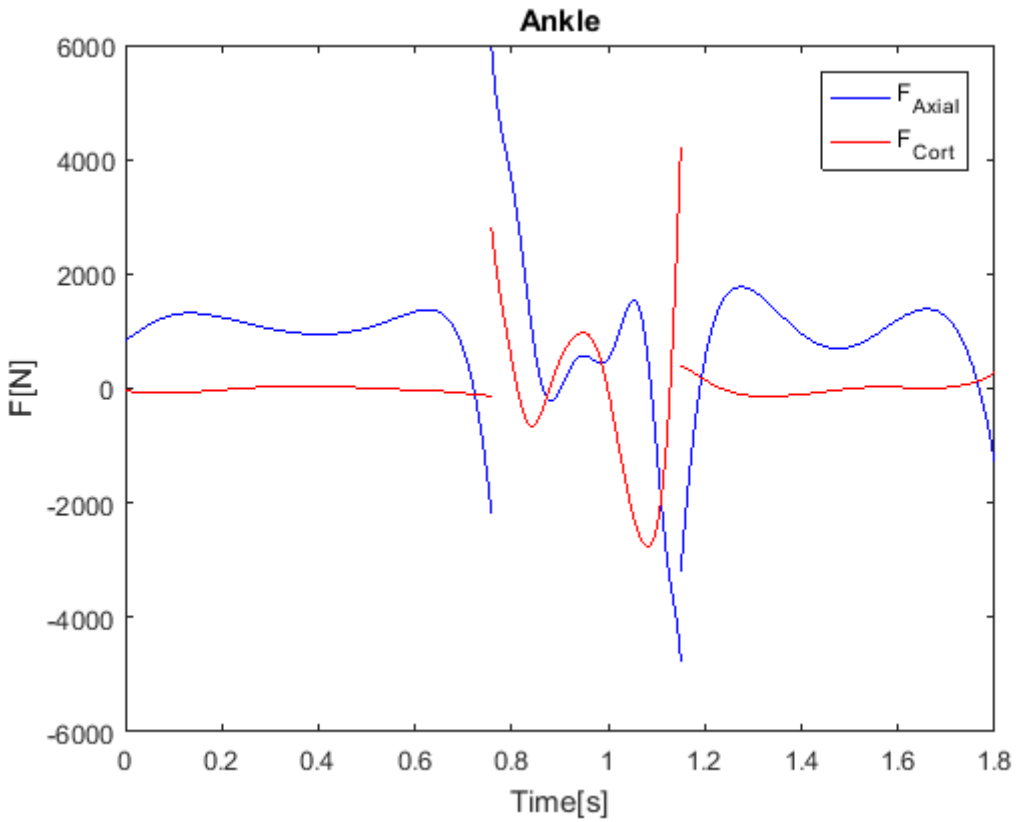


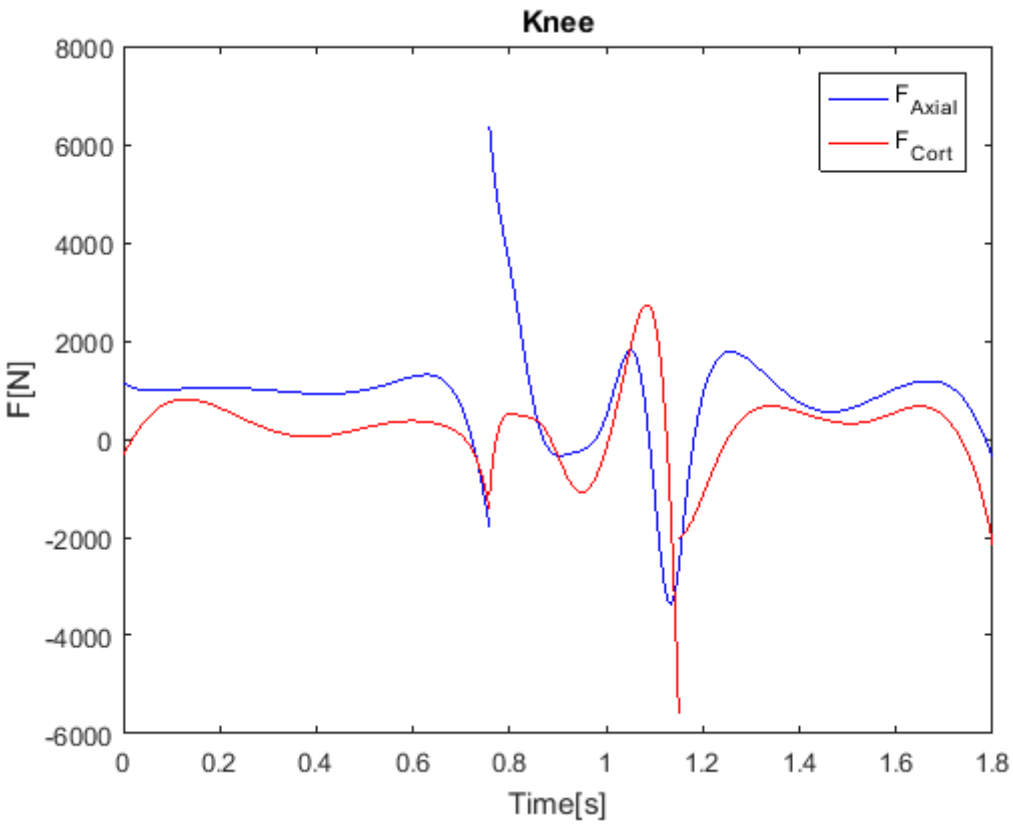


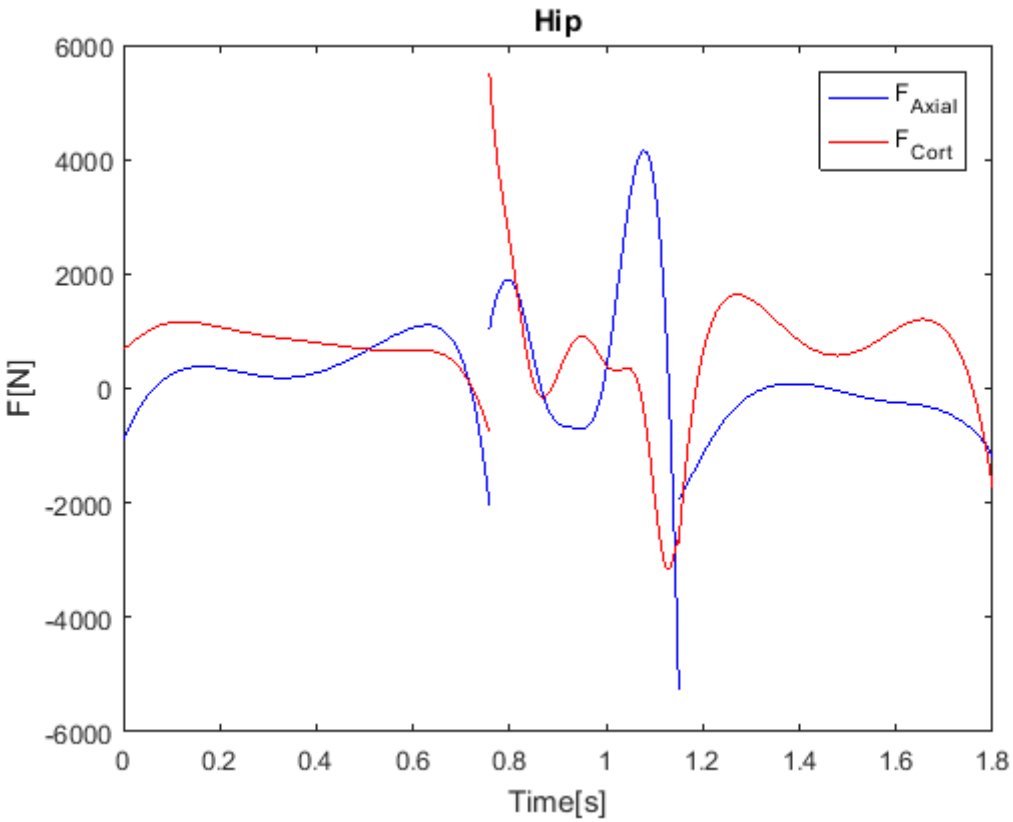

Momentos
4000
2000
0
-2000
-4000
-6000
-8000
[N.m]
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
1.2
1.4
1.6
1.8
Time[s]
Ankle
Knee
Hip
Shoulder

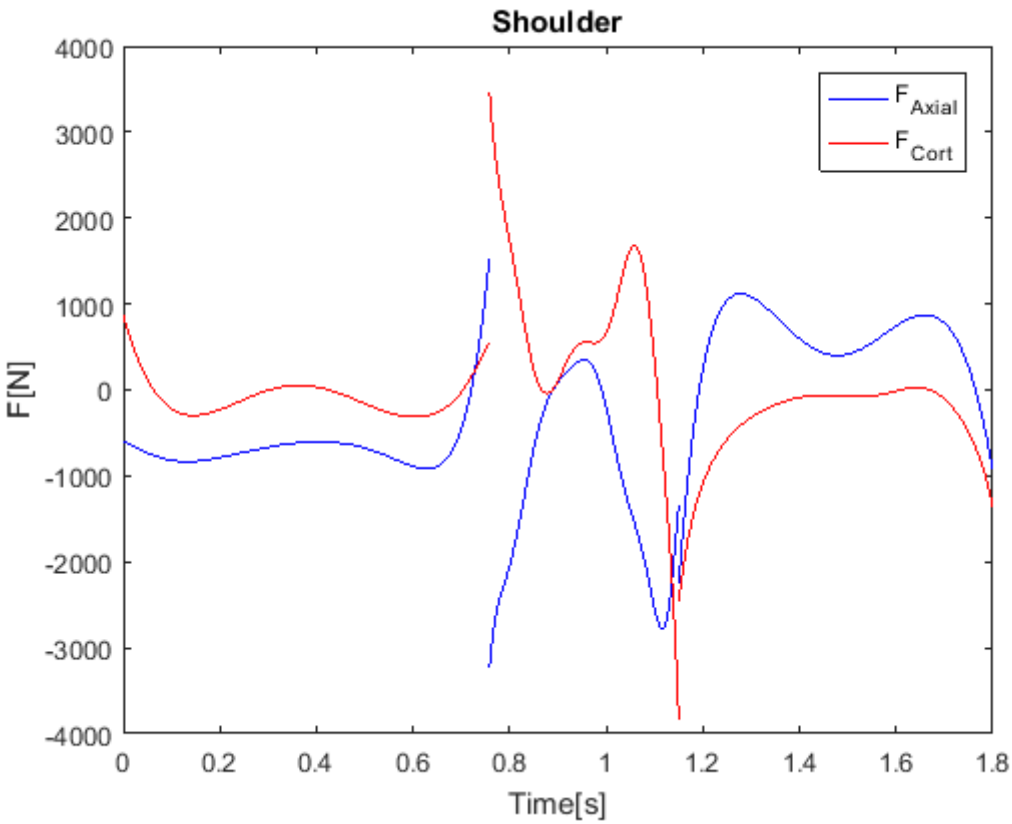

Potências
×10^4
5
4
3
2
1
0
-1
-2
[w]
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
1.2
1.4
1.6
1.8
Time[s]
Ankle
Knee
Hip
Shoulder


Potência Total Gerada
×10^4
5
4
3
2
1
0
-1
[w]
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
1.2
1.4
1.6
1.8
Time[s]


Ankle
6000
4000
2000
0
-2000
-4000
-6000
F[N]
F Axial
F Cort
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
1.2
1.4
1.6
1.8
Time[s]


Knee
8000
6000
4000
2000
0
-2000
-4000
-6000
F[N]
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
1.2
1.4
1.6
1.8
Time[s]
F Axial
F Cort


Hip
6000
4000
2000
0
-2000
-4000
-6000
F[N]
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
1.2
1.4
1.6
1.8
Time[s]
F Axial
F Cort



13.2 Programas

13.2.1 Visual Basic for Applications (VBA), Rastreamento

```
Declare Function GetCursorPos Lib "user32" (lpPoint As POINTAPI) As Long
Type POINTAPI
  Xcoord As Long
  Ycoord As Long
End Type

Sub Rastreamento ()
Dim llCoord As POINTAPI
Dim tempo_total, fps, t, x, y
Dim ver As Boolean

fps = 24
tempo_total = 40
t = Timer()
ver = False
x = Timer() + tempo_total
y = 2
Do
   Do
      Debug.Print y
      If Timer() > t + (1 / fps) Then
         Cells(y, 3).Value = y - 1
```

```
        Cells(y, 4).Value = Timer()
        GetCursorPos llCoord
        Cells(y, 1).Value = llCoord.Xcoord
        Cells(y, 2).Value = llCoord.Ycoord
        ver = True
      End If
    Loop While ver = False
    t = t + 1 / fps
    y = y + 1
    ver = False
Loop While Timer() < x

End Sub
```

13.2.2 MATLAB, Lagrange 1

```
close all
clear all

mF=sym('mF');
m1=sym('m1');
m2=sym('m2');
m3=sym('m3');
m4=sym('m4');
M=sym('M');

LF=sym('LF');
L1=sym('L1');
L2=sym('L2');
L3=sym('L3');
L4=sym('L4');

Lc3=sym('Lc3');
Lc4=sym('Lc4');

JF=sym('JF');
J1=sym('J1');
J2=sym('J2');
J3=sym('J3');
J4=sym('J4');
Jb=sym('Jb');

g=sym('g');

syms t real

thetaF = sym ('thetaF(t)');
thetaA = sym ('thetaA(t)');
thetaK = sym ('thetaK(t)');
thetaH = sym ('thetaH(t)');
thetaS = sym ('thetaS(t)');

theta1 = sym ('theta1(t)');
theta2 = sym ('theta2(t)');
theta3 = sym ('theta3(t)');
theta4 = sym ('theta4(t)');

xa=sym('xa(t)');
xk=sym('xk(t)');
xh=sym('xh(t)');
xs=sym('xs(t)');

ya=sym('ya(t)');
yk=sym('yk(t)');
yh=sym('yh(t)');
ys=sym('ys(t)');
```

```
xcf=sym('xcf(t)');
xc1=sym('xc1(t)');
xc2=sym('xc2(t)');
xc3=sym('xc3(t)');
xc4=sym('xc4(t)');

ycf=sym('ycf(t)');
yc1=sym('yc1(t)');
yc2=sym('yc2(t)');
yc3=sym('yc3(t)');
yc4=sym('yc4(t)');

theta1=thetaA-thetaF;
theta2=thetaK-thetaA+thetaF;
theta3=thetaH-thetaK+thetaA-thetaF;
theta4=thetaS-pi/2+thetaH-thetaK+thetaA-thetaF;

xf=-LF; %fase 1 e 3
yf=0;   %ffase 1 e 3

xa=LF*(cos(thetaF)-1);  %fase 1 e 3
ya=LF*sin(thetaF);  %fase 1 e 3

%xf=xa-LF*cos(thetaF);  %fase 2
%yf=ya-LF*sin(thetaF);  %fase 2

xk=-L1*cos(theta1)+xa;
yk=L1*sin(theta1)+ya;

xh=L2*cos(theta2)+xk;
yh=L2*sin(theta2)+yk;

xs=-L3*cos(theta3)+xh;
ys=L3*sin(theta3)+yh;

xw=-L4*sin(theta4)+xs;
yw=-L4*cos(theta4)+ys;

xcf=(xf+xa)/2;
xc1=(xk+xa)/2;
xc2=(xk+xh)/2;
xc3=xh-Lc3*cos(theta3);
xc4=xs-Lc4*sin(theta4);
ycf=(ya+yf)/2;
yc1=(yk+ya)/2;
yc2=(yk+yh)/2;
yc3=yh+Lc3*sin(theta3);
yc4=ys-Lc4*cos(theta4);

xcfdot=diff(xcf,t);
xc1dot=diff(xc1,t);
xc2dot=diff(xc2,t);
xc3dot=diff(xc3,t);
xc4dot=diff(xc4,t);
ycfdot=diff(ycf,t);
yc1dot=diff(yc1,t);
yc2dot=diff(yc2,t);
yc3dot=diff(yc3,t);
yc4dot=diff(yc4,t);

xadot=diff(xa,t);
xkdot=diff(xk,t);
xhdot=diff(xh,t);
xsdot=diff(xs,t);
xwdot=diff(xw,t);
yadot=diff(ya,t);
ykdot=diff(yk,t);
yhdot=diff(yh,t);
ysdot=diff(ys,t);
ywdot=diff(yw,t);
```

```
thetaFdot=diff(thetaF,t);
theta1dot=diff(theta1,t);
theta2dot=diff(theta2,t);
theta3dot=diff(theta3,t);
theta4dot=diff(theta4,t);

V=M*g*yw+mF*g*ycf+m1*g*yc1+m2*g*yc2+m3*g*yc3+m4*g*yc4;

T=(1/2)*mF*(xcfdot^2+ycfdot^2)+(1/2)*m1*(xc1dot^2+yc1dot^2)+(1/2)*m2*(xc2dot^2
+yc2dot^2)+(1/2)*m3*(xc3dot^2+yc3dot^2)+(1/2)*m4*(xc4dot^2+yc4dot^2)+(1/2)*M*(
xwdot^2+ywdot^2)+(1/2)*JF*thetaFdot^2+(1/2)*J1*theta1dot^2+(1/2)*J2*theta2dot^
2+(1/2)*J3*theta3dot^2+(1/2)*J4*theta4dot^2+(1/2)*Jb*theta4dot^2;

L=T-V;

Va=M*g*yw+m1*g*yc1+m2*g*yc2+m3*g*yc3+m4*g*yc4;

Ta=(1/2)*m1*(xc1dot^2+yc1dot^2)+(1/2)*m2*(xc2dot^2+yc2dot^2)+(1/2)*m3*(xc3dot^
2+yc3dot^2)+(1/2)*m4*(xc4dot^2+yc4dot^2)+(1/2)*M*(xwdot^2+ywdot^2)+(1/2)*J1*th
eta1dot^2+(1/2)*J2*theta2dot^2+(1/2)*J3*theta3dot^2+(1/2)*J4*theta4dot^2+(1/2)
*Jb*theta4dot^2;

La=Ta-Va;

Vk=M*g*yw+m2*g*yc2+m3*g*yc3+m4*g*yc4;

Tk=(1/2)*m2*(xc2dot^2+yc2dot^2)+(1/2)*m3*(xc3dot^2+yc3dot^2)+(1/2)*m4*(xc4dot^
2+yc4dot^2)+(1/2)*M*(xwdot^2+ywdot^2)+(1/2)*J2*theta2dot^2+(1/2)*J3*theta3dot^
2+(1/2)*J4*theta4dot^2+(1/2)*Jb*theta4dot^2;

Lk=Tk-Vk;

Vh=M*g*yw+m3*g*yc3+m4*g*yc4;

Th=(1/2)*m3*(xc3dot^2+yc3dot^2)+(1/2)*m4*(xc4dot^2+yc4dot^2)+(1/2)*M*(xwdot^2+
ywdot^2)+(1/2)*J3*theta3dot^2+(1/2)*J4*theta4dot^2+(1/2)*Jb*theta4dot^2;

Lh=Th-Vh;

Vs=M*g*yw+m4*g*yc4;

Ts=(1/2)*m4*(xc4dot^2+yc4dot^2)+(1/2)*M*(xwdot^2+ywdot^2)+(1/2)*J4*theta4dot^2
+(1/2)*Jb*theta4dot^2;

Ls=Ts-Vs;

dummy=sym('dummy');

dLthetaAdot =
subs(diff(subs(L,diff(thetaA,t),dummy),dummy),dummy,diff(thetaA,t));
dLthetaKdot =
subs(diff(subs(L,diff(thetaK,t),dummy),dummy),dummy,diff(thetaK,t));
dLthetaHdot =
subs(diff(subs(L,diff(thetaH,t),dummy),dummy),dummy,diff(thetaH,t));
dLthetaSdot =
subs(diff(subs(L,diff(thetaS,t),dummy),dummy),dummy,diff(thetaS,t));

dLdthetaA=subs(diff(subs(L,thetaA,dummy),dummy),dummy,thetaA);
dLdthetaK=subs(diff(subs(L,thetaK,dummy),dummy),dummy,thetaK);
dLdthetaH=subs(diff(subs(L,thetaH,dummy),dummy),dummy,thetaH);
dLdthetaS=subs(diff(subs(L,thetaS,dummy),dummy),dummy,thetaS);

differentialequationA=diff(dLthetaAdot,t)-dLdthetaA;
differentialequationK=diff(dLthetaKdot,t)-dLdthetaK;
differentialequationH=diff(dLthetaHdot,t)-dLdthetaH;
differentialequationS=diff(dLthetaSdot,t)-dLdthetaS;


MA=simplify(differentialequationA)
MK=simplify(differentialequationK)
```

```
MH=simplify(differentialequationH)
MS=simplify(differentialequationS)

%ANKLE
dLxadot = subs(diff(subs(La,diff(xa,t),dummy),dummy),dummy,diff(xa,t));
dLyadot = subs(diff(subs(La,diff(ya,t),dummy),dummy),dummy,diff(ya,t));

dLdxa=subs(diff(subs(La,xa,dummy),dummy),dummy,xa);
dLdya=subs(diff(subs(La,ya,dummy),dummy),dummy,ya);

differentialequationxa=diff(dLxadot,t)-dLdxa;
differentialequationya=diff(dLyadot,t)-dLdya;

Fxa=simplify(differentialequationxa);
Fya=simplify(differentialequationya);

FaAxial=Fya*cos(thetaF)-Fxa*sin(thetaF)
FaCort=-Fya*sin(thetaF)-Fxa*cos(thetaF)

%KNEE
dLxkdot = subs(diff(subs(Lk,diff(xk,t),dummy),dummy),dummy,diff(xk,t));
dLykdot = subs(diff(subs(Lk,diff(yk,t),dummy),dummy),dummy,diff(yk,t));

dLdxk=subs(diff(subs(Lk,xk,dummy),dummy),dummy,xk);
dLdyk=subs(diff(subs(Lk,yk,dummy),dummy),dummy,yk);

differentialequationxk=diff(dLxkdot,t)-dLdxk;
differentialequationyk=diff(dLykdot,t)-dLdyk;

Fxk=simplify(differentialequationxk);
Fyk=simplify(differentialequationyk);

FkAxial=Fyk*sin(thetaA)-Fxk*cos(thetaA)
FkCort=Fyk*cos(thetaA)+Fxk*sin(thetaA)

%HIP
dLxhdot = subs(diff(subs(Lh,diff(xh,t),dummy),dummy),dummy,diff(xh,t));
dLyhdot = subs(diff(subs(Lh,diff(yh,t),dummy),dummy),dummy,diff(yh,t));

dLdxh=subs(diff(subs(Lh,xh,dummy),dummy),dummy,xh);
dLdyh=subs(diff(subs(Lh,yh,dummy),dummy),dummy,yh);

differentialequationxh=diff(dLxhdot,t)-dLdxh;
differentialequationyh=diff(dLyhdot,t)-dLdyh;

Fxh=simplify(differentialequationxh);
Fyh=simplify(differentialequationyh);

FhAxial=Fyh*sin(theta2)+Fxh*cos(theta2)
FhCort=Fyh*cos(theta2)-Fxh*sin(theta2)

%SHOULDER
dLxsdot = subs(diff(subs(Ls,diff(xs,t),dummy),dummy),dummy,diff(xs,t));
dLysdot = subs(diff(subs(Ls,diff(ys,t),dummy),dummy),dummy,diff(ys,t));

dLdxs=subs(diff(subs(Ls,xs,dummy),dummy),dummy,xs);
dLdys=subs(diff(subs(Ls,ys,dummy),dummy),dummy,ys);

differentialequationxs=diff(dLxsdot,t)-dLdxs;
differentialequationys=diff(dLysdot,t)-dLdys;

Fxs=simplify(differentialequationxs);
Fys=simplify(differentialequationys);

FsAxial=-Fys*cos(theta4)-Fxs*sin(theta4)
FsCort=Fys*sin(theta4)-Fxs*cos(theta4)
```

13.2.3 MATLAB, Lagrange 2

```
close all
clear all

syms t real

thetaF = sym ('thetaF(t)');
thetaA = sym ('thetaA(t)');
thetaK = sym ('thetaK(t)');
thetaH = sym ('thetaH(t)');
thetaS = sym ('thetaS(t)');

mF=2.580;
m1=7.568;
m2=17.372;
m3=43.000+6.880;
m4=4.644+3.956;
M=110;

LF=0.1454265;
L1=0.4755700;
L2=0.3983869;
L3=0.5245106;
L4=0.4591185;
Lc3=0.324953934;
Lc4=0.23059726;
JF=0.00556813432;
J1=0.14850665729;
J2=0.25726457612;
J3=2.431529613;
J4=0.15699072903;
Jb=0.00196;

g= 9.80665;

thetaF(t) = 0;
thetaA(t) = -71.455*(t)^6 + 141.97*(t)^5 - 107.53*(t)^4 + 36.059*(t)^3 -
4.6484*(t)^2 + 0.8808*(t) + 1.0218;
thetaK(t) = -72.323*(t)^6 + 153.06*(t)^5 - 128.05*(t)^4 + 48.354*(t)^3 -
6.5199*(t)^2 + 2.1583*(t) + 0.9377;
thetaH(t) = 13.116*(t)^6 + 0.4964*(t)^5 - 12.77*(t)^4 + 1.6801*(t)^3 +
6.3426*(t)^2 - 1.6499*(t) + 0.7693;
thetaS(t) = 131.67*(t)^6 - 303.73*(t)^5 + 255.29*(t)^4 - 97.234*(t)^3 +
14.215*(t)^2 + 0.7195*(t) + 0.692;

%fase 1

MAI(t) = MA(t)
MKI(t) = MK(t)
MHI(t) = MH(t)
MSI(t) = MS(t)
FaAxialI(t) = FaAxial(t)
FaCortI(t) = FaCort(t)
FkAxialI(t) = FkAxial(t)
FkCortI(t) = FkCort(t)
FhAxialI(t) = FhAxial(t)
FhCortI(t) = FhCort(t)

WAIdot(t) = MAI(t)*diff(thetaA(t),t);
WKIdot(t) = MKI(t)*diff(thetaK(t),t);
WHIdot(t) = MHI(t)*diff(thetaH(t),t);
WSIdot(t) = MSI(t)*diff(thetaS(t),t);

thetaF(t)= 4979.5*(t-182/240)^6 - 8555.1*(t-182/240)^5 + 5311.2*(t-182/240)^4
- 1500.2*(t-182/240)^3 + 180.16*(t-182/240)^2 - 4.2978*(t-182/240) + 0.029;
thetaA(t) = -9348.9*(t-182/240)^6 + 6580*(t-182/240)^5 + 70.678*(t-182/240)^4
- 939.12*(t-182/240)^3 + 202.08*(t-182/240)^2 - 8.1409*(t-182/240) + 1.2442;
```

```
thetaK (t)= -13701*(t-182/240)^6 + 13596*(t-182/240)^5 - 3899.9*(t-182/240)^4
+ 59.226*(t-182/240)^3 + 88.841*(t-182/240)^2 - 4.747*(t-182/240) + 2.212;
thetaH (t)= 6330.8*(t-182/240)^6 - 7538.9*(t-182/240)^5 + 3569.7*(t-182/240)^4
- 813.48*(t-182/240)^3 + 53.389*(t-182/240)^2 + 7.0846*(t-182/240) + 2.2529;
thetaS (t)= -6585.3*(t-182/240)^6 + 5702.6*(t-182/240)^5 - 1306.5*(t-
182/240)^4 - 83.431*(t-182/240)^3 + 78.885*(t-182/240)^2 - 7.2534*(t-182/240)
+ 0.3381;

%fase 2

MAII(t) = MA(t)
MKII(t) = MK(t)
MHII(t) = MH(t)
MSII(t) = MS(t)
FaAxialII(t) = FaAxial(t)
FaCortII(t) = FaCort(t)
FkAxialII(t) = FkAxial(t)
FkCortII(t) = FkCort(t)
FhAxialII(t) = FhAxial(t)
FhCortII(t) = FhCort(t)

WAIIdot(t) = MAII(t)*diff(thetaA(t),t);
WKIIdot(t) = MKII(t)*diff(thetaK(t),t);
WHIIdot(t) = MHII(t)*diff(thetaH(t),t);
WSIIdot(t) = MSII(t)*diff(thetaS(t),t);

thetaF(t) = 0;
thetaA (t)= -87.45*(t-1.15)^6 + 224*(t-1.15)^5 - 230.58*(t-1.15)^4 +
114.92*(t-1.15)^3 - 25.647*(t-1.15)^2 + 1.4028*(t-1.15)+ 1.2254;
thetaK(t) = -495.25*(t-1.15)^6 + 932.73*(t-1.15)^5 - 636.66*(t-1.15)^4 +
183.33*(t-1.15)^3 - 14.969*(t-1.15)^2 - 3.2202*(t-1.15) + 1.6291;
thetaH (t)= -380.27*(t-1.15)^6 + 637.16*(t-1.15)^5 - 318.48*(t-1.15)^4 +
5.3951*(t-1.15)^3 + 36.168*(t-1.15)^2 - 9.2958*(t-1.15) + 1.7083;
thetaS(t) = -131.72*(t-1.15)^6 + 275.37*(t-1.15)^5 - 269.03*(t-1.15)^4 +
170.02*(t-1.15)^3 - 68.976*(t-1.15)^2 + 14.421*(t-1.15) + 2.6773;

MAIII(t) = MA(t)
MKIII(t) = MK(t)
MHIII(t) = MH(t)
MSIII(t) = MS(t)
FaAxialIII(t) = FaAxial(t)
FaCortIII(t) = FaCort(t)
FkAxialIII(t) = FkAxial(t)
FkCortIII(t) = FkCort(t)
FhAxialIII(t) = FhAxial(t)
FhCortIII(t) = FhCort(t)

WAIIIdot(t) = MAIII(t)*diff(thetaA(t),t);
WKIIIdot(t) = MKIII(t)*diff(thetaK(t),t);
WHIIIdot(t) = MHIII(t)*diff(thetaH(t),t);
WSIIIdot(t) = MSIII(t)*diff(thetaS(t),t);

tI = linspace(0,182/240);
tII = linspace(182/240,276/240);
tIII = linspace(276/240,432/240);

MAI = (1/2)*MAI(tI);
MKI = (1/2)*MKI(tI);
MHI = (1/2)*MHI(tI);
MSI = (1/2)*MSI(tI);

WAIdot = (1/2)*WAIdot(tI);
WKIdot = (1/2)*WKIdot(tI);
WHIdot = (1/2)*WHIdot(tI);
WSIdot = (1/2)*WSIdot(tI);

MAII = (1/2)*MAII(tII);
MKII = (1/2)*MKII(tII);
```

```
MHII = (1/2)*MHII(tII);
MSII = (1/2)*MSII(tII);

WAIIdot = (1/2)*WAIIdot(tII);
WKIIdot = (1/2)*WKIIdot(tII);
WHIIdot = (1/2)*WHIIdot(tII);
WSIIdot = (1/2)*WSIIdot(tII);

MAIII = (1/2)*MAIII(tIII);
MKIII = (1/2)*MKIII(tIII);
MHIII = (1/2)*MHIII(tIII);
MSIII = (1/2)*MSIII(tIII);

WAIIIdot = (1/2)*WAIIIdot(tIII);
WKIIIdot = (1/2)*WKIIIdot(tIII);
WHIIIdot = (1/2)*WHIIIdot(tIII);
WSIIIdot = (1/2)*WSIIIdot(tIII);

PotI=WAIdot+ WKIdot+WHIdot+WSIdot;
PotII=WAIIdot+ WKIIdot+WHIIdot+WSIIdot;
PotIII=WAIIIdot+ WKIIIdot+WHIIIdot+WSIIIdot;

FaAxialI=(1/2)*FaAxialI(tI);
FaCortI=(1/2)*FaCortI(tI);
FkAxialI=(1/2)*FkAxialI(tI);
FkCortI=(1/2)*FkCortI(tI);
FhAxialI=(1/2)*FhAxialI(tI);
FhCortI=(1/2)*FhCortI(tI);
FsAxialI=(1/2)*FsAxialI(tI);
FsCortI=(1/2)*FsCortI(tI);

FaAxialII=(1/2)*FaAxialII(tII);
FaCortII=(1/2)*FaCortII(tII);
FkAxialII=(1/2)*FkAxialII(tII);
FkCortII=(1/2)*FkCortII(tII);
FhAxialII=(1/2)*FhAxialII(tII);
FhCortII=(1/2)*FhCortII(tII);
FsAxialII=(1/2)*FsAxialII(tII);
FsCortII=(1/2)*FsCortII(tII);

FaAxialIII=(1/2)*FaAxialIII(tIII);
FaCortIII=(1/2)*FaCortIII(tIII);
FkAxialIII=(1/2)*FkAxialIII(tIII);
FkCortIII=(1/2)*FkCortIII(tIII);
FhAxialIII=(1/2)*FhAxialIII(tIII);
FhCortIII=(1/2)*FhCortIII(tIII);
FsAxialIII=(1/2)*FsAxialIII(tIII);
FsCortIII=(1/2)*FsCortIII(tIII);

figure
plot(tI,MAI,'k',tI,MKI,'r',tI,MHI,'g',tI,MSI,'c',tII,MAII,'k',tII,MKII,'r',tII
,MHII,'g',tII,MSII,'c',tIII,MAIII,'k',tIII,MKIII,'r',tIII,MHIII,'g',tIII,MSIII
,'c')
title('Momentos');
xlabel('Time[s]');
ylabel('[N.m]');
legend('Ankle','Knee','Hip','Shoulder');

figure
plot(tI,WAIdot,'k',tI,WKIdot,'r',tI,WHIdot,'g',tI,WSIdot,'c',tII,WAIIdot,'k',t
II,WKIIdot,'r',tII,WHIIdot,'g',tII,WSIIdot,'c',tIII,WAIIIdot,'k',tIII,WKIIIdot
,'r',tIII,WHIIIdot,'g',tIII,WSIIIdot,'c')
title('Potências');
xlabel('Time[s]');
ylabel('[w]');
legend('Ankle','Knee','Hip','Shoulder');

figure
plot(tI,PotI,'b',tII,PotII,'b',tIII,PotIII,'b')
```

```
title('Potência Total Gerada');
xlabel('Time[s]');
ylabel('[w]');


figure
plot(tI,FaAxialI,'b',tI,FaCortI,'r',tII,FaAxialII,'b',tII,FaCortII,'r',tIII,Fa
AxialIII,'b',tIII,FaCortIII,'r')
title('Ankle');
xlabel('Time[s]');
ylabel('F[N]');
legend('F_A_x_i_a_l','F_C_o_r_t');

figure
plot(tI,FkAxialI,'b',tI,FkCortI,'r',tII,FkAxialII,'b',tII,FkCortII,'r',tIII,Fk
AxialIII,'b',tIII,FkCortIII,'r')
title('Knee');
xlabel('Time[s]');
ylabel('F[N]');
legend('F_A_x_i_a_l','F_C_o_r_t');

figure
plot(tI,FhAxialI,'b',tI,FhCortI,'r',tII,FhAxialII,'b',tII,FhCortII,'r',tIII,Fh
AxialIII,'b',tIII,FhCortIII,'r')
title('Hip');
xlabel('Time[s]');
ylabel('F[N]');
legend('F_A_x_i_a_l','F_C_o_r_t');

figure
plot(tI,FsAxialI,'b',tI,FsCortI,'r',tII,FsAxialII,'b',tII,FsCortII,'r',tIII,Fs
AxialIII,'b',tIII,FsCortIII,'r')
title('Shoulder');
xlabel('Time[s]');
ylabel('F[N]');
legend('F_A_x_i_a_l','F_C_o_r_t');
```

13.2.4 MATLAB, Posições

```
close all
clear all

syms t real

LF=0.1454265;
L1=0.4755700;
L2=0.3983869;
L3=0.5245106;
L4=0.4591185;

thetaF = sym ('thetaF(t)');
thetaA = sym ('thetaA(t)');
thetaK = sym ('thetaK(t)');
thetaH = sym ('thetaH(t)');
thetaS = sym ('thetaS(t)');

theta1 = sym ('theta1(t)');
theta2 = sym ('theta2(t)');
theta3 = sym ('theta3(t)');
theta4 = sym ('theta4(t)');

xa=sym('xa(t)');
xk=sym('xk(t)');
xh=sym('xh(t)');
xs=sym('xs(t)');
```

```
ya=sym('ya(t)');
yk=sym('yk(t)');
yh=sym('yh(t)');
ys=sym('ys(t)');

thetaF (t)= 0;
thetaA (t)= -71.455*(t)^6 + 141.97*(t)^5 - 107.53*(t)^4 + 36.059*(t)^3 -
4.6484*(t)^2 + 0.8808*(t) + 1.0218;
thetaK (t)= -72.323*(t)^6 + 153.06*(t)^5 - 128.05*(t)^4 + 48.354*(t)^3 -
6.5199*(t)^2 + 2.1583*(t) + 0.9377;
thetaH (t)= 13.116*(t)^6 + 0.4964*(t)^5 - 12.77*(t)^4 + 1.6801*(t)^3 +
6.3426*(t)^2 - 1.6499*(t) + 0.7693;
thetaS (t)= 131.67*(t)^6 - 303.73*(t)^5 + 255.29*(t)^4 - 97.234*(t)^3 +
14.215*(t)^2 + 0.7195*(t) + 0.692;

theta1(t)=thetaA(t)-thetaF(t);
theta2(t)=thetaK(t)-thetaA(t)+thetaF(t);
theta3(t)=thetaH(t)-thetaK(t)+thetaA(t)-thetaF(t);
theta4(t)=thetaS(t)-pi/2+thetaH(t)-thetaK(t)+thetaA(t)-thetaF(t);

xf1=-LF;
yf1=0;

xa1(t)=LF*(cos(thetaF(t))-1);
ya1(t)=LF*sin(thetaF(t));

xk1(t)=-L1*cos(theta1(t))+xa1(t);
yk1(t)=L1*sin(theta1(t))+ya1(t);

xh1(t)=L2*cos(theta2(t))+xk1(t);
yh1(t)=L2*sin(theta2(t))+yk1(t);

xs1(t)=-L3*cos(theta3(t))+xh1(t);
ys1(t)=L3*sin(theta3(t))+yh1(t);

xw1(t)=-L4*sin(theta4(t))+xs1(t);
yw1(t)=-L4*cos(theta4(t))+ys1(t);

thetaF(t)= 4979.5*(t-182/240)^6 - 8555.1*(t-182/240)^5 + 5311.2*(t-182/240)^4
- 1500.2*(t-182/240)^3 + 180.16*(t-182/240)^2 - 4.2978*(t-182/240) + 0.029;
thetaA(t) = -9348.9*(t-182/240)^6 + 6580*(t-182/240)^5 + 70.678*(t-182/240)^4
- 939.12*(t-182/240)^3 + 202.08*(t-182/240)^2 - 8.1409*(t-182/240) + 1.2442;
thetaK (t)= -13701*(t-182/240)^6 + 13596*(t-182/240)^5 - 3899.9*(t-182/240)^4
+ 59.226*(t-182/240)^3 + 88.841*(t-182/240)^2 - 4.747*(t-182/240) + 2.212;
thetaH (t)= 6330.8*(t-182/240)^6 - 7538.9*(t-182/240)^5 + 3569.7*(t-182/240)^4
- 813.48*(t-182/240)^3 + 53.389*(t-182/240)^2 + 7.0846*(t-182/240) + 2.2529;
thetaS (t)= -6585.3*(t-182/240)^6 + 5702.6*(t-182/240)^5 - 1306.5*(t-
182/240)^4 - 83.431*(t-182/240)^3 + 78.885*(t-182/240)^2 - 7.2534*(t-182/240)
+ 0.3381;


theta1(t)=thetaA(t)-thetaF(t);
theta2(t)=thetaK(t)-thetaA(t)+thetaF(t);
theta3(t)=thetaH(t)-thetaK(t)+thetaA(t)-thetaF(t);
theta4(t)=thetaS(t)-pi/2+thetaH(t)-thetaK(t)+thetaA(t)-thetaF(t);

xf2=-LF;
yf2=0;

xa2(t)=LF*(cos(thetaF(t))-1);
ya2(t)=LF*sin(thetaF(t));

xk2(t)=-L1*cos(theta1(t))+xa2(t);
yk2(t)=L1*sin(theta1(t))+ya2(t);

xh2(t)=L2*cos(theta2(t))+xk2(t);
yh2(t)=L2*sin(theta2(t))+yk2(t);

xs2(t)=-L3*cos(theta3(t))+xh2(t);
ys2(t)=L3*sin(theta3(t))+yh2(t);
```

```
xw2(t)=-L4*sin(theta4(t))+xs2(t);
yw2(t)=-L4*cos(theta4(t))+ys2(t);

thetaF(t) = 0;
thetaA (t)= -87.45*(t-1.15)^6 + 224*(t-1.15)^5 - 230.58*(t-1.15)^4 +
114.92*(t-1.15)^3 - 25.647*(t-1.15)^2 + 1.4028*(t-1.15)+ 1.2254;
thetaK(t) = -495.25*(t-1.15)^6 + 932.73*(t-1.15)^5 - 636.66*(t-1.15)^4 +
183.33*(t-1.15)^3 - 14.969*(t-1.15)^2 - 3.2202*(t-1.15) + 1.6291;
thetaH (t)= -380.27*(t-1.15)^6 + 637.16*(t-1.15)^5 - 318.48*(t-1.15)^4 +
5.3951*(t-1.15)^3 + 36.168*(t-1.15)^2 - 9.2958*(t-1.15) + 1.7083;
thetaS(t) = -131.72*(t-1.15)^6 + 275.37*(t-1.15)^5 - 269.03*(t-1.15)^4 +
170.02*(t-1.15)^3 - 68.976*(t-1.15)^2 + 14.421*(t-1.15) + 2.6773;

theta1(t)=thetaA(t)-thetaF(t);
theta2(t)=thetaK(t)-thetaA(t)+thetaF(t);
theta3(t)=thetaH(t)-thetaK(t)+thetaA(t)-thetaF(t);
theta4(t)=thetaS(t)-pi/2+thetaH(t)-thetaK(t)+thetaA(t)-thetaF(t);

xf3=-LF;
yf3=0;

xa3(t)=LF*(cos(thetaF(t))-1);
ya3(t)=LF*sin(thetaF(t));

xk3(t)=-L1*cos(theta1(t))+xa3(t);
yk3(t)=L1*sin(theta1(t))+ya3(t);

xh3(t)=L2*cos(theta2(t))+xk3(t);
yh3(t)=L2*sin(theta2(t))+yk3(t);

xs3(t)=-L3*cos(theta3(t))+xh3(t);
ys3(t)=L3*sin(theta3(t))+yh3(t);

xw3(t)=-L4*sin(theta4(t))+xs3(t);
yw3(t)=-L4*cos(theta4(t))+ys3(t);

t1 = linspace(0,182/240);
xa1 = xa1(t1);
xk1 = xk1(t1);
xh1 = xh1(t1);
xs1 = xs1(t1);
xw1 = xw1(t1);

ya1 = ya1(t1);
yk1 = yk1(t1);
yh1 = yh1(t1);
ys1 = ys1(t1);
yw1 = yw1(t1);

t2 = linspace(182/240,276/240);
xa2 = xa2(t2);
xk2 = xk2(t2);
xh2 = xh2(t2);
xs2 = xs2(t2);
xw2 = xw2(t2);

ya2 = ya2(t2);
yk2 = yk2(t2);
yh2 = yh2(t2);
ys2 = ys2(t2);
yw2 = yw2(t2);

t3 = linspace(276/240,432/240);
xa3 = xa3(t3);
xk3 = xk3(t3);
xh3 = xh3(t3);
xs3 = xs3(t3);
xw3 = xw3(t3);
```

```
ya3 = ya3(t3);
yk3 = yk3(t3);
yh3 = yh3(t3);
ys3 = ys3(t3);
yw3 = yw3(t3);

figure
plot(t1,xa1,'k',t1,xk1,'r',t1,xh1,'g',t1,xs1,'c',t1,xw1,'b',t2,xa2,'k',t2,xk2,
'r',t2,xh2,'g',t2,xs2,'c',t2,xw2,'b',t3,xa3,'k',t3,xk3,'r',t3,xh3,'g',t3,xs3,'
c',t3,xw3,'b')
title('Posições em X');
ylabel('[m]');
xlabel('Time[s]');
legend('Ankle','Knee','Hip','Shoulder','Weight');

figure
plot(t1,ya1,'k',t1,yk1,'r',t1,yh1,'g',t1,ys1,'c',t1,yw1,'b',t2,ya2,'k',t2,yk2,
'r',t2,yh2,'g',t2,ys2,'c',t2,yw2,'b',t3,ya3,'k',t3,yk3,'r',t3,yh3,'g',t3,ys3,'
c',t3,yw3,'b')
title('Posições em Y');
ylabel('[m]');
xlabel('Time[s]');
legend('Ankle','Knee','Hip','Shoulder','Weight');
```

13.2.5 MATLAB, Modelo Snatch

```
close all
clear all

LF=0.1454265;
L1=0.4755700;
L2=0.3983869;
L3=0.5245106;
L4=0.4591185;

PF=[-LF 0];
axis(gca, 'equal');
axis([-0.5 0.5 0 1.5]);
title('Snatch');
xlabel('[m]');
ylabel('[m]');
t=1/1000;

for k=0:758

    thetaF = 0;
    thetaA = -71.455*(k*t)^6 + 141.97*(k*t)^5 - 107.53*(k*t)^4 +
36.059*(k*t)^3 - 4.6484*(k*t)^2 + 0.8808*(k*t) + 1.0218;
    thetaK = -72.323*(k*t)^6 + 153.06*(k*t)^5 - 128.05*(k*t)^4 +
48.354*(k*t)^3 - 6.5199*(k*t)^2 + 2.1583*(k*t) + 0.9377;
    thetaH = 13.116*(k*t)^6 + 0.4964*(k*t)^5 - 12.77*(k*t)^4 + 1.6801*(k*t)^3
+ 6.3426*(k*t)^2 - 1.6499*(k*t) + 0.7693;
    thetaS = 131.67*(k*t)^6 - 303.73*(k*t)^5 + 255.29*(k*t)^4 - 97.234*(k*t)^3
+ 14.215*(k*t)^2 + 0.7195*(k*t) + 0.692;

    theta1=thetaA-thetaF;
    theta2=thetaK-thetaA+thetaF;
    theta3=thetaH-thetaK+thetaA-thetaF;
    theta4=thetaS-pi/2+thetaH-thetaK+thetaA-thetaF;

    xa=LF*(cos(thetaF)-1);
    ya=LF*sin(thetaF);

    xk=-L1*cos(theta1)+xa;
    yk=L1*sin(theta1)+ya;

    xh=L2*cos(theta2)+xk;
```

```
    yh=L2*sin(theta2)+yk;

    xs=-L3*cos(theta3)+xh;
    ys=L3*sin(theta3)+yh;

    xw=-L4*sin(theta4)+xs;
    yw=-L4*cos(theta4)+ys;

    P1=[xa ya];
    P2=[xk yk];
    P3=[xh yh];
    P4=[xs ys];
    P5=[xw yw];

    segF= line ([PF(1) P1(1)],[PF(2) P1(2)]);
    seg1= line ([P1(1) P2(1)],[P1(2) P2(2)]);
    seg2= line ([P2(1) P3(1)],[P2(2) P3(2)]);
    seg3=line ([P3(1) P4(1)],[P3(2) P4(2)]);
    seg4=line ([P4(1) P5(1)],[P4(2) P5(2)]);

    pause(0.001);

    delete(segF);
    delete(seg1);
    delete(seg2);
    delete(seg3);
    delete(seg4);
end

for k=758:1150

    thetaF = 4979.5*(k*t-182/240)^6 - 8555.1*(k*t-182/240)^5 + 5311.2*(k*t-
182/240)^4 - 1500.2*(k*t-182/240)^3 + 180.16*(k*t-182/240)^2 - 4.2978*(k*t-
182/240) + 0.029;
    thetaA = -9348.9*(k*t-182/240)^6 + 6580*(k*t-182/240)^5 + 70.678*(k*t-
182/240)^4 - 939.12*(k*t-182/240)^3 + 202.08*(k*t-182/240)^2 - 8.1409*(k*t-
182/240) + 1.2442;
    thetaK = -13701*(k*t-182/240)^6 + 13596*(k*t-182/240)^5 - 3899.9*(k*t-
182/240)^4 + 59.226*(k*t-182/240)^3 + 88.841*(k*t-182/240)^2 - 4.747*(k*t-
182/240) + 2.212;
    thetaH = 6330.8*(k*t-182/240)^6 - 7538.9*(k*t-182/240)^5 + 3569.7*(k*t-
182/240)^4 - 813.48*(k*t-182/240)^3 + 53.389*(k*t-182/240)^2 + 7.0846*(k*t-
182/240) + 2.2529;
    thetaS = -6585.3*(k*t-182/240)^6 + 5702.6*(k*t-182/240)^5 - 1306.5*(k*t-
182/240)^4 - 83.431*(k*t-182/240)^3 + 78.885*(k*t-182/240)^2 - 7.2534*(k*t-
182/240) + 0.3381;

    theta1=thetaA-thetaF;
    theta2=thetaK-thetaA+thetaF;
    theta3=thetaH-thetaK+thetaA-thetaF;
    theta4=thetaS-pi/2+thetaH-thetaK+thetaA-thetaF;

    xa=LF*(cos(thetaF)-1);
    ya=LF*sin(thetaF);

    xk=-L1*cos(theta1)+xa;
    yk=L1*sin(theta1)+ya;

    xh=L2*cos(theta2)+xk;
    yh=L2*sin(theta2)+yk;

    xs=-L3*cos(theta3)+xh;
    ys=L3*sin(theta3)+yh;

    xw=-L4*sin(theta4)+xs;
    yw=-L4*cos(theta4)+ys;

    P1=[xa ya];
    P2=[xk yk];
    P3=[xh yh];
```

```
    P4=[xs ys];
    P5=[xw yw];

    segF= line ([PF(1) P1(1)],[PF(2) P1(2)]);
    seg1= line ([P1(1) P2(1)],[P1(2) P2(2)]);
        seg2= line ([P2(1) P3(1)],[P2(2) P3(2)]);
    seg3=line ([P3(1) P4(1)],[P3(2) P4(2)]);
    seg4=line ([P4(1) P5(1)],[P4(2) P5(2)]);

    pause(0.001);

    delete(segF);
    delete(seg1);
    delete(seg2);
    delete(seg3);
    delete(seg4);
end

for k=1150:1800

    thetaF = 0;
    thetaA = -87.45*(k*t-1.15)^6 + 224*(k*t-1.15)^5 - 230.58*(k*t-1.15)^4 +
114.92*(k*t-1.15)^3 - 25.647*(k*t-1.15)^2 + 1.4028*(k*t-1.15)+ 1.2254;
    thetaK = -495.25*(k*t-1.15)^6 + 932.73*(k*t-1.15)^5 - 636.66*(k*t-1.15)^4
+ 183.33*(k*t-1.15)^3 - 14.969*(k*t-1.15)^2 - 3.2202*(k*t-1.15) + 1.6291;
    thetaH = -380.27*(k*t-1.15)^6 + 637.16*(k*t-1.15)^5 - 318.48*(k*t-1.15)^4
+ 5.3951*(k*t-1.15)^3 + 36.168*(k*t-1.15)^2 - 9.2958*(k*t-1.15) + 1.7083;
    thetaS = -131.72*(k*t-1.15)^6 + 275.37*(k*t-1.15)^5 - 269.03*(k*t-1.15)^4
+ 170.02*(k*t-1.15)^3 - 68.976*(k*t-1.15)^2 + 14.421*(k*t-1.15) + 2.6773;

    theta1=thetaA-thetaF;
    theta2=thetaK-thetaA+thetaF;
    theta3=thetaH-thetaK+thetaA-thetaF;
    theta4=thetaS-pi/2+thetaH-thetaK+thetaA-thetaF;

    xa=LF*(cos(thetaF)-1);
    ya=LF*sin(thetaF);

    xk=-L1*cos(theta1)+xa;
    yk=L1*sin(theta1)+ya;

    xh=L2*cos(theta2)+xk;
    yh=L2*sin(theta2)+yk;

    xs=-L3*cos(theta3)+xh;
    ys=L3*sin(theta3)+yh;

    xw=-L4*sin(theta4)+xs;
    yw=-L4*cos(theta4)+ys;

    P1=[xa ya];
    P2=[xk yk];
    P3=[xh yh];
    P4=[xs ys];
    P5=[xw yw];

    segF= line ([PF(1) P1(1)],[PF(2) P1(2)]);
    seg1= line ([P1(1) P2(1)],[P1(2) P2(2)]);
        seg2= line ([P2(1) P3(1)],[P2(2) P3(2)]);
    seg3=line ([P3(1) P4(1)],[P3(2) P4(2)]);
    seg4=line ([P4(1) P5(1)],[P4(2) P5(2)]);

    pause(0.001);

    delete(segF);
    delete(seg1);
    delete(seg2);
    delete(seg3);
    delete(seg4);
end
```