



Lara Rodrigues

**Influência de imperfeições geométricas iniciais
nas ressonâncias internas e vibrações
não lineares de cascas cilíndricas esbeltas**

Tese de Doutorado

Tese apresentada ao Programa de Pós-graduação
em Engenharia Civil da PUC-Rio como requisito
parcial para obtenção do grau de Doutor em
Engenharia Civil.

Orientador: Prof. Paulo Batista Gonçalves
Co-Orientador: Prof. Frederico Martins Alves da Silva

Rio de Janeiro
Janeiro de 2018



Lara Rodrigues

**Influência de imperfeições geométricas iniciais
nas ressonâncias internas e vibrações
não lineares de cascas cilíndricas esbeltas**

Tese apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Doutor pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da PUC-Rio. Aprovada pela Comissão Examinadora abaixo assinada.

Prof. Paulo Batista Gonçalves

Orientador

Departamento de Engenharia Civil e Ambiental – PUC-Rio

Prof. Frederico Martins Alves da Silva

Co-Orientador

Universidade Federal do Goiás

Prof^a. Deane de Mesquita Roehl

Departamento de Engenharia Civil e Ambiental – PUC-Rio

Prof. Diego Orlando

Universidade do Estado do Rio de Janeiro

Prof. José Manoel Balthazar

Universidade Estadual Paulista Júlio Mesquita Filho

Prof^a. Renata Machado Soares

Universidade Federal do Goiás

Prof. Márcio da Silveira Carvalho

Coordenador Setorial do

Centro Técnico Científico – PUC-Rio

Rio de Janeiro, 26 de janeiro de 2018.

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, do autor e do orientador.

Lara Rodrigues

Graduou-se em Engenharia Civil pela Universidade Federal de Goiás (UFG) em setembro de 2010. Ingressou no mestrado em Engenharia Civil da Universidade Federal de Goiás (UFG) em novembro de 2010, atuando na área de Instabilidade e Dinâmica das Estruturas. Em 2013, continuando na mesma linha de pesquisa do mestrado, iniciou o curso de doutorado na PUC-Rio.

Ficha catalográfica

Rodrigues, Lara

Influência de imperfeições geométricas iniciais nas ressonâncias internas e vibrações não lineares de cascas cilíndricas esbeltas / Lara Rodrigues ; orientador: Paulo Batista Gonçalves ; co-orientador: Frederico Martins Alves da Silva. – 2018.

176 f. : il. color. ; 30 cm

Tese (doutorado)–Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Engenharia Civil, 2018.

Inclui bibliografia

1. Engenharia civil – Teses. 2. Cascas cilíndricas. 3. Ressonância interna. 4. Imperfeições geométricas. 5. Bifurcações. 6. Oscilações não lineares. I. Gonçalves, Paulo Batista. II. Silva, Frederico Martins Alves da. III. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Engenharia Civil. IV. Título.

CDD: 624

À Gleice e ao Marcus, meus melhores amigos.

Agradecimentos

Aos professores Frederico Martins Alves da Silva e Paulo Batista Gonçalves pela compreensão, pelo apoio e pela paciência, pelos quais serei eternamente grata.

À Capes, ao CNPq e à PUC-Rio pelos auxílios concedidos, sem os quais este trabalho não poderia ser realizado.

Resumo

Rodrigues, Lara; Gonçalves, Paulo Batista; Silva, Frederico Martins Alves da. **Influência de imperfeições geométricas iniciais nas ressonâncias internas e vibrações não lineares de cascas cilíndricas esbeltas**. Rio de Janeiro, 2018. 176p. Tese de Doutorado - Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

A análise das ressonâncias internas em sistemas estruturais contínuos é uma das principais áreas de pesquisa no campo da dinâmica não linear. A ressonância interna entre dois modos de vibração ocorre quando a proporção de suas frequências naturais é um número inteiro. De particular importância, devido à sua influência na resposta estrutural, é a ressonância interna 1:1, geralmente associada às simetrias do sistema, a ressonância interna 1:2, devida às não linearidades quadráticas e a ressonância 1:3 decorrente de não linearidades cúbicas. A ressonância interna permite a transferência de energia entre os modos de vibração relacionados, levando geralmente a novos fenômenos com profunda influência sobre a estabilidade da resposta dinâmica. As cascas de revolução geralmente exibem ressonâncias internas devido à inerente simetria circunferencial e um denso espectro de frequência em sua faixa de frequências mais baixas. Isso pode levar não apenas a ressonâncias internas do tipo $m:n$, mas a múltiplas ressonâncias internas. Nesta tese é realizada a análise de múltiplas ressonâncias internas em cascas cilíndricas delgadas, em particular as ressonâncias internas de 1:1:1:1 e 1:1:2:2 são investigadas em detalhes, um tópico pouco explorado na literatura técnica. A investigação de ressonâncias internas em sistemas contínuos geralmente é realizada usando modelos discretos de baixa dimensão. Embora alguns trabalhos anteriores tenham investigado ressonâncias internas do tipo $m:n$ em cascas cilíndricas, muitos resultados não são consistentes, uma vez que os modelos discretos derivados não consideram os acoplamentos modais devido a não linearidades quadráticas e cúbicas. Aqui, usando um procedimento de perturbação, expansões modais consistentes são derivadas para um número arbitrário de modos de interação, levando a modelos de baixa dimensão confiáveis. A precisão desses modelos é corroborada usando o método Karhunen-Loève. Finalmente, é bem sabido que pequenas imperfeições geométricas da ordem da espessura da casca têm uma

forte influência na sua resposta não linear. No entanto, sua influência nas ressonâncias internas, instabilidade dinâmica e transferência de energia é desconhecida. Assim, a influência de diferentes tipos de imperfeição modal é devidamente considerada na presente análise. Utilizando os modelos discretos aqui derivados, é apresentada uma análise detalhada das bifurcações, utilizando técnicas de continuação e o critério de estabilidade de Floquet, esclarecendo a importância das ressonâncias internas nas vibrações não lineares e instabilidades de cascas cilíndricas. Os resultados também confirmam que a forma e a magnitude das imperfeições geométricas iniciais têm uma influência profunda nos resultados, permitindo ou impedindo a transferência de energia entre os modos ressonantes considerados.

Palavras-chave

Cascas cilíndricas; ressonância interna; imperfeições geométricas; bifurcações.

Abstract

Rodrigues, Lara; Gonçalves, Paulo Batista (Advisor); Silva, Frederico Martins Alves da (Co-advisor). **Influence of initial geometric imperfections on the internal resonances and non-linear vibrations of thin-walled cylindrical shells**. Rio de Janeiro, 2018. 176p. Tese de Doutorado - Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

The analysis of internal resonances in continuous structural systems is one of the main research areas in the field of nonlinear dynamics. Internal resonance between two vibration modes occur when the ratio of their natural frequencies is an integer number. Of particular importance, due to its influence on the structural response, is the 1:1 internal resonance, usually associated with system symmetries, the 1:2 internal resonance, due to quadratic nonlinearities, and the 1:3 resonance arising from cubic nonlinearities. The internal resonance enables the energy transfer between the related vibration modes, leading usually to new phenomena with profound influence on the stability of the dynamic response. Shells of revolution usually exhibit internal resonances due to the inherent circumferential symmetry and a dense frequency spectrum in their lower frequency range. This may lead not only to $m:n$ internal resonances, but also multiple internal resonances. In this thesis, the analysis of multiple internal resonances in slender cylindrical shells is conducted, in particular 1:1:1:1 and 1:1:2:2 internal resonances are investigated in detail, a topic rarely found in the technical literature. The investigation of internal resonances in continuous systems is usually conducted using low dimensional discrete models. Although some previous works have investigated $m:n$ internal resonances in cylindrical shells, many results are not consistent since the derived discrete models do not consider the modal couplings due to quadratic and cubic nonlinearities. Here, using a perturbation procedure, consistent modal expansions are derived for an arbitrary number of interacting modes, leading to reliable low dimensional models. The accuracy of these models is corroborated using the Karhunen-Loève method. Finally, it is well known that small geometric imperfections of the order of the shell thickness has a strong influence on the shell nonlinear response. However, their influence on internal resonances, dynamic instability and energy

transfer is largely unknown. Thus, the influence of different types of modal imperfection is properly considered in the present analysis. Using the derived discrete models, a detail bifurcation analysis, using continuation techniques and Floquet stability criterion, is presented, clarifying the importance of internal resonances on the nonlinear vibrations and instabilities of cylindrical shells. The results also confirm that the form and magnitude of initial geometric imperfections has a profound influence on the results enabling or preventing the energy transfer among the considered resonant modes.

Keywords

Cylindrical shells; internal resonance; geometric imperfections; bifurcations.

Sumário

1.	Introdução	29
1.1.	Objetivos	43
1.2.	Estrutura do texto	44
2.	Modelagem da casca cilíndrica	45
2.1.	Campo de deformações da casca cilíndrica	45
2.2.	Esforços internos atuantes na casca cilíndrica	47
2.3.	Funcionais de energia da casca cilíndrica	49
2.4.	Sistema de equações não lineares de movimento	51
3.	Determinação do campo de deslocamentos transversais considerando a ressonância interna	54
3.1.	Vibrações livres e lineares da casca cilíndrica	55
3.2.	Método da perturbação para determinação da expansão modal para os deslocamentos laterais	60
3.3.	Vibrações livres e não lineares da casca cilíndrica	66
3.4.	Expansões modais para os deslocamentos laterais utilizadas neste trabalho	76
4.	Casca imperfeita com ressonância interna 1:1	78
4.1.	Casca cilíndrica perfeita	79
4.2.	Casca cilíndrica com imperfeição na forma do modo principal de vibração	80
4.3.	Casca cilíndrica com imperfeição na forma do modo axissimétrico de vibração	86
4.3.1.	Valores positivos da imperfeição axissimétrica	86
4.3.2.	Valores negativos da imperfeição axissimétrica	89
4.4.	Casca cilíndrica com imperfeição na forma do modo não linear de vibração	92
4.5.	Casca cilíndrica com imperfeição na forma do modo (1, 6)s	95
4.6.	Casca cilíndrica com imperfeição na forma da soma dos modos (m, n)	96

5.	Influência da imperfeição geométrica inicial na resposta dinâmica não linear de cascas cilíndricas com ressonância 1:1:1:1	101
5.1.	Casca cilíndrica excitada lateralmente no modo (m, n)	102
5.1.1.	Casca cilíndrica com imperfeição na forma do modo principal de vibração.....	103
5.1.2.	Casca cilíndrica com imperfeição na forma do modo axissimétrico de vibração	109
5.1.2.1.	Valores positivos da imperfeição	109
5.1.2.2.	Valores negativos da imperfeição.....	110
5.1.3.	Casca cilíndrica com imperfeição na forma do modo $(1, 6)_s$	112
5.1.4.	Casca cilíndrica com imperfeição na forma da soma dos dois modos (m, n)	116
5.1.5.	Casca cilíndrica com imperfeições geométricas de magnitudes aleatórias	120
5.2.	Casca cilíndrica excitada lateralmente no modo (m, N)	128
5.2.1.	Casca cilíndrica com imperfeição na forma do modo $(1, 6)_c$	129
5.2.2.	Casca cilíndrica com imperfeição na forma do modo $(1, 6)_s$	131
5.2.3.	Casca cilíndrica com imperfeição na forma dos modos $(1, 6)_c$ e $(1, 6)_s$	133
6.	Influência da imperfeição geométrica inicial na resposta dinâmica não linear de cascas cilíndricas com ressonância 1:1:2:2.....	137
6.1.	Casca cilíndrica com imperfeição na forma do modo $(1, 6)_c$	139
6.2.	Casca cilíndrica com imperfeição na forma do modo $(2, 6)_c$	141
6.3.	Casca cilíndrica com imperfeição na forma do modo axissimétrico de vibração associado ao modo $(1, 6)$	144
6.4.	Casca cilíndrica com imperfeição na forma do modo axissimétrico de vibração associado ao modo $(2, 6)$	146
6.5.	Casca cilíndrica com imperfeição na forma do modo $(1, 6)_s$	148

6.6.	Casca cilíndrica com imperfeição na forma do modo (2, 6)s.....	150
6.7.	Casca cilíndrica com imperfeição na forma dos modos (1, 6)	153
6.8.	Casca cilíndrica com imperfeição na forma dos modos (2, 6)	156
6.9.	Casca cilíndrica com imperfeições geométricas aleatórias na forma do modo linear de vibração	160
7.	Conclusões e sugestões	168
8.	Referências bibliográficas	172

Lista de figuras

Figura 1.1 – Exemplos de estruturas em forma de cascas esbeltas: (a) Aviões; (b) Submarinos; (c) Espaçonaves. Fonte: br.freepik.com.....	29
Figura 2.1 – Casca cilíndrica. (a) Geometria e campo de deslocamentos da casca cilíndrica. (b) detalhe da seção transversal da casca cilíndrica.	46
Figura 2.2 – Convenção de sinais adotada na definição dos esforços.	49
Figura 2.3 – Casca sob pressão lateral.....	49
Figura 3.1 – Variação da frequência adimensional em função do número de ondas circunferenciais com $m = 1$ e variando L/R para (a) $R/h = 100$, (b) $R/h = 200$, (c) $R/h = 400$ e (d) $R/h = 800$. — $L/R = 0,25$, — $L/R = 0,50$, — $L/R = 1,00$, — $L/R = 2,00$	56
Figura 3.2 – Variação da frequência adimensional em função do número de ondas circunferenciais variando o valor de m para $R/h = 100$ e $L/R = 2$	57
Figura 3.3 – Variação da frequência adimensional em função do comprimento da casca cilíndrica para $m = 1$ e diversos valores de ondas circunferenciais. $R/h = 100$	58
Figura 3.4 – Variação da frequência adimensional em função do número de ondas circunferenciais para vários valores de L . $m = 1$	58
Figura 3.5 – Variação da frequência adimensional em função do número de ondas circunferenciais para $R/h = 50$ e $L/R \sim 0,74$. Ressonância interna entre os modos $(m, n) = (1, 6)$ e $(m + 1, n) = (2, 6)$	59
Figura 3.6 – Forma dos modos de vibração utilizados na expansão do deslocamento lateral com interação em n	63
Figura 3.7 – Forma dos modos de vibração utilizados na expansão do deslocamento lateral com interação em m	65
Figura 3.8 – Relações frequência-amplitude sem considerar a interação modal obtidas da aplicação do <i>shooting method</i> para: (a) $(m, n) = (1, 5)$, (b) $(m, n) = (1, 6)$ e (c) Modelo com 5 GDL para $(m, n) = (1, 5)$ e $(m, n) = (1, 6)$	68
Figura 3.9 – Planos-fase obtidos da aplicação do <i>shooting method</i> para $(m, n) = (1, 6)$ dos modelos com 3, 4 e 5 GDL.	68

Figura 3.10 – Relações frequência-amplitude sem considerar a interação modal obtidas da aplicação do <i>shooting method</i> para $(m, n) = (1, 6)$, sendo — o modelo com 5GDL e — o modelo com 6GDL.....	69
Figura 3.11 – Respostas no tempo do modelo com 6 GDL para o modo de vibração $(m, n) = (1, 5)$	73
Figura 3.12 – POMs e seus respectivos POVs encontrados a partir dos resultados da aplicação do <i>shooting method</i> ao modelo com 6 GDL e modo de vibração $(m, n) = (1, 5)$	74
Figura 4.1 – Curvas de ressonância para a casca perfeita com ressonância 1:1. — Trecho estável, --- Trecho instável e • – ponto de bifurcação.	79
Figura 4.2 – Representação da curva de ressonância do modo $(1, 6)c$ com e sem ressonância interna 1:1. — Soluções estáveis e --- Soluções instáveis.....	80
Figura 4.3 – Relações frequência-amplitude em função do nível de imperfeição na forma do modo $(1, 6)c$	81
Figura 4.4 – Comparação das relações frequência-amplitude para diferentes valores de imperfeição na forma do modo $(1, 6)c$	82
Figura 4.5 – Curvas de ressonância para a casca imperfeita com ressonância 1:1 com $W_{11}/h \neq 0$. Imperfeição na forma do modo $(1, 6)c$	84
Figura 4.6 – Curvas de ressonância para a casca imperfeita com W_{11}/h entre 0 e 0,180.....	85
Figura 4.7 – Curvas de ressonância para o modo $(1, 6)c$ da casca imperfeita. (a) e (d) $W_{11}/h = 0,030$, (b) e (e) $W_{11}/h = 0,060$ e (c) e (f) $W_{11}/h = 0,120$	86
Figura 4.8 – Relações frequência-amplitude da casca com imperfeições positivas na forma do modo axissimétrico.....	87
Figura 4.9 – Comparação das relações frequência-amplitude para diferentes valores positivos de imperfeição na forma do modo axissimétrico.....	87
Figura 4.10 – Curvas de ressonância para a casca imperfeita com $W_{02}/h \neq 0$ (valores positivos de imperfeição).....	88
Figura 4.11 – Curvas de ressonância para a casca imperfeita com W_{02}/h entre 0 e 0,180 (valores positivos de imperfeição).	89
Figura 4.12 – Relações frequência-amplitude da casca com imperfeições negativas na forma do modo axissimétrico.	89

Figura 4.13 – Comparação das relações frequência-amplitude para diferentes valores negativos de imperfeição na forma do modo axissimétrico.....	90
Figura 4.14 – Curvas de ressonância para a casca imperfeita com $W_{02}/h \neq 0$ (valores negativos de imperfeição).	91
Figura 4.15 – Curvas de ressonância para a casca imperfeita com W_{02}/h entre -0,180 e 0 (valores negativos de imperfeição).....	91
Figura 4.16 – Relações frequência-amplitude da casca com imperfeição na forma do modo não linear de vibração.	93
Figura 4.17 – Comparação das relações frequência-amplitude para diferentes valores de imperfeição na forma do modo não linear de vibração.....	94
Figura 4.18 – Curvas de ressonância para a casca imperfeita com $W_{11}/h \neq 0$	95
Figura 4.19 – Curvas de ressonância para a casca imperfeita com $W_{11}^i/h \neq 0$	95
Figura 4.20 – Curvas de ressonância para (1, 6)c da casca imperfeita. (a) $W_{11}^i/h = 0,180$, (b) $W_{11}^i/h = 0,198$ e (c) $W_{11}^i/h = 0,216$	96
Figura 4.21 – Curvas de ressonância para a casca imperfeita com $W_{11}/h + W_{11}^i/h \neq 0$	97
Figura 4.22 – Curvas de ressonância do modo (1, 6)c da casca imperfeita com $W_{11}/h + W_{11}^i/h \neq 0$	97
Figura 4.23 – Curvas de ressonância para a casca imperfeita com $W_{11}/h = 0,030$ e $W_{11}^i/h = 0,030$ obtidas através da aplicação do método da força bruta.	98
Figura 4.24 – Respostas no tempo e planos-fase obtidos da aplicação do método de Runge-Kutta ao caso mostrado na Figura 4.23 adotando-se vários valores de Ω_L	99
Figura 5.1 – Curvas de ressonância para a casca perfeita com ressonância 1:1:1:1 sendo $P_{L1} \neq 0$ e $P_{L2} = 0$. Onde: — Trecho estável, --- Trecho instável.	102
Figura 5.2 – Curvas de ressonância para a casca imperfeita com ressonância 1:1:1:1 sendo $P_{L1} \neq 0$ e $P_{L2} = 0$ com $W_{11}^i/h \neq 0$	104
Figura 5.3 – Curvas de ressonância para a casca imperfeita com W_{11}^i/h entre 0 e 0,180. $P_{L1} \neq 0$ e $P_{L2} = 0$	105
Figura 5.4 – Curvas de ressonância para a casca imperfeita com ressonância 1:1:1:1 sendo $P_{L1} \neq 0$ e $P_{L2} = 0$ com $W_{11}^i/h \neq 0$	106

Figura 5.5 – Curvas de ressonância do modo (1, 6)c da casca imperfeita com ressonância 1:1:1:1 sendo $P_{L1} \neq 0$ e $P_{L2} = 0$ com $W'_{11}/h = 0,180$, $W^i_{11}/h = 0,198$ e $W^i_{11}/h = 0,216$.	107
Figura 5.6 – Curvas de ressonância para a casca imperfeita com ressonância 1:1:1:1 sendo $P_{L1} \neq 0$ e $P_{L2} = 0$ com W^i_{11}/h entre 0 e 0,180.	107
Figura 5.7 – Curvas de ressonância da casca imperfeita com ressonância 1:1:1:1 sendo $P_{L1} \neq 0$ e $P_{L2} = 0$ com $W'_{11}/h = 0,030$, $W^i_{11}/h = 0,060$ e $W^i_{11}/h = 0,120$.	108
Figura 5.8 – Curvas de ressonância para a casca imperfeita com $P_{L1} \neq 0$, $P_{L2} = 0$ e $W'_{11}/h \neq 0$.	108
Figura 5.9 – Curvas de ressonância para a casca imperfeita com ressonância 1:1:1:1 sendo $P_{L1} \neq 0$ e $P_{L2} = 0$ com $W^i_{02}/h \neq 0$.	110
Figura 5.10 – Curvas de ressonância para a casca imperfeita com ressonância 1:1:1:1 sendo $P_{L1} \neq 0$ e $P_{L2} = 0$ com W^i_{02}/h entre 0 e 0,180.	110
Figura 5.11 – Curvas de ressonância para a casca imperfeita com ressonância 1:1:1:1 sendo $P_{L1} \neq 0$ e $P_{L2} = 0$ com $W^i_{02}/h \neq 0$.	111
Figura 5.12 – Curvas de ressonância para a casca imperfeita com $P_{L1} \neq 0$, $P_{L2} = 0$ e W^i_{02}/h entre -0,180 e 0.	111
Figura 5.13 – Curvas de ressonância para a casca imperfeita com $P_{L1} \neq 0$, $P_{L2} = 0$ e $W^i_{11}/h \neq 0$.	112
Figura 5.14 – Curvas de ressonância do modo (1, 6)c da casca imperfeita com ressonância 1:1:1:1 sendo $P_{L1} \neq 0$ e $P_{L2} = 0$ com $W'_{11}/h = 0,180$, $W^i_{11}/h = 0,198$ e $W^i_{11}/h = 0,216$.	113
Figura 5.15 – Curvas de ressonância para a casca imperfeita com ressonância 1:1:1:1 sendo $P_{L1} \neq 0$ e $P_{L2} = 0$ com W^i/h_{11} entre 0 e 0,180.	113
Figura 5.16 – Curvas de ressonância da casca imperfeita com $W'_{11}/h = 0,030$, $W^i_{11}/h = 0,060$ e $W^i_{11}/h = 0,120$.	113
Figura 5.17 – Curvas de ressonância para a casca imperfeita com ressonância 1:1:1:1 sendo $P_{L1} \neq 0$ e $P_{L2} = 0$ com $W^i_{11}/h \neq 0$.	114
Figura 5.18 – Curvas de ressonância do modo (1, 6)c da casca imperfeita com ressonância 1:1:1:1 sendo $P_{L1} \neq 0$ e $P_{L2} = 0$ com $W'_{11}/h = 0,180$, $W^i_{11}/h = 0,198$ e $W^i_{11}/h = 0,216$.	115
Figura 5.19 – Curvas de ressonância da casca imperfeita com ressonância 1:1:1:1 sendo $P_{L1} \neq 0$ e $P_{L2} = 0$ com $W'_{11}/h = 0,030$, $W^i_{11}/h = 0,060$ e $W^i_{11}/h = 0,120$.	115
Figura 5.20 – Curvas de ressonância para a casca imperfeita com ressonância 1:1:1:1 sendo $P_{L1} \neq 0$ e $P_{L2} = 0$ com $W^i_{11}/h \neq 0$.	116

Figura 5.21 – Curvas de ressonância do modo (1, 6)c para a casca imperfeita com $P_{L1} \neq 0$ e $P_{L2} = 0$	117
Figura 5.22 – Curvas de ressonância para (1, 6)c da casca imperfeita com ressonância 1:1:1:1 sendo $P_{L1} \neq 0$ e $P_{L2} = 0$ com (a) $W_{11}^i/h = 0,030$ e $W_{11}^i/h = 0,150$, (b) $W_{11}^i/h = 0,060$ e $W_{11}^i/h = 0,120$ e (c) $W_{11}^i/h = 0,120$ e $W_{11}^i/h = 0,060$	118
Figura 5.23 – Curvas de ressonância para a casca imperfeita com ressonância 1:1:1:1 sendo $P_{L1} \neq 0$ e $P_{L2} = 0$ com W_{11}^i/h entre 0 e 0,180.	118
Figura 5.24 – Curvas de ressonância da casca imperfeita com ressonância 1:1:1:1 sendo $P_{L1} \neq 0$ e $P_{L2} = 0$ com (a) e (d) $W_{11}^i/h = 0,030$ e $W_{11}^i/h = 0,150$, (b) e (e) $W_{11}^i/h = 0,060$ e $W_{11}^i/h = 0,120$ e (c) e (f) $W_{11}^i/h = 0,120$ e $W_{11}^i/h = 0,060$	119
Figura 5.25 – Curvas de ressonância para a casca imperfeita com ressonância 1:1:1:1 sendo $P_{L1} \neq 0$ e $P_{L2} = 0$ com $W_{11}^i/h \neq 0$	120
Figura 5.26 – Curvas de ressonância para a casca imperfeita com ressonância 1:1:1:1 sendo $P_{L1} \neq 0$ e $P_{L2} = 0$ com $W/h \neq 0$	122
Figura 5.27 – Curvas de ressonância para a casca imperfeita com ressonância 1:1:1:1 sendo $P_{L1} \neq 0$ e $P_{L2} = 0$ com $W/h \neq 0$, caso 1.....	123
Figura 5.28 – Curvas de ressonância para a casca imperfeita com ressonância 1:1:1:1 sendo $P_{L1} \neq 0$ e $P_{L2} = 0$ com $W/h \neq 0$, caso 2.....	123
Figura 5.29 – Curvas de ressonância para a casca imperfeita com ressonância 1:1:1:1 sendo $P_{L1} \neq 0$ e $P_{L2} = 0$ com $W/h \neq 0$, caso 3.....	124
Figura 5.30 – Curvas de ressonância para a casca imperfeita com ressonância 1:1:1:1 sendo $P_{L1} \neq 0$ e $P_{L2} = 0$ com $W/h \neq 0$, caso 4.....	124
Figura 5.31 – Curvas de ressonância para a casca imperfeita com ressonância 1:1:1:1 sendo $P_{L1} \neq 0$ e $P_{L2} = 0$ com $W/h \neq 0$, caso 5.....	125
Figura 5.32 – Curvas de ressonância para a casca imperfeita com ressonância 1:1:1:1 sendo $P_{L1} \neq 0$ e $P_{L2} = 0$ com $W/h \neq 0$, caso 6.....	125
Figura 5.33 – Curvas de ressonância para a casca imperfeita com ressonância 1:1:1:1 sendo $P_{L1} \neq 0$ e $P_{L2} = 0$ com $W/h \neq 0$, caso 7.....	126
Figura 5.34 – Curvas de ressonância para a casca imperfeita com ressonância 1:1:1:1 sendo $P_{L1} \neq 0$ e $P_{L2} = 0$ com $W/h \neq 0$, caso 8.....	126
Figura 5.35 – Curvas de ressonância para a casca imperfeita com ressonância 1:1:1:1 sendo $P_{L1} \neq 0$ e $P_{L2} = 0$ com $W/h \neq 0$, caso 9.....	127
Figura 5.36 – Curvas de ressonância para a casca imperfeita com ressonância 1:1:1:1 sendo $P_{L1} \neq 0$ e $P_{L2} = 0$ com $W/h \neq 0$, caso 10.....	127

Figura 5.37 – Curvas de ressonância para a casca perfeita com $P_{L1} = 0$ e $P_{L2} \neq 0$. Onde: — Trecho estável, --- Trecho instável.	128
Figura 5.38 – Comparação das curvas de ressonância para a casca perfeita para $P_{L1} \neq 0$ e $P_{L2} = 0$ (em cinza) e $P_{L1} = 0$ e $P_{L2} \neq 0$ (em preto).	129
Figura 5.39 – Curvas de ressonância para a casca imperfeita com ressonância 1:1:1:1 sendo $P_{L1} = 0$ e $P_{L2} \neq 0$ com $W_{11}^i/h \neq 0$	130
Figura 5.40 – Curvas de ressonância do modo (1, 7)c da casca imperfeita com $P_{L1} = 0$ e $P_{L2} \neq 0$. (a) $W_{11}^i/h = 0,180$, (b) $W_{11}^i/h = 0,198$ e (c) $W_{11}^i/h = 0,216$	130
Figura 5.41 – Curvas de ressonância do modo (1, 7)c da casca imperfeita com $P_{L1} = 0$ e $P_{L2} \neq 0$. (a) $W_{11}^i/h = 0,030$, (b) $W_{11}^i/h = 0,060$ e (c) $W_{11}^i/h = 0,120$	130
Figura 5.42 – Curvas de ressonância para a casca imperfeita com $P_{L1} = 0$ e $P_{L2} \neq 0$ e $W_{11}^i/h \neq 0$	131
Figura 5.43 – Curvas de ressonância da casca com imperfeição na forma do modo (1, 6)s com (a) e (d) $W_{11}^i/h = 0,030$, (b) e (e) $W_{11}^i/h = 0,060$, (c) e (f) $W_{11}^i/h = 0,120$, (g) e (j) $W_{11}^i/h = 0,180$, (h) e (k) $W_{11}^i/h = 0,198$ e (i) e (l) $W_{11}^i/h = 0,216$	132
Figura 5.44 – Curvas de ressonância para a casca da casca com imperfeição na forma do modo (1, 6)s com $W_{11}^i/h \neq 0$	133
Figura 5.45 – Curvas de ressonância da casca com imperfeição na forma da soma dos modos (1, 6)c e (1, 6)s.	134
Figura 5.46 – Curvas de ressonância para a casca imperfeita com ressonância 1:1:1:1 sendo $P_{L1} = 0$ e $P_{L2} \neq 0$ com $W_{11}^i/h \neq 0$	135
Figura 6.1 – Curvas de ressonância para a casca perfeita com ressonância 1:1:2:2 sendo $P_{L1} \neq 0$ e $P_{L2} = 0$. Onde: — Trecho estável, --- Trecho instável.	138
Figura 6.2 – Curvas de ressonância para a casca imperfeita com ressonância 1:1:2:2 sendo $P_{L1} \neq 0$, $P_{L2} = 0$ e $m = 1$ com $W_{11}^i/h \neq 0$	139
Figura 6.3 – Curvas de ressonância para a casca imperfeita com ressonância 1:1:2:2 sendo $P_{L1} \neq 0$, $P_{L2} = 0$ e $M = 2$ com $W_{11}^i/h \neq 0$	141
Figura 6.4 – Curvas de ressonância da casca imperfeita com $P_{L1} \neq 0$, $P_{L2} = 0$ e W_{11}^i/h entre 0 e 0,107.	143
Figura 6.5 – Curvas de ressonância para a casca imperfeita com ressonância 1:1:2:2 sendo $P_{L1} \neq 0$, $P_{L2} = 0$ e $M = 2$ com $W_{11}^i/h = 0,018$, $W_{11}^i/h = 0,036$ e $W_{11}^i/h = 0,072$	143

Figura 6.6 – Curvas de ressonância para a casca imperfeita com ressonância 1:1:2:2 sendo $P_{L1} \neq 0$, $P_{L2} = 0$ e $m = 1$ com $W_{02}/h \neq 0$ (valores positivos).	144
Figura 6.7 – Curvas de ressonância para a casca imperfeita com ressonância 1:1:2:2 sendo $P_{L1} \neq 0$, $P_{L2} = 0$ e $m = 1$ com $W_{02}/h \neq 0$ (valores positivos entre 0 e 0,107).....	145
Figura 6.8 – Curvas de ressonância para a casca imperfeita com ressonância 1:1:2:2 sendo $P_{L1} \neq 0$, $P_{L2} = 0$ e $m = 1$ com $W_{02}/h \neq 0$ (valores negativos).....	145
Figura 6.9 – Curvas de ressonância para a casca imperfeita com ressonância 1:1:2:2 sendo $P_{L1} \neq 0$, $P_{L2} = 0$ e $M = 2$ com $W_{02}/h \neq 0$ (valores positivos).	147
Figura 6.10 – Curvas de ressonância para a casca imperfeita com ressonância 1:1:2:2 sendo $P_{L1} \neq 0$, $P_{L2} = 0$ e $M = 2$ com $W_{02}/h \neq 0$ (valores negativos).	147
Figura 6.11 – Curvas de ressonância para a casca imperfeita com ressonância 1:1:2:2 sendo $P_{L1} \neq 0$, $P_{L2} = 0$ e $m = 1$ com $W_{11}^i/h \neq 0$	149
Figura 6.12 – Curvas de ressonância para a casca imperfeita com ressonância 1:1:2:2 sendo $P_{L1} \neq 0$, $P_{L2} = 0$ e $m = 1$ com $W_{11}^i/h = 0,018$, $W_{11}^i/h = 0,036$ e $W_{11}^i/h = 0,072$	149
Figura 6.13 – Curvas de ressonância para a casca imperfeita com ressonância 1:1:2:2 sendo $P_{L1} \neq 0$, $P_{L2} = 0$ e $M = 2$ com $W_{11}^i/h \neq 0$	150
Figura 6.14 – Curvas de ressonância para a casca imperfeita com ressonância 1:1:2:2 sendo $P_{L1} \neq 0$, $P_{L2} = 0$ e $M = 2$ com W_{11}^i/h entre 0 e 0,107.....	151
Figura 6.15 – Curvas de ressonância apresentadas separadamente para a casca imperfeita com ressonância 1:1:2:2 sendo $P_{L1} \neq 0$, $P_{L2} = 0$ e $M = 2$ com $W_{11}^i/h \neq 0$	152
Figura 6.16 – Curvas de ressonância para a casca imperfeita com ressonância do tipo 1:1:2:2 sendo $P_{L1} \neq 0$, $P_{L2} = 0$ e $m = 1$ com $W_{11}^i/h \neq 0$ e $W_{11}^i/h \neq 0$	153
Figura 6.17 – Curvas de ressonância mostradas separadamente para a casca imperfeita com ressonância 1:1:2:2 sendo $P_{L1} \neq 0$, $P_{L2} = 0$ e $m = 1$ com $W_{11}^i/h \neq 0$ e $W_{11}^i/h \neq 0$	155
Figura 6.18 – Curvas de ressonância para a casca imperfeita com ressonância do tipo 1:1:2:2 sendo $P_{L1} \neq 0$, $P_{L2} = 0$ e $M = 2$ com $W_{11}^i/h \neq 0$ e $W_{11}^i/h \neq 0$	156

Figura 6.19 – Curvas de ressonância para a casca imperfeita com ressonância 1:1:2:2 sendo $P_{L1} \neq 0$, $P_{L2} = 0$ e $M = 2$ com $W'_{11}/h = 0,018$ e $W^i_{11}/h = 0,090$	157
Figura 6.20 – Curvas de ressonância para a casca imperfeita com ressonância 1:1:2:2 sendo $P_{L1} \neq 0$, $P_{L2} = 0$ e $M = 2$ com $W'_{11}/h = 0,036$ e $W^i_{11}/h = 0,072$	158
Figura 6.21 – Curvas de ressonância para a casca imperfeita com ressonância 1:1:2:2 sendo $P_{L1} \neq 0$, $P_{L2} = 0$ e $M = 2$ com $W'_{11}/h = 0,054$ e $W^i_{11}/h = 0,054$	158
Figura 6.22 – Curvas de ressonância para a casca imperfeita com ressonância 1:1:2:2 sendo $P_{L1} \neq 0$, $P_{L2} = 0$ e $M = 2$ com $W'_{11}/h = 0,072$ e $W^i_{11}/h = 0,036$	159
Figura 6.23 – Curvas de ressonância para a casca imperfeita com ressonância 1:1:2:2 sendo $P_{L1} \neq 0$, $P_{L2} = 0$ e $M = 2$ com $W'_{11}/h = 0,090$ e $W^i_{11}/h = 0,018$	159
Figura 6.24 – Curvas de ressonância para a casca imperfeita com ressonância 1:1:2:2 sendo $P_{L1} \neq 0$, $P_{L2} = 0$ e $m = 1$ com $W/h \neq 0$	161
Figura 6.25 – Curvas de ressonância para a casca imperfeita com ressonância 1:1:2:2 sendo $P_{L1} \neq 0$, $P_{L2} = 0$ e $m = 1$ com $W/h \neq 0$ caso 1.	162
Figura 6.26 – Curvas de ressonância para a casca imperfeita com ressonância 1:1:2:2 sendo $P_{L1} \neq 0$, $P_{L2} = 0$ e $m = 1$ com $W/h \neq 0$ caso 2.	162
Figura 6.27 – Curvas de ressonância para a casca imperfeita com ressonância 1:1:2:2 sendo $P_{L1} \neq 0$, $P_{L2} = 0$ e $m = 1$ com $W/h \neq 0$ caso 3.	163
Figura 6.28 – Curvas de ressonância para a casca imperfeita com ressonância 1:1:2:2 sendo $P_{L1} \neq 0$, $P_{L2} = 0$ e $m = 1$ com $W/h \neq 0$ caso 4.	163
Figura 6.29 – Curvas de ressonância para a casca imperfeita com ressonância 1:1:2:2 sendo $P_{L1} \neq 0$, $P_{L2} = 0$ e $m = 1$ com $W/h \neq 0$ caso 5.	164
Figura 6.30 – Curvas de ressonância para a casca imperfeita com ressonância 1:1:2:2 sendo $P_{L1} \neq 0$, $P_{L2} = 0$ e $m = 1$ com $W/h \neq 0$ caso 6.	164
Figura 6.31 – Curvas de ressonância para a casca imperfeita com ressonância 1:1:2:2 sendo $P_{L1} \neq 0$, $P_{L2} = 0$ e $m = 1$ com $W/h \neq 0$ caso 7.	165
Figura 6.32 – Curvas de ressonância para a casca imperfeita com ressonância 1:1:2:2 sendo $P_{L1} \neq 0$, $P_{L2} = 0$ e $m = 1$ com $W/h \neq 0$ caso 8.	165
Figura 6.33 – Curvas de ressonância para a casca imperfeita com ressonância 1:1:2:2 sendo $P_{L1} \neq 0$, $P_{L2} = 0$ e $m = 1$ com $W/h \neq 0$ caso 9.	166
Figura 6.34 – Curvas de ressonância para a casca imperfeita com ressonância 1:1:2:2 sendo $P_{L1} \neq 0$, $P_{L2} = 0$ e $m = 1$ com $W/h \neq 0$ caso 10.	166

Lista de tabelas

Tabela 3.1 – Condições iniciais utilizadas para a construção dos planos-fase apresentados na Figura 3.9.....	69
Tabela 3.2 – Participação de cada modo da expansão com 6 GDL e modo de vibração $(m, n) = (1, 5)$ nos POMs encontrados a partir dos resultados da aplicação do <i>shooting method</i>	75
Tabela 4.1 – Cores utilizadas nas curvas de ressonância para a casca imperfeita com ressonância interna 1:1.....	81
Tabela 4.2 – Variação da frequência natural dos modos $(1, 6)_c$ e $(1, 6)_s$ com o nível de imperfeição. Imperfeição na forma do modo $(1, 6)_c$	83
Tabela 4.3 – Variação da frequência com o nível de imperfeição baseado na relação (4.4). Imperfeição na forma do modo $(1, 6)_c$	84
Tabela 4.4 – Resumo das cores utilizadas nas curvas de ressonância com W_{11}/h entre 0 e 0,180 e interação 1:1.	84
Tabela 4.5 – Variação das frequências naturais com o nível de imperfeição na forma do modo axissimétrico (valores positivos).	87
Tabela 4.6 – Variação das frequências naturais com o nível de imperfeição na forma do modo axissimétrico (valores negativos).....	90
Tabela 4.7 – Amplitudes do modo não linear para $A_{11} = 0,500$ e amplitudes da imperfeição de forma que a imperfeição máxima seja $W_{11}/h \approx 0,180$	92
Tabela 4.8 – Amplitudes do modo não linear para $A_{11} = 0,500$ e amplitudes da imperfeição de forma que a imperfeição máxima seja $W_{11}/h \approx 0,198$	93
Tabela 4.9 – Amplitudes do modo não linear para $A_{11} = 0,500$ e amplitudes da imperfeição de forma que a imperfeição máxima seja $W_{11}/h \approx 0,216$	93
Tabela 4.10 – Variação das frequências naturais com o nível de imperfeição na forma do modo não linear de vibração.....	94
Tabela 4.11 – Resumo das cores utilizadas nas curvas de ressonância com $W/h = 0,180$ e interação 1:1.....	96

Tabela 4.12 – Modos ativados em cada um dos casos de imperfeição com interação 1:1. Pressão lateral excitando diretamente o modo (1, 6)c.	100
Tabela 5.1 – Resumo das cores utilizadas nas curvas de ressonância para os casos com ressonância 1:1:1:1.	103
Tabela 5.2 – Variação das frequências com o nível de imperfeição aplicada na forma do modo (1, 6)c para os casos com ressonância 1:1:1:1.	104
Tabela 5.3 – Resumo das cores utilizadas nas curvas de ressonância com W_{11}/h entre 0 e 0,180 para os casos com ressonância 1:1:1:1.	104
Tabela 5.4 – Resumo das cores utilizadas nas curvas de ressonância com $W/h = 0,180$ com ressonância 1:1:1:1.	117
Tabela 5.5 – Valores das amplitudes da imperfeição obtidos aleatoriamente para ressonância 1:1:1:1.	121
Tabela 5.6 – Modos ativados em cada um dos casos de imperfeição com ressonância interna 1:1:1:1. Pressão lateral excitando diretamente o modo (1, 6)c.	136
Tabela 5.7 – Modos ativados em cada um dos casos de imperfeição com interação 1:1:1:1. Pressão lateral excitando diretamente o modo (1, 7)c.	136
Tabela 6.1 – Resumo das cores utilizadas nas curvas de ressonância para os casos com ressonância 1:1:2:2.	139
Tabela 6.2 – Variação da frequência com o nível de imperfeição aplicada na forma do modo fundamental de vibração (1, 6)c para os casos com ressonância 1:1:2:2.	140
Tabela 6.3 – Variação da frequência com o nível de imperfeição aplicada na forma do modo fundamental de vibração (2, 6)c para os casos com ressonância 1:1:2:2.	142
Tabela 6.4 – Resumo das cores utilizadas nas curvas de ressonância com W_{11}/h entre 0 e 0,107 para os casos com ressonância 1:1:2:2.	142
Tabela 6.5 – Variação da frequência com o nível de imperfeição aplicada na forma do modo axissimétrico de vibração associado ao modo (1, 6) para os casos com ressonância 1:1:2:2.	146
Tabela 6.6 – Variação da frequência com o nível de imperfeição aplicada na forma do modo axissimétrico de vibração associado ao modo (2, 6) para os casos com ressonância 1:1:2:2.	148
Tabela 6.7 – Variação da frequência com o nível de imperfeição aplicada na forma do na forma do modo (1, 6)s de vibração para os casos com ressonância 1:1:2:2.	150

Tabela 6.8 – Variação da frequência com o nível de imperfeição aplicada na forma do modo de vibração (2, 6)s para os casos com ressonância 1:1:2:2.....	153
Tabela 6.9 – Resumo das cores utilizadas nas curvas de ressonância com $W/h + W/h \neq 0$ para os casos com ressonância 1:1:2:2.....	153
Tabela 6.10 – Variação da frequência com o nível de imperfeição aplicada na forma dos modos (1, 6) de vibração para os casos com ressonância 1:1:2:2.....	154
Tabela 6.11 – Variação da frequência com o nível de imperfeição geométricas aleatórias na forma do modo linear de vibração para os casos com ressonância 1:1:2:2.....	157
Tabela 6.12 – Variação da frequência com o nível de imperfeição aplicada na forma dos modos (2, 6) de vibração para os casos com ressonância 1:1:2:2.....	160
Tabela 6.13 – Valores das parcelas da imperfeição obtidos aleatoriamente para os casos com ressonância 1:1:2:2.....	161
Tabela 6.14 – Modos ativados em cada um dos casos de imperfeição com interação 1:1:2:2. Pressão lateral excitando diretamente o modo (1, 6)c.	167

Lista de símbolos

Símbolos romanos

$a_k(t)$	k -ésimo coeficiente dependente do tempo
$A1_0(t)$	Amplitude modal do <i>driven mode</i> do primeiro modo que compõem a interação na expansão inicial
$A1_1(t)$	Amplitude de vibração do <i>driven mode</i> sem a presença da interação modal
$A1_{11}(t)$	Amplitude de vibração do <i>driven mode</i> do primeiro modo que compõem a interação
$A1_1^{\text{MAX}}(\tau)$	Amplitude máxima de vibração do <i>driven mode</i> sem a presença da interação modal
$A2_0(t)$	Amplitude modal do <i>driven mode</i> do segundo modo que compõem a interação na expansão inicial
$A2_{11}(t)$	Amplitude modal do <i>driven mode</i> do segundo modo que compõem a interação
$A_{ij}(t)$	As amplitudes dos <i>driven modes</i> (i, j) sem a presença da interação modal
$Ak_{ij}(t)$	As amplitudes dos <i>driven modes</i> (i, j)
$Ak_{\alpha(2+6\beta)}(t)$	As amplitudes dos <i>driven modes</i> ($\alpha, 2+6\beta$)
$A_{\alpha(2+6\beta)}(t)$	As amplitudes <i>driven modes</i> ($\alpha, 2+6\beta$) para a aplicação do <i>shooting method</i>
$A5_{ij}(t), A8_{ij}(t)$	Amplitude de vibração do <i>driven mode</i> dos modos que representam a interação modal
$A3_{ij}(t), A4_{ij}(t)$	Amplitude de vibração do <i>driven mode</i> dos modos que representam a interação modal
$B1_0(t)$	Amplitude modal do <i>companion mode</i> do primeiro modo que compõem a interação na expansão inicial
$B1_{11}(t)$	Amplitude de vibração do <i>companion mode</i> do primeiro modo que compõem a interação
$B2_0(t)$	Amplitude modal do <i>companion mode</i> do segundo modo que compõem a interação na expansão inicial

$B_{211}(t)$	Amplitude modal do <i>companion mode</i> do segundo modo que compõem a interação
$Bk_{ij}(t)$	As amplitudes dos <i>companions modes</i> (i, j)
$Bk_{\alpha(2+6\beta)}(t)$	As amplitudes dos <i>companions modes</i> ($\alpha, 2+6\beta$)
$B_{5ij}(t), B_{8ij}(t)$	Amplitude de vibração do <i>companions mode</i> dos modos que representam a interação modal
$B_{3ij}(t), B_{4ij}(t)$	Amplitude de vibração do <i>companions mode</i> dos modos que representam a interação modal
D	Rigidez à flexão
E	Módulo de elasticidade do material da casca cilíndrica
f	Função de tensão
$f_k(\mathbf{x}, \theta)$	Funções de aproximação do método de Karhunen-Loève
h	Espessura da casca cilíndrica
K	Rigidez de membrana
L	Comprimento da casca cilíndrica
\mathcal{L}	Função de Lagrange
m, M	Número de semiondas longitudinais
$\overline{M}_1, \overline{M}_2$	Número de termos selecionados para representar a expansão do deslocamento transversal com interação em m
M_{KL}	Número de intervalos de tempo do método de Karhunen-Loève
M_x	Componente axial dos esforços internos de flexão
$M_{x\theta}$	Componente de torção dos esforços internos de flexão
M_θ	Componente circunferencial dos esforços internos de flexão
n, N	Número de ondas circunferenciais
$\overline{N}_1, \overline{N}_2$	Número de termos selecionados para representar a expansão do deslocamento transversal com interação em n
N_{div}	número de divisões adotado arbitrariamente para garantir a convergência dos algoritmos da força bruta e Runge-Kutta
N_t	Número de pontos espaciais distribuídos uniformemente sobre a superfície da casca cilíndrica
n_x	Número de pontos da discretização na direção axial
N_x	Componente axial dos esforços internos de membrana
$N_{x\theta}$	Componente cisalhante dos esforços internos de membrana
n_θ	Número de pontos da discretização na direção circunferencial
N_θ	Componente circunferencial dos esforços internos de membrana

$p(x, \theta, t)$	Carregamento lateral harmônico
P_{L1}	Amplitude da pressão lateral que excita diretamente o primeiro modo que compõem a interação
P_{L2}	Amplitude da pressão lateral que excita diretamente o segundo modo que compõem a interação
q	Parâmetro adimensional do número de semiondas longitudinais
\mathbf{R}	Matriz de correlação espacial
R	Raio da casca cilíndrica
R_e	Trabalho das forças de dissipação
s	Passo de tempo usado nos algoritmos da força bruta e Runge-Kutta
t	Tempo
T	Energia cinética
u	Componente axial do campo de deslocamentos da casca cilíndrica
U	Energia de deformação interna
\mathbf{U}	Vetor do campo de deslocamentos da casca cilíndrica
U_b	Energia de flexão
U_m	Energia de membrana
v	Componente circunferencial do campo de deslocamentos da casca cilíndrica
V	Trabalho do carregamento lateral externas
\mathbf{v}	Varição temporal em relação à média
\mathbf{V}	Varição do campo vetorial
\mathbf{w}	Campo vetorial real que descreve os deslocamentos radiais da casca cilíndrica
w	Componente radial do campo de deslocamentos da casca cilíndrica
\mathbf{W}	Matriz de amostragem
W	Valor adimensional do deslocamento lateral
W_0	Solução inicial que descreve o deslocamento radial da casca cilíndrica
w_{ij}	Amplitude do deslocamento obtida da solução das equações de movimento da casca cilíndrica
x	Coordenada na direção axial
\mathbf{x}	Vetor de coordenadas axiais
X	Coordenada na direção axial do ponto de aplicação da carga lateral pontual

z Coordenada na direção radial

Símbolos Gregos

β_1 Parâmetro de amortecimento viscoso

β_2 Parâmetro de amortecimento do material

$\gamma_{x\theta}$ Deformação específica angular de um ponto da superfície média da casca cilíndrica

$\bar{\gamma}_{x\theta}$ Deformação específica angular de um ponto qualquer da casca cilíndrica

δ Parâmetro de perturbação

ε_x Deformação específica axial de um ponto da superfície média da casca cilíndrica

$\bar{\varepsilon}_x$ Deformação específica axial de um ponto qualquer da casca cilíndrica

ε_θ Deformação específica circunferencial de um ponto da superfície média da casca cilíndrica

$\bar{\varepsilon}_\theta$ Deformação específica circunferencial de um ponto qualquer da casca cilíndrica

η_1 Coeficiente de amortecimento viscoso

η_2 Coeficiente de amortecimento do material

θ Coordenada na direção circunferencial

$\mathbf{\theta}$ Vetor de coordenadas circunferenciais

Θ Coordenada na direção circunferencial do ponto de aplicação da carga lateral pontual

μ Parâmetro de carregamento

ν Coeficiente de Poisson do material da casca cilíndrica

ξ Coordenada axial adimensional

$\xi_k(t)$ Coordenadas temporais

ρ Densidade do material da casca cilíndrica

$\bar{\sigma}_x$ Tensão axial de um ponto qualquer da casca cilíndrica

$\bar{\sigma}_\theta$ Tensão circunferencial de um ponto qualquer da casca cilíndrica

τ Parâmetro adimensional do tempo

τ_k k -ésimo tempo do método de Karhunen-Loève

$\bar{\tau}_{x\theta}$	Tensão cisalhante de um ponto qualquer da casca cilíndrica
$\varphi_k(\mathbf{x}, \theta)$	k -ésimo vetor espacial do método de Karhunen-Loève
χ_x	Mudança de curvatura axial de um ponto da superfície média da casca cilíndrica
$\chi_{x\theta}$	Mudança de curvatura angular de um ponto da superfície média da casca cilíndrica
χ_θ	Mudança de curvatura circunferencial de um ponto da superfície média da casca cilíndrica
ω_0	Frequência natural da casca cilíndrica
ω_L	Frequência de excitação da pressão radial atuante na casca cilíndrica
Ω_0	Frequência natural adimensional da casca cilíndrica
Ω_f	Frequência adimensional de excitação da parcela harmônica dependente do tempo do carregamento axial da casca cilíndrica
Ω_L	Frequência adimensional de excitação da pressão radial atuante na casca cilíndrica
Ω'	Frequência natural adimensional da casca cilíndrica

Símbolos matemáticos

∇^4	Operador bi harmônico
$\mathbf{D}_1()$	Operador diferencial não linear que dá origem aos termos quadráticos
$\mathbf{D}_2()$	Operador diferencial não linear que dá origem aos termos cúbicos
$E[]$	Média invariante no tempo
$\mathbf{L}()$	Operador diferencial linear

1

Introdução

Nas últimas décadas tem ocorrido um desenvolvimento contínuo da engenharia estrutural, tanto em termos da qualidade dos materiais empregados na construção quanto em relação aos procedimentos de análise e dimensionamento, parcialmente em razão do grande progresso dos métodos computacionais iniciado no século XX que permitiu a análise de estruturas mais complexas e, em particular, análises considerando diferentes tipos de não linearidade. Nota-se uma crescente demanda por estruturas leves, levando ao uso de materiais avançados e soluções de projeto menos conservadoras.

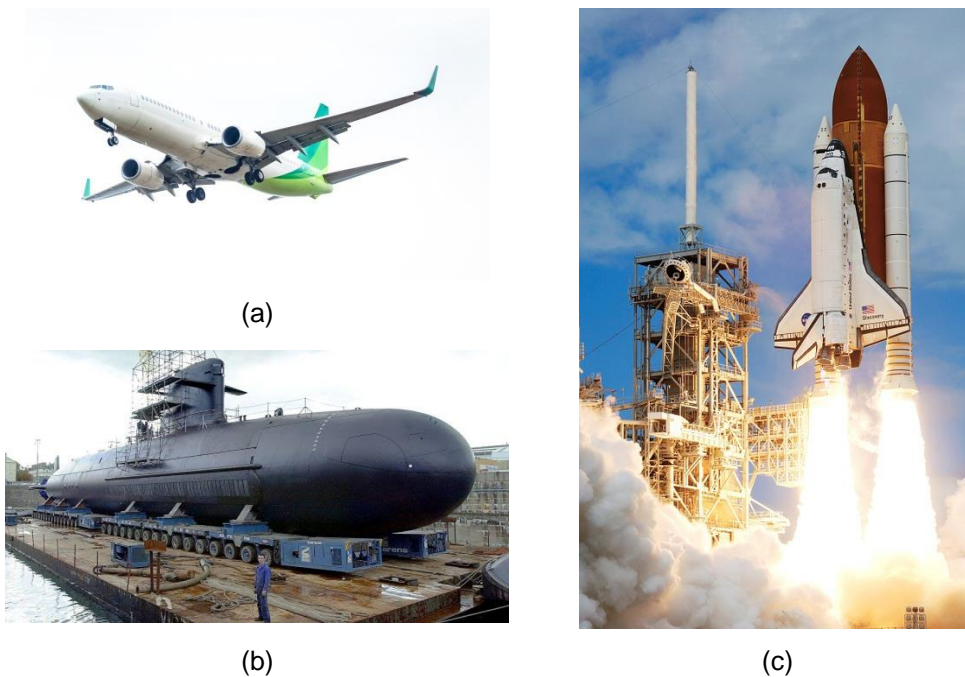


Figura 1.1 – Exemplos de estruturas em forma de cascas esbeltas: (a) Aviões; (b) Submarinos; (c) Espaçonaves.
Fonte: br.freepik.com.

A Figura 1.1 mostra três exemplos comuns das aplicações de cascas em engenharia: (a) fuselagem de aviões; (b) submarinos; e (c) espaçonaves e foguetes. As cascas cilíndricas, objetos de estudo deste trabalho, recebem atenção especial na literatura devido à simplicidade de sua geometria, sendo as equações que governam o comportamento dessas estruturas mais simples que

aquelas desenvolvidas para cascas com outras geometrias. Apesar da geometria simples, esse tipo de casca pode apresentar um comportamento não linear bastante complexo quando submetida a excitações externas devido, principalmente, à sua grande não linearidade geométrica e sensibilidade a imperfeições geométricas iniciais. Como o comportamento não linear das cascas cilíndricas ainda não está totalmente compreendido, muitos fenômenos não lineares não foram, ainda, claramente explicados ou são, ainda, desconhecidos, em particular seu comportamento não linear sob cargas dinâmicas.

A teoria linear de vibrações afirma que a frequência natural do corpo e seus modos de vibração independem da amplitude com a qual a estrutura oscila. No entanto, estruturas esbeltas estão normalmente sujeitas a grandes deslocamentos, fazendo com que a não linearidade não possa ser desprezada. Nestes casos a frequência de vibração livre e a forma modal dependem da amplitude de vibração.

Uma característica das vibrações de cascas de revolução é a presença de dois modos de vibração com n ondas circunferenciais, defasados em $\pi/2n$, com a mesma frequência natural. Estes modos são acoplados através dos termos não lineares, podendo gerar uma ressonância interna 1:1 que pode modificar a forma e estabilidade da resposta nas regiões de ressonância.

Estudos na área de vibrações não lineares de cascas cilíndricas esbeltas considerando a não linearidade geométrica têm sido um problema bastante estudado na literatura.

Moussaoui e Benamar (2002) apresentam uma revisão da literatura sobre as vibrações não lineares que, segundo os autores, tem o objetivo de complementar os seguintes trabalhos anteriormente publicados: Evensen (1974¹), Leissa (1973², 1984³), Sathyamoorthy e Pandalai (1972⁴, 1973⁵), Qatu (1992⁶), Liew *et al.* (1997⁷) *apud* Moussaoui e Benamar

¹ EVENSEN, D. A. Non-linear vibrations of circular cylindrical shells. **Thin Walled Structures: Theory, Experiment and Design**, Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, p. 133-155, 1974.

² LEISSA, A.W. Vibration of Shells. **NASA SP-288, reprinted 1993 by the Acoustical Society of America**, [s. l.], 1973.

³ LEISSA, A. W. Non-linear analysis of plates and shell vibrations. **Proceedings of the Second International Conference on Recent Advances in Structure Dynamics**, [s. l.], p. 262-272, 1984.

⁴ SATHYAMOORTHY, M.; PADALAI, K. A. V. Large amplitude vibrations of certain deformable bodies. Part I: disc, membranes and rings. **Journal of the Aeronautical Society of India**, [s. l.], v. 24, p. 409-414, 1972.

⁵ SATHYAMOORTHY, M.; PADALAI, K. A. V. Large amplitude vibrations of certain deformable bodies. Part I: plates and shells. **Journal of the Aeronautical Society of India**, [s. l.], v. 25, p. 1-10, 1973.

(2002) e Amabili *et al.* (1998,1999). O artigo apresenta 175 referências nessa área de pesquisa. São tratados temas como os efeitos da não linearidade geométrica em cascas, os métodos de modelagem e soluções de casca, as dificuldades encontradas na análise dinâmica não linear de cascas de diversas configurações e efeitos complexos como a anisotropia do material, tensões iniciais, base elástica e interação com um meio fluido.

Amabili e Païdoussis (2003) apresentam também uma revisão bibliográfica contendo 166 referências a trabalhos publicados sobre vibrações não lineares, livres ou forçadas, de cascas cilíndricas e painéis cilíndricos, com ou sem interação com fluido.

Alijani e Amabili (2014a) apresentam uma revisão de trabalhos publicados entre 2003 e 2013, com foco nas vibrações não lineares, livres e forçadas, de cascas de materiais tradicionais e avançados. Os autores citam trabalhos sobre cascas de material isotrópico, laminado, piezoelétrico, com gradação funcional e hiperelásticos, concentrando-se nas vibrações não lineares de cascas submetidas a excitações axiais e laterais. São abordados estudos teóricos, numéricos e experimentais que lidam com problemas dinâmicos que envolvem vibrações paramétricas, instabilidade dinâmica, vibrações não estacionárias e vibrações caóticas. A influência da interação fluido-estrutura é também abordada, bem como imperfeições geométricas, condições de contorno, cargas térmicas e elétricas, modelos de baixa dimensão e modos não lineares de vibração.

Diversas teorias foram desenvolvidas para descrever o comportamento não linear de cascas. Como exemplos, pode-se citar as teorias de Donnell, Mushtari, Love, Timoshenko, von Kármán-Tsien, Reissner, Naghdi e Berry, Vlasov, Sanders, Byrne, Flügge, Goldenveizer, Lur'ye e Novozhilov, entre outras. Neste trabalho utiliza-se a teoria não linear de Donnell (1934) pela sua simplicidade e sua precisão em descrever o campo de deformação de cascas cilíndricas abatidas.

O precursor na análise da não linearidade geométrica de cascas cilíndricas foi Reissner (1955⁸ *apud* Amabili; Païdoussis, 2003). O autor considera uma única semionda do modo de vibração e, usando a teoria não linear de Donnell

⁶ QATU, M. S. Review of shallow shell vibration research. **Shock Vibration Digest**, [s. l.], v. 24, p. 3-15, 1992.

⁷ LIEW, K. M.; LIM, C. W.; KITIPORNCHAI, S. Vibration of shallow shells: a review with bibliography. **Applied Mechanics Reviews**, [s. l.], v. 50, p. 431-444, 1997.

⁸ REISSNER, E. Nonlinear effects in vibrations of cylindrical shells. **Ramo-Wooldridge Corporation Report AM5-6**.

para cascas abatidas, analisa o comportamento de painéis cilíndricos simplesmente apoiados. Foi observado que a relação não linear frequência-amplitude pode apresentar ganho de rigidez (aumento da frequência não linear com a amplitude de vibração, denominada não linearidade do tipo *hardening*), ou perda de rigidez (a frequência não linear de vibração diminui com a amplitude de vibração, não linearidade do tipo *softening*). O tipo de não linearidade depende da geometria e do modo de vibração utilizados.

Dym (1973) estuda as vibrações de uma casca cilíndrica simplesmente apoiada utilizando a teoria não linear de Sanders. O autor conclui que, embora essa teoria seja considerada mais precisa, os resultados obtidos através da aplicação das teorias de Donnell, Flügge, Timoshenko e Sanders são bastante semelhantes.

Chu (1961) realizou um estudo similar ao de Reissner (1955⁹ *apud* Amabili; Païdoussis, 2003) utilizando a teoria de von Kármán-Tsien, porém estendendo sua análise às cascas cilíndricas. Nos seus resultados, a não linearidade da casca cilíndrica é do tipo *hardening*. Nowinski (1963), em uma análise semelhante à de Chu (1961), porém aplicada a cascas ortotrópicas, observou o mesmo tipo de não linearidade.

Evensen (1963), respaldado por resultados experimentais realizados para uma casca cilíndrica cuja amplitude de vibração era da ordem de três a quatro vezes a espessura de suas paredes, contesta os resultados obtidos por Chu (1961) e Nowinski (1963). Ele observa que o comportamento não linear é, na verdade, do tipo *softening* e fracamente não linear. O autor aponta que a expansão modal utilizada por Chu (1961) para o deslocamento lateral da casca cilíndrica não apresenta continuidade do deslocamento transversal, ainda que atenda à condição de deslocamento lateral nulo nas extremidades da estrutura. Segundo o autor, Nowinski (1963) adota uma expansão que atende à condição de continuidade do deslocamento transversal, porém negligencia a condição de contorno de deslocamento lateral nulo nas bordas. Fica claro que diferentes expansões modais podem conduzir a resultados diversos. Olson (1965), através de resultados obtidos experimentalmente, confirma a análise feita por Evensen (1963). O autor observa que o comportamento não linear de cascas cilíndricas é em geral do tipo *softening*.

Outro estudo realizado por Evensen (1967), utilizando a teoria não linear de Donnell, analisa a vibração de cascas esbeltas, ressaltando a importância de

⁹Idem 8.

se utilizar os dois modos com a mesma frequência na expansão dos deslocamentos, bem como um modo axissimétrico.

Atluri (1972) utiliza uma abordagem semelhante à de Dowell e Ventres (1968), comparando seus resultados àqueles obtidos por Chu (1961), Nowinski (1963) e Evensen (1963). O autor encontra uma não linearidade do tipo *hardening*, diferindo significativamente dos observados por Evensen (1963). O erro do trabalho de Atluri (1972) se deve à representação incorreta dos termos axissimétricos na expansão modal, conforme observado por Varadan *et al.* (1989).

Hunt *et al.* (1986) tratam dos conceitos de simetria e quebra de simetria no estudo da estabilidade dinâmica de cascas cilíndricas carregadas axialmente. Os modos de vibração da casca são harmônicos nas direções axial e circunferencial. Assim amplitudes iguais mas de sinais opostos fornecem o mesmo nível de energia, simetria essa que não é observada em experimentos. O campo de deslocamentos não linear de cascas cilíndricas é fortemente assimétrico; os deslocamentos em direção ao centro da casca são diferentes dos deslocamentos na direção oposta. Segundo os autores, é somente pela combinação dos modos assimétricos e axissimétricos que é possível descrever a assimetria observada experimentalmente.

Gonçalves (1987) desenvolve uma formulação para a análise dinâmica não linear da interação entre um meio fluido e uma casca de geometria arbitrária, empregando essa formulação na análise de uma casca cilíndrica simplesmente apoiada submersa ou preenchida por um fluido não viscoso e incompressível. O autor utiliza em seu estudo as teorias não lineares de Sanders e de Donnell. Para a determinação da solução modal para o campo de deslocamentos que satisfaça as condições de contorno e de continuidade, contendo os principais efeitos devidos ao acoplamento modal, o autor propõe a utilização do método da perturbação. Em seguida o autor aplica o método de Galerkin à solução modal encontrada a fim de obter um sistema discreto de equações diferenciais ordinárias não lineares.

Através da comparação de sua solução geral deduzida para cascas cilíndricas com os resultados encontrados na literatura, Gonçalves (1987) constata que é imprescindível para a obtenção de resultados fisicamente e matematicamente consistentes a consideração do acoplamento modal, sendo que o uso simultâneo do método de Galerkin e de técnicas de perturbação mostrou-se bastante eficiente na análise desse fenômeno.

Amabili *et al.* (1998, 1999) investigam o comportamento não linear de uma casca cilíndrica simplesmente apoiada vazia ou preenchida por um fluido não viscoso e incompressível, apresentando resultados numéricos para a casca em vibração livre e vibração forçada. Eles utilizam a teoria não linear de Donnell para cascas abatidas para descrever o campo de deformações da casca e o método de Galerkin para reduzir o problema a um sistema de equações diferenciais ordinárias. Os autores adotam para a expansão do deslocamento lateral uma expressão com três modos não lineares, sendo dois deles os modos com mesma frequência e o terceiro um modo axissimétrico. Os resultados mostram um comportamento não linear do tipo *softening*, em concordância com os resultados obtidos por Evensen (1967) e Olson (1965). As curvas de ressonância traçadas para o modelo apenas com o modo diretamente excitado (*driven mode*) e o modelo onde há a participação do outro modo com a mesma frequência (*companion mode*) é fundamental na análise de vibrações forçadas e amortecidas.

Popov *et al.* (1998) estudaram os possíveis pontos de bifurcação e a estabilidade de soluções com modelos de baixa dimensão de cascas cilíndricas esbeltas e infinitamente longas quando submetidas a um carregamento axial periódico. A teoria não linear de Donnell para cascas abatidas é empregada e o objetivo principal desse estudo é verificar a influência de um importante fenômeno relacionado com a dinâmica de cascas cilíndricas, a interação modal. Eles propuseram uma aproximação para o deslocamento lateral da casca, respaldados no trabalho de Hunt *et al.* (1986), e chegaram a um modelo de baixa dimensão qualitativamente consistente.

Os termos acoplamento modal e interação modal são utilizados na literatura de diferentes maneiras. Neste trabalho o termo acoplamento modal é empregado aos termos essenciais que são adicionados à expansão que descreve o deslocamento lateral da casca. Já o termo interação modal diz respeito à interação entre dois modos não lineares distintos de vibração, um fenômeno não linear que ocorre quando dois modos de vibração diferentes apresentam valores próximos ou coincidentes de frequência de vibração, o que pode causar ressonância interna e mudanças importantes nas fronteiras de instabilidade e nos pontos de bifurcação da casca cilíndrica (Gonçalves; Del Prado, 2004).

Del Prado (2001) utiliza a teoria não linear de Donnell para cascas abatidas com a finalidade de estudar as vibrações não lineares de cascas cilíndricas carregadas axialmente, considerando o efeito simultâneo de cargas

estáticas e dinâmicas. Ele estuda a influência do acoplamento modal utilizando uma expansão para o deslocamento lateral com dois modos. O autor analisa ainda também o fenômeno não linear da interação modal, utilizando três modelos distintos com frequências e cargas críticas próximas ou coincidentes. A solução modal é encontrada através do método de perturbação. Del Prado (2001) conclui que a correta representação do acoplamento modal conduz a resultados qualitativamente corretos quando comparados a resultados experimentais. Comparando os resultados obtidos através de sua expansão com dois graus de liberdade com os obtidos na literatura, ele observa que, apesar da dimensão reduzida do modelo, obtêm-se resultados com precisão superior ou equivalente a modelos de mais alta dimensão, isso devido à correta consideração do acoplamento entre os modos da expansão do deslocamento. Quanto à interação modal o autor nota que, principalmente em casos de modos com frequências coincidentes ou muito próximas, há grande influência desse fenômeno não linear no comportamento da casca.

A expansão modal utilizada por Del Prado (2001) e empregada na análise da influência da interação modal não apresenta, no entanto, os modos relativos à interação já na solução inicial do método da perturbação, o que será considerado neste trabalho, nem os *companion modes*.

Gonçalves e Del Prado (2002), com base na teoria não linear de Donnell, analisam as vibrações não lineares e a instabilidade dinâmica de cascas cilíndricas carregadas axialmente. É dada especial atenção a dois fenômenos de instabilidade dinâmica que podem surgir sob estas condições de carga: excitação paramétrica dos modos de flexão e escape do vale potencial pré-flambagem. Os cálculos são realizados para as regiões de instabilidade secundária e principal e que são associadas, respectivamente, à menor frequência natural e ao dobro desta frequência. Os resultados reiteram a importância do acoplamento modal e o forte papel das não linearidades geométricas na dinâmica das cascas cilíndricas. Além disso, mostrou-se que as bacias de atração podem se tornar fractais. Isso, juntamente com a presença de bifurcações subcríticas catastróficas, torna a casca cilíndrica muito sensível às condições iniciais, às incertezas nos parâmetros do sistema e às imperfeições iniciais.

Gonçalves e Del Prado (2004) analisaram o efeito não linear da interação modal na estabilidade dinâmica de cascas cilíndricas excitadas axialmente e investigaram a influência de um carregamento estático compressivo. Os resultados evidenciam que quando há modos não lineares com frequências

próximas ou iguais há uma forte interação entre eles com uma complexa troca de energia. A resposta da estrutura obtida utilizando dois modos interagindo entre si pode ser completamente diferente da obtida utilizando os modos não lineares agindo separadamente.

Gonçalves e Del Prado (2005) estudam, para uma casca cilíndrica apoiada e submetida a um carregamento axial harmônico, a influência do número de modos da expansão que descreve o deslocamento lateral da casca cilíndrica, obtidos através de técnicas de perturbação. Os autores mostram, através da análise dos diagramas de bifurcação e das fronteiras de instabilidade do sistema, que a adição do modo axissimétrico, com duas vezes o número de ondas na direção axial, é necessária para descrever qualitativamente o comportamento não linear das cascas cilíndricas.

Abe *et al.* (2007) investigam o efeito da ressonância interna em cascas cilíndricas engastadas nas extremidades, expressando os deslocamentos através de autovetores calculados pelo método de Ritz e aplicando o método de Galerkin para a discretização das equações de movimento. Os autores utilizam uma expansão com três modos, composta pelo modo principal de vibração da casca cilíndrica e dois modos axissimétricos com o mesmo valor da frequência de vibração, levando a uma ressonância 1:1. Através da análise das relações frequência-amplitude da casca cilíndrica, obtidas através da aplicação do *shooting method*, os autores analisam a influência da razão entre o raio de curvatura e a espessura da casca na resposta não linear, ativada pela ressonância interna.

Silva (2008) estuda as vibrações não lineares e a estabilidade de uma casca cilíndrica preenchida por um fluido não viscoso e incompressível, com base em modelos de baixa dimensão, utilizando a teoria não linear de Donnell. A dedução das equações que descrevem o campo de deformações da casca é feita empregando-se o método da perturbação e através do método de Karhunen-Loève, também conhecido como decomposição ortogonal completa ou POD, do inglês *proper orthogonal decomposition*. O método é capaz de identificar a importância de cada modo na energia total do sistema e a participação de cada modo da expansão modal nos modos não lineares de vibração. Como conclusão, Silva (2008) observa que o uso do método de perturbação em conjunto com o método de Karhunen-Loève permite a dedução de modelos de baixa dimensão e que, ainda assim, conduzem a respostas precisas até grande amplitude de vibração, sendo sua utilização justificada

quando comparada ao custo computacional para obtenção de resultados através do método dos elementos finitos.

Silva *et al.* (2009) verificaram a importância da consideração do *companion mode* no comportamento dinâmico de uma casca cilíndrica vazia ou preenchida por um fluido não viscoso e incompressível, e sujeita a um carregamento lateral harmônico. Os autores empregam o método da perturbação, adicionando o *companion mode* à solução inicial, para obtenção de uma expansão que represente o deslocamento transversal da estrutura. Os resultados, tanto para a casca vazia quanto preenchida pelo fluido, mostram que o *companion mode* modifica consideravelmente as curvas de ressonância da casca cilíndrica, podendo criar regiões totalmente instáveis. Dessa forma, os autores observam que, para uma casca cilíndrica perfeita sujeita a um carregamento externo, o *companion mode* deve ser sempre levado em conta na formulação.

Vries (2009) apresenta um banco de dados recolhidos de vários trabalhos sobre imperfeições geométricas em cascas e cones cilíndricos de paredes finas, oriundos de resultados experimentais recentes e antigos. Geralmente se usa em cálculos por elementos finitos os modos de flambagem ou vibração da casca como forma da imperfeição. Entretanto, a forma da imperfeição é em geral mais complexa e pode inclusive mudar durante a vida útil da estrutura, justificando a relevância de um banco de dados com esses valores.

Silva *et al.* (2011a) estudam a influência da interação modal na relação não linear frequência-amplitude usando a teoria não linear de Donnell para descrever as deformações da casca. Os autores observam que o método da perturbação pode ser utilizado para deduzir modelos de baixa dimensão que representem a interação modal no estudo dinâmico de cascas cilíndricas. Silva *et al.* (2011b) estudam o comportamento não linear e a estabilidade de uma casca cilíndrica esbelta, preenchida por um fluido não viscoso e incompressível e sujeita a um carregamento axial e a uma pressão lateral, ambos harmônicos. Os autores obtêm a expansão que descreve o deslocamento lateral que satisfaz as condições de contorno da casca cilíndrica fora do plano, através da aplicação do método de perturbação. Propõem então uma nova metodologia para descrever os deslocamentos no plano em função das amplitudes fora do plano, reduzindo o número de variáveis do problema. Os autores comprovam, através da evolução dos diagramas de bifurcação, das bacias de atração e das fronteiras de instabilidade, que esse procedimento permite deduzir um modelo com um número reduzido de modos capaz de representar o comportamento não linear da

casca cilíndrica sujeita a grandes deslocamentos da ordem de duas vezes a espessura da casca, tanto para vibrações livres quanto forçadas.

Silva *et al.* (2011c) estudam a instabilidade paramétrica e o escape do vale pré-flambagem de uma casca cilíndrica simplesmente apoiada, parcialmente preenchida por um fluido e sujeita a um pré-carregamento axial. Os autores mostram a influência da altura do fluido nas fronteiras de instabilidade paramétrica e escape permanente da estrutura, bem como nos diagramas de bifurcação.

Gonçalves *et al.* (2011) analisam a estabilidade dinâmica, através da evolução das bifurcações do sistema, e a integridade da estrutura, através da erosão das bacias de atração, de uma casca cilíndrica sujeita a um carregamento axial harmônico. Para um nível de pré-carregamento para o qual a casca apresenta cinco soluções estáticas, três estáveis e duas instáveis, os autores utilizam um modelo de baixa dimensão com apenas dois graus de liberdade para descrever os deslocamentos laterais da casca e analisam, tanto para bifurcações subcríticas quanto supercríticas, várias classes de soluções, que incluem soluções triviais, periódicas, quase periódicas e caóticas.

Amabili (2012) estuda a influência da ressonância interna 1:1:2 em uma casca cilíndrica laminada, simplesmente apoiada e sujeita a uma pressão lateral harmônica. O autor aplica a teoria de alta ordem de Amabili-Reddy para descrever as deformações da casca. Ele adota uma expansão com três modos para descrever o deslocamento lateral da casca cilíndrica, considerando dois modos assimétricos, *driven mode* e *companion mode*, e um modo axissimétrico, levando a uma ressonância interna 1:1, sempre presente em uma casca cilíndrica devido à axissimetria. O autor adota uma configuração geométrica para a casca que introduz uma ressonância interna 1:1:2 e, integrando as equações de movimento através da aplicação do método da continuação e o software AUTO 97 (Doedel *et al.*, 1998), o autor observa que a ressonância 1:1:2 conduz a resultados bastante diferentes da ressonância 1:1. Ele identifica soluções periódicas e quase periódicas para soluções com amplitude de vibração da ordem da espessura da casca e afirma que a ressonância 1:1:2 só é ativada para grandes amplitudes.

Como parte desta tese, Rodrigues *et al.* (2012) investigaram os efeitos da interação modal entre dois modos distintos de vibração no comportamento não linear e na estabilidade de cascas cilíndricas simplesmente apoiadas e sujeitas a um carregamento axial e a pressão lateral harmônica. Através do método de perturbação os autores desenvolvem uma solução modal para representar os

deslocamentos laterais da casca usando como solução inicial uma expansão que considera os *driven modes* e *companion modes* de cada um dos modos que dão origem à interação, levando a uma ressonância interna 1:1:1:1. Através de uma análise paramétrica, verifica-se a influência da interação modal nas bifurcações, curvas de ressonância e fronteiras de instabilidade do sistema.

Em um artigo posterior, Rodrigues *et al.* (2013a) utilizam a mesma solução modal levando a uma interação modal 1:1:1:1 para uma casca cilíndrica sob pré-carregamento estático e carga axial harmônica. Tanto as regiões principais quanto as regiões secundárias de instabilidade paramétrica são afetadas pela interação modal, o que pode conduzir a uma diminuição significativa nas fronteiras de instabilidade paramétrica e de escape em determinadas faixas de frequência de excitação. A interação modal também leva a atratores coexistentes e a complexas bacias de atração. Conclusão semelhante foi obtida por Rodrigues *et al.* (2013b), onde os resultados apresentados indicam que a interação modal entre dois modos de vibração com a mesma frequência natural pode desencadear muitos fenômenos não lineares instáveis tais como bifurcações e saltos dinâmicos e que, devido à complexidade deste fenômeno nas vibrações não lineares de casca cilíndrica e ao denso espectro de frequência natural da casca, pesquisas adicionais neste tema devem ser realizadas para melhor compreensão do seu comportamento não linear dinâmico. Bacias de atração altamente fractais foram obtidas indicando uma elevada sensibilidade às condições iniciais e perturbações que podem provocar vários saltos entre as soluções concorrentes, com variações bruscas do campo de tensão da casca.

Rodrigues *et al.* (2014) utilizam o método da perturbação associado ao método de Karhunen-Loève para derivar expansões modais consistentes e de baixa dimensão a fim de descrever a interação modal entre dois modos de vibração com frequências naturais iguais. Já para a casca sujeita à carga axial, os autores observam que a interação modal provoca complexas interações entre os modos de vibração nas regiões principais de ressonância.

Alijani e Amabili (2014b) estudam as vibrações forçadas de cascas cilíndricas laminadas preenchidas por fluido usando a teoria não linear de deformação de cisalhamento de alta ordem de Amabili-Reddy. A casca é submetida a uma força concentrada harmônica que atua na direção lateral. A técnica de continuação é utilizada para realizar as análises das bifurcação. A integração das equações de movimento é realizada usando a fórmula de diferenciação reversa de Gear (BDF, do inglês *backward differentiation formula*)

para obter as respostas no tempo, os planos-fase e as seções de Poincaré. O efeito do fluido interno e do ângulo de laminação em torno da frequência de ressonância, assim como ressonâncias internas, são investigados. Mostra-se que as cascas cilíndricas preenchidas por fluido podem apresentar uma ressonância interna 1:1.

Kubenko e Koval'chuk (2014) afirmam que a interação "ressonante" de vários modos de vibração em cascas cilíndricas é mais intensa durante as vibrações de grande amplitude. As não linearidades geométricas e outras (como físicas e inerciais) criam pré-condições para a redistribuição radical de energia entre os modos, não apenas quando as frequências naturais estão próximas umas das outras, mas também quando são múltiplas entre si. Os autores estudam a interação não linear de vários modos de vibração de cascas cilíndricas ortotrópicas cheias de fluidos com frequências naturais próximas.

Monteil *et al.* (2014) analisam as vibrações forçadas não lineares de dois sistemas de três graus de liberdade exibindo ressonâncias internas de segunda ordem, resultantes de um ajuste harmônico de suas frequências naturais. O primeiro sistema exhibe ressonância interna 1:2:4 e o segundo sistema exhibe ressonância interna 1:2:2. O método das múltiplas escalas é usado para resolver analiticamente as oscilações forçadas para os dois modelos excitados em cada grau de liberdade na ressonância primária. Um estudo analítico completo é proposto com especial ênfase na estabilidade das soluções. As investigações paramétricas permitem obter uma imagem completa da dinâmica dos dois sistemas. Os resultados são sistematicamente comparados com a ressonância clássica 1:2, a fim de compreender como a presença de um terceiro oscilador modifica a dinâmica não linear e favorece a presença de órbitas periódicas instáveis. Os autores mostram que a ressonância 1:2:4 pode ser interpretada como uma cascata de duas ressonâncias internas 1:2. A energia pode ser transferida do primeiro para o segundo modo e, finalmente, para o primeiro. Em comparação com o caso 1:2, verifica-se que os regimes quase periódicos são mais facilmente observados. O segundo sistema, que exhibe uma ressonância 1:2:2, pode ser visto como duas ressonâncias internas 1:2. As soluções são afetadas localmente pelo terceiro oscilador, porém o comportamento global de uma ressonância 1:2 é recuperado. Os autores notam também que a forma da região de instabilidade pode tornar-se complexa para determinados valores de frequência. Eles concluem que no segundo sistema, em comparação com a ressonância simples 1:2, a presença de um terceiro oscilador favorece estados instáveis, de modo que os regimes quase periódicos se tornam mais comuns.

Silva *et al.* (2014) investigam a influência das ressonâncias internas na dinâmica não linear e instabilidade de cascas cilíndricas cheias de líquido e carregadas axialmente. Considera-se que o fluido é incompressível e não viscoso e que seu movimento irrotacional é descrito por um potencial de velocidade que satisfaça a equação de Laplace e as condições relevantes de contorno e continuidade. Uma análise paramétrica detalhada é conduzida para esclarecer a influência das ressonâncias internas nas bifurcações, limites de estabilidade e modos de vibração não linear.

Rossikhin e Shitikova (2015) analisam as vibrações não lineares de uma casca cilíndrica imersa em um meio viscoelástico e sujeita a diferentes condições da ressonância interna. As propriedades viscosas do meio circundante são descritas pela derivada fracionária de Riemann-Liouville. As funções de deslocamento são determinadas em termos de autofunções das vibrações lineares de uma casca cilíndrica simplesmente apoiada. Um novo procedimento resultando no desacoplamento das partes lineares das equações é proposto com a utilização adicional do método das múltiplas escalas. Mostra-se que o fenômeno da ressonância interna pode ser crítico, uma vez que, em uma casca cilíndrica ressonâncias internas 1:1, 2:1 e 3:1, bem como ressonâncias combinadas estão sempre presentes. A ressonância interna 3:1 é analisada em detalhes.

Friedrich *et al.* (2015) investigam diferentes abordagens teóricas para avaliar o efeito de imperfeições geométricas na carga de flambagem de cascas cilíndricas submetidas à compressão axial, um assunto bastante estudado na literatura. Três abordagens teóricas para descrever as imperfeições geométricas são apresentadas e sua influência na flambagem da casca cilíndrica é investigada.

Amabili *et al.* (2016) estudam as vibrações não lineares de uma casca cilíndrica preenchida com fluido e submetida à uma excitação lateral harmônica, investigando experimentalmente e numericamente o espectro das mais baixas frequências. Nos experimentos, as condições de contorno são consideradas próximas a bordas simplesmente apoiadas. A presença de ressonância interna exata 1:1, dando origem a vibrações periódicas e a vibrações não estacionárias, é observada experimentalmente e a resposta não linear é reproduzida numericamente.

Du *et al.* (2016) fazem um estudo da vibração forçada não linear de cascas cilíndricas infinitamente longas compostas de materiais com gradação funcional usando um método de perturbação. A ressonância interna 1:2 é investigada

quando a frequência de excitação é próxima da maior frequência natural. As relações frequência-amplitude e as bifurcações do sistema são analisadas usando o método de continuação. Eles apontam limitações nos resultados analisados uma vez que eles utilizam uma expansão com dois modos para descrever os deslocamentos laterais da casca, seguindo os resultados do estudo de Gonçalves e Del Prado (2002) que mostraram, pela análise de convergência dos modos de vibração não linear, que a expansão modal com dois modos pode fornecer uma descrição qualitativamente correta da vibração não linear de cascas cilíndricas nas condições por eles analisadas. Uma limitação adicional da análise de Du *et al.* (2016) é a restrição de pequenas amplitudes, já que os métodos de perturbação no tempo não são confiáveis para o caso de vibração de grande amplitude.

Gonçalves *et al.* (2016) destacam que a análise dinâmica não linear de sistemas contínuos, como placas e cascas finas, é um problema de relevância em muitos campos de engenharia, sendo o método dos elementos finitos a abordagem mais utilizada para análises dinâmicas não lineares dessas estruturas. No entanto, o esforço computacional para a utilização desse método é muito alto. Segundo os autores, como alternativa às abordagens numéricas complexas, métodos analíticos usando modelos simplificados podem ser usados com sucesso para compreender o comportamento não linear de cascas cilíndricas e constituir ferramentas eficientes nos estágios iniciais de projeto. Eles afirmam que para placas e cascas a derivação de modelos eficientes de ordem reduzida é, de fato, essencial devido à complexa resposta não linear dessas estruturas. O procedimento usual é reduzir as equações diferenciais parciais de movimento do sistema contínuo a um sistema aproximado de equações diferenciais ordinárias de movimento dependentes do tempo, que por sua vez são resolvidas por métodos numéricos ou, aproximadamente, por procedimentos de perturbação. No entanto, o uso de expansões modais inadequadas geralmente leva a resultados incongruentes ou podem exigir uma quantidade bastante grande de termos. Os autores mostram então como a aplicação do método de perturbação empregada conjuntamente com o método de Galerkin pode ser usada para obter modelos precisos de baixa ordem para placas e cascas, ao capturar a influência de acoplamentos e interações modais.

Rodrigues *et al.* (2016), como parte desta pesquisa, investigam a influência de várias imperfeições geométricas nas vibrações não lineares de cascas cilíndricas simplesmente apoiadas e excitadas lateralmente usando a teoria não linear de Donnell. A imperfeição é descrita pela mesma expressão utilizada para

descrever a expansão modal. Os autores observam modificações importantes na resposta não linear da casca cilíndrica em função da forma e da magnitude da imperfeição geométrica inicial. Rodrigues *et al.* (2017) destacam que as cascas cilíndricas apresentam um denso espectro de frequência, especialmente perto da frequência fundamental e que, devido à sua simetria circunferencial, as frequências nas cascas cilíndricas ocorrem sempre em pares. Assim, nas proximidades das frequências naturais mais baixas, é possível a existência de várias frequências iguais ou próximas, levando a um comportamento dinâmico complexo.

Breslavsky e Amabili (2017) estudam a resposta não linear de uma casca cilíndrica excitada por uma carga pontual multi-harmônica. Para as dimensões da casca adotadas nesse estudo as frequências naturais de dois modos com três ondas circunferenciais são praticamente o dobro das frequências naturais dos dois modos com duas ondas circunferenciais. Isso leva a uma ressonância interna 1:1:2:2. Soluções periódicas, oscilações quase periódicas, resposta sub-harmônicas, bifurcações por duplicação de períodos e caos são observados.

1.1. Objetivos

Ainda que cascas cilíndricas sejam elementos estruturais comumente utilizados e que tenham sido objeto de vários trabalhos de pesquisa, seu comportamento não linear ainda apresenta muitos fenômenos a serem completamente entendidos. Sabe-se ainda que de particular importância, devido à sua influência na resposta estrutural, é a ressonância interna 1:1, geralmente associada às simetrias do sistema, a ressonância interna 1:2, devida às não linearidades quadráticas e a ressonância 1:3, decorrente de não linearidades cúbicas. A ressonância interna permite a transferência de energia entre os modos de vibração relacionados, levando geralmente a novos fenômenos com profunda influência sobre a estabilidade da resposta dinâmica.

O primeiro objetivo desta tese é desenvolver, através da formulação de Donnell para cascas esbeltas, um procedimento para deduzir uma solução modal para o campo de deslocamentos laterais da casca usando como solução inicial uma expansão que considera os modos que dão origem às ressonâncias internas 1:1:1:1 e 1:1:2:2, e que pode ser generalizado para considerar a interação entre um número de modos lineares arbitrário. Os modelos de baixa dimensão aqui desenvolvidos permitem realizar uma análise paramétrica

qualitativamente precisa para verificar a influência destas ressonâncias internas nas regiões principais de ressonância. Usando algoritmos de continuação faz-se um estudo detalhado das bifurcações e da instabilidade dinâmica da casca cilíndrica submetidas à um carregamento lateral harmônico aplicado em sua superfície.

Embora se saiba que cascas cilíndricas esbeltas são particularmente sensíveis a imperfeições geométricas iniciais e que sua influência na flambagem de cascas tenha sido amplamente estudada no passado, pouco se conhece sobre o efeito dessas imperfeições nas vibrações não lineares destas estruturas. Portanto, o segundo objetivo deste trabalho é desenvolver uma análise paramétrica do efeito de imperfeições geométricas iniciais nas ressonâncias internas de cascas cilíndricas, um tópico ainda não estudado na literatura.

1.2.

Estrutura do texto

Este trabalho está organizado em sete capítulos, incluindo este capítulo de introdução.

No capítulo 2 apresenta-se a formulação matemática desenvolvida para descrever o comportamento dinâmico não linear da casca cilíndrica simplesmente apoiada. As equações de movimento são obtidas através dos funcionais de energia e utiliza-se a teoria não linear de Donnell para cascas abatidas para descrever o campo de deformações da superfície média da casca.

No capítulo 3 apresenta-se a análise das vibrações lineares da casca cilíndrica, a partir da qual se obtêm as geometrias empregadas na análise das vibrações não lineares e ressonâncias internas.

No capítulo 4 apresenta-se um estudo paramétrico da casca imperfeita com ressonância interna 1:1 para vários tipos e níveis de imperfeição.

No capítulo 5 apresenta-se a análise da influência das imperfeições geométricas iniciais na resposta dinâmica não linear de cascas cilíndricas com ressonância interna 1:1:1:1, enquanto no capítulo 6 apresenta-se a análise da influência da imperfeição geométrica inicial na resposta dinâmica não linear de cascas cilíndricas com ressonância interna 1:1:2:2.

Por fim, no capítulo 7, apresentam-se as principais conclusões obtidas através da análise dos resultados e sugestões para trabalhos futuros.

2

Modelagem matemática da casca cilíndrica

Apresenta-se neste capítulo a formulação matemática utilizada para a modelagem da casca cilíndrica cujo comportamento dinâmico não linear é estudado neste trabalho. As cascas cilíndricas são elementos estruturais comumente utilizados em diversos tipos de construções, sendo especialmente eficientes quanto submetidas a cargas axiais e a pressão lateral devido à sua configuração geométrica, sendo o carregamento suportando em sua maior parte por esforços internos de membrana, o que leva a estruturas leves e esbeltas. Por outro lado, sua esbeltez leva a uma grande não linearidade geométrica que se manifesta de forma particular na flambagem e na ressonância.

Considera-se, neste trabalho, uma casca cilíndrica esbelta, ou seja, sua espessura, h , é significativamente menor que o seu raio, R . Neste caso, o problema tridimensional pode ser reduzido a um problema em duas dimensões, escrevendo-se os deslocamentos de um ponto qualquer da casca como função dos deslocamentos e das mudanças de curvatura da superfície média. Em aplicações práticas considera-se que $h/R \leq 1/20$ a fim de que a casca seja esbelta (Amabili, 2008).

No desenvolvimento da formulação utilizada neste trabalho para análise dinâmica não linear de cascas cilíndricas segue-se a teoria não linear de Donnell para cascas abatidas. Essa teoria tem significativa presença na literatura, como, por exemplo, nos trabalhos de Evensen(1967), Dowell e Ventres (1968), Atluri (1972), Amabili *et al.*(1998), Gonçalves e Del Prado (2004), Gonçalves *et al.* (2011), entre outros, devido a sua simplicidade e acurácia para uma vasta gama de geometrias. A precisão da teoria de Donnell é satisfatória quando o número de ondas circunferenciais, n , é maior ou igual a cinco, de forma que seja satisfeita a relação $1/n^2 \ll 1$ (Evensen, 1967).

2.1.

Campo de deformações da casca cilíndrica

Considera-se uma casca cilíndrica esbelta, com raio R , comprimento L e espessura h , como ilustra a Figura 2.1 (a), onde também se mostra o campo de

deslocamentos da superfície média da casca, sendo u o deslocamento axial na direção de x , v o deslocamento circunferencial na direção θ e w o deslocamento transversal da casca na direção z . Adicionalmente, considera-se uma imperfeição geométrica inicial descrita por um campo de deslocamentos lateral w_0 . O material da casca é elástico, homogêneo e isotrópico, com módulo de elasticidade E , coeficiente de Poisson ν e densidade ρ .

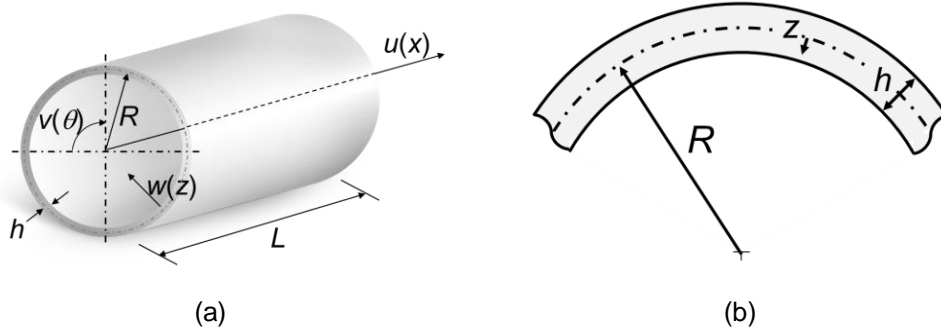


Figura 2.1 – Casca cilíndrica. (a) Geometria e campo de deslocamentos da casca cilíndrica. (b) Detalhe da seção transversal da casca cilíndrica.

Com base na teoria não linear de Donnell para cascas abatidas, as deformações específicas de um ponto localizado na superfície média da casca são descritas em termos dos deslocamentos e suas derivadas por:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= u_{,x} + \frac{1}{2} w_{,x}^2 + w_{,x} w_{0,x} \\ \varepsilon_\theta &= \frac{1}{R} v_{,\theta} + \frac{1}{R} w + \frac{1}{2R^2} w_{,\theta}^2 + \frac{1}{R^2} w_{,\theta} w_{0,\theta} \\ \gamma_{x\theta} &= v_{,x} + \frac{1}{R} (u_{,\theta} + w_{,x} w_{,\theta} + w_{,x} w_{0,\theta} + w_{0,x} w_{,\theta})\end{aligned}\quad (2.1)$$

onde ε_x e ε_θ são, respectivamente, as deformações específicas longitudinais na direção axial e circunferencial e $\gamma_{x\theta}$ é a deformação angular de um elemento na superfície média da casca cilíndrica, tomada como superfície de referência.

Adicionalmente, segundo a teoria não linear de Donnell, definem-se as mudanças de curvatura da superfície média como:

$$\begin{aligned}\chi_x &= -w_{,xx} \\ \chi_\theta &= -\frac{1}{R^2} w_{,\theta\theta} \\ \chi_{x\theta} &= -\frac{1}{R} w_{,x\theta}\end{aligned}\quad (2.2)$$

As deformações de um ponto qualquer da casca localizado a uma distância z da superfície média, Figura 2.1 (b), podem ser escritas em função das respectivas deformações específicas da superfície média e mudanças de curvatura na forma:

$$\begin{aligned}\bar{\varepsilon}_x &= \varepsilon_x + z \chi_x \\ \bar{\varepsilon}_\theta &= \varepsilon_\theta + z \chi_\theta \\ \bar{\gamma}_{x\theta} &= \gamma_{x\theta} + 2z \chi_{x\theta}\end{aligned}\tag{2.3}$$

2.2. Esforços internos atuantes na casca cilíndrica

Considerando um material isotrópico, elástico e linear, as relações constitutivas, para um estado plano de tensões, são dadas por:

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}_x &= \frac{E}{1-\nu^2} (\bar{\varepsilon}_x + \nu \bar{\varepsilon}_\theta) \\ \bar{\sigma}_\theta &= \frac{E}{1-\nu^2} (\bar{\varepsilon}_\theta + \nu \bar{\varepsilon}_x) \\ \bar{\tau}_{x\theta} &= \frac{E}{2(1+\nu)} \bar{\gamma}_{x\theta}\end{aligned}\tag{2.4}$$

onde $\bar{\sigma}_x$, $\bar{\sigma}_\theta$ e $\bar{\tau}_{x\theta}$ são, respectivamente, as tensões axial, circunferencial e cisalhante de um ponto qualquer da casca cilíndrica.

As resultantes dos esforços internos de membrana são dadas pelas integrais:

$$\begin{aligned}N_x &= \int_{-h/2}^{h/2} \bar{\sigma}_x dz \\ N_\theta &= \int_{-h/2}^{h/2} \bar{\sigma}_\theta dz \\ N_{x\theta} &= \int_{-h/2}^{h/2} \bar{\tau}_{x\theta} dz\end{aligned}\tag{2.5}$$

onde N_x , N_θ e $N_{x\theta}$ são, respectivamente, a componente axial, circunferencial e cisalhante por unidade de comprimento.

Considerando as relações (2.4), obtêm-se a partir da equação (2.5) os esforços em termos das deformações da superfície média da casca cilíndrica:

$$\begin{aligned}
N_x &= K(\varepsilon_x + \nu \varepsilon_\theta) \\
N_\theta &= K(\varepsilon_\theta + \nu \varepsilon_x) \\
N_{x\theta} &= \frac{K(1-\nu)}{2} \gamma_{x\theta}
\end{aligned} \tag{2.6}$$

onde K é a rigidez de membrana dada por:

$$K = \frac{E h}{1 - \nu^2} \tag{2.7}$$

As resultantes dos esforços de flexão e de torção que atuam na casca cilíndrica são dadas pelas seguintes integrais:

$$\begin{aligned}
M_x &= \int_{-h/2}^{h/2} z \bar{\sigma}_x dz \\
M_\theta &= \int_{-h/2}^{h/2} z \bar{\sigma}_\theta dz \\
M_{x\theta} &= \int_{-h/2}^{h/2} z \bar{\tau}_{x\theta} dz
\end{aligned} \tag{2.8}$$

onde M_x e M_θ são, respectivamente, o momento fletor por unidade de comprimento em torno dos eixos x e θ e $M_{x\theta}$ é o momento de torção. A partir das relações (2.4), obtêm-se os momentos em termos das mudanças de curvatura:

$$\begin{aligned}
M_x &= -D(\chi_x + \nu \chi_\theta) \\
M_\theta &= -D(\chi_\theta + \nu \chi_x) \\
M_{x\theta} &= -D(1 - \nu) \chi_{x\theta}
\end{aligned} \tag{2.9}$$

onde D é a rigidez à flexão dada por:

$$D = \frac{E h^3}{12(1 - \nu^2)} \tag{2.10}$$

A convenção de sinais adotada para os esforços de membrana e de flexão atuantes na casca cilíndrica está representada na Figura 2.2.

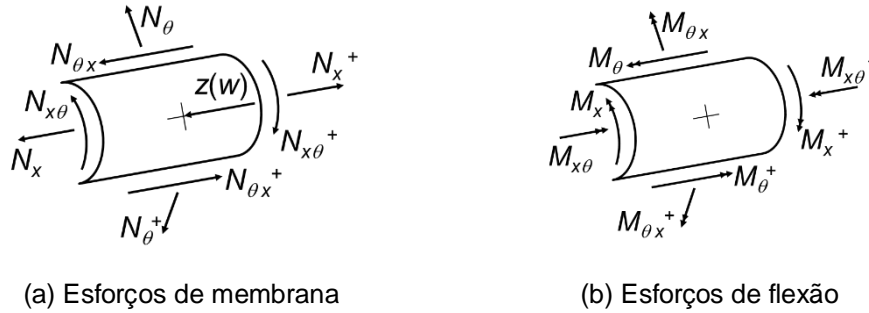


Figura 2.2 – Convenção de sinais adotada na definição dos esforços.

2.3.

Funcionais de energia da casca cilíndrica

A casca foi modelada considerando que suas extremidades estão simplesmente apoiadas, estando sujeita a uma pressão lateral, $p(x, \theta, t)$, dependente do tempo. A Figura 2.3 representa o carregamento aplicado.

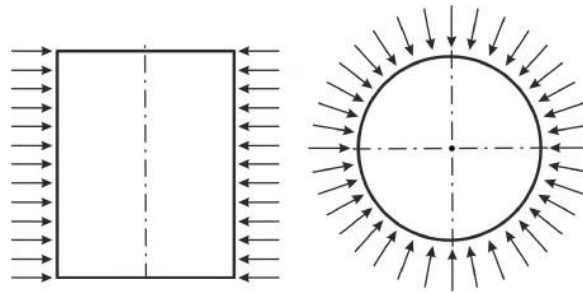


Figura 2.3 – Casca sob pressão lateral.

A energia interna de deformação da casca cilíndrica é dada por:

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L \int_0^{2\pi} \int_{-h/2}^{h/2} (\bar{\sigma}_x \bar{\varepsilon}_x + \bar{\sigma}_\theta \bar{\varepsilon}_\theta + \bar{\tau}_{x\theta} \bar{\gamma}_{x\theta}) dx R d\theta dz \quad (2.11)$$

Substituindo-se em (2.11) as relações (2.3) e (2.4) e integrando-se a equação resultante ao longo da espessura, observa-se que a energia interna de deformação é expressa pela soma de duas parcelas distintas de energia, uma denominada energia de membrana, U_m , e a outra denominada energia de flexão, U_b .

A energia de membrana é escrita em função das deformações específicas da casca cilíndrica em relação à superfície média, sendo dada por:

$$U_m = \frac{K}{2} \int_0^L \int_0^{2\pi} \left[\varepsilon_x^2 + \varepsilon_\theta^2 + 2\nu \varepsilon_x \varepsilon_\theta + \frac{(1-\nu)}{2} \gamma_{x\theta}^2 \right] dx R d\theta \quad (2.12)$$

A energia de flexão é, por sua vez, escrita em termos das mudanças de curvatura da superfície média da casca cilíndrica, tomando a forma:

$$U_b = \frac{D}{2} \int_0^L \int_0^{2\pi} \left[\chi_x^2 + \chi_\theta^2 + 2\nu \chi_x \chi_\theta + 2(1-\nu) \chi_{x\theta}^2 \right] dx R d\theta \quad (2.13)$$

O trabalho realizado pelo carregamento lateral é dado por:

$$V = \int_0^L \int_0^{2\pi} p(x, \theta, t) w dx R d\theta \quad (2.14)$$

Para o cálculo da energia cinética, leva-se em consideração apenas a parcela relativa à inércia referente aos deslocamentos laterais da casca cilíndrica. Essa simplificação não conduz a erros significativos uma vez que as frequências de vibração nas direções axial e circunferencial da casca são substancialmente maiores que as frequências de vibração na direção transversal, o que permite desconsiderar as parcelas relativas às inércias devidas às componentes de velocidade axial e circunferencial. Dessa forma, a energia cinética é dada por:

$$T = \frac{\rho h}{2} \int_0^L \int_0^{2\pi} \dot{w}^2 dx R d\theta \quad (2.15)$$

onde \dot{w} é primeira derivada do deslocamento lateral, w , em relação ao tempo, t , ou seja, a velocidade na direção radial.

Como proposto por Popov *et al.* (1998), o trabalho das forças de dissipação é escrito da seguinte forma:

$$R_e = \frac{\beta_1}{2} \int_0^L \int_0^{2\pi} \dot{w}^2 dx R d\theta + \frac{1}{2} \beta_2 \int_0^L \int_0^{2\pi} \nabla^4 \dot{w}^2 dx R d\theta \quad (2.16)$$

onde o primeiro termo representa as forças viscosas lineares devidas à resistência do meio e o segundo representa as forças visco-elásticas do material. Os parâmetros de amortecimento β_1 e β_2 são dados através das expressões:

$$\begin{aligned} \beta_1 &= 2\eta_1 \rho h \omega_0 \\ \beta_2 &= \eta_2 D \end{aligned} \quad (2.17)$$

sendo η_1 e η_2 , respectivamente, o coeficiente de amortecimento viscoso e o coeficiente de amortecimento do material, ω_0 a frequência fundamental da casca cilíndrica e ∇^4 é o operador bi harmônico que, em coordenadas cilíndricas, é dado por:

$$\nabla^4 \equiv \frac{\partial^4}{\partial x^4} + \frac{2}{R^2} \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial \theta^2} + \frac{1}{R^4} \frac{\partial^4}{\partial \theta^4} \quad (2.18)$$

2.4.

Sistema de equações não lineares de movimento

A partir dos funcionais de energia da casca cilíndrica obtém-se a função de Lagrange, \mathcal{L} , da forma:

$$\mathcal{L} = T + R_e + (U_m + U_b) + V \quad (2.19)$$

A função de Lagrange é descrita em termos das componentes dos deslocamentos, u , v e w da superfície média da casca cilíndrica, das suas derivadas em relação às coordenadas x e θ e em relação ao tempo, t .

Aplicando-se o princípio de Hamilton, obtém-se a partir do funcional (2.19) o seguinte sistema de equações de movimento da casca cilíndrica:

$$\begin{aligned} N_{x,x} + \frac{1}{R} N_{x\theta,\theta} &= 0 \\ N_{x\theta,x} + \frac{1}{R} N_{\theta,\theta} &= 0 \\ D \nabla^4 w + \beta_1 \dot{w} + \beta_2 \nabla^4 \dot{w} + \rho h \ddot{w} &= -p(x, \theta, t) + \frac{1}{R} N_\theta + N_x (w_{,xx} + w_{0,xx}) \\ &\quad + \frac{2}{R} N_{x\theta} (w_{,x\theta} + w_{0,x\theta}) \\ &\quad + \frac{1}{R^2} N_\theta (w_{,\theta\theta} + w_{0,\theta\theta}) \end{aligned} \quad (2.20)$$

Esse problema deve satisfazer, para uma casca cilíndrica simplesmente apoiada, às seguintes condições de contorno:

- Os deslocamentos na direção circunferencial devem ser nulos nas extremidades da casca:

$$v(0, \theta) = v(L, \theta) = 0 \quad (2.21)$$

- Os deslocamentos na direção lateral devem ser nulos nas extremidades da casca:

$$w(0, \theta) = w(L, \theta) = 0 \quad (2.22)$$

- O momento axial deve ser nulo nas extremidades da casca:

$$M_x(0, \theta) = M_x(L, \theta) = 0 \quad (2.23)$$

- O esforço axial deve ser igual a zero em ambos os bordos:

$$N_x(0, \theta) = N_x(L, \theta) = 0 \quad (2.24)$$

Usualmente na literatura substituem-se os esforços internos de membrana pela função de tensão de Airy. Define-se a função de tensão de Airy, $f(x, \theta)$, de forma que as seguintes relações sejam satisfeitas:

$$\begin{aligned} f_{,xx} &= N_\theta \\ f_{,\theta\theta} &= R^2 N_x \\ f_{,x\theta} &= -R N_{x\theta} \end{aligned} \quad (2.25)$$

Tem-se então, a partir das equações (2.6) e (2.25), as seguintes relações entre as deformações na superfície média da casca cilíndrica e a função de tensão de Airy:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{Eh} (f_{,\theta\theta} - \nu R^2 f_{,xx}) \\ \varepsilon_\theta &= \frac{1}{Eh} (R^2 f_{,xx} - \nu f_{,\theta\theta}) \\ \gamma_{x\theta} &= -\frac{2R(1+\nu)}{Eh} f_{,x\theta} \end{aligned} \quad (2.26)$$

Escrevendo o sistema de equações (2.20) em termos da função de tensão de Airy, equação (2.25), as duas primeiras equações são simultaneamente satisfeitas e a terceira equação é reescrita da seguinte forma:

$$D \nabla^4 w + \beta_1 \dot{w} + \beta_2 \nabla^4 \dot{w} + \rho h \ddot{w} = -p(t) + \frac{1}{R} f_{,xx} + \frac{1}{R^2} [f_{,\theta\theta} (w_{,xx} + w_{0,xx}) - 2 f_{,x\theta} (w_{,x\theta} + w_{0,x\theta}) + f_{,xx} (w_{,\theta\theta} + w_{0,\theta\theta})] \quad (2.27)$$

O sistema de três equações foi então reduzido a uma única equação de movimento com duas incógnitas, o deslocamento transversal, w , e a função de tensão de Airy, f . Portanto, é necessária uma segunda equação que relacione essas duas variáveis. Segundo a teoria da elasticidade, tem-se que, para o estado plano de deformação, a equação de compatibilidade geométrica é dada por:

$$\frac{1}{R^2} \varepsilon_{x,\theta\theta} + \varepsilon_{\theta,xx} - \frac{1}{R} \gamma_{x\theta,x\theta} = 0 \quad (2.28)$$

A fim de reescrever a equação (2.28) em termos das incógnitas w e f , manipulam-se matematicamente as equações (2.1), (2.26) e (2.28), obtendo-se:

$$\begin{aligned} \frac{1}{Eh} \nabla^4 f = & -\frac{1}{R} w_{,xx} \\ & + \frac{1}{R^2} \left(w_{,x\theta}^2 + 2 w_{,x\theta} w_{0,x\theta} - w_{,xx} w_{,\theta\theta} - w_{,xx} w_{0,\theta\theta} - w_{0,xx} w_{,\theta\theta} \right) \end{aligned} \quad (2.29)$$

Uma vez deduzidas as equações diferenciais parciais que governam o problema é necessária uma expansão modal que represente uma boa aproximação para o campo de deslocamentos, w , que seja capaz de representar o acoplamento e a interação modal que são característicos do problema abordado nesta tese.

No próximo capítulo mostra-se a metodologia utilizada para determinação da expansão modal que descreve o campo de deslocamento da casca cilíndrica. Considera-se que a imperfeição geométrica inicial é descrita pela mesma expansão modal.

3

Determinação do campo de deslocamentos transversais considerando a ressonância interna

No capítulo anterior deduziram-se as equações diferenciais parciais que descrevem o comportamento dinâmico da casca cilíndrica em termos do campo de deslocamentos laterais, w , e da função de tensão de Airy, f .

Neste capítulo apresenta-se a metodologia utilizada para a determinação de uma expansão modal que represente o deslocamento lateral considerando o fenômeno da interação modal, as ressonâncias internas e o efeito da simetria. O uso de expansões modais que não levem em conta estes aspectos pode gerar resultados errôneos e incompatíveis com dados experimentais disponíveis.

Como base para a dedução dessa expansão modal, apresenta-se inicialmente a análise das vibrações livres e lineares da casca cilíndrica, a partir da qual se obtêm as geometrias empregadas nas análises das ressonâncias internas. O método da perturbação (Gonçalves e Batista, 1988, Gonçalves *et al.*, 2008) permite obter de forma sistemática a expansão modal dos deslocamentos laterais da casca cilíndrica, levando-se em consideração o acoplamento e a interação entre os modos (Gonçalves *et al.*, 2008, Silva *et al.*, 2011a).

A seguir realiza-se a análise das vibrações livres não lineares com o objetivo de se determinar o número de modos da expansão modal necessários para a discretização do campo de deslocamentos. Aplica-se então o método de Karhunen-Loève (Wolter, 2001; Silva, 2008) para quantificar a importância de cada um dos modos que compõem a expansão modal dos deslocamentos na energia total do sistema e obter modelos de baixa dimensão representativos do comportamento não linear da casca cilíndrica. Por último, apresentam-se as expansões modais utilizadas no decorrer deste trabalho, determinadas a partir das análises apresentadas neste capítulo juntamente com as geometrias que serão avaliadas.

3.1.

Vibrações livres e lineares da casca cilíndrica

Para uma casca cilíndrica perfeita simplesmente apoiada em ambas as extremidades a solução linear clássica para os modos de vibração transversais é dada por:

$$w = A_{1,1}(t) h \cos(n \theta) \sin\left(\frac{m \pi x}{L}\right) \quad (3.1)$$

onde $A_{1,1}(t) = C_0 \cos(\omega_{mn} t)$, sendo C_0 a amplitude de vibração normalizada com relação à espessura da casca, t o tempo, n o número de ondas circunferenciais, m o número de semi-ondas longitudinais do modo de vibração e ω_{mn} a frequência natural da casca cilíndrica associada a este modo.

A fim de se obter as frequências naturais da casca, assume-se que a mesma não apresenta imperfeições geométricas iniciais e que o sistema está em vibração livre e não amortecida. Linearizando a equação de movimento (2.27) e a equação de compatibilidade (2.29), obtém-se:

$$\begin{aligned} D \nabla^4 w + \rho h \ddot{w} &= \frac{1}{R} f_{,xx} \\ \frac{1}{E h} \nabla^4 f &= -\frac{1}{R} w_{,xx} \end{aligned} \quad (3.2)$$

Substituindo na equação de compatibilidade a solução analítica (3.1) e resolvendo a equação diferencial parcial, obtém-se a função da tensão f . A seguir, substituindo a função de tensão e a equação (3.1) na equação de movimento (3.2), obtém-se para a frequência natural associada a um modo (m, n) a expressão:

$$\begin{aligned} \omega_{mn} &= \frac{1}{(\pi^2 R^2 m^2 + L^2 n^2) R^2 L^2} \sqrt{\frac{E}{12 \rho (1 - \nu^2)}} \left[12 L^4 \pi^4 R^6 m^4 (1 - \nu^2) + h^2 (\pi^2 R^2 m^2 + L^2 n^2)^4 \right] \\ &= \sqrt{\frac{E}{\rho R^2 (1 - \nu^2)}} \left[\frac{q^4}{(q^2 + n^2)^2} (1 - \nu^2) + \left(\frac{1}{12 (R/h)^2} \right) (q^2 + n^2)^2 \right]^{1/2} ; \quad q = \frac{m \pi}{L/R} \end{aligned} \quad (3.3)$$

Na análise paramétrica, o seguinte parâmetro de frequência natural adimensional da casca cilíndrica é adotado:

$$\Omega'_{mn} = \sqrt{\frac{\omega_{mn}^2 R^2 \rho (1 - \nu^2)}{E}} = \left[\frac{q^4}{(q^2 + n^2)^2} (1 - \nu^2) + \left(\frac{1}{12 (R/h)^2} \right) (q^2 + n^2)^2 \right]^{1/2} \quad (3.4)$$

onde se observa que esse parâmetro adimensional é função das relações geométricas L/R e R/h e do número de ondas m e n . O primeiro termo corresponde à contribuição dos efeitos de membrana, enquanto o segundo termo corresponde à contribuição dos efeitos de flexão. À medida que o parâmetro (R/h) cresce, ou seja, a casca se torna mais esbelta, decresce o efeito da flexão. Para um dado número de semi-ondas axiais, m , enquanto a parcela de membrana decresce com o número de ondas circunferenciais, n , o efeito da flexão aumenta. O valor mínimo ocorre para a combinação modal que minimiza a energia interna de deformação (energia de membrana + energia de flexão).

Com o objetivo de se analisar a variação das frequências naturais da casca cilíndrica com a sua geometria, apresentam-se na Figura 3.1 os espectros de frequência para valores selecionados das razões L/R e R/h . Em cada figura mantém-se constante a relação R/h e varia-se a razão L/R e o número de ondas circunferenciais, n . Em todos os resultados apresentados na Figura 3.1 considera-se o número de semi-ondas longitudinais, m , igual a um.

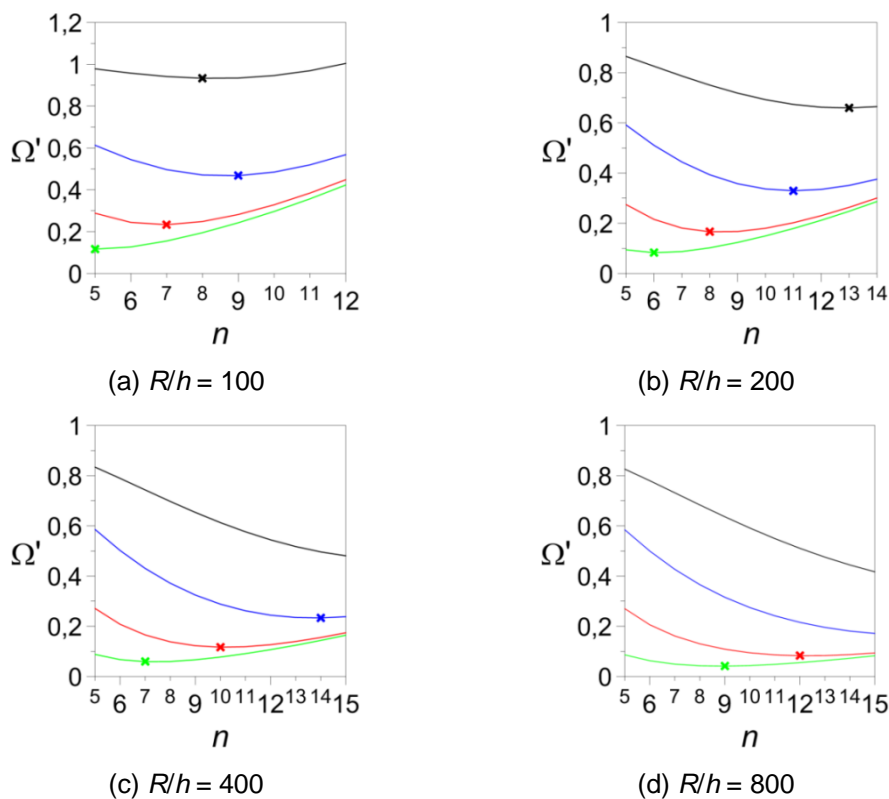


Figura 3.1 – Variação da frequência adimensional em função do número de ondas circunferenciais com $m = 1$ e variando L/R para (a) $R/h = 100$, (b) $R/h = 200$, (c) $R/h = 400$ e (d) $R/h = 800$.

— $L/R = 0,25$, — $L/R = 0,50$, — $L/R = 1,00$, — $L/R = 2,00$.

Em cada curva destaca-se com o símbolo \times o valor da frequência natural mínima da casca cilíndrica para a geometria adotada, ou seja, sua frequência fundamental de vibração. Observa-se que, à medida que a razão L/R aumenta, ou seja, a casca torna-se mais longa, o número de ondas circunferenciais associado ao modo fundamental de vibração diminui. Já à medida que a razão R/h aumenta, ou seja, a casca torna-se mais esbelta, o número de ondas circunferenciais do modo de vibração aumenta. Nota-se que, para certas geometrias, alguns modos de vibração apresentam valores bastante próximos de frequência natural. Esse fato levanta a questão de que muitas geometrias podem apresentar, para modos de vibração diferentes, o mesmo valor de frequência natural, levando a uma ressonância interna 1:1.

A Figura 3.2 apresenta a variação da frequência natural adimensional, Ω' , da casca cilíndrica em função da variação do número de ondas circunferenciais, n , e do número de semi-ondas longitudinais, m , considerando $R/h = 100$ e $L/R = 2$. Pode-se observar que a menor frequência natural ocorre sempre para $m = 1$. Assim, para a geometria considerada, a menor frequência natural ocorre para o modo de vibração $(m, n) = (1, 5)$.

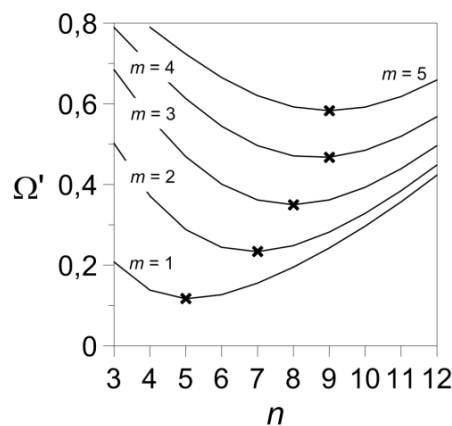


Figura 3.2 – Variação da frequência adimensional em função do número de ondas circunferenciais variando o valor de m para $R/h = 100$ e $L/R = 2$.

Já que as frequências naturais e os modos de vibração da casca cilíndrica são fortemente dependentes da geometria da casca, investigam-se a seguir as geometrias que apresentam dois modos de vibração distintos com o mesmo valor de frequência natural, o que geraria uma ressonância interna 1:1, com importantes efeitos sobre as vibrações não lineares da casca. Para tal, considera-se, como exemplo, uma casca cilíndrica simplesmente apoiada com raio $R = 0,2$ m e espessura $h = 0,002$ m, ou seja, $R/h = 100$. A Figura 3.3 mostra

a variação da frequência natural adimensional, Ω' , em função do comprimento da casca cilíndrica, L , para diferentes números de ondas circunferenciais, n e $m = 1$. Cada ponto de interseção das curvas corresponde a uma geometria capaz de apresentar uma ressonância interna 1:1 entre dois modos de vibração com número de ondas circunferenciais distintos, dados pelos valores destacados entre parênteses.

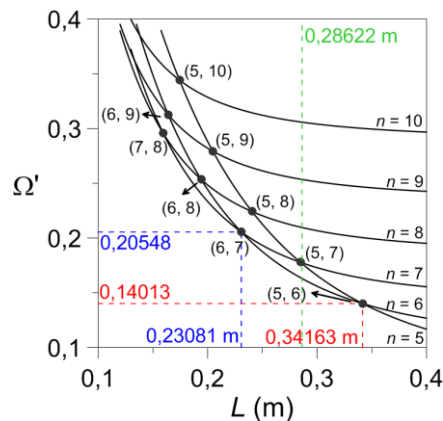


Figura 3.3 – Variação da frequência adimensional em função do comprimento da casca cilíndrica para $m = 1$ e diversos valores de ondas circunferenciais. $R/h = 100$.

Com o objetivo de avaliar a influência das imperfeições e simetria nas ressonâncias internas, deseja-se selecionar uma geometria onde $\Omega'_{1,n} = \Omega'_{1,(n+1)}$ e $\partial\Omega'_{1,n}/\partial n = \partial\Omega'_{1,(n+1)}/\partial n = 0$. Neste caso, as duas frequências correspondem à frequência mínima da casca e tem-se o caso mais perigoso de ressonância interna 1:1.

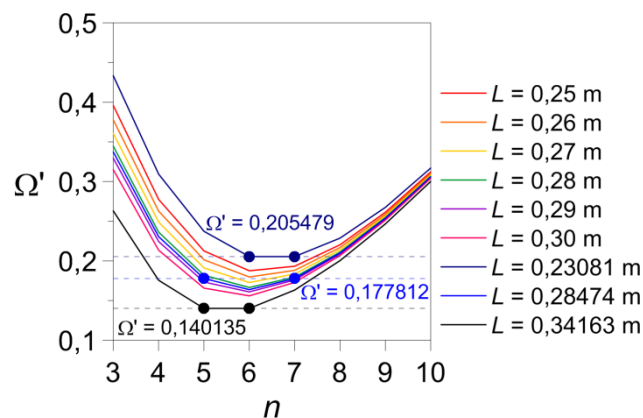


Figura 3.4 – Variação da frequência adimensional em função do número de ondas circunferenciais para vários valores de L . $m = 1$.

A Figura 3.4 apresenta os espectros de frequência para valores selecionados de L . Observa-se que para $L = 0,34163$ m há ressonância interna

entre dois modos consecutivos de vibração, respectivamente, (1, 5) e (1, 6). Para $L = 0,23081$ m há também ressonância interna entre dois modos consecutivos de vibração, respectivamente, (1, 6) e (1, 7). Já no caso de $L = 0,28474$ m tem-se uma ressonância interna entre dois modos não consecutivos de vibração, caso representado para interação entre os modos (1, 5) e (1, 7), o menor valor da frequência natural ocorre para o modo de vibração (1, 6), entre aos dois modos que compõem a interação. No presente trabalho seleciona-se, para a análise não linear, a interação entre os modos (1, 6) e (1, 7) ($L = 0,23081$ m), já que estes valores de n encontram-se em uma região onde a teoria de cascas abatidas de Donnell apresenta resultados semelhantes àqueles obtidos por outras teorias de cascas esbeltas mais refinadas. Cabe ressaltar que, sendo o parâmetro de frequência adimensional (3.4) função dos parâmetros geométricos R/h e L/R , existem infinitas geometrias que apresentam o mesmo tipo de interação.

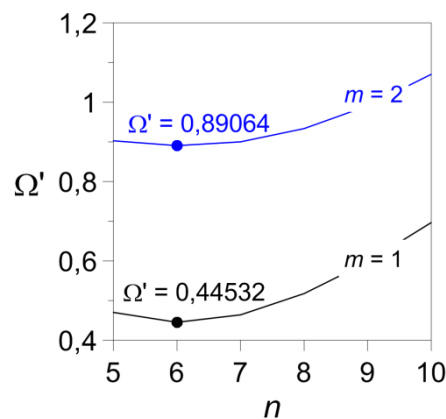


Figura 3.5 – Variação da frequência adimensional em função do número de ondas circunferenciais para $R/h = 50$ e $L/R \sim 0,74$. Ressonância interna entre os modos $(m, n) = (1, 6)$ e $(m + 1, n) = (2, 6)$.

Adicionalmente deseja-se analisar uma geometria com ressonância interna 1:2 obedecendo as restrições $\Omega'_{1,n} = \Omega'_{2,n}$ e $\partial\Omega'_{1,n}/\partial n = \partial\Omega'_{2,n}/\partial n = 0$. Neste caso tem-se ressonância interna entre a frequência fundamental, que tem uma semi-onda axial, e um modo cuja frequência é o dobro da frequência fundamental, com duas semi-ondas axiais, sendo esta frequência o mínimo da curva correspondente a $m = 2$. Em virtude da importância da não linearidade quadrática nas vibrações não lineares de cascas cilíndricas, espera-se que esta ressonância interna tenha grande importância no seu comportamento dinâmico. A Figura 3.5, obtida para $L = 0,074$ m, $h = 0,002$ m, $R = 0,1$ m ($R/h = 50$ e $L/R \sim 0,74$) apresenta as seguintes frequências $\Omega'_{1,6} = 0,44532$ e $\Omega'_{2,6} = 0,89064$.

Nesse caso, tem-se uma ressonância interna 1:2 obedecendo todas as restrições especificadas acima.

Devido à continuidade e à simetria da casca na direção circunferencial, se $\cos(n\theta)$ é solução do problema, $\sin(n\theta)$ também é solução. Assim as frequências naturais da casca ocorrem aos pares, sendo os dois modos defasados em $\pi/2n$. Portanto, se (3.1) é um modo de vibração, tem-se que:

$$w = B_{11}(t) h \sin(n\theta) \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \quad (3.5)$$

é também um modo de vibração da casca, onde $B_{11}(t) = C_0 \cos(\omega_{mn} t)$ é a amplitude do modo de vibração.

Como as expansões modais (3.1) e (3.5) diferem-se apenas pela defasagem na direção circunferencial e ambas as expressões são soluções exatas das equações lineares da casca cilíndrica simplesmente apoiada nas bordas, os resultados apresentados nesta seção são idênticos utilizando-se quer a equação (3.1), quer a equação (3.5). Assim, nos exemplos de ressonância interna analisados neste trabalho tem-se sempre a interação de quatro modos lineares e a solução modal do problema não linear deve levar em conta necessariamente os acoplamentos modais e interações entre estes quatro modos.

3.2.

Método da perturbação para determinação da expansão modal para os deslocamentos laterais

Para o estudo do acoplamento e da interação modal no comportamento dinâmico não linear de cascas cilíndricas, uma função deve ser adotada para o deslocamento lateral, w , que satisfaça as condições de contorno e de continuidade do problema e reflita os acoplamentos e as interações consideradas. Definida esta função, a função de tensão, f , é obtida a partir da solução analítica da equação de compatibilidade, equação (2.29). Tendo-se as funções w e f , pode-se discretizar a equação não linear de movimento, equação (2.27), utilizando-se, por exemplo, o método de Galerkin.

A qualidade da solução depende então de uma boa escolha da solução aproximada de w , solução essa que vinha sendo escolhida em diversos estudos com base na observação de resultados lineares e experimentais, ou por tentativa e erro, e não de forma sistemática, como se nota nos trabalhos de Chu (1961), Nowinski (1963), Evensen (1967), Croll e Batista (1981), Hunt *et al.* (1986) e

Popov *et al.* (1998), dentre outros (vide capítulo 1). Examinando-se os resultados obtidos nesses trabalhos, percebe-se que os modos acoplados a w têm grande influência nos resultados. Os modos que se acoplam ao modo principal constituem um fenômeno caracteristicamente não linear, denominado acoplamento modal.

Para a determinação consistente do campo de deslocamentos laterais da casca cilíndrica, emprega-se, neste trabalho, o método da perturbação (Gonçalves e Batista, 1988; Gonçalves *et al.*, 2008), através do qual se obtém de forma sistemática quais modos descrevem os deslocamentos da casca cilíndrica até determinado grau de aproximação. O procedimento utilizado é descrito a seguir.

O sistema de equações diferenciais de movimento da casca cilíndrica, equação (2.20), pode ser escrito em termos do vetor de deslocamentos $\mathbf{U} = [u, v, w]^T$ da forma:

$$\mathbf{L}(\mathbf{U}) - \mathbf{U}_{,tt} = \delta \mathbf{D}_1(\mathbf{U}) + \delta^2 \mathbf{D}_2(\mathbf{U}) + \dots \quad (3.6)$$

sendo $\mathbf{L}(\mathbf{U})$ o operador diferencial linear, $\mathbf{U}_{,tt}$, a segunda derivada do vetor de deslocamentos em relação ao tempo, $\mathbf{D}_1(\mathbf{U})$ o operador diferencial não linear que dá origem aos termos quadráticos e $\mathbf{D}_2(\mathbf{U})$ o operador diferencial não linear que dá origem aos termos cúbicos. O parâmetro δ é tomado como sendo a razão h/R , presente nos termos quadráticos e cúbicos do sistema de equações de movimento e que para cascas esbeltas pode ser considerado um parâmetro de perturbação já que h/R é muito menor que a unidade. Assim sendo, é possível expressar as componentes de \mathbf{U} como uma série de potências em δ , ou seja:

$$u = \sum_{i=0}^{\infty} \delta^i u_i(x, \theta, t) \quad v = \sum_{i=0}^{\infty} \delta^i v_i(x, \theta, t) \quad w = \sum_{i=0}^{\infty} \delta^i w_i(x, \theta, t) \quad (3.7)$$

A importância de cada modo acoplado à solução inicial é indicada pelo método da perturbação a partir da ordem do expoente do parâmetro de perturbação, δ . Valores maiores da potência do parâmetro δ indicam os termos com menor influência no comportamento do sistema.

Substituindo-se a equação (3.7) na equação (3.6) e isolando-se os termos com a mesma potência de δ , o resultado é uma série de sistemas lineares de equações diferenciais parciais da forma:

$$\begin{aligned}
L(\mathbf{U}^0) - \mathbf{U}^0_{,tt} &= \mathbf{0} \\
L(\mathbf{U}^1) - \mathbf{U}^1_{,tt} &= \mathbf{D}_1(\mathbf{U}^0) \\
L(\mathbf{U}^2) - \mathbf{U}^2_{,tt} &= \mathbf{D}_1(\mathbf{U}^0, \mathbf{U}^1) + \mathbf{D}_2(\mathbf{U}^0) \\
&\vdots
\end{aligned} \tag{3.8}$$

Os sistemas de equações (3.8) podem ser resolvidos recursivamente, pois o termo à direita da igualdade de cada sistema de equação, que tem como incógnita o vetor de deslocamento \mathbf{U}^k , contém apenas o campo de deslocamentos e as derivadas de seus termos até a ordem $k - 1$.

Encontram-se através da utilização do método da perturbação soluções para as componentes do deslocamento u , v e w . Porém, como as duas primeiras equações de movimento do sistema de equações (2.20) são satisfeitas pela função de tensão de Airy, equação (2.25), apenas a solução do deslocamento transversal é utilizada neste trabalho para a resolução do problema.

Primeiramente, soluciona-se a primeira equação do sistema de equações definido na equação (3.8). Como exposto nos trabalhos de Popov *et al.* (1998), Del Prado (2001) e Rodrigues *et al.* (2013) e visto na seção anterior deste capítulo, dependendo da geometria da casca cilíndrica, podem existir dois modos de vibração diferentes com frequências iguais ou bastante próximas.

Com o intuito de se investigar o comportamento dinâmico da casca cilíndrica quando há interação modal entre dois modos de vibração distintos com a mesma frequência natural, a solução inicial para o campo de deslocamentos, \mathbf{U}^0 , adotada deve conter informações desses dois modos e, para cada modo, o modo de mesma frequência devido a axissimetria, caracterizando uma ressonância interna 1:1:1:1 (Rodrigues *et al.*, 2012; Rodrigues *et al.*, 2013; Rodrigues *et al.*, 2016, 2017). A importância da adição dos modos advindos da simetria à expansão que descreve o deslocamento lateral é elucidada em vários artigos (Ginsberg, 1973; Chen; Babcock, 1975; Amabili, 1998), sendo apresentada, de forma mais detalhada, no livro de Amabili (2008).

Assim, para uma casca simplesmente apoiada deve ser adotada como solução inicial no método de perturbação (primeiro sistema de equações dado em (3.8)) a expressão:

$$\begin{aligned}
W_0 &= A1_0(t) \cos(n\theta) \sin(q\xi) + B1_0(t) \sin(n\theta) \sin(q\xi) \\
&\quad + A2_0(t) \cos(N\theta) \sin(q\xi) + B2_0(t) \sin(N\theta) \sin(q\xi)
\end{aligned} \tag{3.10}$$

Que consiste na soma dos quatro modos com a mesma frequência natural. Aqui $A1_0(t)$, $A2_0(t)$ são as amplitudes modais dependentes do tempo dos dois modos com número de ondas circunferenciais n e $N = n + 1$ que participam da interação modal enquanto $B1_0(t)$ e $B2_0(t)$ são as amplitudes modais dos respectivos modos circunferencialmente simétricos. W é o valor adimensional do deslocamento lateral ($W = w/h$). Considera-se no presente desenvolvimento a coordenada axial adimensional:

$$\xi = \frac{x}{R} \quad (3.9)$$

Esta notação será utilizada nos próximos capítulos para identificar estes quatro modos.

$$W = \begin{matrix} \text{[Diagram 1]} & + & \text{[Diagram 2]} & + & \text{[Diagram 3]} & + & \text{[Diagram 4]} \\ (m, n) = (1, 6)c & (m, n) = (1, 6)s & (m, N) = (1, 7)c & (m, N) = (1, 7)s \\ \cos(n\theta) & \sin(n\theta) & \cos(N\theta) & \sin(N\theta) \end{matrix}$$

Figura 3.6 – Forma dos modos de vibração utilizados na expansão do deslocamento lateral com interação em n .

A Figura 3.6 mostra, por exemplo, a forma dos modos de vibração utilizados como solução inicial do método da perturbação para descrever a expansão do deslocamento lateral, equação (3.10), considerando os modos $(m, n) = (1, 6)$ e $(m, N = n + 1) = (1, 7)$ como participantes da interação modal.

Substituindo a solução (3.10) no segundo sistema de equações (3.8), encontra-se um sistema de equações diferenciais lineares não homogêneas em \mathbf{U}^1 , cuja solução resulta nos modos de segunda ordem da expansão, provenientes diretamente da não linearidade quadrática, incluindo o modo axissimétrico. Utilizando a solução adotada \mathbf{U}^0 e a solução encontrada \mathbf{U}^1 no terceiro sistema de equações (3.8) podem-se obter os modos de terceira ordem da expansão, provenientes das não linearidades cúbicas. O sistema de equações (3.8) pode ser resolvido recursivamente, encontrando-se novas soluções para a expansão das componentes do deslocamento \mathbf{U} de ordens mais altas até a precisão desejada.

A solução geral para o campo de deslocamentos é escrita como o somatório dos modos encontrados através do método da perturbação e se aplica a cascas cilíndricas infinitamente longas, uma vez que nenhuma condição de

contorno foi imposta durante os cálculos dos termos de mais alta ordem. Impondo as condições de deslocamento transversal e momento axial nulo nas bordas, respectivamente equações (2.22) e (2.23), o deslocamento lateral de uma casca cilíndrica simplesmente apoiada para a presente interação modal toma a forma:

$$\begin{aligned}
 W = & \sum_{i=1,3,5}^{\bar{N}_1} \sum_{j=1,3,5}^{\infty} [A1_{ij}(t) \cos(i n \theta) + B1_{ij}(t) \sin(i n \theta) \\
 & + A2_{ij}(t) \cos(i N \theta) + B2_{ij}(t) \sin(i N \theta)] \sin(j q \xi) \\
 & + \sum_{i=1,2,3}^{\bar{N}_1-1} \sum_{j=1,3,5}^{\infty} \{ A3_{ij}(t) \cos[(i N - (\bar{N}_1 - i)n)\theta] + B3_{ij}(t) \sin[(i N - (\bar{N}_1 - i)n)\theta] \\
 & + A4_{ij}(t) \cos[(i N + (\bar{N}_1 - i)n)\theta] + B4_{ij}(t) \sin[(i N + (\bar{N}_1 - i)n)\theta] \} \sin(j q \xi) \\
 & + \sum_{\alpha=0,2,4}^{\bar{N}_2} \sum_{\beta=0}^{\infty} [A5_{\alpha(2+6\beta)}(t) \cos(\alpha n \theta) + B5_{\alpha(2+6\beta)}(t) \sin(\alpha n \theta) \\
 & + A6_{\alpha(2+6\beta)}(t) \cos(\alpha N \theta) + B6_{\alpha(2+6\beta)}(t) \sin(\alpha N \theta)] \times \\
 & \left\{ -\frac{(3+6\beta)}{(4+12\beta)} \cos(6\beta q \xi) + \cos[(2+6\beta)q \xi] - \frac{(1+6\beta)}{(4+12\beta)} \cos[(4+6\beta)q \xi] \right\} \\
 & + \sum_{\alpha=1,2,3}^{\bar{N}_2-1} \sum_{\beta=0}^{\infty} \{ A7_{\alpha(2+6\beta)}(t) \cos[(\alpha N - (\bar{N}_2 - \alpha)n)\theta] \\
 & + B7_{\alpha(2+6\beta)}(t) \sin[(\alpha N - (\bar{N}_2 - \alpha)n)\theta] + A8_{\alpha(2+6\beta)}(t) \cos[(\alpha N + (\bar{N}_2 - \alpha)n)\theta] \\
 & + B8_{\alpha(2+6\beta)}(t) \sin[(\alpha N + (\bar{N}_2 - \alpha)n)\theta] \} \times \\
 & \left\{ -\frac{(3+6\beta)}{(4+12\beta)} \cos(6\beta q \xi) + \cos[(2+6\beta)q \xi] - \frac{(1+6\beta)}{(4+12\beta)} \cos[(4+6\beta)q \xi] \right\}
 \end{aligned} \tag{3.11}$$

onde \bar{N}_1 e \bar{N}_2 representam o número de termos selecionados para representar a expansão do deslocamento transversal.

Para o caso de ressonância 1:2, levando em conta os modos devidos à axissimetria, o que leva a uma ressonância interna 1:1:2:2, tem-se que a solução do primeiro sistema de equações (3.8) é da forma:

$$\begin{aligned}
 W_0 = & A1_0(t) \cos(n\theta) \sin(q\xi) + B1_0(t) \sin(n\theta) \sin(q\xi) \\
 & + A2_0(t) \cos(n\theta) \sin(Q\xi) + B2_0(t) \sin(n\theta) \sin(Q\xi) \quad ; \quad Q = 2q \quad (3.12)
 \end{aligned}$$

A Figura 3.7 ilustra a forma dos modos de vibração utilizados na expansão do deslocamento lateral, equação (3.12), considerando os modos participantes da interação $(m, n) = (1, 6)$ e $(M = m + 1, n) = (2, 6)$.

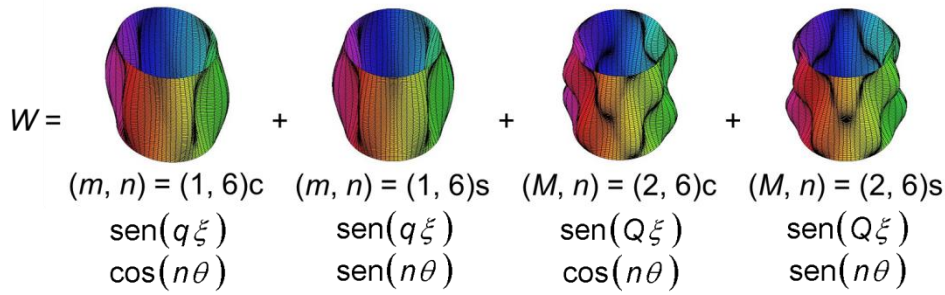


Figura 3.7 – Forma dos modos de vibração utilizados na expansão do deslocamento lateral com interação em m .

Aplicando-se a essa expansão o método da perturbação de forma análoga à descrita anteriormente para a equação (3.10), encontra-se como solução geral para o campo de deslocamentos, após a imposição das condições de contorno, a seguinte equação:

$$\begin{aligned}
 W = & \sum_{i=1,3,5}^{\infty} \sum_{j=1,3,5}^{\bar{M}_1} [A1_{ij}(t) \cos(i n \theta) + B1_{ij}(t) \text{sen}(i n \theta)] \text{sen}(j q \xi) \\
 & \sum_{i=1,3,5}^{\infty} \sum_{j=1,3,5}^{\bar{M}_1} [A2_{ij}(t) \cos(i N \theta) + B2_{ij}(t) \text{sen}(i N \theta)] \text{sen}(j Q \xi) \\
 & + \sum_{i=1,3,5}^{\infty} \sum_{j=1,2,3}^{\bar{M}_1} \{ [A3_{ij}(t) \cos(i n \theta) + B3_{ij}(t) \text{sen}(i n \theta)] \text{sen}[(j Q (\bar{M}_1 - j) q) \xi] \\
 & + [A4_{ij}(t) \cos(i n \theta) + B4_{ij}(t) \text{sen}(i n \theta)] \text{sen}[(j Q + (\bar{M}_1 - j) q) \xi] \} \\
 & + \sum_{\alpha=0}^{\infty} \sum_{\beta=0,2,4}^{\bar{M}_2} [A5_{\alpha(2+6\beta)}(t) \cos(\alpha n \theta) + B5_{\alpha(2+6\beta)}(t) \text{sen}(\alpha n \theta) \\
 & \left\{ \frac{(3+6\beta)}{(4+12\beta)} \cos(6\beta q \xi) + \cos[(2+6\beta) q \xi] \right\} \frac{(1+6\beta)}{(4+12\beta)} \cos[(4+6\beta) q \xi] \} \\
 & + \sum_{\alpha=0}^{\infty} \sum_{\beta=0,2,4}^{\bar{M}_2} [A6_{\alpha(2+6\beta)}(t) \cos(\alpha n \theta) + B6_{\alpha(2+6\beta)}(t) \text{sen}(\alpha n \theta) \\
 & \left\{ \frac{(3+6\beta)}{(4+12\beta)} \cos(6\beta Q \xi) + \cos[(2+6\beta) Q \xi] \right\} \frac{(1+6\beta)}{(4+12\beta)} \cos[(4+6\beta) Q \xi] \}
 \end{aligned} \tag{3.13}$$

onde \bar{M}_1 e \bar{M}_2 representam o número de termos selecionados para representar a expansão do deslocamento lateral da casca cilíndrica.

3.3.

Vibrações livres e não lineares da casca cilíndrica

Analisa-se neste item as relações frequência-amplitude da casca cilíndrica para um dado modo de vibração, tendo como objetivo a determinação do número de graus de liberdade (GDL) necessário para a discretização do campo de deslocamentos laterais, w , e, com isso, garantir a correta representação do comportamento não linear da casca cilíndrica para grandes amplitudes de vibração. Considere-se, pois, o modo de vibração:

$$W_0 = A_{11}(t) h \cos(n \theta) \sin(q \xi) \quad (3.14)$$

Para esse dado modo, a expansão modal para W se reduz a:

$$W = \sum_{i=1,3,5}^{\infty} \sum_{j=1,3,5}^{\infty} A_{ij}(t) h \cos(i n \theta) \sin(j q \xi) + \sum_{\alpha=0,2,4}^{\infty} \sum_{\beta=0,1,2}^{\infty} A_{\alpha(2+6\beta)}(t) h \cos(\alpha n \theta) \left[\frac{(3+6\beta)}{(4+12\beta)} \cos(6\beta q \xi) - \cos((2+6\beta) q \xi) + \frac{(1+6\beta)}{(4+12\beta)} \cos((4+6\beta) q \xi) \right] \quad (3.15)$$

Obtêm-se as relações frequência-amplitude da casca cilíndrica aplicando-se um método numérico utilizado para resolver problemas típicos de valor de contorno, denominado *shooting method* (Abe *et al.*, 2007; Silva, 2008). Sabe-se que, para um sistema não amortecido e em vibração livre, tem-se um problema de valor inicial em que as condições iniciais se repetem a cada período de vibração. Dessa forma, o problema de valor inicial pode ser formulado como um problema de valor de contorno, pois se sabe que ao final de cada período de vibração os deslocamentos e velocidades são iguais aos valores das condições iniciais. O método inicia-se com a integração das equações de movimento discretizadas no tempo através da aplicação método de Runge-Kutta de quarta ordem, arbitrando-se as amplitudes dos modos em (3.15) e considerando as velocidades iniciais nulas. As incógnitas são as condições iniciais e a frequência natural do sistema não linear que é função da magnitude de vibração. Os valores iniciais de amplitude e velocidade são corrigidos a cada iteração através da aplicação do método de Newton, de forma que, após um período, se obtenha exatamente os mesmos valores. É necessária uma variável de controle que será incrementada durante a execução do método, aqui tomada como sendo a amplitude $A_{11}(t)$.

A variável tempo, t , é considerada na forma adimensional:

$$\tau = \omega_0 t \quad (3.16)$$

sendo ω_0 a frequência linear da casca cilíndrica.

Para estudar a convergência, consideram-se os seguintes modelos discretos com um número crescente de graus de liberdade (GDL):

- 1 GDL – $A_{11}(\tau)$;
- 2 GDL – $A_{11}(\tau) + A_{02}(\tau)$;
- 3 GDL – $A_{11}(\tau) + A_{02}(\tau) + A_{22}(\tau)$;
- 4 GDL – $A_{11}(\tau) + A_{02}(\tau) + A_{22}(\tau) + A_{13}(\tau)$;
- 5 GDL – $A_{11}(\tau) + A_{02}(\tau) + A_{22}(\tau) + A_{13}(\tau) + A_{31}(\tau)$;
- 6 GDL – $A_{11}(\tau) + A_{02}(\tau) + A_{22}(\tau) + A_{13}(\tau) + A_{31}(\tau) + A_{33}(\tau)$.

A Figura 3.8 (a) apresenta a relação frequência-amplitude da casca cilíndrica, obtida com a utilização do *shooting method*, para o modo de vibração $(m, n) = (1, 5)$, incrementando-se o número de graus de liberdade. Já a Figura 3.8 (b) ilustra a relação frequência-amplitude para o modo de vibração $(m, n) = (1, 6)$. Nessas figuras, apresenta-se os valores máximos da amplitude de vibração, $A_{11}^{\text{Max}}(\tau)$, em função da frequência não linear de vibração, Ω_0 . A Figura 3.8 (c), que mostra a relação frequência-amplitude obtida para os modos de vibração $(m, n) = (1, 5)$ e $(m, n) = (1, 6)$ utilizando-se o modelo com 5 GDL.

Pode-se observar através da análise das Figuras 3.8 (a) e (b) que a expansão com apenas 1 GDL não é suficiente para descrever o comportamento não linear da casca cilíndrica, apresentando não linearidade do tipo *hardening*. Já nos modelos com dois ou mais graus de liberdade observa-se uma não linearidade do tipo *softening*. Esta mudança deve-se à consideração do modo axissimétrico, $A_{02}(\tau)$, essencial para a quebra de simetria do campo de deslocamentos. Os termos de terceira ordem, $A_{13}(\tau)$, $A_{31}(\tau)$ e $A_{33}(\tau)$, não alteram o comportamento da estrutura para pequenos deslocamentos, mas acentuam a perda de rigidez e são necessários para se obter a convergência para grandes amplitudes de vibração. Para os modelos com 4 e 5 GDL, observa-se que a não linearidade volta a ser do tipo *hardening* após atingir um valor mínimo para a frequência natural não linear. Esses modelos apresentam resultados praticamente coincidentes, mostrando que a relação frequência-amplitude, para amplitudes até duas vezes a espessura da casca cilíndrica, converge com a utilização de 5 graus de liberdade na expansão modal (3.15). O valor mínimo da frequência ocorre para amplitudes de vibração por volta de 1,8, nos dois modos

de vibração. Cabe observar que, dependendo das relações R/h e L/R , cascas cilíndricas podem apresentar tanto comportamento *hardening* como *softening*. Entretanto, nos dois casos, para alcançar a convergência até grandes amplitudes é indicado o uso do modelo com 6 GDL.

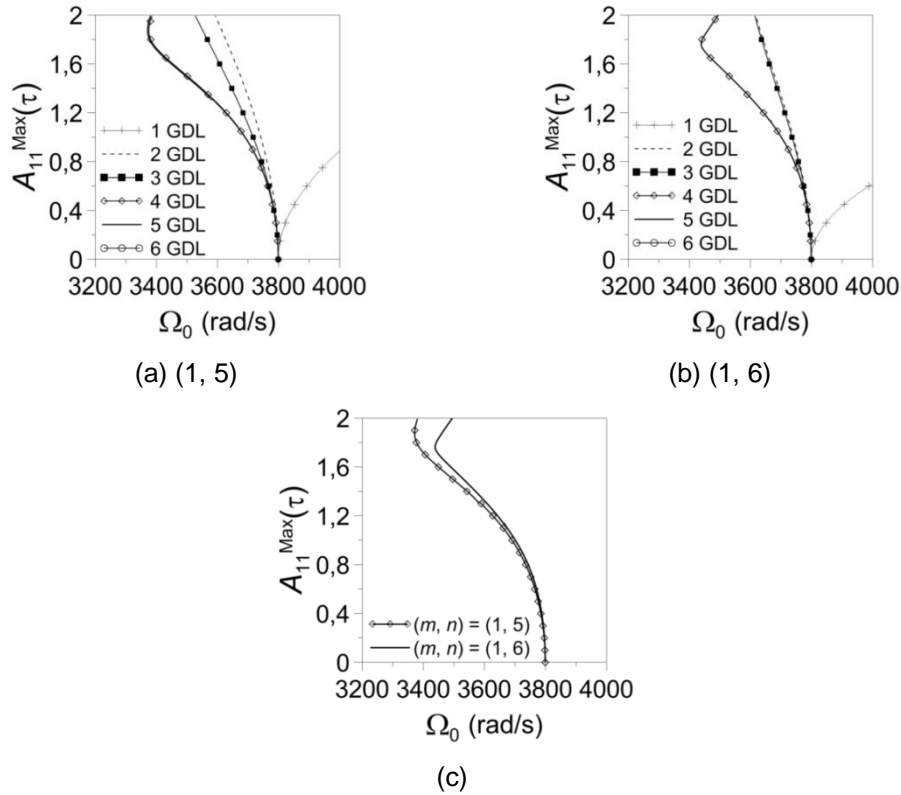


Figura 3.8 – Relações frequência-amplitude sem considerar a interação modal obtidas da aplicação do *shooting method* para: (a) $(m, n) = (1, 5)$, (b) $(m, n) = (1, 6)$ e (c) Modelo com 5 GDL para $(m, n) = (1, 5)$ e $(m, n) = (1, 6)$.

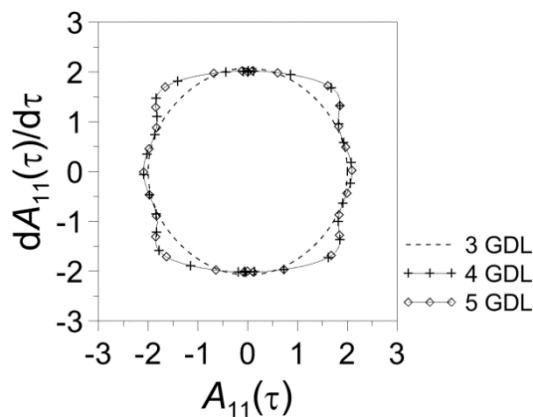


Figura 3.9 – Planos-fase obtidos da aplicação do *shooting method* para $(m, n) = (1, 6)$ dos modelos com 3, 4 e 5 GDL para $A_{11}^{MAX}(\tau) = 2,00$.

A convergência do plano-fase para o modo de vibração $(m, n) = (1, 6)$ é ilustrado na Figura 3.9. As curvas foram encontradas a partir da resolução de

cada sistema não linear de equações diferenciais ordinárias dos modelos com 3, 4 e 5 GDL, tendo como valores iniciais as amplitudes modais resultantes da aplicação do *shooting method*, para o ponto da curva correspondente a $A_{11}^{MAX}(\tau) = 2,00$ da Figura 3.8 (a). Esse valor foi escolhido por apresentar uma não linearidade mais acentuada. As demais condições iniciais utilizadas para a construção dos planos-fase da Figura 3.8 são apresentadas na Tabela 3.1. As velocidades iniciais foram consideradas nulas.

Tabela 3.1 – Condições iniciais utilizadas para a construção dos planos-fase apresentados na Figura 3.9.

Modelo	$A_{11}(\tau)$	$A_{02}(\tau)$	$A_{22}(\tau)$	$A_{13}(\tau)$	$A_{31}(\tau)$
3 GDL	2,00	0,19	0,03	-	-
4 GDL	2,00	-0,003	0,35	0,07	-
5 GDL	2,00	-0,003	-0,01	0,35	0,07

As relações frequência-amplitude foram também obtidas para outras geometrias, como mostrado na Figura 3.10, e as mesmas conclusões sobre a convergência da solução modal são obtidas. Os resultados para 6 GDL indicam uma bifurcação do modo de vibração não linear para grandes amplitudes de vibração.

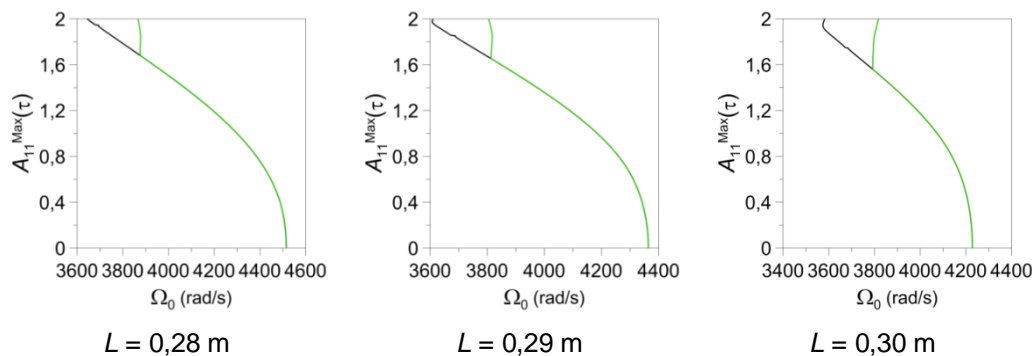


Figura 3.10 – Relações frequência-amplitude sem considerar a interação modal obtidas da aplicação do *shooting method* para $(m, n) = (1, 6)$, sendo — o modelo com 5GDL e — o modelo com 6GDL.

O método de Karhunen-Loève (Wolter, 2001; Silva, 2008), associado ao método da perturbação, é capaz de quantificar a participação de cada modo da expansão modal nos modos não lineares de vibração e a importância de cada um deles na energia total do sistema, comprovando o resultado do método da perturbação e possibilitando que se escreva com mais critério um modelo de baixa dimensão para a expansão dos deslocamentos laterais.

Pode-se encontrar nos trabalhos de Sirovich (1987 a - c) e Wolter (2001) uma explicação detalhada da formulação do método de Karhunen-Loève e no trabalho de Ritto (2005) uma aplicação do método ao estudo de vibrações de sistemas lineares e não lineares. Neste trabalho apresenta-se, de forma concisa, o método direto de Karhunen-Loève.

O método direto de Karhunen-Loève determina as características dominantes de uma resposta dinâmica através da análise de uma série de dados obtidos da resposta do sistema, que pode ser obtida através da solução de um modelo matemático preciso, de um método numérico, como o método dos elementos finitos (Silva, 2008), ou de um resultado experimental. Os dados empregados neste trabalho são obtidos a partir da resposta em vibração livre não linear da casca cilíndrica, sendo as condições iniciais para o problema de valor inicial obtidas a partir do *shooting method*.

Para tal, considera-se um campo vetorial real que descreve os deslocamentos laterais da casca cilíndrica, $\mathbf{w}(\mathbf{x}, \theta, t)$. Esse campo vetorial pode ser descrito como:

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, \theta, t) = \mathbf{w}(\mathbf{x}, \theta, t) - E[\mathbf{w}(\mathbf{x}, \theta, t)] \quad (3.17)$$

sendo $\mathbf{v}(\mathbf{x}, \theta, t)$ a variação temporal em relação à média e $E[\mathbf{w}(\mathbf{x}, \theta, t)]$ a média invariante no tempo.

Normalmente descreve-se o campo de deslocamentos de forma separada no tempo e no espaço, a saber:

$$\mathbf{w}(\mathbf{x}, \theta, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k(t) f_k(\mathbf{x}, \theta) \quad (3.18)$$

onde $\xi_k(t)$ são as coordenadas temporais e $f_k(\mathbf{x}, \theta)$ são as funções espaciais, denominadas funções de aproximação, adotadas de maneira a atender as condições de contorno.

Para se aplicar o método de Karhunen-Loève, o campo de deslocamentos contínuo deve ser aproximado, em um determinado instante de tempo, por um campo discreto. A superfície da casca cilíndrica é, então, discretizada a fim de se obter um vetor representativo do seu campo de deslocamentos. Os deslocamentos são então avaliados em $N_t = n_x \times n_\theta$ pontos espaciais distribuídos uniformemente ao longo de x e θ , da forma:

$$\mathbf{w}(\mathbf{x}, \theta, t) = \mathbf{w}(x_i, \theta_j, t): \begin{cases} x_i = i L/n_x & i = 0, \dots, n_x \\ \theta_j = j 2\pi/n_\theta & j = 0, \dots, n_\theta \end{cases} \quad (3.19)$$

onde $\mathbf{w}(\mathbf{x}, \theta, t)$ é o vetor dos deslocamentos laterais da casca medido em cada ponto de coordenada (x_i, θ_i) .

Obtêm-se as amplitudes w_{ij} do deslocamento a partir da integração das equações de movimento da casca em vibração livre não linear. Dessa forma, para cada instante de tempo, obtém-se um vetor de dimensão $n_x \times n_\theta = N_t$, com os valores ordenados da forma $w_1(t)$, $w_2(t)$, ..., $w_{N_t}(t)$. Considerando-se M intervalos de tempo iguais, da forma t_1, t_2, \dots, t_M , pode-se construir a seguinte matriz de amostragem de dimensão $M \times N_t$:

$$\mathbf{W} = [\mathbf{w}_1 \quad \mathbf{w}_2 \quad \dots \quad \mathbf{w}_{N_t}] = \begin{bmatrix} w_1(t_1) & w_2(t_1) & \dots & w_{N_t}(t_1) \\ w_1(t_2) & w_2(t_2) & \dots & w_{N_t}(t_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ w_1(t_M) & w_2(t_M) & \dots & w_{N_t}(t_M) \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

Cada coluna da matriz de amostragem, equação (3.20), representa a variação temporal do deslocamento em um determinado ponto da superfície da casca e cada linha representa o campo de deslocamentos da casca em um instante determinado de tempo.

Utilizando-se as hipóteses de ergodicidade, pode-se calcular o valor médio do campo somando-se todas as linhas de \mathbf{W} e dividindo o resultado pelo número de linhas, M . A variação do campo vetorial em relação ao valor médio, \mathbf{V} , é obtida pela subtração do valor médio de todas as linhas da matriz de amostragem, \mathbf{W} , da forma:

$$\mathbf{V} = \mathbf{W} - \frac{1}{M} \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^M w_1(t_i) & \sum_{i=1}^M w_2(t_i) & \dots & \sum_{i=1}^M w_{N_t}(t_i) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{i=1}^M w_1(t_i) & \sum_{i=1}^M w_2(t_i) & \dots & \sum_{i=1}^M w_{N_t}(t_i) \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

Por fim, como o método de Karhunen-Loève é um processo ergódico, a matriz de correlação espacial, \mathbf{R} , pode ser escrita como:

$$\mathbf{R} = \frac{1}{M} \mathbf{V}^T \mathbf{V} \quad (3.22)$$

onde \mathbf{R} é uma matriz simétrica e positiva definida de maneira que seus autovetores formam uma base ortogonal. Os autovetores de \mathbf{R} são os modos

ortogonais próprios ou POMs (do inglês *proper orthogonal modes*) e os autovalores associados a eles são os valores ortogonais próprios ou POVs (do inglês *proper orthogonal values*), que fornecem o valor da energia média contida em cada modo. A energia média do campo é igual à soma de todos os autovalores.

Utilizando os autovalores e autovetores da matriz de correlação, \mathbf{R} , a dinâmica do sistema ortogonal pode ser reconstruída a partir de:

$$\mathbf{w}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}, t) \approx \sum_{k=1}^K a_k(t) \varphi_k(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}) + E[\mathbf{w}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}, t)] \quad (3.23)$$

onde $\varphi_k(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})$ é o k-ésimo vetor e $a_k(t)$ é o k-ésimo coeficiente dependente do tempo, definido por:

$$a_k(t) = \langle \mathbf{V}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}, t), \varphi_k(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}) \rangle \quad (3.24)$$

O objetivo é encontrar uma expansão modal que contenha os modos capazes de apreender a maior parte da energia do sistema.

A expansão de Karhunen-Loève é ótima quanto à reconstrução do campo de deslocamentos original, o que significa que nenhuma decomposição linear do campo vetorial será mais eficiente que a expansão encontrada através do método (Wolter, 2001).

O método direto de Karhunen-Loève é aqui aplicado para quantificar a participação dos modos que se acoplam nas relações de frequência-amplitude das Figuras 3.8 (a) e (b), mostrando a participação de cada modo da expansão para os deslocamentos laterais na energia total do sistema.

A expansão com 6 GDL obtida a partir da equação (3.15) tem a forma:

$$\begin{aligned} W = & A1_{11}(\tau) \cos(n \theta) \sin(q \xi) + A1_{13}(\tau) \cos(n \theta) \sin(3 q \xi) \\ & + A1_{31}(\tau) \cos(3 n \theta) \sin(q \xi) + A1_{33}(\tau) \cos(3 n \theta) \sin(3 q \xi) \\ & + A5_{02}(\tau) \left[\frac{3}{4} - \cos(2 q \xi) + \frac{1}{4} \cos(4 q \xi) \right] \\ & + A5_{22}(\tau) \cos(2 n \theta) \left[\frac{3}{4} - \cos(2 q \xi) + \frac{1}{4} \cos(4 q \xi) \right] \end{aligned} \quad (3.25)$$

Para aplicação do método direto de Karhunen-Loève, utilizou-se um algoritmo em MATLAB (1991) (SILVA, 2008; SIROVICH, 1987 a – c; WOLTER, 2001). Discretiza-se a superfície da casca como mostrado na equação (3.19), com $n_x = n_\theta = 40$. O sistema de equações diferenciais ordinárias não lineares

discretizadas a partir do método de Galerkin é resolvido através do método de Runge-Kutta, tendo os valores iniciais das amplitudes modais, encontrados a partir da aplicação do *shooting method* para os seguintes valores das amplitudes de vibração obtidas do *shooting method*: $A1_{11}(\tau) = 2,000$, $A1_{13}(\tau) = 0,047$, $A1_{31}(\tau) = -0,033$, $A1_{33}(\tau) = 0,001$, $A5_{02}(\tau) = 0,284$ e $A5_{22}(\tau) = 0,194$; considerando as velocidades iniciais nulas e $\omega_0 = 3799,02$ rad/s. Com o resultado da aplicação do método de Runge-Kutta, pode-se obter as respostas no tempo para cada uma das amplitudes dos modos que compõem a expansão do deslocamento lateral, W , equação (3.25), como mostrado na Figura 3.11.

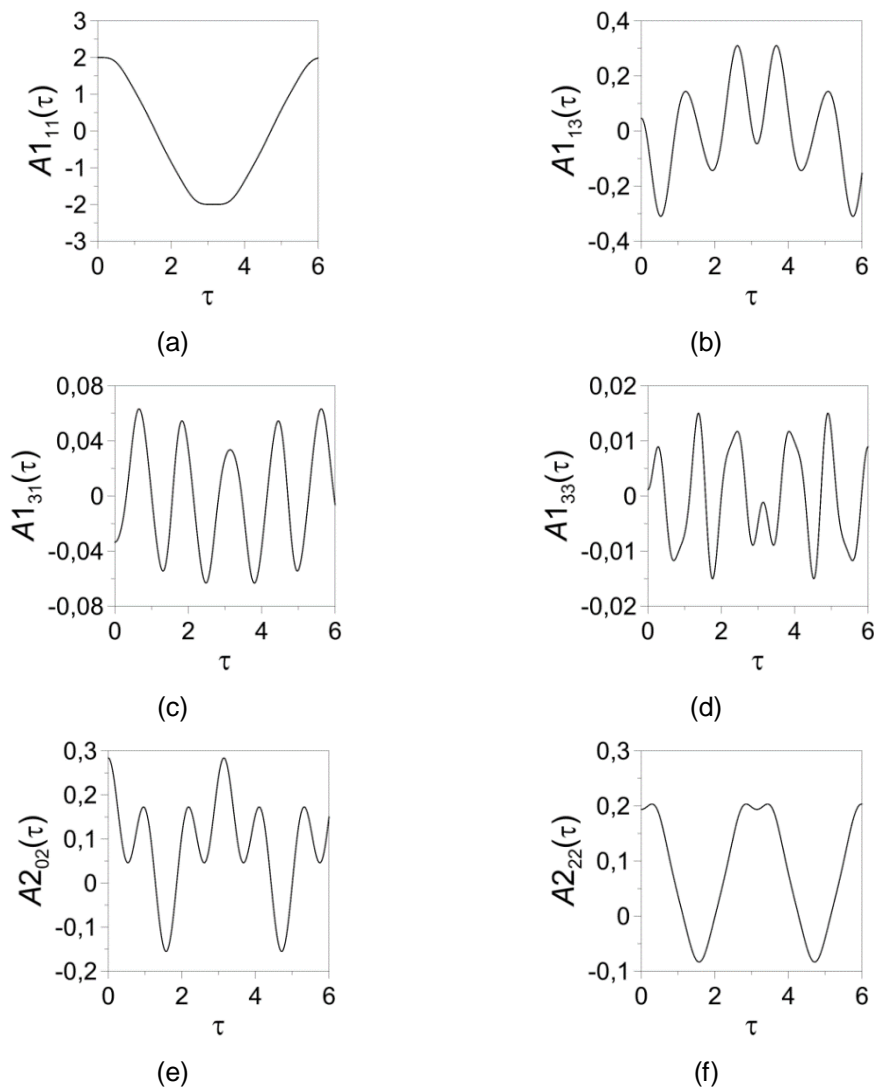


Figura 3.11 – Respostas no tempo do modelo com 6 GDL para o modo de vibração $(m, n) = (1, 5)$.

A partir da resposta no tempo obtêm-se para cada passo de tempo utilizado na resolução do sistema de equações diferenciais, τ_k , os valores das amplitudes modais, $A1_{ij}(\tau_k)$ e $A5_{\alpha\beta}(\tau_k)$.

Aplicando-se à equação (3.25) os valores encontrados para as amplitudes $A1_{ij}(\tau_k)$ e $A5_{\alpha\beta}(\tau_k)$ para cada instante de tempo τ_k , pode-se construir a matriz de amostragem, \mathbf{W} , equação (3.20). A variação do campo vetorial em relação ao valor médio, \mathbf{V} , é calculada utilizando a matriz \mathbf{W} , através da equação (3.21).

Para o cálculo dos autovalores e autovetores utiliza-se a decomposição de valor singular (SVD, do inglês *singular value decomposition*), onde não há necessidade de se calcular a matriz de correlação espacial, \mathbf{R} . Os autovetores resultantes da SVD são os POMs e os autovalores normalizados, ou seja, divididos pela soma de todos eles, são os POVs, ambos mostrados na Figura 3.12.

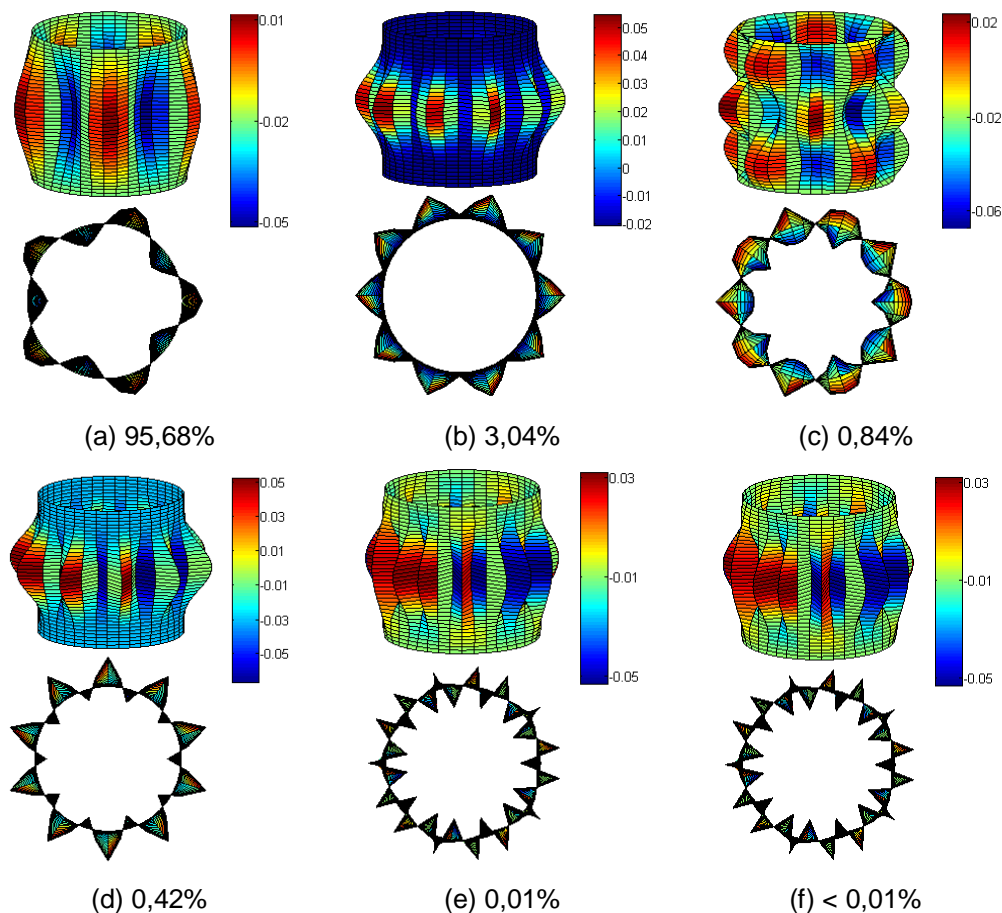


Figura 3.12 – POMs e seus respectivos POVs encontrados a partir dos resultados da aplicação do *shooting method* ao modelo com 6 GDL e modo de vibração $(m, n) = (1, 5)$.

Para quantificar a importância de cada modo da expansão (3.25) em cada um dos POMs, eles são expandidos em séries duplas de Fourier. A Tabela 3.2 apresenta os coeficientes de cada um dos modos para cada POM mostrado na Figura 3.12.

Na Figura 3.12 (a) pode-se observar que o primeiro POM representa a maior parcela da energia total do sistema. Os cinco primeiros POMs representam mais que 99,999% da energia total, sendo que os dois primeiros POMs predominantes.

Cada POM é expandido em uma série dos modos considerados na expansão modal (3.25). A Tabela 3.2 mostra o POV associado a cada POM e os coeficientes da série dupla de Fourier de cada POM. Observa-se, a partir da Tabela 3.2, que o primeiro POM, que representa a maior parcela da energia total do sistema, é dominado pelo modo $A_{111}(\tau)$ que corresponde ao modo de vibração linear, com pequena participação do modo assimétrico $A_{113}(\tau)$. Já o segundo POM é uma combinação do modo axissimétrico $A_{502}(\tau)$ e do modo $A_{522}(\tau)$ que tem a mesma configuração axial do modo axissimétrico e o dobro de ondas circunferenciais do modo linear, demonstrando que os mesmos são dominando pelos termos de segunda ordem derivados do método de perturbação. Ambos os modos estão associados a não linearidade quadrática. O terceiro POM é governado principalmente pelo modo assimétrico, $A_{113}(\tau)$, que é um termo de terceira ordem associado a não linearidade cúbica. Esses resultados estão de acordo com os encontrados pelo método da perturbação, onde os termos de primeira ordem apresentam maior importância no comportamento do sistema, seguidos pelos termos de segunda e terceira ordem.

Tabela 3.2 – Participação de cada modo da expansão com 6 GDL e modo de vibração $(m, n) = (1, 5)$ nos POMs encontrados a partir dos resultados da aplicação do *shooting method*.

POM	POV	$A_{111}(\tau)$	$A_{502}(\tau)$	$A_{522}(\tau)$	$A_{113}(\tau)$	$A_{131}(\tau)$	$A_{133}(\tau)$
1	95,68%	-24,337	0,015	0,014	1,583	-0,141	0,009
2	3,04%	-1,260	-10,190	-7,886	-0,181	0,064	-0,009
3	0,84%	-1,807	0,480	0,119	-23,614	5,787	-0,661
4	0,42%	0,524	-5,971	14,523	-0,668	0,135	-0,009
5	0,01%	-0,757	0,323	0,668	6,009	22,162	-8,683
6	< 0,01%	-0,359	-0,025	-0,050	0,368	8,569	22,826

3.4.

Expansões modais para os deslocamentos laterais utilizadas neste trabalho

Para analisar a influência das imperfeições e simetrias nas ressonâncias internas, são utilizados cinco modelos cujas expansões modais consideram os cinco modos identificados como importantes pelo método de Karhunen-Loève juntamente com seus respectivos modos devidos à simetria.

Nas cascas cilíndricas todo modo assimétrico é acompanhado de um modo de mesma forma e frequência natural, portanto ressonâncias internas 1:1 estão sempre presentes e são frequentemente estudadas (Amabili *et al.*, 2000). No capítulo 4 adota-se um modelo com ressonância interna 1:1. Esses modelos apresentam geometria intermediária entre as geometrias que geram interação entre os modos (1, 5) e (1, 6) e entre os modos (1, 6) e (1, 7), como mostrado na Figura 3.4.

Assim, a expansão modal denominada **Modelo 1** apresenta 9 graus de liberdade e considera o modo de vibração com $(m, n) = (1, 6)$ e os modos associados devido ao acoplamento modal e simetria, ou seja:

$$A_{111}(\tau) + B_{111}(\tau) + A_{502}(\tau) + A_{522}(\tau) + B_{522}(\tau) + A_{113}(\tau) + B_{113}(\tau) + A_{131}(\tau) + B_{131}(\tau).$$

Lembrando que não existe *companion mode* associado ao modo $A_{502}(\tau)$. A expansão modal denominada **Modelo 2** também apresenta 9 graus de liberdade, porém considera-se o modo de vibração com $(m, N) = (1, 7)$ e seus respectivos modos acoplados, a saber:

$$A_{211}(\tau) + B_{211}(\tau) + A_{602}(\tau) + A_{622}(\tau) + B_{622}(\tau) + A_{213}(\tau) + B_{213}(\tau) + A_{231}(\tau) + B_{231}(\tau).$$

No capítulo 5, estuda-se uma geometria com ressonância interna entre os modos (1, 6) e (1, 7). Além dos Modelos 1 e 2 que servem de referência, utiliza-se uma expansão modal para os deslocamentos laterais com 29 graus de liberdade, nomeada **Modelo 3**, que consiste na adição dos Modelos 1 e 2 aos modos que surgem devido à interação modal entre os mesmos (graus de liberdade destacados em negrito), a saber:

$$A_{111}(\tau) + B_{111}(\tau) + A_{211}(\tau) + B_{211}(\tau) + A_{502}(\tau) + A_{522}(\tau) + B_{522}(\tau) + A_{622}(\tau) + B_{622}(\tau) + \mathbf{A_{712}(\tau)} + \mathbf{B_{712}(\tau)} + \mathbf{A_{812}(\tau)} + \mathbf{B_{812}(\tau)} + A_{113}(\tau) + B_{113}(\tau) + A_{213}(\tau) + B_{213}(\tau) + A_{131}(\tau) + B_{131}(\tau) + A_{231}(\tau) + B_{231}(\tau) + \mathbf{A_{311}(\tau)} + \mathbf{B_{311}(\tau)} + \mathbf{A_{411}(\tau)} + \mathbf{B_{411}(\tau)} + \mathbf{A_{321}(\tau)} + \mathbf{B_{321}(\tau)} + \mathbf{A_{421}(\tau)} + \mathbf{B_{421}(\tau)}.$$

Por fim, no capítulo 6, estuda-se a ressonância interna 1:1:2:2 entre os modos (1, 6) e (2, 6). Neste caso, adota-se a seguinte expansão modal denominada **Modelo 4**, relativa ao modo $(M, n) = (2, 6)$:

$$A_{211}(\tau) + B_{211}(\tau) + A_{602}(\tau) + A_{622}(\tau) + B_{622}(\tau) + A_{213}(\tau) + B_{213}(\tau) + A_{231}(\tau) + B_{231}(\tau).$$

além do **Modelo 1**, relativo ao modo (1, 6).

A expansão modal para os deslocamentos laterais, nomeada como **Modelo 5**, apresenta 20 graus de liberdade e consiste na adição dos Modelos 1 e 4 aos modos que surgem devido à interação modal entre os mesmos (graus de liberdade destacados em negrito):

$$A_{111}(\tau) + B_{111}(\tau) + A_{211}(\tau) + B_{211}(\tau) + A_{502}(\tau) + A_{602}(\tau) + A_{522}(\tau) + A_{622}(\tau) + A_{113}(\tau) + B_{113}(\tau) + A_{213}(\tau) + B_{213}(\tau) + A_{131}(\tau) + B_{131}(\tau) + A_{231}(\tau) + B_{231}(\tau) + \mathbf{A_{411}(\tau)} + \mathbf{B_{411}(\tau)} + \mathbf{A_{421}(\tau)} + \mathbf{B_{421}(\tau)}.$$

4

Casca imperfeita com ressonância interna 1:1

Neste capítulo estuda-se as vibrações não lineares de uma casca cilíndrica submetida a um carregamento lateral harmônico, de magnitude P_L , e frequência de excitação ω_L , dado por:

$$p(x, \theta, t) = P_L \cos(n\theta) \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \cos(\omega_L t) \quad (4.1)$$

que excita diretamente o modo (m, n) .

Os resultados apresentados neste capítulo foram obtidos para uma casca cilíndrica simplesmente apoiada, composta de material homogêneo, elástico e isotrópico, com $E = 210$ GPa, $\nu = 0,3$ e $\rho = 7850$ kg/m³. As dimensões da casca cilíndrica são $R = 0,2$ m, $L = 0,29$ m e $h = 0,002$ m. Para esta geometria a menor frequência natural ocorre para a combinação modal $(m, n) = (1, 6)$, como apresentado na Figura 3.5. O coeficiente de amortecimento viscoso, η_1 , é 0,001 e o coeficiente de amortecimento do material, η_2 , é nulo.

Para obtenção das curvas de ressonância e diagramas de bifurcações do sistema, integram-se os sistemas de equações não lineares de movimento utilizando-se o software AUTO 97 (Doedel *et al.*, 1998), que emprega o método da continuação. O método permite determinar se uma solução é estável ou instável a partir da análise da norma dos multiplicadores de Floquet (Nayfeh; Balachandran, 1995) que são os autovalores da solução do sistema de equações não lineares, permitindo, também, a caracterização do tipo de bifurcação. Essas análises foram feitas em Workstations com processadores Intel® Xeon®, CPU ES-2640v2 @ 2.00GHz (2 processadores) e 32Gb de memórias RAM por conta do alto custo computacional.

Nos resultados apresentados, a frequência de excitação do carregamento lateral é adimensionalizada segundo a equação:

$$\Omega_L = \frac{\omega_L}{\omega_0} \quad (4.2)$$

onde ω_0 é a frequência fundamental da casca perfeita.

4.1.

Casca cilíndrica perfeita

Inicialmente considera-se a casca cilíndrica sem imperfeições geométricas iniciais. A Figura 4.1 ilustra a curva de ressonância da casca cilíndrica empregando o Modelo 1 para descrever o campo de deslocamentos laterais, considerando-se $P_L = 600 \text{ N/m}^2$. A Figura 4.1 (a) é relativa à variação da amplitude do *driven mode*, $A_{11}(\tau)$, em função do parâmetro adimensional de frequência enquanto a Figura 4.1 (b) refere-se à variação da amplitude do respectivo *companion mode*, $B_{11}(\tau)$. O *driven mode* é o modo com seis ondas circunferenciais descrito por uma função cosseno e será referenciado ao longo do texto como (1, 6)c. Já o *companion mode* apresenta o mesmo número de ondas circunferenciais, porém é descrito por uma função seno, sendo referenciado como (1, 6)s. Nessas figuras, a curva contínua representa os trechos estáveis da curva de ressonância enquanto a curva tracejada representa os trechos instáveis. Os símbolos ● representam os pontos de bifurcação encontrados ao longo da curva de ressonância.

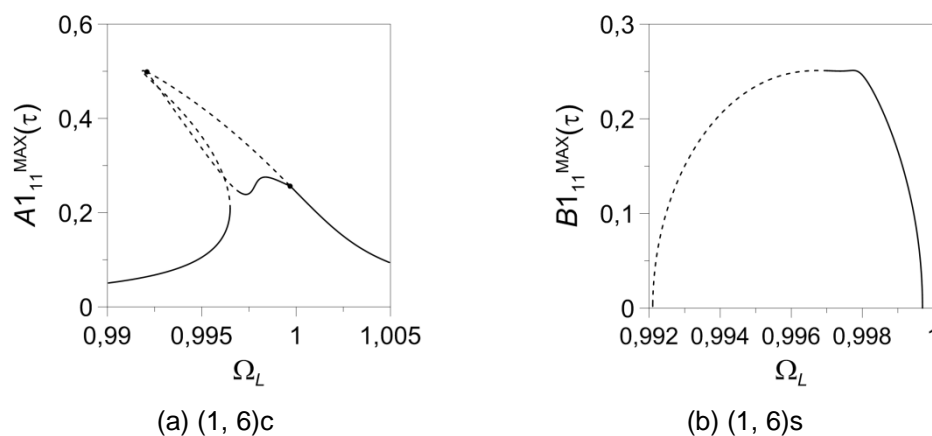


Figura 4.1 – Curvas de ressonância para a casca perfeita com ressonância 1:1.
— Trecho estável e --- Trecho instável. ● – ponto de bifurcação.

Observa-se a partir da Figura 4.1 que a curva de ressonância apresenta um comportamento não linear do tipo *softening*, mesmo comportamento observado em experimentos físicos (Olson, 1965; Evensen, 1967), o que comprova a representatividade do modelo aqui deduzido. Outra observação importante reside na participação do *companion mode* (Amabili, 1998), excitado próximo à frequência de ressonância, como apresentado na Figura 4.1 (b). A importância da consideração desse modo de vibração na análise é que a sua presença modifica a estabilidade da curva de ressonância. Por exemplo,

observa-se que o Trecho 1 na Figura 4.2 (a), que corresponde ao trecho ressonante da curva de ressonância não linear, é instável entre os dois pontos de bifurcação. Esse trecho é usualmente estável e só se torna instável se a expansão modal para os deslocamentos transversais considerar a participação do modo (1, 6)s. A Figura 4.2 (b) mostra a curva de ressonância clássica de um sistema com não linearidade do tipo *softening*, onde o único trecho instável é o trecho entre as duas bifurcações nó-sela. Outra modificação importante na curva de ressonância devida à consideração do modo (1, 6)s é o surgimento de um novo trecho de soluções, ilustrado como Trecho 2 na Figura 4.2. Este ramo de soluções apresenta um trecho estável e outro instável, levando a um pequeno trecho onde soluções estáveis de período um (período igual ao da força) não são encontradas. Verifica-se que o modo (1, 6)s é excitado entre duas bifurcações da solução trivial do tipo *pitchfork*. Este tipo de comportamento é característico de cascas de revolução onde se tem dois modos com duas frequências iguais, como observado nos próximos capítulos.

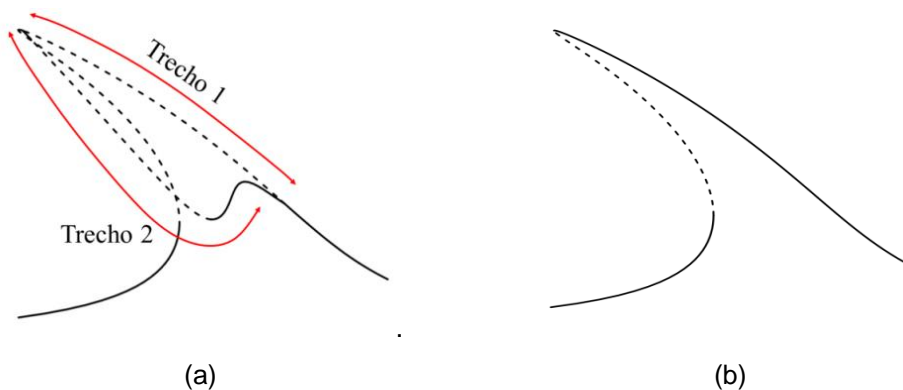


Figura 4.2 – Representação da curva de ressonância do modo (1, 6)c com e sem ressonância interna 1:1.
— soluções estáveis e --- soluções instáveis.

4.2.

Casca cilíndrica com imperfeição na forma do modo principal de vibração

Assume-se agora que a casca cilíndrica tenha uma imperfeição geométrica inicial na forma do modo fundamental de vibração (1, 6)c (modo diretamente excitado), ou seja:

$$W_i = W_{11}^i \cos(n\theta) \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \quad (4.3)$$





Segundo Friedrich *et al.* (2015), a amplitude da imperfeição geométrica inicial pode ser relacionada com a relação geométrica R/h da forma:

$$\frac{W_{11}^i}{h}=0,025\left(-2,8+\sqrt{\frac{R}{h}}\right)$$

(4.4)

Com base nessa relação e na geometria adotada neste trabalho, foram escolhidos os valores de imperfeição apresentados na Tabela 4.1. Adota-se o resultado exato da relação (4.4), $W_{11}^i/h = 0,180$, um valor 10% maior, $W_{11}^i/h = 0,198$, e um valor 20% maior que o resultado dessa relação, $W_{11}^i/h = 0,216$. Cabe observar que estes valores são uma pequena fração da espessura da casca.

Tabela 4.1 – Cores utilizadas nas curvas de ressonância para a casca imperfeita com ressonância interna 1:1.

Modelo	Curva de ressonância	W_{11}^i/h
Modelo 1		0,000
		0,180
		0,198
		0,216

A Figura 4.3 apresenta a relação frequência-amplitude da casca cilíndrica para cada um dos valores de imperfeição apresentados na Tabela 4.1, obtidas com a utilização do *shooting method*. Nessas figuras, apresentam-se os valores máximos da amplitude de vibração, $A_{11}^{Max}(\tau)$, em função da frequência não linear de vibração, Ω_0 , onde se observa um comportamento não linear do tipo *softening*.

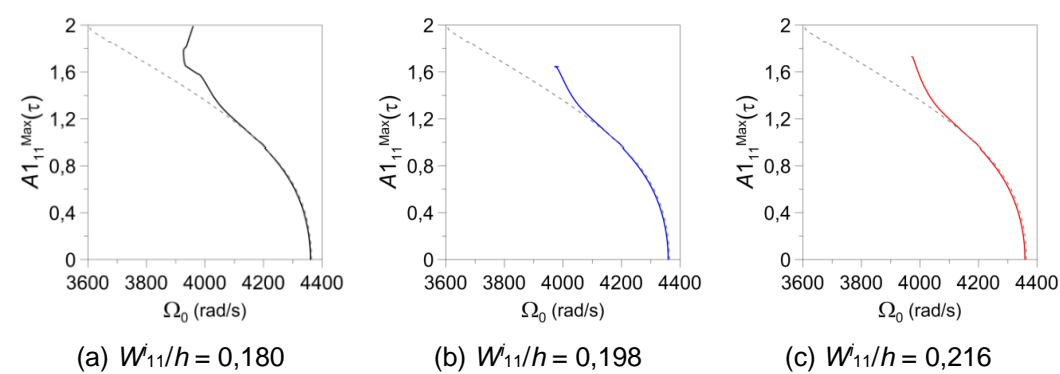


Figura 4.3 – Relações frequência-amplitude em função do nível de imperfeição na forma do modo (1, 6)c.

A Figura 4.4 compara as relações frequência-amplitude para os diversos valores de imperfeição. Observa-se que os resultados para os três casos de imperfeição geométrica analisados são inicialmente coincidentes, seguindo a solução do modelo perfeito, divergindo ligeiramente apenas para valores maiores de amplitude de vibração, $A_{11}^{Max}(\tau)$ em torno de 1,5.

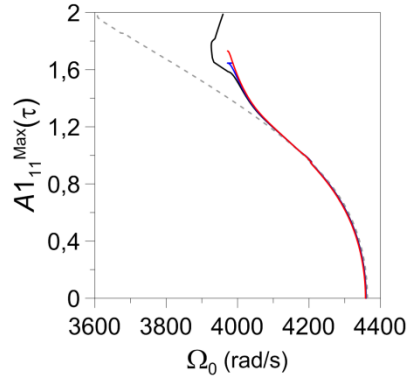


Figura 4.4 – Comparação das relações frequência-amplitude para diferentes valores de imperfeição na forma do modo (1, 6)c.

Da Mecânica das Estruturas tem-se que, para sistemas lineares e não amortecidos:

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{w}} + \mathbf{K} \mathbf{w} = 0 \quad (4.5)$$

onde \mathbf{M} é a matriz de massa, \mathbf{K} é a matriz de rigidez, $\ddot{\mathbf{w}}$ é o vetor de acelerações e \mathbf{w} o vetor de deslocamentos do sistema, sendo a solução desse problema de autovalor dada por $\mathbf{w} = \mathbf{A} \cos(\omega t)$ com \mathbf{A} contendo as amplitudes modais. Linearizando o sistema de equações encontrado pela aplicação do método de Galerkin ao Modelo 1 pode-se obter as matrizes de massa e de rigidez do sistema, a partir das quais é possível calcular as frequências naturais da forma:

$$\det(-\mathbf{M} \omega^2 \mathbf{I} + \mathbf{K}) = 0 \quad (4.6)$$

Como o modelo utilizado na análise apresenta 9 graus de liberdade, as matrizes \mathbf{M} e \mathbf{K} apresentam dimensão 9x9 e os vetores $\ddot{\mathbf{w}}$ e \mathbf{w} apresentam dimensão 9x1. Pode-se então calcular as frequências naturais do sistema em função dos parâmetros analisados. Para simplificação dos cálculos as frequências naturais nesse capítulo foram calculadas para expansão modal de w considerando apenas o modo principal de vibração, apresentando 1 GDL.

Tabela 4.2 – Variação da frequência natural dos modos (1, 6)c e (1, 6)s com o nível de imperfeição. Imperfeição na forma do modo (1, 6)c.

W_{11}/h	$\omega_{(1,6)c}$ (rad/s)	$\omega_{(1,6)s}$ (rad/s)
0,0	4363,648	
0,1	4376,255	4363,859
0,2	4413,860	4364,492
0,3	4475,835	4365,547
0,4	4561,184	4367,024
0,5	4668,627	4368,921
0,6	4796,678	4371,240
0,7	4943,737	4373,978
0,8	5108,163	4377,136
0,9	5288,336	4380,712
1,0	5482,703	4384,705

Na Tabela 4.2 apresenta-se a variação dos valores das frequências naturais associadas aos modos (1, 6)c e (1, 6)s com o aumento da imperfeição, a partir dos quais se conclui que estas duas frequências naturais da casca cilíndrica aumentam com o aumento da magnitude da imperfeição na forma do modo de vibração (1, 6)c. Quando se considera a imperfeição, a frequência do modo em seno é diferente da frequência do modo em cosseno já que a imperfeição provoca uma quebra de simetria (a diferença corresponde ao chamado *detuning parameter*).

Pode-se observar através da análise da Tabela 4.2 que, para imperfeições na forma do modo principal de vibração, o aumento do valor da amplitude de imperfeição provoca também o aumento da perda de simetria entre os modos (1, 6)c e (1, 6)s da casca cilíndrica, havendo uma diferença maior entre as frequências naturais encontradas para cada um desses modos. Nota-se também que para esses casos o menor valor de frequência natural ocorre sempre para (1, 6)s.

Na Tabela 4.3 apresentam-se os valores das frequências ω_0 para cada um dos valores de imperfeição apresentados na Tabela 4.1, onde ω_0 é a frequência adimensional da casca cilíndrica calculada a partir da equação (4.2).

A Figura 4.5 ilustra as curvas de ressonância do Modelo 1, considerando-se os níveis de imperfeição geométrica inicial apresentados na Tabela 4.1. A

Figura 4.5 (a) é relativa à variação da amplitude máxima do modo (1, 6)c, enquanto a Figura 4.5 (b) refere-se à variação da amplitude do respectivo (1, 6)s.

Tabela 4.3 – Variação da frequência com o nível de imperfeição baseado na relação (4.4). Imperfeição na forma do modo (1, 6)c.

W_{11}/h	$\omega_{(1,6)c}$ (rad/s)	$\omega_{(1,6)s}$ (rad/s)
0,000	4363,648	
0,180	4363,648	4364,332
0,198	4412,867	4364,475
0,216	4422,161	4364,632

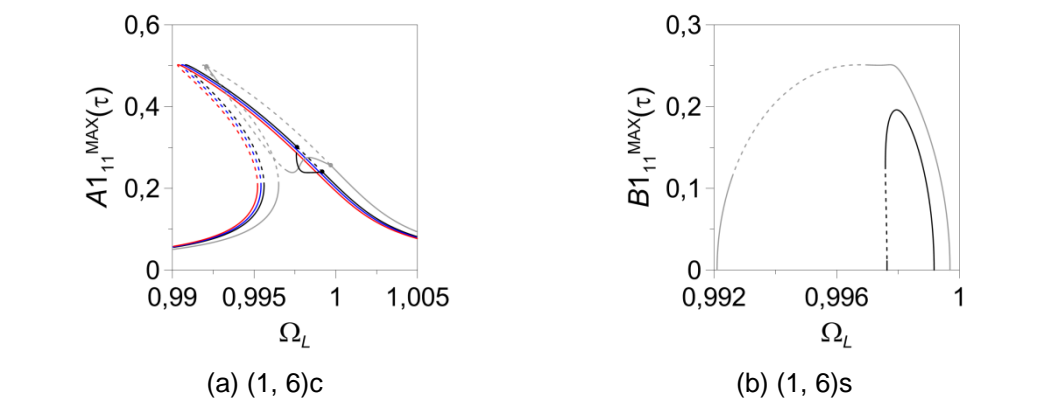







Figura 4.5 – Curvas de ressonância para a casca imperfeita com ressonância 1:1 com $W_{11}/h \neq 0$. Imperfeição na forma do modo (1, 6)c.

Analisando-se a Figura 4.5 verifica-se que a presença das imperfeições iniciais altera sensivelmente a estabilidade da resposta. É possível observar que as regiões instáveis diminuíram significativamente, assim como a participação do modo (1, 6)s, que só é ativado em uma região ainda mais próxima da zona de ressonância para o modelo com $W_{11}/h = 0,180$. Para os modelos com valores maiores de imperfeição geométrica inicial que o encontrado pela relação (4.4) a participação de (1, 6)s deixa de existir. Verifica-se, pois, que a magnitude da imperfeição tem influência marcante na ressonância interna.

Tabela 4.4 – Resumo das cores utilizadas nas curvas de ressonância com W_{11}/h entre 0 e 0,180 e interação 1:1.

Modelo	Curva de ressonância	W_{11}/h
Modelo 1		0,030
		0,060
		0,090
		0,120
		0,150

A fim de se complementar a análise adotaram-se também valores entre a imperfeição nula (casca cilíndrica perfeita) e o resultado da relação (4.4), $W_{11}/h = 0,180$. Os valores de imperfeição adotados são mostrados na Tabela 4.4.

A Figura 4.6 exibe as curvas de ressonância adotando os valores das imperfeições mostradas na Tabela 4.4.

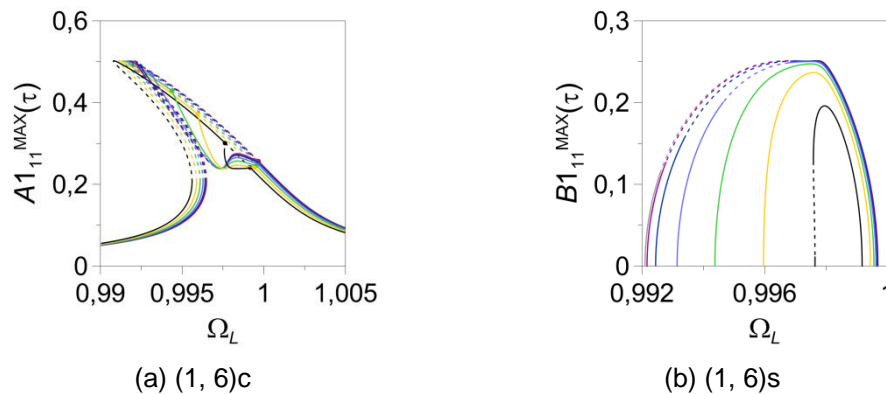


Figura 4.6 – Curvas de ressonância para a casca imperfeita com W_{11}/h entre 0 e 0,180.

Analisando-se a Figura 4.6 é possível observar que o aumento gradual da imperfeição geométrica inicial diminui também gradualmente os trechos de instabilidade do sistema, assim como a participação de (1, 6)s. A Figura 4.7 apresenta isoladamente alguns resultados apresentados na Figura 4.6 a fim de facilitar a análise. Nota-se que a região instável da solução não trivial do modo (1, 6)s corresponde exatamente ao trecho instável do ramo de soluções secundário, como mostra, por exemplo, a comparação entre as Figuras 4.7 (a - b) com as Figuras 4.7 (d - e). Comparando a Figura 4.7 (c) com a Figura 4.7 (f) observa-se a estabilidade do modo (1, 6)s e do ramo de soluções secundárias do modo (1, 6)c. Neste caso, respostas estáveis de período um são observadas em toda a faixa de frequências analisada.

Como mencionado anteriormente, destaca-se que a imperfeição geométrica inicial na forma do modo fundamental de vibração destrói a axissimetria da casca cilíndrica. Neste caso as duas frequências deixam de ser iguais, provocando a quebra da ressonância interna entre (1, 6)c e (1, 6)s. Para valores pequenos da imperfeição a diferença entre as duas frequências é pequena e ainda ocorre transferência de energia entre os dois modos. Entretanto, para valores elevados de imperfeição, deixa de haver transferência de energia de (1, 6)c para (1, 6)s.

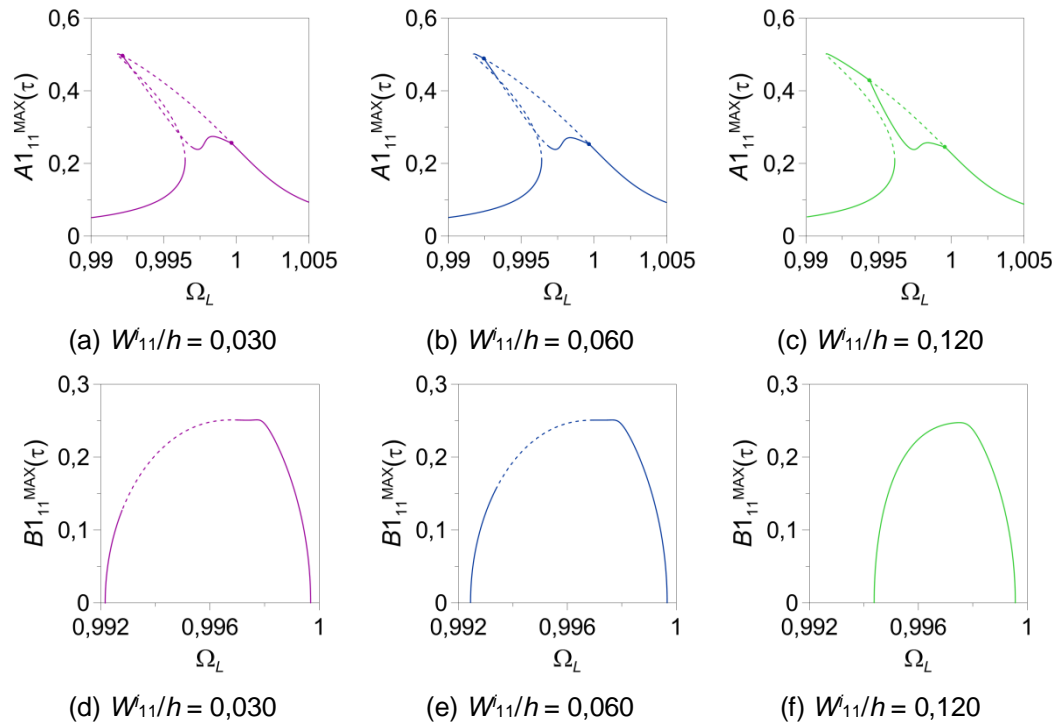


Figura 4.7 – Curvas de ressonância para o modo (1, 6)c da casca imperfeita. (a) e (d) $W_{11}/h = 0,030$, (b) e (e) $W_{11}/h = 0,060$ e (c) e (f) $W_{11}/h = 0,120$.

4.3.

Casca cilíndrica com imperfeição na forma do modo axissimétrico de vibração

Assume-se agora que a casca cilíndrica analisada esteja sujeita a uma imperfeição geométrica inicial na forma do modo axissimétrico de vibração, ou seja:

$$W_i = W_{02}^i \left[\frac{3}{4} - \cos\left(\frac{2m\pi x}{L}\right) + \frac{1}{4} \cos\left(\frac{4m\pi x}{L}\right) \right] \quad (4.7)$$

Neste caso, como o sinal da amplitude da imperfeição altera o sinal da curvatura gaussiana, foram estudados tanto os valores positivos quanto os valores negativos da amplitude desta imperfeição.

4.3.1.

Valores positivos da imperfeição axissimétrica

Os valores de imperfeição adotados são os mostrados na Tabela 4.1. A Figura 4.8 apresenta as relações frequência-amplitude da casca cilíndrica para cada um dos valores da imperfeição geométrica adotada. A Figura 4.9 ilustra a superposição das relações frequência-amplitude. Observa-se que as relações

frequência-amplitude são deslocadas para a esquerda devido à diminuição da frequência fundamental com o incremento do valor da imperfeição geométrica inicial. Em todos os casos a relação é típica de sistemas com perda de rigidez.

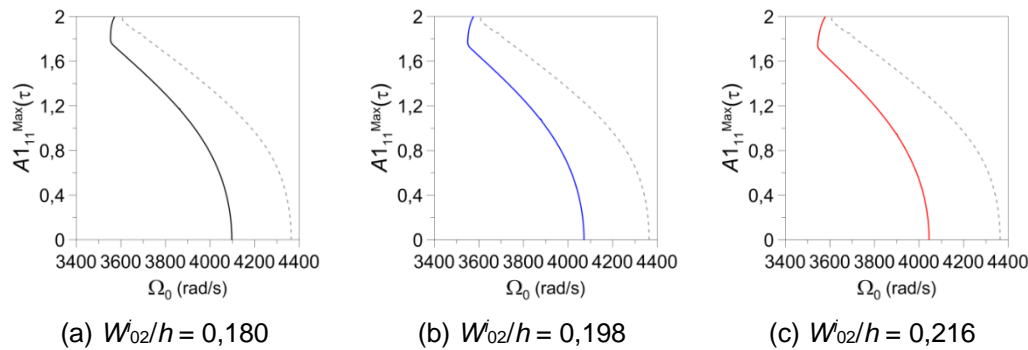


Figura 4.8 – Relações frequência-amplitude da casca com imperfeições positivas na forma do modo axissimétrico.

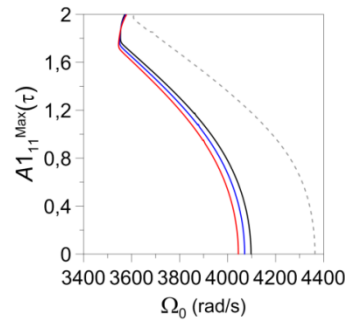


Figura 4.9 – Comparação das relações frequência-amplitude para diferentes valores positivos de imperfeição na forma do modo axissimétrico.

Tabela 4.5 – Variação das frequências naturais com o nível de imperfeição na forma do modo axissimétrico (valores positivos).

W_{02}/h	$\omega_0 (1, 6)c$ (rad/s)	$\omega_0 (1, 6)s$ (rad/s)
0,0	4363,647	
0,1	4226,017	4226,017
0,2	4107,994	4107,994
0,3	4011,308	4011,308
0,4	3937,532	3937,532
0,5	3887,970	3887,970
0,6	3863,553	3863,553
0,7	3864,759	3864,759
0,8	3891,564	3891,564
0,9	3943,446	3943,446
1,0	4019,433	4019,433

Na Tabela 4.5 apresenta-se a variação dos valores da frequência natural com o aumento da amplitude da imperfeição, a partir dos quais se conclui que a frequência natural da casca cilíndrica diminui com o aumento do valor da amplitude da imperfeição até que este valor atinja 0,6, a partir do qual a frequência natural volta a aumentar, porém de forma mais suave. Aqui se pode observar também que não há quebra de simetria entre (1, 6)c e (1, 6)s.

A Figura 4.10 ilustra as curvas de ressonância da casca cilíndrica empregando o Modelo 1 e considerando $P_L = 600 \text{ N/m}^2$.

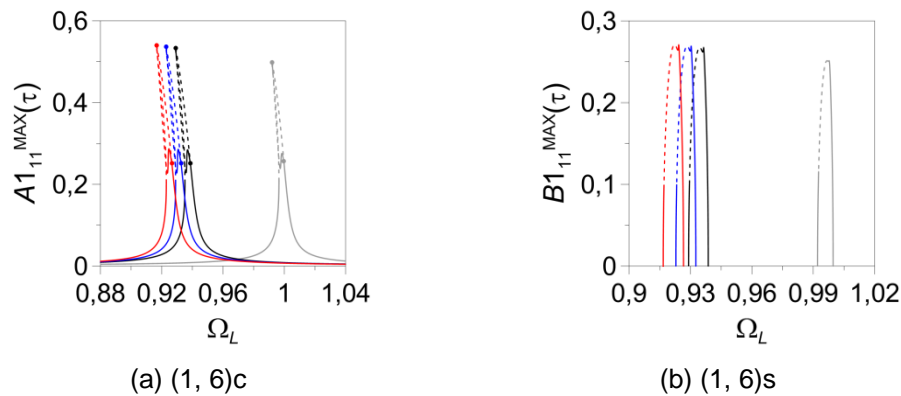


Figura 4.10 – Curvas de ressonância para a casca imperfeita com $W_{02}/h \neq 0$ (valores positivos de imperfeição).

Analisando-se a Figura 4.10, observa-se que a magnitude máxima de vibração, $A1_{11}^{\text{MAX}}(\tau)$, aumenta à medida que a imperfeição geométrica inicial aumenta. Observa-se que a estabilidade da curva de ressonância se mantém, havendo apenas um ligeiro deslocamento das curvas para a esquerda com o aumento da magnitude da imperfeição. Deve-se destacar que há também a participação do modo (1, 6)s em todos os casos analisados, apesar da pressão lateral excitar diretamente o modo fundamental de vibração, isto porque a imperfeição não quebra a simetria na direção circunferencial, permanecendo as duas frequências iguais. Os mesmos resultados foram encontrados para valores entre a imperfeição nula (casca cilíndrica perfeita) e o resultado da relação (4.4), $W_{02}/h = 0,180$, mostrados na Tabela 4.4. A Figura 4.11 exibe esses resultados, a partir dos quais as mesmas observações podem ser feitas. Estes resultados destacam a importância da axissimetria na transferência de energia do modo (1, 6)c para (1, 6)s.

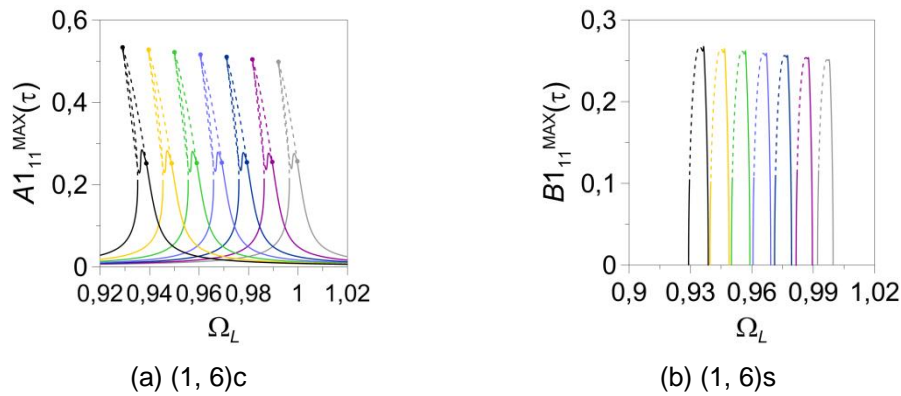


Figura 4.11 – Curvas de ressonância para a casca imperfeita com W_{02}/h entre 0 e 0,180 (valores positivos de imperfeição).

4.3.2.

Valores negativos da imperfeição axissimétrica

Adotam-se para as amplitudes da imperfeição axissimétrica os mesmos valores empregados na análise anterior e mostrados na Tabela 4.1, porém negativos. A Figura 4.12 apresenta as relações frequência-amplitude da casca cilíndrica para cada um dos valores da amplitude da imperfeição.

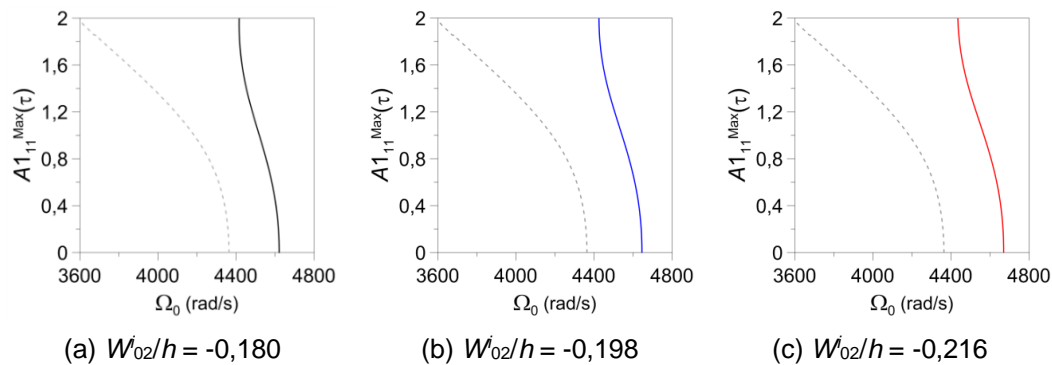


Figura 4.12 – Relações frequência-amplitude da casca com imperfeições negativas na forma do modo axissimétrico.

A Figura 4.13 ilustra a comparação entre estas relações. Pode-se observar que as relações frequência-amplitude são deslocadas para a direita devido ao aumento da frequência natural com o incremento do valor da imperfeição geométrica inicial, ao contrário do que ocorre quando a imperfeição geométrica é positiva. A imperfeição diminui sensivelmente o grau de não linearidade da relação frequência-amplitude.

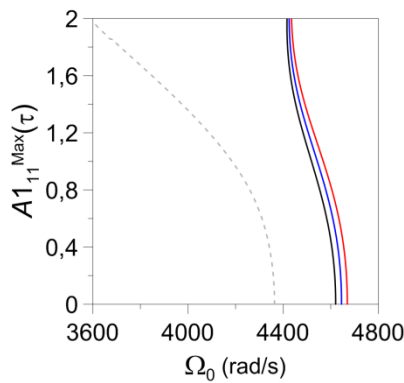


Figura 4.13 – Comparação das relações frequência-amplitude para diferentes valores negativos de imperfeição na forma do modo axissimétrico.

Na Tabela 4.6 apresenta-se a variação dos valores da frequência fundamental com o aumento da magnitude da imperfeição. Também para este caso não há a quebra de simetria entre os modos principais de vibração da casca cilíndrica.

Tabela 4.6 – Variação das frequências naturais com o nível de imperfeição na forma do modo axissimétrico (valores negativos).

W_{02}/h	$\omega_0(1,6)c$ (rad/s)	$\omega_0(1,6)s$ (rad/s)
0,0	4363,647	
-0,1	4519,093	4519,093
-0,2	4690,583	4690,583
-0,3	4876,425	4876,425
-0,4	5075,042	5075,042
-0,5	5284,996	5284,996
-0,6	5504,987	5504,987
-0,7	5733,863	5733,863
-0,8	5970,600	5970,600
-0,9	6214,300	6214,300
-1,0	6464,177	6464,177

A Figura 4.14 ilustra as curvas de ressonância da casca cilíndrica, considerando-se o Modelo 1 e $P_L = 600 \text{ N/m}^2$.

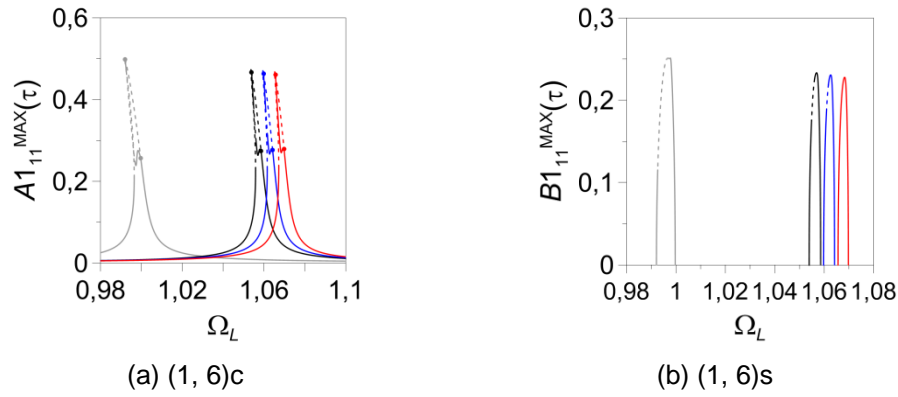


Figura 4.14 – Curvas de ressonância para a casca imperfeita com $W_{02}/h \neq 0$ (valores negativos de imperfeição).

Observando a Figura 4.14, verifica-se que a amplitude máxima de vibração, $A_{1,1}^{MAX}(\tau)$, diminui ligeiramente à medida que a imperfeição geométrica inicial aumenta. Observa-se que a estabilidade da curva de ressonância se mantém, assim como a participação de (1, 6)s. Os mesmos resultados foram encontrados para valores entre a imperfeição nula (casca cilíndrica perfeita) e o resultado da relação (4.4), $W_{02}/h = -0,180$, mostrados na Tabela 4.4. A Figura 4.15 exibe esses resultados, a partir dos quais as mesmas observações podem ser feitas. Novamente verifica-se que o modo (1, 6)s é sempre excitado mantendo a ressonância interna 1:1, em virtude de se manter a axissimetria. Seu trecho instável diminui com a magnitude da imperfeição.

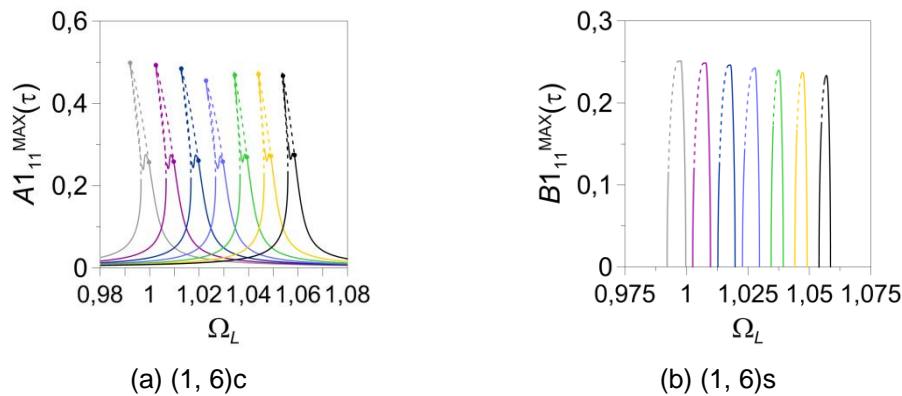


Figura 4.15 – Curvas de ressonância para a casca imperfeita com W_{02}/h entre -0,180 e 0 (valores negativos de imperfeição).

4.4.**Casca cilíndrica com imperfeição na forma do modo não linear de vibração**

Analisa-se a seguir a resposta da casca cilíndrica submetida a uma imperfeição na forma do modo não linear de vibração (forma da expansão modal do Modelo 1) a saber:

$$\begin{aligned}
 W_i = & W_{11}^i \cos(n\theta) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right) + W_{13}^i \cos(n\theta) \operatorname{sen}\left(\frac{3m\pi x}{L}\right) \\
 & + W_{31}^i \cos(3n\theta) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right) + W_{02}^i \left[\frac{3}{4} - \cos\left(\frac{2m\pi x}{L}\right) + \frac{1}{4} \cos\left(\frac{4m\pi x}{L}\right) \right] \\
 & + W_{22}^i \cos(2n\theta) \left[\frac{3}{4} - \cos\left(\frac{2m\pi x}{L}\right) + \frac{1}{4} \cos\left(\frac{4m\pi x}{L}\right) \right] \quad (4.8)
 \end{aligned}$$

Os valores das amplitudes da imperfeição adotados nesta análise são os mesmos adotados nas análises anteriores. No entanto, como a imperfeição é composta por vários modos, as amplitudes de cada modo da imperfeição foram calculadas proporcionalmente às amplitudes do modo de vibração não linear determinado pela relação frequência-amplitude e de forma que o deslocamento máximo, referente às coordenadas $x = L/2$ e $\theta = 0$, fosse igual à magnitude de imperfeição mostrada na Tabela 4.1, isto é, $W_{\tau}/h = W_{11}^i/h + W_{13}^i/h + W_{31}^i/h + W_{02}^i/h + W_{22}^i/h$. A fim de calcular as amplitudes de cada parcela da imperfeição adotam-se as amplitudes encontradas na relação frequência-amplitude para $A_{111}^{\text{Max}}(\tau) = 0,5$, mostradas nas Tabelas 4.7, 4.8 e 4.9.

Tabela 4.7 – Amplitudes do modo não linear para $A_{111} = 0,500$ e amplitudes da imperfeição de forma que a imperfeição máxima seja $W_{\tau}/h \approx 0,180$.

Amplitudes dos modos	Amplitudes da imperfeição
$A_{111} = 0,50000000$	$W_{11}^i/h = 0,16371258$
$A_{113} = -0,00730602$	$W_{13}^i/h = -0,00238740$
$A_{131} = 0,00009084$	$W_{31}^i/h = 0,00002968$
$A_{202} = 0,01552027$	$W_{02}^i/h = 0,00507158$
$A_{222} = 0,00570301$	$W_{22}^i/h = 0,00186358$

Tabela 4.8 – Amplitudes do modo não linear para $A1_{11} = 0,500$ e amplitudes da imperfeição de forma que a imperfeição máxima seja $W^i_{\tau}/h \approx 0,198$.

Amplitudes dos modos	Amplitudes da imperfeição
$A1_{11} = 0,50000000$	$W^i_{11}/h = 0,18008384$
$A1_{13} = -0,00730602$	$W^i_{13}/h = -0,00262614$
$A1_{31} = 0,00009084$	$W^i_{31}/h = 0,00003265$
$A2_{02} = 0,01552027$	$W^i_{02}/h = 0,00557874$
$A2_{22} = 0,00570301$	$W^i_{22}/h = 0,00204994$

Tabela 4.9 – Amplitudes do modo não linear para $A1_{11} = 0,500$ e amplitudes da imperfeição de forma que a imperfeição máxima seja $W^i_{\tau}/h \approx 0,216$.

Amplitudes dos modos	Amplitudes da imperfeição
$A1_{11} = 0,50000000$	$W^i_{11}/h = 0,19645510$
$A1_{13} = -0,00730602$	$W^i_{13}/h = -0,00286488$
$A1_{31} = 0,00009084$	$W^i_{31}/h = 0,00003562$
$A1_{02} = 0,01552027$	$W^i_{02}/h = 0,00608590$
$A1_{22} = 0,00570301$	$W^i_{22}/h = 0,00223630$

A Figura 4.16 apresenta as relações frequência-amplitude da casca cilíndrica para cada uma das imperfeições adotadas. A Figura 4.17 compara estas relações. Observa-se nesta figura que as relações frequência-amplitude se deslocam levemente para a esquerda devido à diminuição do valor da frequência natural.

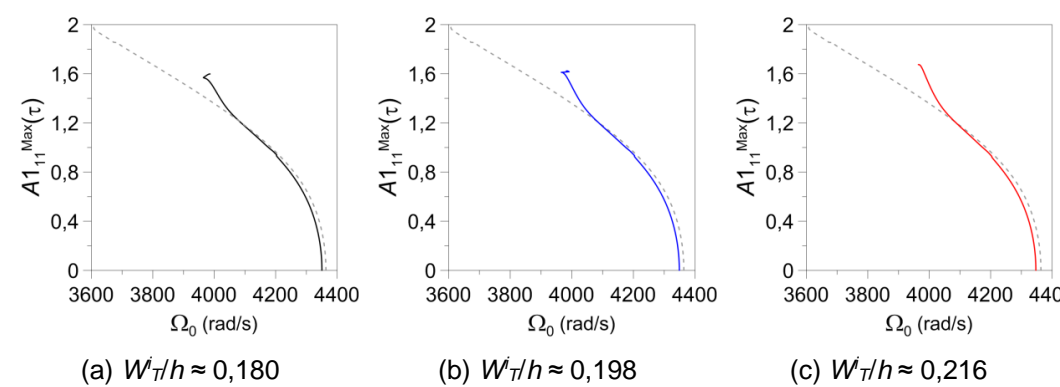


Figura 4.16 – Relações frequência-amplitude da casca com imperfeição na forma do modo não linear de vibração.

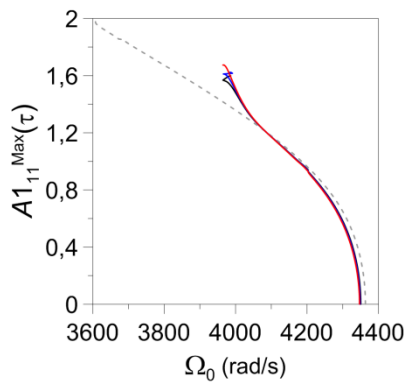


Figura 4.17 – Comparação das relações frequência-amplitude para diferentes valores de imperfeição na forma do modo não linear de vibração.

Na Tabela 4.10 apresenta-se a variação das frequências naturais dos modos (1, 6)c e (1, 6)s com o aumento da imperfeição. Pode-se observar como o aumento da magnitude da imperfeição aumenta a diferença entre as frequências dos modos (1, 6)c e (1, 6)s, e que o menor valor de frequência natural ocorre sempre para o modo (1, 6)s.

Tabela 4.10 – Variação das frequências naturais com o nível de imperfeição na forma do modo não linear de vibração.

W_T/h	ω_0 (1, 6)c (rad/s)	ω_0 (1, 6)s (rad/s)
0,000	4363,648	
0,180	4388,952	4358,830
0,198	4395,285	4358,412
0,216	4402,300	4358,005

A Figura 4.18 exibe as curvas de ressonância do modelo. A imperfeição geométrica inicial muda, nesses casos, consideravelmente a resposta do sistema, não ocorrendo a excitação do modo (1, 6)s na zona de ressonância, e sendo a curva de ressonância do modo (1, 6) similar à de um sistema clássico de um grau de liberdade com perda de rigidez com todo o trecho ressonante estável.

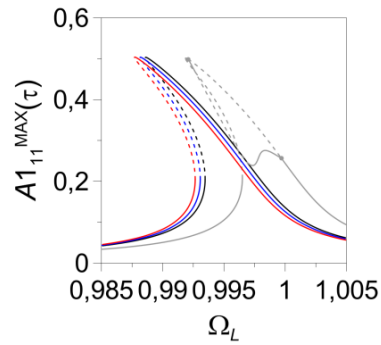


Figura 4.18 – Curvas de ressonância para a casca imperfeita com $W_{11}^i/h \neq 0$.

4.5.

Casca cilíndrica com imperfeição na forma do modo (1, 6)s

Nesta seção assume-se que a casca tem uma imperfeição na forma do modo (1, 6)s (*companion mode*), ou seja:

$$W_i = W_{11}^i \sin(n\theta) \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \quad (4.9)$$

Os valores de imperfeição adotados são mostrados na Tabela 4.1. A Figura 4.19 ilustra as curvas de ressonância do modelo, considerando-se $P_L = 600 \text{ N/m}^2$. A Figura 4.20 mostra separadamente as curvas de ressonância do modo (1, 6)c para cada uma das imperfeições, com o objetivo de facilitar a análise dos resultados.

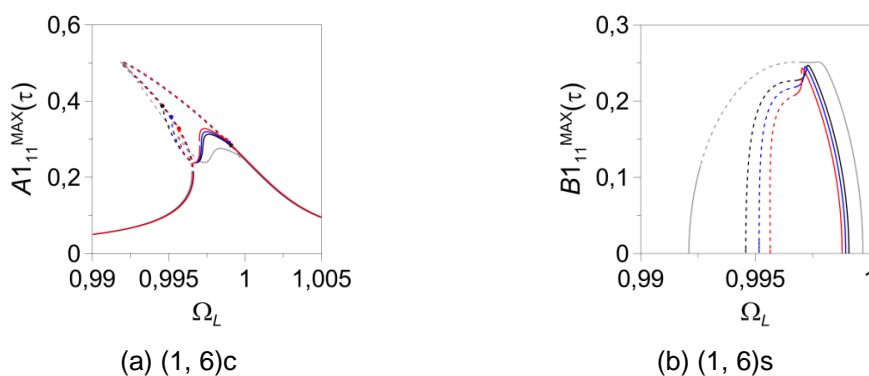


Figura 4.19 – Curvas de ressonância para a casca imperfeita com $W_{11}^i/h \neq 0$.

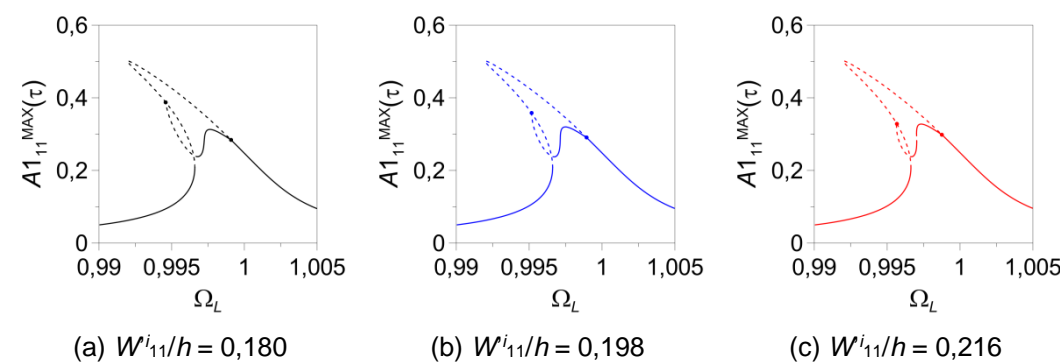


Figura 4.20 – Curvas de ressonância para (1, 6)c da casca imperfeita.
(a) $W^{i_{11}}/h = 0,180$, (b) $W^{i_{11}}/h = 0,198$ e (c) $W^{i_{11}}/h = 0,216$.

Nestes casos, as duas bifurcações ao longo da curva de ressonância permanecem, e o modo (1, 6)s é sempre excitado independentemente da magnitude da imperfeição. Mas é possível perceber pequenas mudanças na posição dos dois pontos de bifurcação com o aumento da magnitude da imperfeição e um decréscimo da faixa de frequências onde o modo (1, 6)s é excitado.






4.6.
Casca cilíndrica com imperfeição na forma da soma dos modos (m, n)

Finalmente, assume-se que a casca cilíndrica analisada possui uma imperfeição geométrica na forma:

$$W_i = W_{11}^i \cos(n\theta) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right) + W_{11}^i \operatorname{sen}(n\theta) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \tag{4.10}$$

Os valores das amplitudes da imperfeição são mostrados na Tabela 4.11. A magnitude máxima da imperfeição é, em todos os casos, igual ao da relação (4.4).

Tabela 4.11 – Resumo das cores utilizadas nas curvas de ressonância com $W/h = 0,180$ e interação 1:1.

Modelo	Curva de ressonância	W_{11}^i/h	$W^{i_{11}}/h$
Modelo 1		0,030	0,150
		0,060	0,120
		0,090	0,090
		0,120	0,060
		0,150	0,030

A Figura 4.21 ilustra as curvas de ressonância do modelo. A Figura 4.22 apresenta separadamente as curvas de ressonância ilustradas na Figura 4.21.

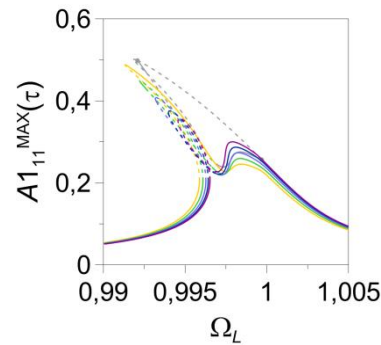


Figura 4.21 – Curvas de ressonância para a casca imperfeita com $W_{11}/h + W^{i_{11}}/h \neq 0$.

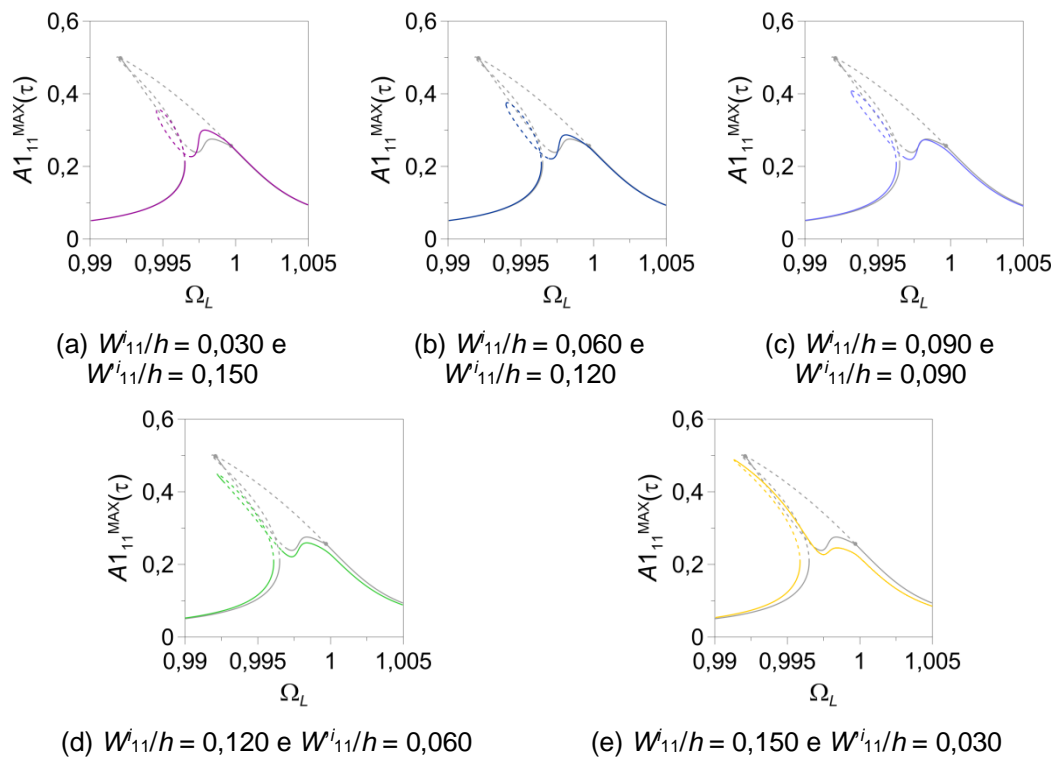


Figura 4.22 – Curvas de ressonância do modo (1, 6)c da casca imperfeita com $W_{11}/h + W^{i_{11}}/h \neq 0$.

Observa-se que a imperfeição geométrica inicial nesses casos muda consideravelmente a estabilidade dinâmica do sistema, havendo diminuição dos trechos instáveis e das amplitudes máximas de vibração, assim como ocorre para os casos onde a imperfeição assume a forma do modo não linear de vibração. Neste caso, não há participação de (1, 6)s na zona de ressonância. Observa-se, adicionalmente, que os trechos instáveis das curvas de ressonância sofrem bastante alteração nas suas formas e que a região onde soluções

estáveis não foram detectadas são restritas a uma região em torno de $\Omega_L \sim 0,997$.

A fim de se verificar a existência de soluções estáveis nessa região, obtém-se o diagrama de bifurcação pelo método da força bruta, incrementando-se a frequência da excitação harmônica, Ω_L . Inicialmente todas as amplitudes modais são perturbadas ($A_{ij}(\tau) = A_{\alpha(2+6/\beta)}(\tau) = 1e-4$) e as velocidades iniciais são consideradas nulas. Podem ser encontrados dessa forma os pontos de bifurcação e as soluções estáveis do sistema, além de informações sobre a periodicidade da resposta encontrada. As soluções instáveis, no entanto, não são encontradas por este método. Com o objetivo de verificar a periodicidade no intervalo onde não há soluções estáveis analisa-se o intervalo entre $\Omega_L = 0,996$ e $\Omega_L = 0,998$ considerando $W'_{11}/h = 0,030$ e $W^i_{11}/h = 0,030$. Os resultados mostram que nessa região a resposta é quase periódica, como se observa na Figura 4.23 (a). Para a obtenção das Figuras 4.23 (b) e (c) o incremento da frequência de excitação foi bastante refinado. A Figura 4.23 (b) foi obtida adotando-se um incremento positivo e variando-se Ω_L de 0,996 a 0,998 e a Figura 4.23 (c) foi obtida adotando-se um incremento negativo e variando-se Ω_L de 0,998 a 0,996. A diferença entre a resposta obtida através do método de força bruta e o resultado obtido pelo algoritmo de continuação AUTO se deve ao fato de que o AUTO calcula sempre a amplitude máxima da órbita enquanto o algoritmo de força bruta mostra o valor absoluto das seções de Poincaré.

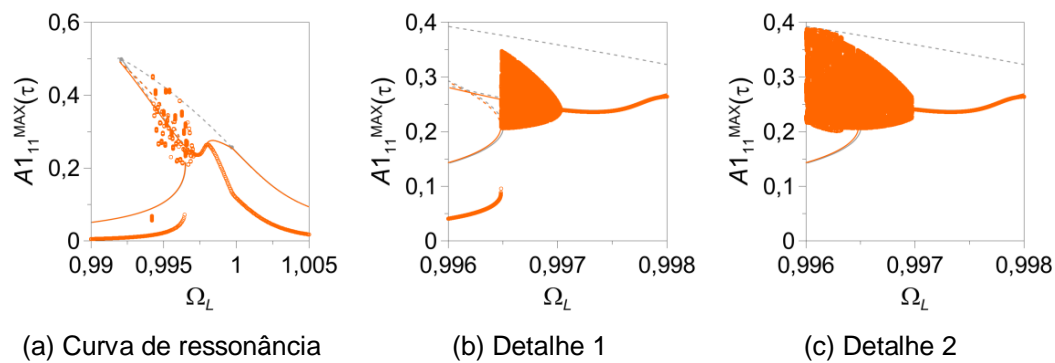


Figura 4.23 – Curvas de ressonância para a casca imperfeita com $W'_{11}/h = 0,030$ e $W^i_{11}/h = 0,030$ obtidas através da aplicação do método da força bruta.

Sendo: — AUTO e $\bullet\bullet\bullet$ força bruta.

A Figura 4.24 ilustra algumas respostas no tempo para vários valores de Ω_L para o caso mostrado na Figura 4.23 mostrando os vários tipos de respostas não lineares encontradas na zona de ressonância.

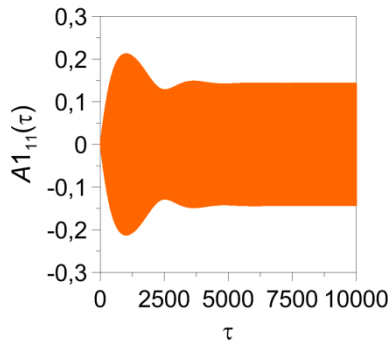
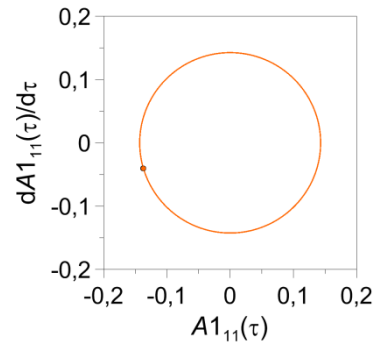
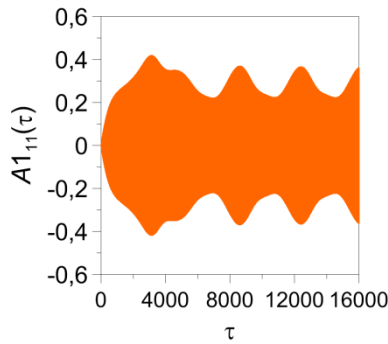
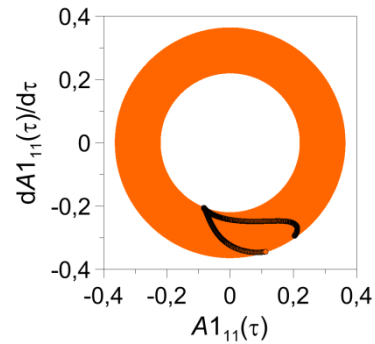
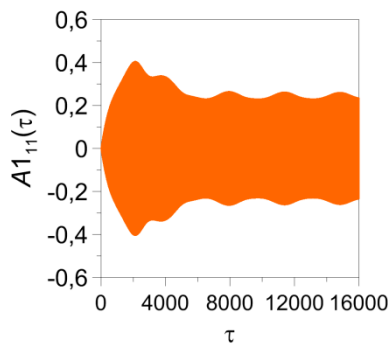
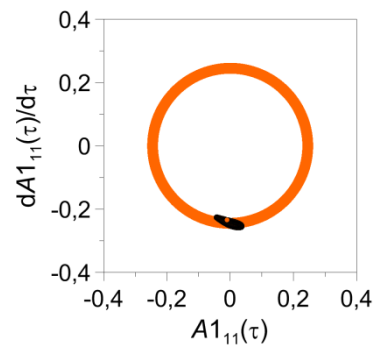
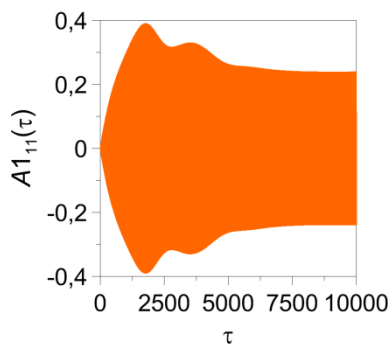
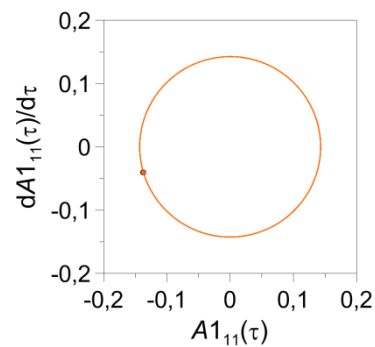
(a) Resposta no tempo para $\Omega_L = 0,9960$ (b) Plano-fase para $\Omega_L = 0,9960$ (c) Resposta no tempo para $\Omega_L = 0,9965$ (d) Plano-fase para $\Omega_L = 0,9965$ (e) Resposta no tempo para $\Omega_L = 0,9970$ (f) Plano-fase para $\Omega_L = 0,9970$ (g) Resposta no tempo para $\Omega_L = 0,9970$ (h) Plano-fase para $\Omega_L = 0,9970$

Figura 4.24 – Respostas no tempo e planos-fase obtidos da aplicação do método de Runge-Kutta ao caso mostrado na Figura 4.23 adotando-se vários valores de Ω_L .

A Tabela 4.12 apresenta um resumo de quais modos são ativados nos casos de imperfeição analisados neste capítulo. Observa-se que a forma e

magnitude da imperfeição tem influência não só nas frequências naturais dos dois modos ressonantes, mas também na relação frequência-amplitude e nas curvas de ressonância.

Tabela 4.12 – Modos ativados em cada um dos casos de imperfeição com interação 1:1. Pressão lateral excitando diretamente o modo (1, 6)c.

Imperfeição	(1, 6)c	(1, 6)s
Perfeita	Ativa	Ativa
(1, 6)c	Ativa	Ativa parcialmente
(2, 0)+	Ativa	Ativa
(2, 0)-	Ativa	Ativa
(1, 6)s	Ativa	Ativa
(1, 6)c + (1, 6)s	Ativa	Ativa

Foram apresentados neste capítulo resultados paramétricos da influência da imperfeição geométrica inicial na resposta dinâmica não linear de cascas cilíndricas simplesmente apoiadas com ressonância 1:1. No próximo capítulo analisa-se a influência paramétrica da imperfeição na casca cilíndrica imperfeita e sujeita a interação modal, com ressonância 1:1:1:1.

5

Influência da imperfeição geométrica inicial na resposta dinâmica não linear de cascas cilíndricas com ressonância 1:1:1:1

Neste capítulo estuda-se as vibrações não lineares de uma casca cilíndrica imperfeita e sujeita a interação modal. O carregamento lateral harmônico, $p(x, \theta, t)$, é composto de duas parcelas, uma com a forma do modo de vibração de um dos modos que compõem a interação, (m, n) , e a outra com a forma do modo de vibração do segundo modo que participa da interação, (m, N) , a saber:

$$p(x, \theta, t) = \left[P_{L1} \cos(n\theta) \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) + P_{L2} \cos(N\theta) \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \right] \cos(\omega_L t) \quad (5.1)$$

Os resultados apresentados neste capítulo são para uma casca cilíndrica simplesmente apoiada, composta de material homogêneo, elástico e isotrópico, com $E = 210$ GPa, $\nu = 0,3$ e $\rho = 7850$ kg/m³. As dimensões da casca cilíndrica são $R = 0,2$ m, $L = 0,23081$ m e $h = 0,002$ m. O coeficiente de amortecimento viscoso, η_1 , é 0,001 e o coeficiente de amortecimento do material, η_2 , é nulo. Como visto no capítulo 3, para esta geometria, os modos de vibração $(m, n) = (1, 6)$ e $(m, N) = (1, 7)$ têm a mesma frequência natural. Em função da simetria circunferencial, tem-se, pois, quatro modos com o mesmo valor de frequência natural.

Para analisar a influência da imperfeição no comportamento não linear da casca, é utilizada neste capítulo a expansão modal para os deslocamentos laterais nomeada como Modelo 3 que apresenta 29 graus de liberdade e consiste na adição aos Modelos 1 e 2 dos modos que surgem devido à interação modal entre os modos de vibração $(m, n) = (1, 6)$ e $(m, N) = (1, 7)$ (graus de liberdade destacados em negrito):

$$\begin{aligned} & A_{111}(\tau) + B_{111}(\tau) + A_{211}(\tau) + B_{211}(\tau) + A_{502}(\tau) + A_{522}(\tau) + B_{522}(\tau) + A_{622}(\tau) + \\ & B_{622}(\tau) + \mathbf{A}_{712}(\tau) + \mathbf{B}_{712}(\tau) + \mathbf{A}_{812}(\tau) + \mathbf{B}_{812}(\tau) + A_{113}(\tau) + B_{113}(\tau) + A_{213}(\tau) + \\ & B_{213}(\tau) + A_{131}(\tau) + B_{131}(\tau) + A_{231}(\tau) + B_{231}(\tau) + \mathbf{A}_{311}(\tau) + \mathbf{B}_{311}(\tau) + \mathbf{A}_{411}(\tau) + \\ & \mathbf{B}_{411}(\tau) + \mathbf{A}_{321}(\tau) + \mathbf{B}_{321}(\tau) + \mathbf{A}_{421}(\tau) + \mathbf{B}_{421}(\tau). \end{aligned}$$

Para obtenção das curvas de ressonância e bifurcações do sistema, integra-se os sistemas de equações não lineares de movimento utilizando-se o software AUTO 97 (Doedel *et al.*, 1998).

Nos resultados que serão apresentados, a frequência de excitação do carregamento lateral é adimensionalizada segundo a seguinte equação:

$$\Omega_L = \frac{\omega_L}{\omega_0} \quad (5.2)$$

5.1.

Casca cilíndrica excitada lateralmente no modo (m, n)

Inicialmente, considera-se a casca cilíndrica sem imperfeições geométricas iniciais. A Figura 5.1 ilustra as curvas de ressonância da casca cilíndrica obtidas para um sistema de equações não lineares discretizadas a partir do Modelo 3, considerando-se $P_{L1} = 600 \text{ N/m}^2$ e $P_{L2} = 0$, ou seja, a pressão lateral aqui aplicada excita diretamente o modo $(1, 6)c$. A Figura 5.1 (a) é relativa às amplitudes de $(1, 6)c$ enquanto a Figura 5.1 (b) refere-se às amplitudes do modo $(1, 6)s$. Nessas figuras, a curva contínua representa os trechos estáveis da curva de ressonância enquanto a curva tracejada representa os trechos instáveis. Os símbolos \bullet representam os pontos de bifurcação encontrados ao longo das curvas de ressonância.

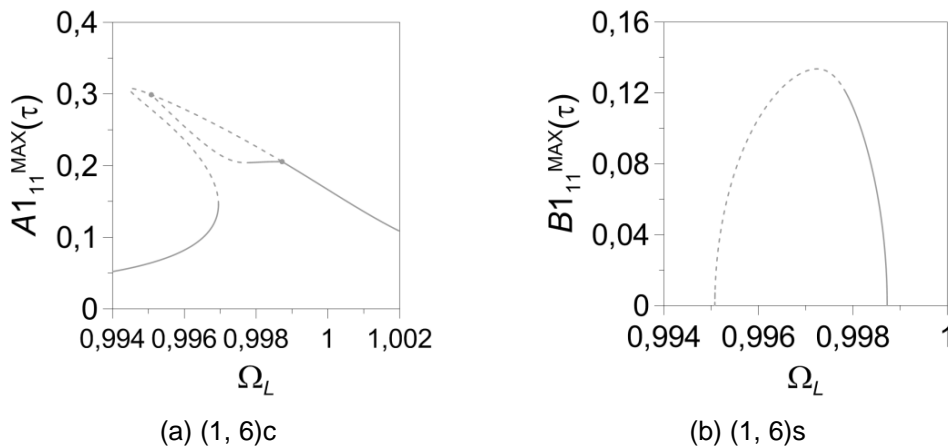


Figura 5.1 – Curvas de ressonância para a casca perfeita com ressonância 1:1:1:1 sendo $P_{L1} \neq 0$ e $P_{L2} = 0$. Onde: — Trecho estável, --- Trecho instável.

Neste caso os modos $A_{2,11}(\tau)$, $B_{2,11}(\tau)$ e todos os demais que representam a interação modal são nulos, pois o carregamento P_{L1} não transmite energia para o modos $(1, 7)c$ e $(1, 7)s$, levando aos mesmos resultados obtidos para a casca

perfeita descrita pelo modelo com 9 GDL mostrada no capítulo anterior. A notação (1, 7)_c e (1, 7)_s referem-se, respectivamente, aos modos lineares do segundo modo que dão origem a interação modal descritos pelas funções cosseno e seno. A seguir apresentam-se as análises das curvas de ressonância considerando diferentes formas de imperfeição geométrica inicial.

5.1.1.





Casca cilíndrica com imperfeição na forma do modo principal de vibração

Assume-se inicialmente que a casca cilíndrica tem uma imperfeição geométrica na forma do modo (1, 6)_c:

$$W_i = W_{11}^i \cos(n\theta) \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \quad (5.3)$$

Com base na relação (4.4) de Friedrich *et al.* (2015), mostrada no capítulo anterior, e na geometria adotada para a casca cilíndrica, foram escolhidas as magnitudes de imperfeição mostradas na Tabela 5.1.

Tabela 5.1 – Resumo das cores utilizadas nas curvas de ressonância para os casos com ressonância 1:1:1:1.

Modelo	Curva de ressonância	W_{11}^i/h
Modelo 3		0,000
		0,180
		0,198
		0,216

Na Tabela 5.2 apresenta-se a variação da frequência fundamental em função da magnitude de imperfeição, onde se observa o aumento da frequência natural de vibração com o aumento da magnitude da imperfeição. Para uma imperfeição geométrica na forma do modo (1, 6)_c, as frequências associadas aos modos (1, 6)_c e (1, 6)_s tornam-se distintas, mas as frequências associadas aos modos (1, 7)_c e (1, 7)_s permanecem iguais.

A Figura 5.2 ilustra as curvas de ressonância da casca cilíndrica obtidas a partir da integração das equações diferenciais discretizadas com o Modelo 3, considerando-se $P_{L1} = 600 \text{ N/m}^2$ e $P_{L2} = 0$.

Tabela 5.2 – Variação das frequências com o nível de imperfeição aplicada na forma do modo (1, 6)c para os casos com ressonância 1:1:1:1.

W_{11}/h	ω_0 (rad/s) (1, 6)c	ω_0 (rad/s) (1, 6)s	ω_0 (rad/s) (1, 7)c	ω_0 (rad/s) (1, 7)s
0,000	5588,470	5552,506	5570,447	5570,447
0,180	5615,562	5564,042	5591,103	5591,103
0,198	5613,962	5570,694	5596,947	5596,947
0,216	5626,545	5568,237	5601,041	5601,041

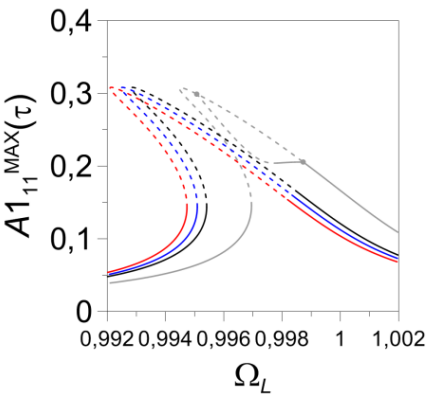


Figura 5.2 – Curvas de ressonância para a casca imperfeita com ressonância 1:1:1:1 sendo $P_{L1} \neq 0$ e $P_{L2} = 0$ com $W_{11}/h \neq 0$.

Observa-se a partir da Figura 5.2 que, para uma imperfeição na forma do modo (1, 6)c, e para as amplitudes de imperfeição analisadas, a excitação P_{L1} não transmite energia para os outros três modos com a mesma frequência, ou seja, os modos (1, 6)s, (1, 7)c e (1, 7)s. Consequentemente, todos os demais que representam a interação modal no Modelo 3 são nulos. Verifica-se também o desaparecimento das bifurcações ao longo do ramo ressonante e, consequentemente, do ramo secundário de soluções.

Tabela 5.3 – Resumo das cores utilizadas nas curvas de ressonância com W_{11}/h entre 0 e 0,180 para os casos com ressonância 1:1:1:1.

Modelo	Curva de ressonância	W_{11}/h
Modelo 3		0,030
		0,060
		0,090
		0,120
		0,150

A fim de se verificar a influência da magnitude da imperfeição adotou-se também valores entre a imperfeição nula (casca cilíndrica perfeita) e o resultado

da relação (4.4), $wA_{11}/h = 0,180$. Os valores adotados são mostrados na Tabela 5.3. A Figura 5.3 exibe as curvas de ressonância da casca cilíndrica para estas amplitudes da imperfeição geométrica inicial. Nota-se que, para pequenos valores de imperfeição, o modo (1, 6)s é excitado, mas o aumento da magnitude da imperfeição geométrica inicial diminui sua participação e ele deixa de ser excitado para valores de imperfeição maiores que 0,090.

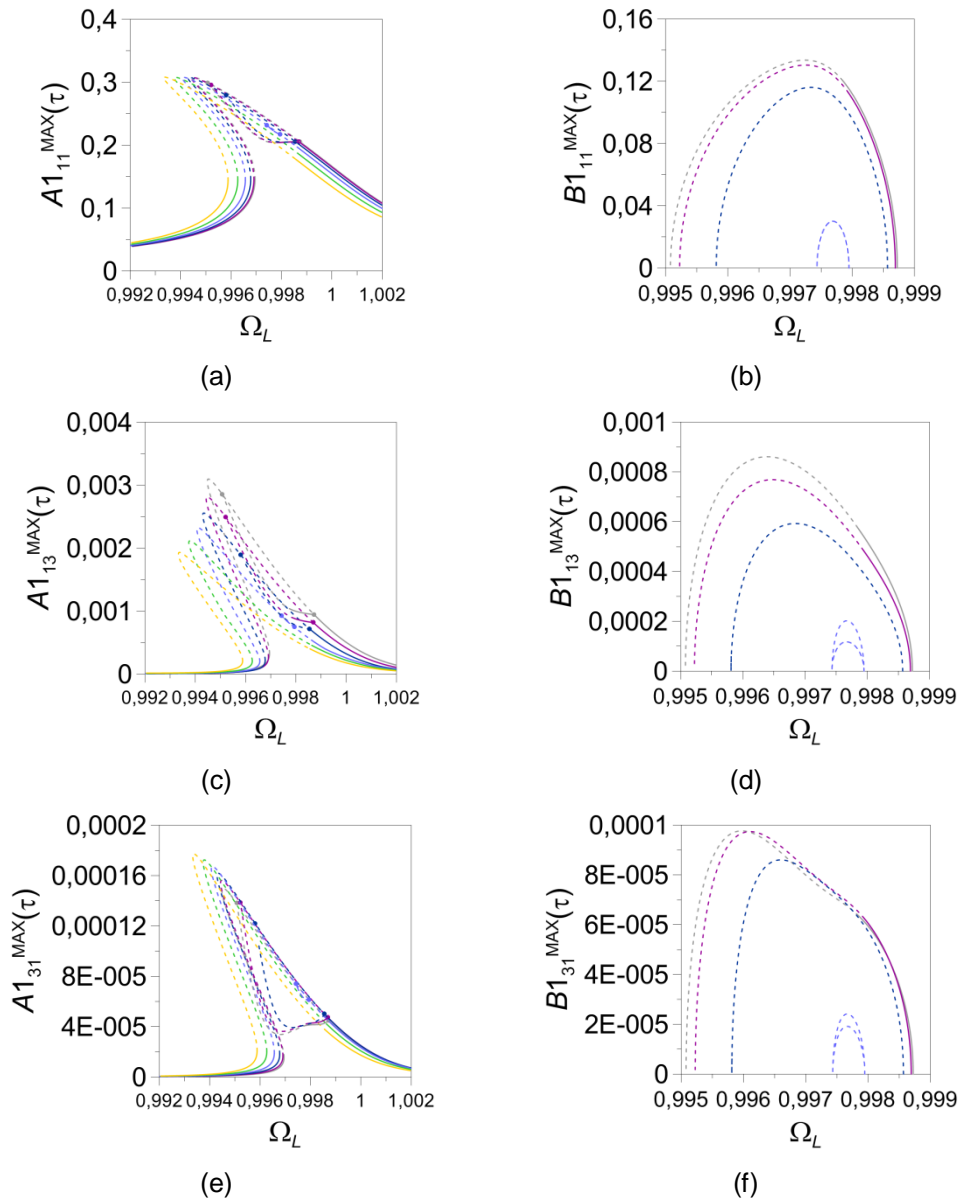


Figura 5.3 – Curvas de ressonância para a casca imperfeita com W_{11}/h entre 0 e 0,180. $P_{L1} \neq 0$ e $P_{L2} = 0$.

Ao desaparecer o modo (1, 6)s, desaparece também o ramo secundário de soluções. Mostra-se também na Figura 5.3 as amplitudes de outros termos da expansão modal, mostrando que os modos $A1_{ij}$ são excitados em toda a faixa de

frequências enquanto os modos $B1_{ij}$ são excitados somente em uma pequena faixa de frequências.

Em seguida, analisa-se as curvas de ressonância da casca cilíndrica com uma imperfeição geométrica inicial na forma do modo $(1, 7)c$, ou seja:

$$W_i = W_{11}^i \cos(N\theta) \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \quad (5.4)$$

A Figura 5.4 ilustra as curvas de ressonância da casca cilíndrica obtidas a partir da integração das equações diferenciais do Modelo 3 para o campo de deslocamento laterais, considerando-se $P_{L1} = 600 \text{ N/m}^2$ e $P_{L2} = 0$. A Figura 5.5 apresenta isoladamente alguns resultados apresentados na Figura 5.4 com o intuito de facilitar as análises.

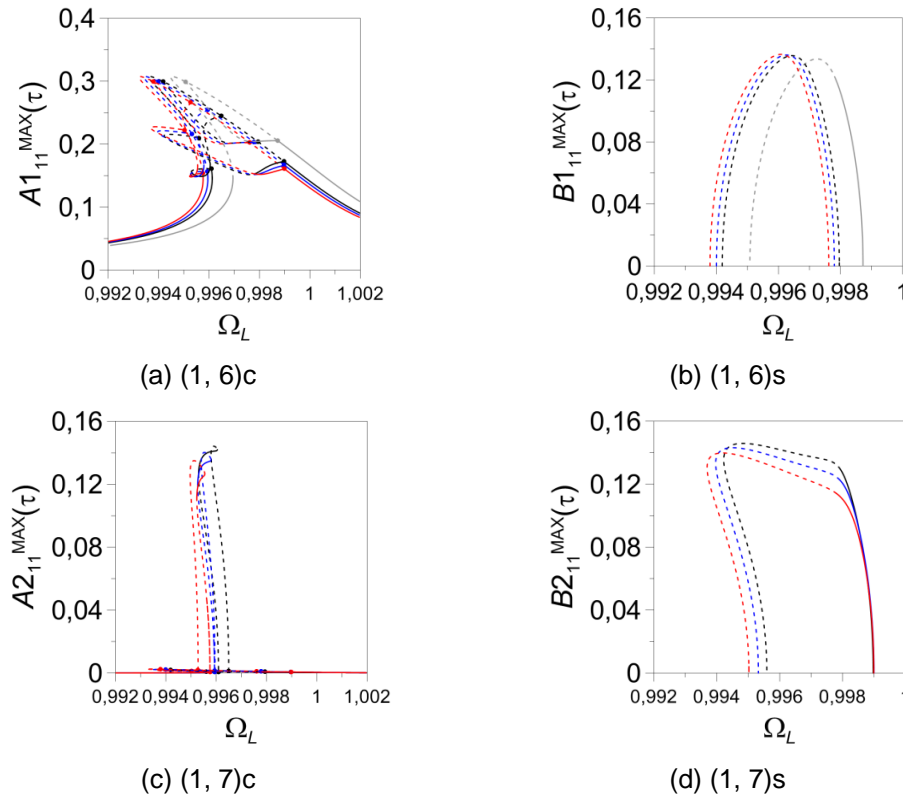


Figura 5.4 – Curvas de ressonância para a casca imperfeita com ressonância 1:1:1:1 sendo $P_{L1} \neq 0$ e $P_{L2} = 0$ com $W_{11}^i/h \neq 0$.

Nota-se que, ao contrário do caso anterior, para imperfeição geométrica na forma do modo $(1, 7)c$, quando o modo $(1, 6)c$ é excitado, a energia é transmitida para os outros três modos que compõem a ressonância interna. Observa-se ainda que a consideração da imperfeição geométrica inicial aumenta o número de pontos de bifurcação e, em consequência, aumenta também o número de caminhos de equilíbrio, gerando um maior número de trechos instáveis.

Observa-se na Figura 5.5 a presença de seis pontos de bifurcação, além das duas bifurcações nó-sela, que geram três novos ramos de soluções. Percebe-se que a magnitude máxima do modo $A_{211}(\tau)$ é aproximadamente a metade do valor da amplitude máxima do modo diretamente excitado, $A_{111}(\tau)$, e que os modos $B_{111}(\tau)$ e $B_{211}(\tau)$ têm aproximadamente a mesma ordem de grandeza.

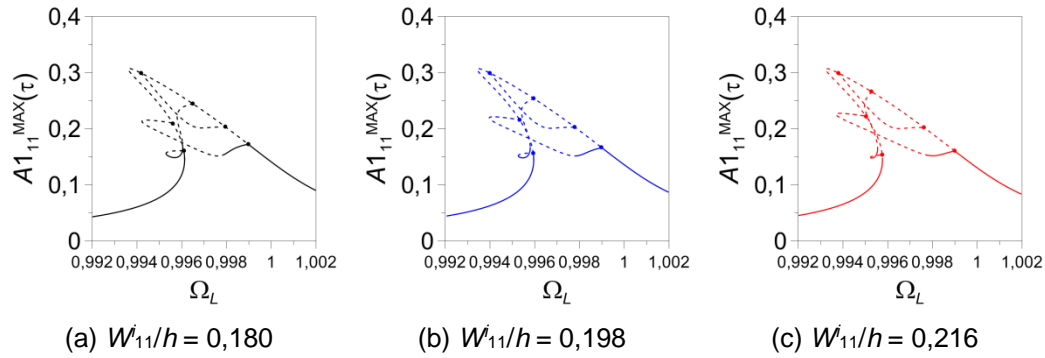


Figura 5.5 – Curvas de ressonância do modo (1, 6)c da casca imperfeita com ressonância 1:1:1:1 sendo $P_{L1} \neq 0$ e $P_{L2} = 0$ com $W_{11}/h = 0,180$, $W_{11}/h = 0,198$ e $W_{11}/h = 0,216$.

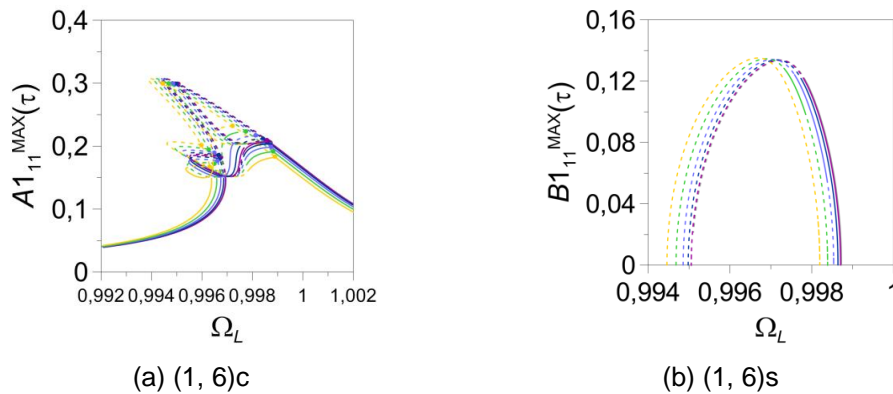


Figura 5.6 – Curvas de ressonância para a casca imperfeita com ressonância 1:1:1:1 sendo $P_{L1} \neq 0$ e $P_{L2} = 0$ com W_{11}/h entre 0 e 0,180.

Adicionalmente, a Figura 5.6 exibe os resultados das curvas de ressonância da casca cilíndrica para as magnitudes de imperfeição mostradas na Tabela 5.3. A Figura 5.7 apresenta mais detalhadamente alguns resultados mostrados na Figura 5.6. Observa-se nas Figuras 5.6 e 5.7 que mesmo uma imperfeição geométrica inicial de pequena magnitude ($W_{11}/h = 0,030$) já gera um aumento no número de pontos de bifurcação e que o aumento da magnitude da imperfeição aumenta o número de regiões instáveis.

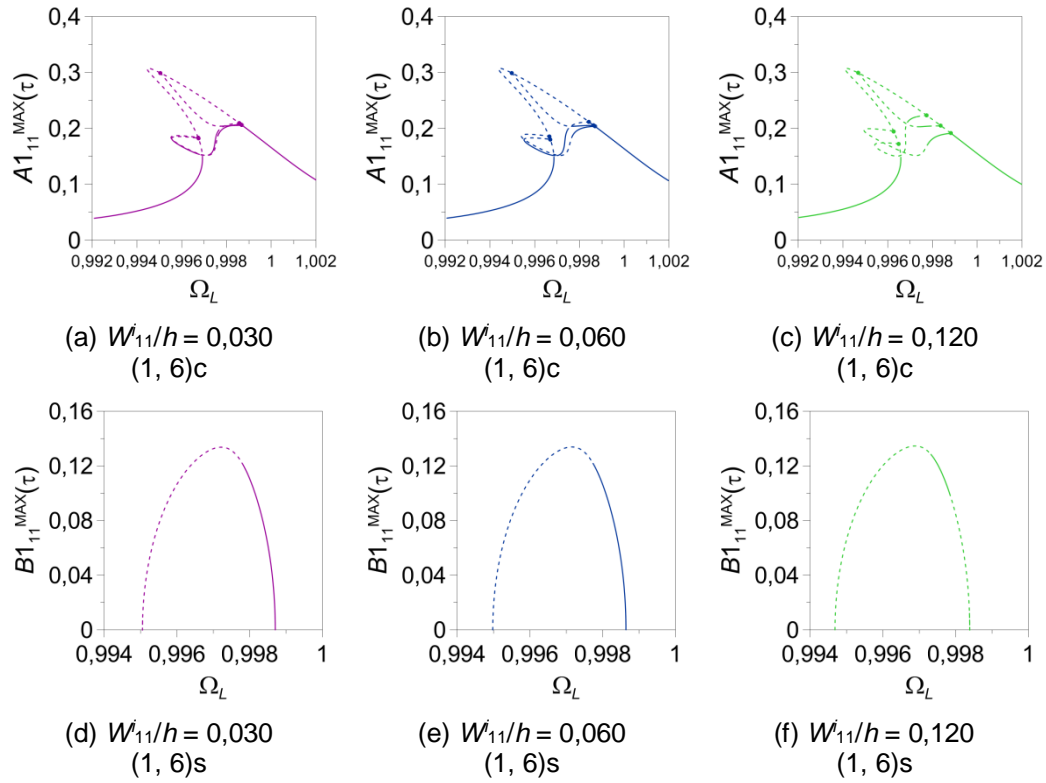


Figura 5.7 – Curvas de ressonância da casca imperfeita com ressonância 1:1:1:1 sendo $P_{L1} \neq 0$ e $P_{L2} = 0$ com $W_{11}/h = 0,030$, $W_{11}/h = 0,060$ e $W_{11}/h = 0,120$.

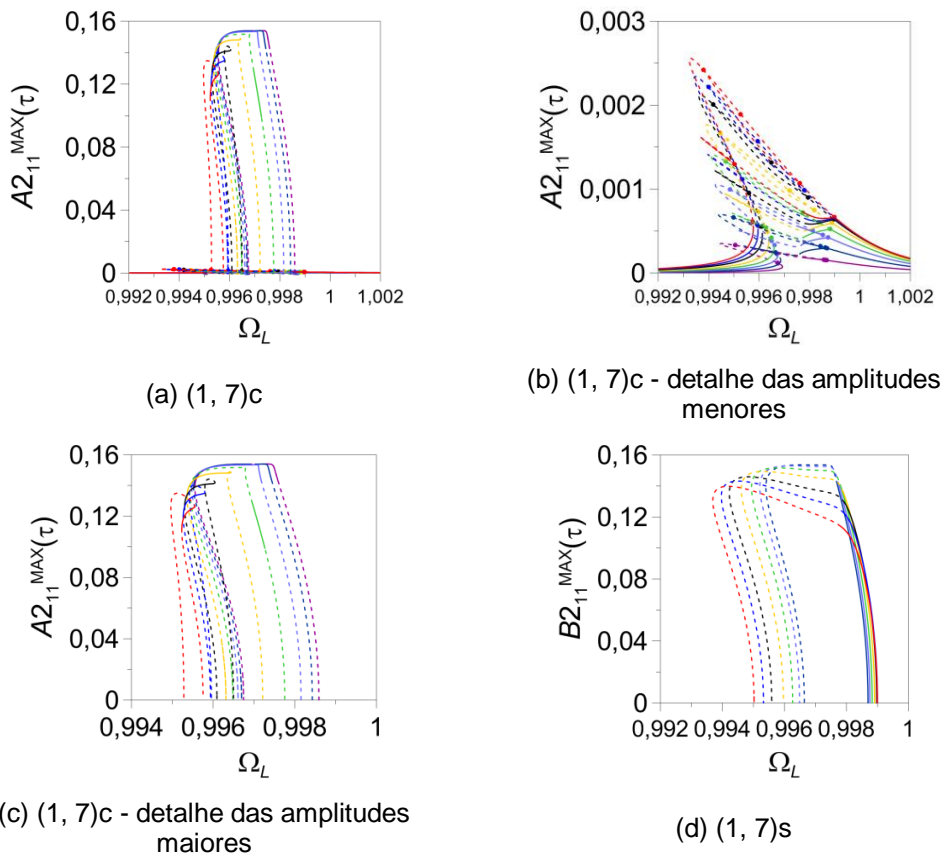


Figura 5.8 – Curvas de ressonância para a casca imperfeita com $P_{L1} \neq 0$, $P_{L2} = 0$ e $W_{11}/h \neq 0$.

A Figura 5.8 mostra a variação das amplitudes dos modos (1, 7)c e (1, 7)s que participam da ressonância interna 1:1:1:1. O modo $A_{211}(\tau)$ apresenta uma solução bastante complexa, como se observa nos detalhes apresentados nas Figuras 5.8 (b) e 5.8 (c). Verifica-se que o modo $A_{211}(\tau)$ é excitado em toda a faixa de frequências, enquanto o modo $B_{211}(\tau)$ é excitado apenas na região de ressonância. O diagrama de bifurcação do modo $A_{211}(\tau)$ mostra influência tanto do modo (1, 6)c quanto do modo (1, 6)s.

5.1.2.

Casca cilíndrica com imperfeição na forma do modo axissimétrico de vibração

Assume-se nesta seção que a casca cilíndrica analisada apresenta uma imperfeição geométrica inicial na forma do modo axissimétrico de vibração associado ao modo (1, 6), a saber:

$$W_i = W_{02}^i \left[\frac{3}{4} - \cos\left(\frac{2m\pi x}{L}\right) + \frac{1}{4} \cos\left(\frac{4m\pi x}{L}\right) \right] \quad (5.5)$$

Como o sinal da magnitude da imperfeição altera o sinal da curvatura gaussiana da casca, são estudados tanto valores positivos quanto valores negativos da imperfeição.

5.1.2.1.

Valores positivos da imperfeição

Os valores de imperfeição adotados são os mesmos adotados na análise da seção anterior e mostrados na Tabela 5.1.

A Figura 5.9 ilustra as curvas de ressonância do modelo. Observa-se que a amplitude máxima de vibração, $A_{111}^{MAX}(\tau)$, modo (1, 6)c, aumenta à medida que a magnitude da imperfeição geométrica inicial aumenta. Há um ligeiro deslocamento das curvas para a esquerda com o aumento do valor da imperfeição em virtude da diminuição no valor da frequência natural. Observa-se que a curva de ressonância do modo diretamente excitado é modificada. Após a bifurcação ao longo do ramo ressonante da curva se torna instável, surge um novo ramo estável que se mantém até atingir a amplitude máxima de vibração. Neste caso, a solução não trivial relativa ao modo (1, 6)s é quase toda estável em todos os casos analisados. Percebe-se que para imperfeição na forma do modo axissimétrico, excita-se apenas os dois modos (1, 6) não transmitindo

energia para os dois modos (1, 7), sendo todos os modos que representam esta interação, nulos.

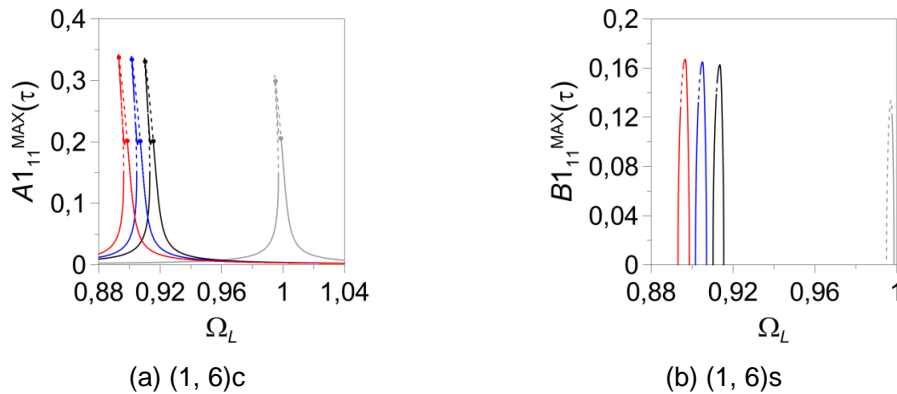


Figura 5.9 – Curvas de ressonância para a casca imperfeita com ressonância 1:1:1:1 sendo $P_{L1} \neq 0$ e $P_{L2} = 0$ com $W_{02}/h \neq 0$.

Os mesmos resultados foram encontrados para valores entre da magnitude da imperfeição geométrica nula (caso perfeito) e o resultado da relação (4.4), $W_{02}/h = 0,180$, mostrados na Tabela 5.3. A partir de $W_{02}/h = 0,060$ já se observa o novo ramo estável na resposta do modo (1, 6)c e a estabilização do modo (1, 6)s.

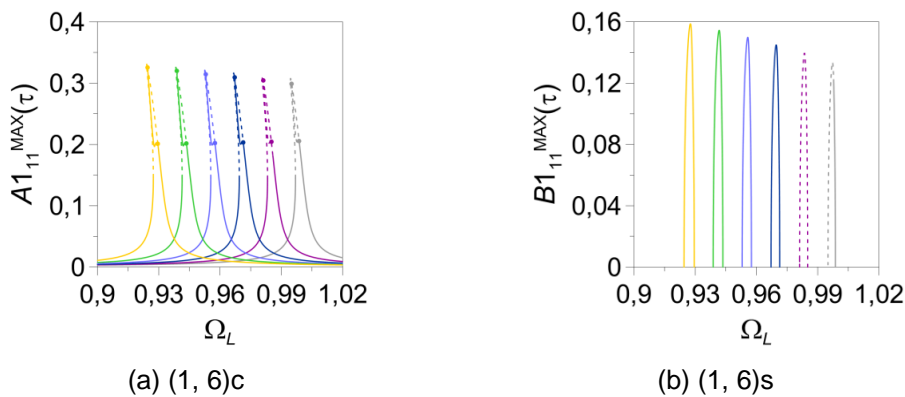


Figura 5.10 – Curvas de ressonância para a casca imperfeita com ressonância 1:1:1:1 sendo $P_{L1} \neq 0$ e $P_{L2} = 0$ com W_{02}/h entre 0 e 0,180.

5.1.2.2. Valores negativos da imperfeição

Adotam-se os valores negativos das imperfeições empregados na análise anterior (Tabela 5.1).

A Figura 5.11 ilustra as curvas de ressonância considerando-se as imperfeições negativas. Observa-se que a amplitude máxima de vibração,

$A_{11}^{MAX}(\tau)$, modo (1, 6)c, diminui ligeiramente à medida que a magnitude da imperfeição geométrica inicial cresce. Observa-se novamente o aparecimento da bifurcação no ramo ressonante e o surgimento de um novo trecho estável e que o modo (1, 6)s é sempre estável. Sua estabilidade está relacionada com o aparecimento do novo trecho estável na resposta do modo diretamente excitado, (1, 6)c. Percebe-se que, assim como acontece para os resultados com valores positivos de imperfeição, não há transmissão de energia para os modos (1, 7), sendo todos os modos que representam esta interação, nulos. Os mesmos resultados foram encontrados para valores entre a imperfeição nula e o resultado da relação (4.4), $W_{02}/h = -0,180$, mostrados na Tabela 5.3. A Figura 5.12 ilustra esses resultados. Verifica-se que pequenas imperfeições iniciais na forma do modo axissimétrico, bem menores que a espessura da casca, já são suficientes para modificar a resposta do sistema.

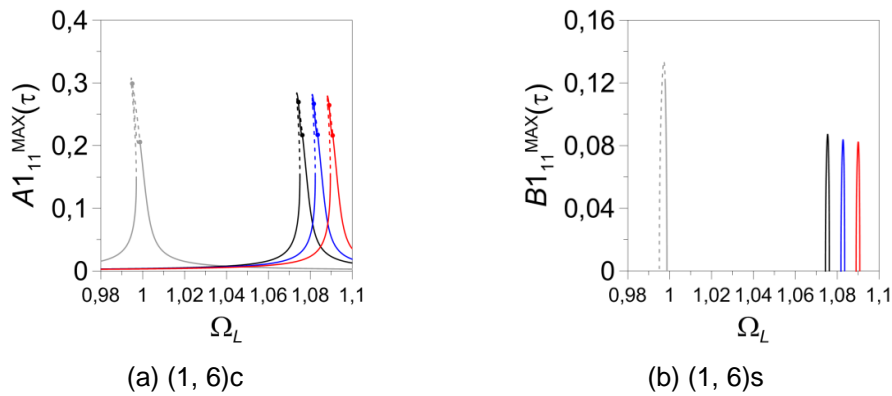


Figura 5.11 – Curvas de ressonância para a casca imperfeita com ressonância 1:1:1:1 sendo $P_{L1} \neq 0$ e $P_{L2} = 0$ com $W_{02}/h \neq 0$.

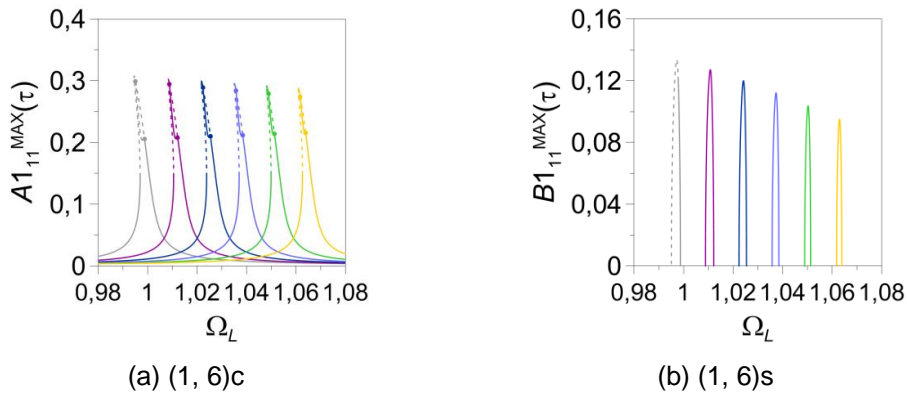


Figura 5.12 – Curvas de ressonância para a casca imperfeita com $P_{L1} \neq 0$, $P_{L2} = 0$ e W_{02}/h entre -0,180 e 0.

5.1.3.

Casca cilíndrica com imperfeição na forma do modo (1, 6)s

Considera-se agora que a casca cilíndrica apresente uma imperfeição geométrica na forma do modo (1, 6)s:

$$W_i = W_{11}^i \sin(n\theta) \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \quad (5.6)$$

As magnitudes adotadas são apresentadas na Tabela 5.1. A Figura 5.13 ilustra as curvas de ressonância enquanto a Figura 5.14 mostra separadamente algumas curvas de ressonância da Figura 5.13 para facilitar a análise. Neste caso a resposta não trivial do modo (1, 6)s é sempre instável. Isto dá origem a duas bifurcações ao longo da curva de ressonância de $A_{11}(\tau)$, modo (1, 6)c, conectadas por um ramo de soluções instáveis. Obtém-se assim uma região sem soluções estáveis de período um. Como visto no capítulo anterior, nesta região podem surgir soluções periódicas com um maior período de vibração, soluções quase periódicas ou soluções caóticas. A Figura 5.15 exhibe os resultados para valores entre a imperfeição nula e o resultado da relação (4.4), $W_{11}^i/h = 0,180$. A Figura 5.16 ilustra separadamente alguns dos resultados apresentados na Figura 5.15. Observa-se que, à medida que a magnitude da imperfeição aumenta, aumentam os trechos instáveis da resposta do modo (1, 6)s até se chegar às soluções completamente instáveis observadas na Figura 5.13. Não se observa interação modal entre os modos (1, 6) e (1, 7).

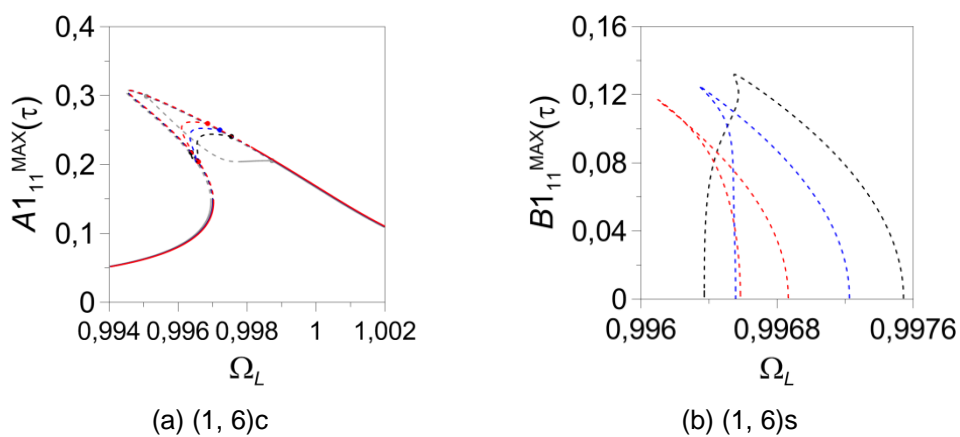


Figura 5.13 – Curvas de ressonância para a casca imperfeita com $P_{L1} \neq 0$, $P_{L2} = 0$ e $W_{11}^i/h \neq 0$.

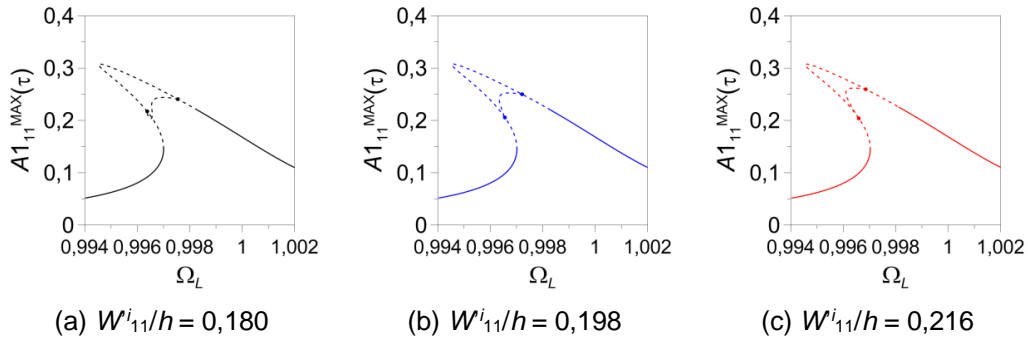


Figura 5.14 – Curvas de ressonância do modo (1, 6)c da casca imperfeita com ressonância 1:1:1:1 sendo $P_{L1} \neq 0$ e $P_{L2} = 0$ com $W^i_{11}/h = 0,180$, $W^i_{11}/h = 0,198$ e $W^i_{11}/h = 0,216$.

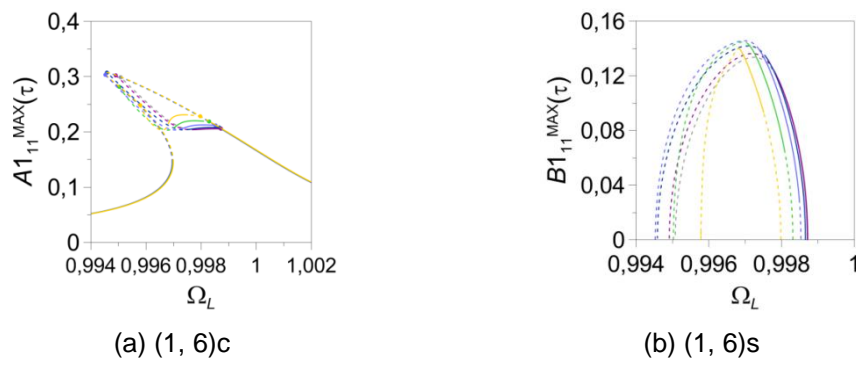


Figura 5.15 – Curvas de ressonância para a casca imperfeita com ressonância 1:1:1:1 sendo $P_{L1} \neq 0$ e $P_{L2} = 0$ com W^i/h_{11} entre 0 e 0,180.

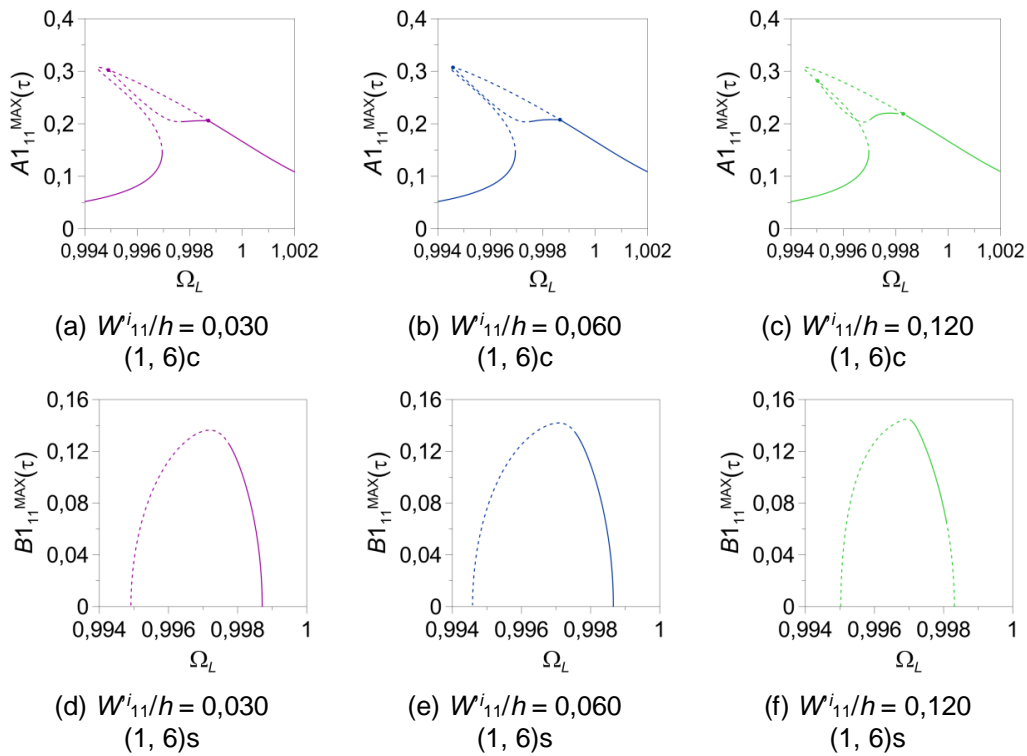


Figura 5.16 – Curvas de ressonância da casca imperfeita com $W^i_{11}/h = 0,030$, $W^i_{11}/h = 0,060$ e $W^i_{11}/h = 0,120$.

Analisa-se agora a casca cilíndrica com uma imperfeição geométrica na forma do modo (1, 7)s:

$$W_i = W_{11}^i \sin(N\theta) \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \quad (5.7)$$

A Figura 5.17 ilustra as curvas de ressonância do Modelo 3, considerando-se $P_{L1} = 600 \text{ N/m}^2$ e $P_{L2} = 0$, enquanto a Figura 5.18 apresenta isoladamente alguns resultados da Figura 5.17. Observa-se que, neste caso, todos os quatro modos com mesma frequência são excitados, ou seja, através dos termos não lineares que geram o acoplamento, a energia é transmitida para os outros modos. Observa-se ainda que a imperfeição inicial aumenta o número de pontos de bifurcação e, em consequência, o número de caminhos secundários ao longo da curva de ressonância do modo diretamente excitado, modo (1, 6)c, como mostra a Figura 5.18. Percebe-se que a amplitude máxima $A_{211}(\tau)$, modo (1, 7)c, é aproximadamente a metade do valor da amplitude máxima do modo diretamente excitado, $A_{111}(\tau)$ – (1, 6)c, e que os modos $B_{111}(\tau)$, modo (1, 6)s, e $B_{211}(\tau)$, modo (1, 7)s, têm aproximadamente a mesma ordem de grandeza que o modo (1, 7)c.

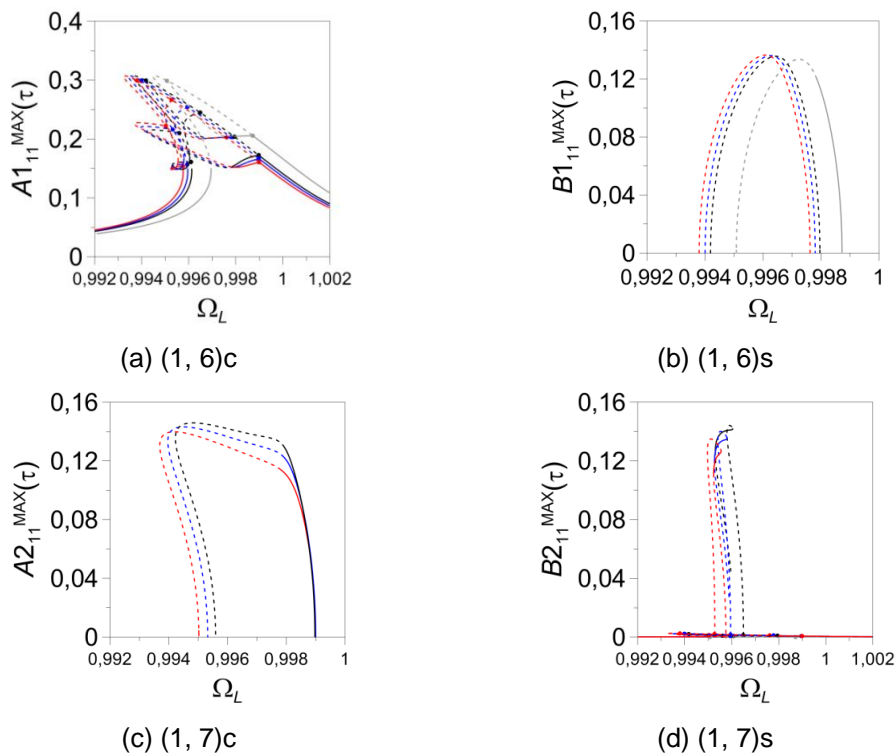
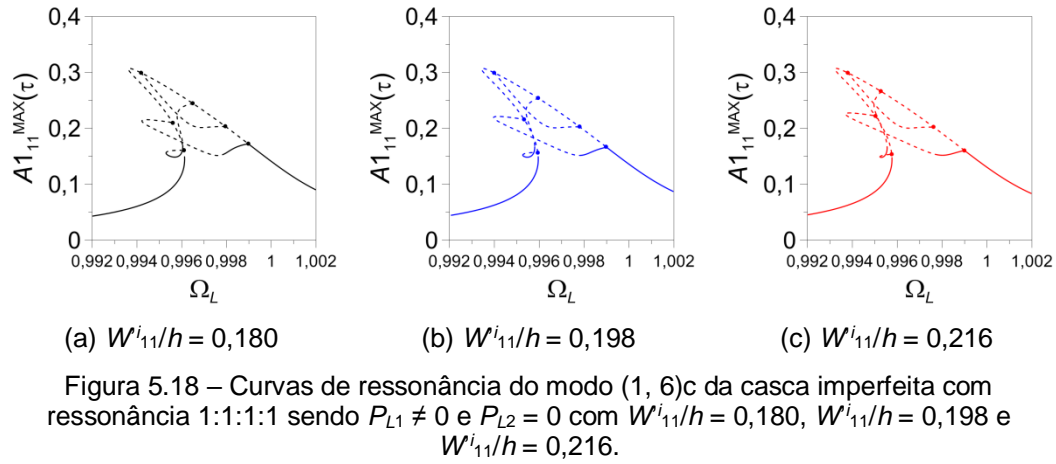


Figura 5.17 – Curvas de ressonância para a casca imperfeita com ressonância 1:1:1:1 sendo $P_{L1} \neq 0$ e $P_{L2} = 0$ com $W_{11}^i/h \neq 0$.



A Figura 5.19 exibe os resultados das curvas de ressonância adotando os valores das imperfeições entre 0 e 0,18. Observa-se na Figura 5.19 que mesmo o menor valor da magnitude da imperfeição geométrica inicial considerado já gera um aumento no número de pontos de bifurcação e que o aumento do valor da magnitude da imperfeição afasta esses pontos assim como aumenta o número de regiões instáveis.

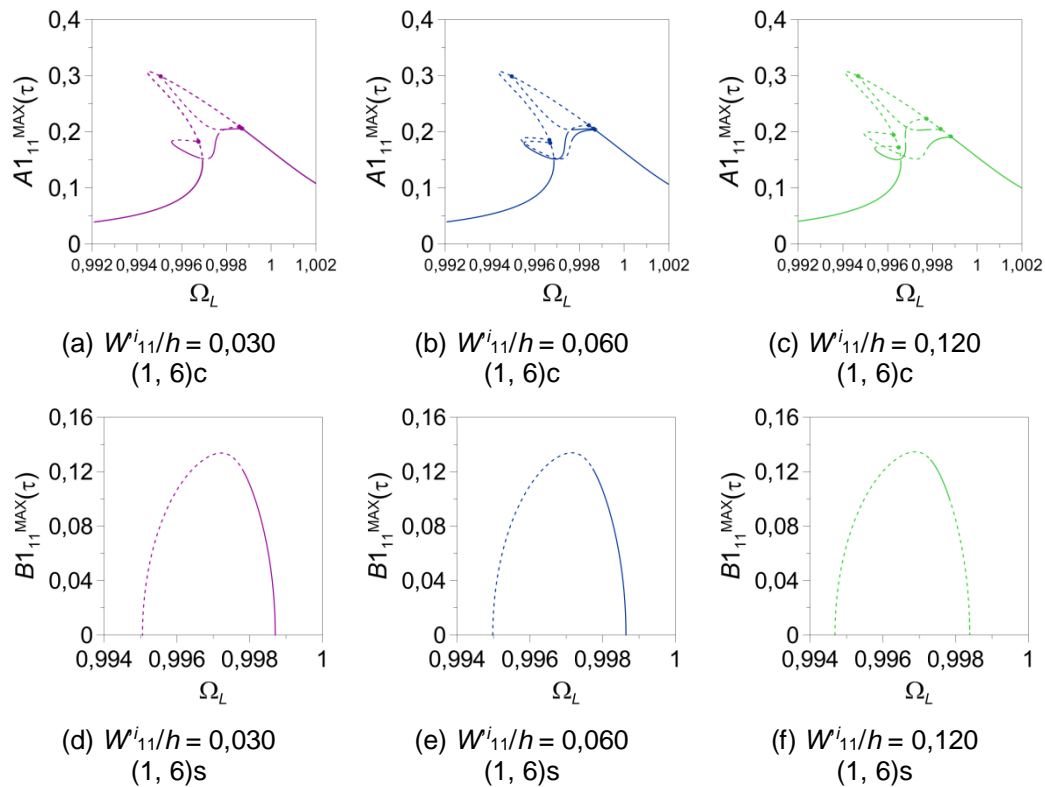


Figura 5.19 – Curvas de ressonância da casca imperfeita com ressonância 1:1:1:1 sendo $P_{L1} \neq 0$ e $P_{L2} = 0$ com $W^{i_{11}}/h = 0,030$, $W^{i_{11}}/h = 0,060$ e $W^{i_{11}}/h = 0,120$.

Uma visão mais detalhada dos modos (1, 7) é mostrada na Figura 5.20. O modo $B_{211}(\tau)$ apresenta uma solução bastante complexa, como se observa nos detalhes apresentados nas Figuras 5.20 (c) e 5.20 (d). Verifica-se que o modo $B_{211}(\tau)$ é excitado em toda a faixa de frequências, enquanto o modo $A_{211}(\tau)$ é excitado apenas na região de ressonância. O diagrama de bifurcação do modo $B_{211}(\tau)$ guarda influência tanto do modo diretamente excitado, modo (1, 6)c, quanto do modo (1, 6)s. Comparando-se a Figura 5.8 com a Figura 5.20, verifica-se que uma imperfeição geométrica na forma de um dos dois modos (1, 7) gera o acoplamento dos quatro modos que compõe a ressonância interna.

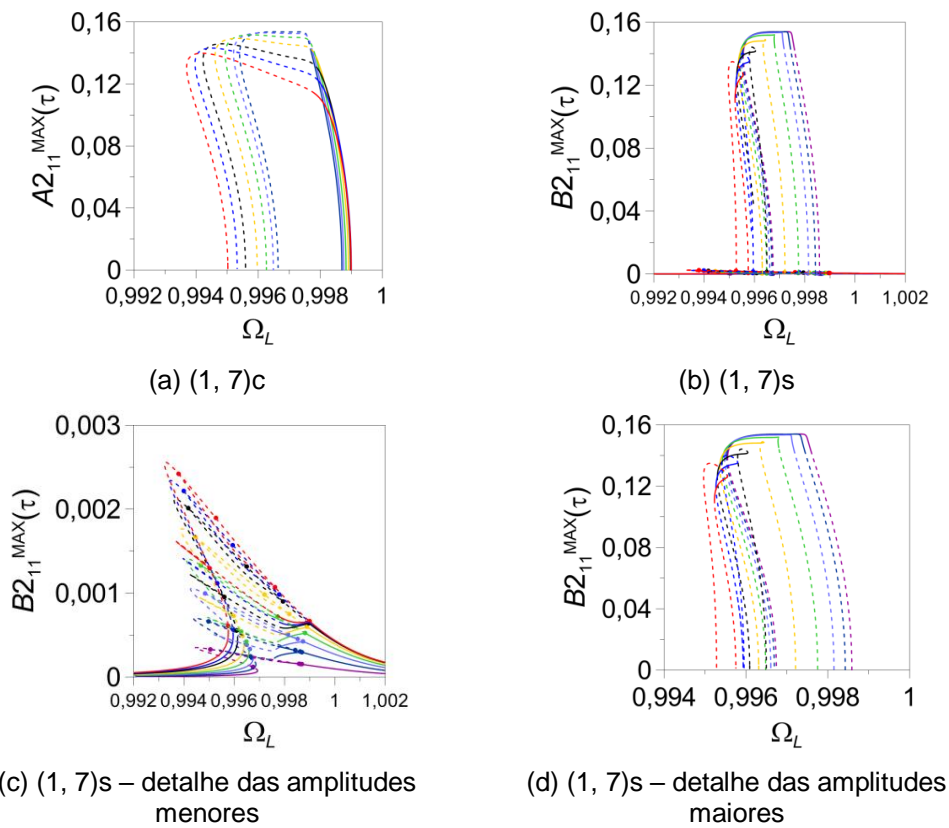


Figura 5.20 – Curvas de ressonância para a casca imperfeita com ressonância 1:1:1:1 sendo $P_{L1} \neq 0$ e $P_{L2} = 0$ com $W_{i11}/h \neq 0$.






5.1.4. Casca cilíndrica com imperfeição na forma da soma dos dois modos (m, n)

Assume-se agora que a casca cilíndrica analisada apresenta uma imperfeição geométrica inicial na forma da soma dos modos (1, 6)c e (1, 6)s, ou seja:

$$W_i = W_{11}^i \cos(n\theta) \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) + W_{11}^{ii} \sin(n\theta) \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \tag{5.8}$$

Foram escolhidas as duas amplitudes modais da imperfeição, como mostra a Tabela 5.4, de forma que a amplitude máxima da imperfeição seja igual ao resultado da relação (4.4). Na Figura 5.21 são comparadas as curvas de ressonância enquanto na Figura 5.22 apresenta-se isoladamente alguns resultados da Figura 5.21.

Tabela 5.4 – Resumo das cores utilizadas nas curvas de ressonância com $W/h = 0,180$ com ressonância 1:1:1:1

Modelo	Curva de ressonância	W_{11}^i/h	W_{11}^{ii}/h
Modelo 3		0,030	0,150
		0,060	0,120
		0,090	0,090
		0,120	0,060
		0,150	0,030

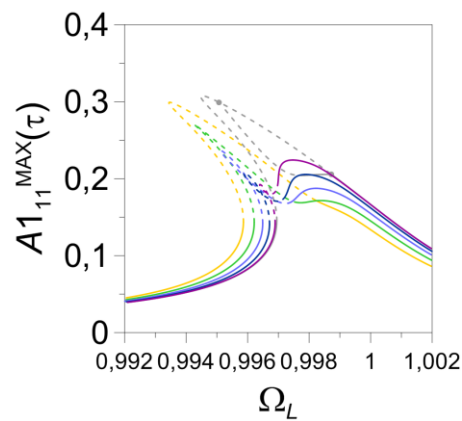


Figura 5.21 – Curvas de ressonância do modo (1, 6)c para a casca imperfeita com $P_{L1} \neq 0$ e $P_{L2} = 0$.

Verifica-se que os modos $B_{11}(\tau)$, $B_{21}(\tau)$ e $A_{21}(\tau)$ não são excitados. Entretanto, analisando-se os resultados mostrados nas Figuras 5.21 e 5.22 verifica-se que a imperfeição tem grande influência na curva de ressonância, diminuindo sensivelmente as amplitudes máximas de vibração, embora não tenham sido detectados novos pontos de bifurcação. O aumento no valor da magnitude da imperfeição leva a trechos da curva de ressonância onde não se obtém soluções estáveis.

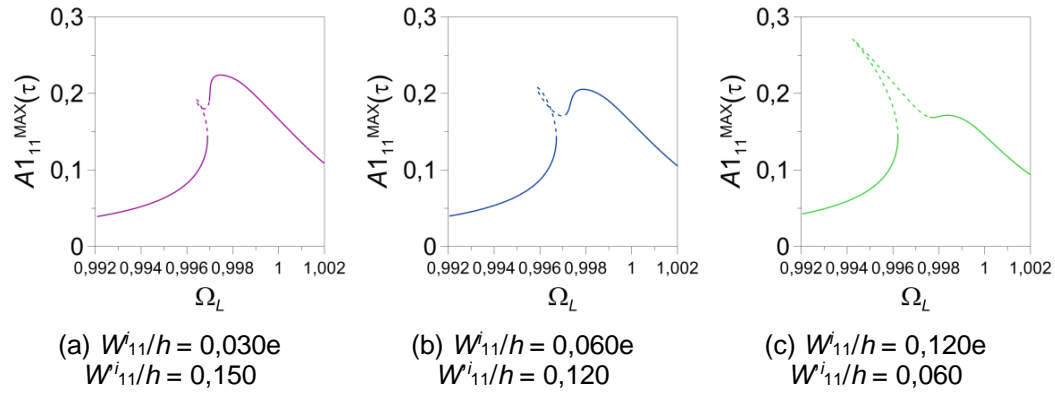


Figura 5.22 – Curvas de ressonância para (1, 6)c da casca imperfeita com ressonância 1:1:1:1 sendo $P_{L1} \neq 0$ e $P_{L2} = 0$ com (a) $W^i_{11}/h = 0,030$ e $W^i_{11}/h = 0,150$, (b) $W^i_{11}/h = 0,060$ e $W^i_{11}/h = 0,120$ e (c) $W^i_{11}/h = 0,120$ e $W^i_{11}/h = 0,060$.

Analisa-se agora o efeito de uma imperfeição na forma da soma dos modos (1, 7)c e (1, 7)s:

$$W_i = W^i_{11} \cos(N\theta) \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) + W^i_{11} \sin(N\theta) \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \quad (5.9)$$

Com base na relação (4.4) e na geometria adotada, foram escolhidos os valores de imperfeição mostrados na Tabela 5.6. A Figura 5.23 ilustra as curvas de ressonância dos modos (1, 6). A Figura 5.24 apresenta isoladamente alguns resultados apresentados na Figura 5.23.

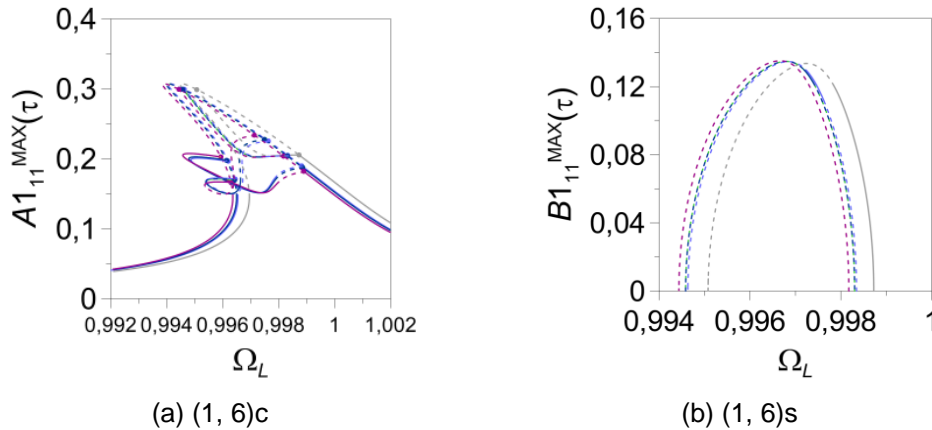


Figura 5.23 – Curvas de ressonância para a casca imperfeita com ressonância 1:1:1:1 sendo $P_{L1} \neq 0$ e $P_{L2} = 0$ com W^i_{11}/h entre 0 e 0,180.

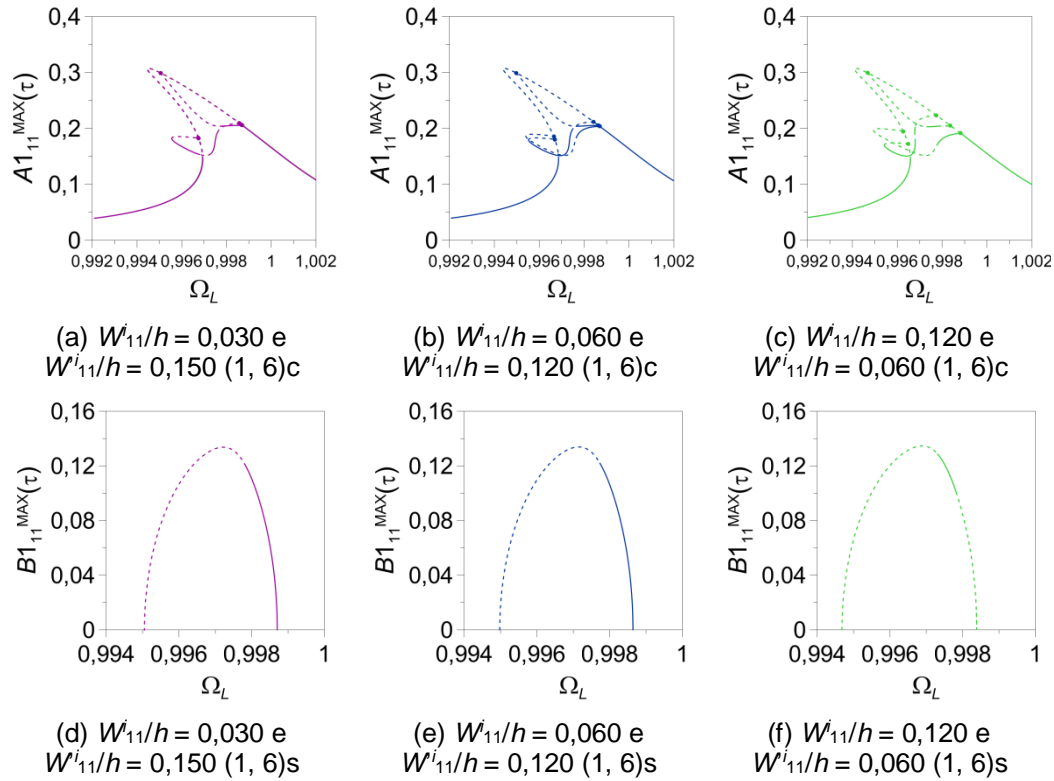


Figura 5.24 – Curvas de ressonância da casca imperfeita com ressonância 1:1:1:1 sendo $P_{L1} \neq 0$ e $P_{L2} = 0$ com (a) e (d) $W_{11}/h = 0,030$ e $W_{111}/h = 0,150$, (b) e (e) $W_{11}/h = 0,060$ e $W_{111}/h = 0,120$ e (c) e (f) $W_{11}/h = 0,120$ e $W_{111}/h = 0,060$.

Nota-se que, de maneira semelhante ao que ocorre para imperfeições na forma de cada um dos modos isolados da equação (5.9), excitando-se diretamente o modo (1, 6)c todos os modos são ativados, como mostram as curvas de ressonância da Figura 5.25. Observa-se que a adição da imperfeição inicial aumenta o número de pontos de bifurcação e, em consequência, o número de caminhos de bifurcação, com diversos trechos estáveis e instáveis. Observa-se que mesmo valores pequenos de imperfeição geométrica inicial já geram um aumento no número de pontos de bifurcação e que o aumento da magnitude da imperfeição afasta esses pontos assim como aumenta o número de regiões instáveis. Observa-se na Figura 5.25 que os modos (1, 7)c e (1, 7)s apresentam o mesmo padrão de bifurcações, sendo excitados em toda a faixa de frequência. Percebe-se que a amplitude máxima do modo (1, 7)c é aproximadamente a metade do valor da amplitude máxima do modo diretamente excitado (1, 6)c e tem a mesma ordem de grandeza que os modos $B1_{11}(\tau)$ e $B2_{11}(\tau)$. Entretanto cabe ressaltar que a amplitude máxima do modo (1, 7)c sofre redução em virtude das bifurcações que instabilizam o trecho superior do ramo ressonante da resposta (vide Figura 5.25(a)).

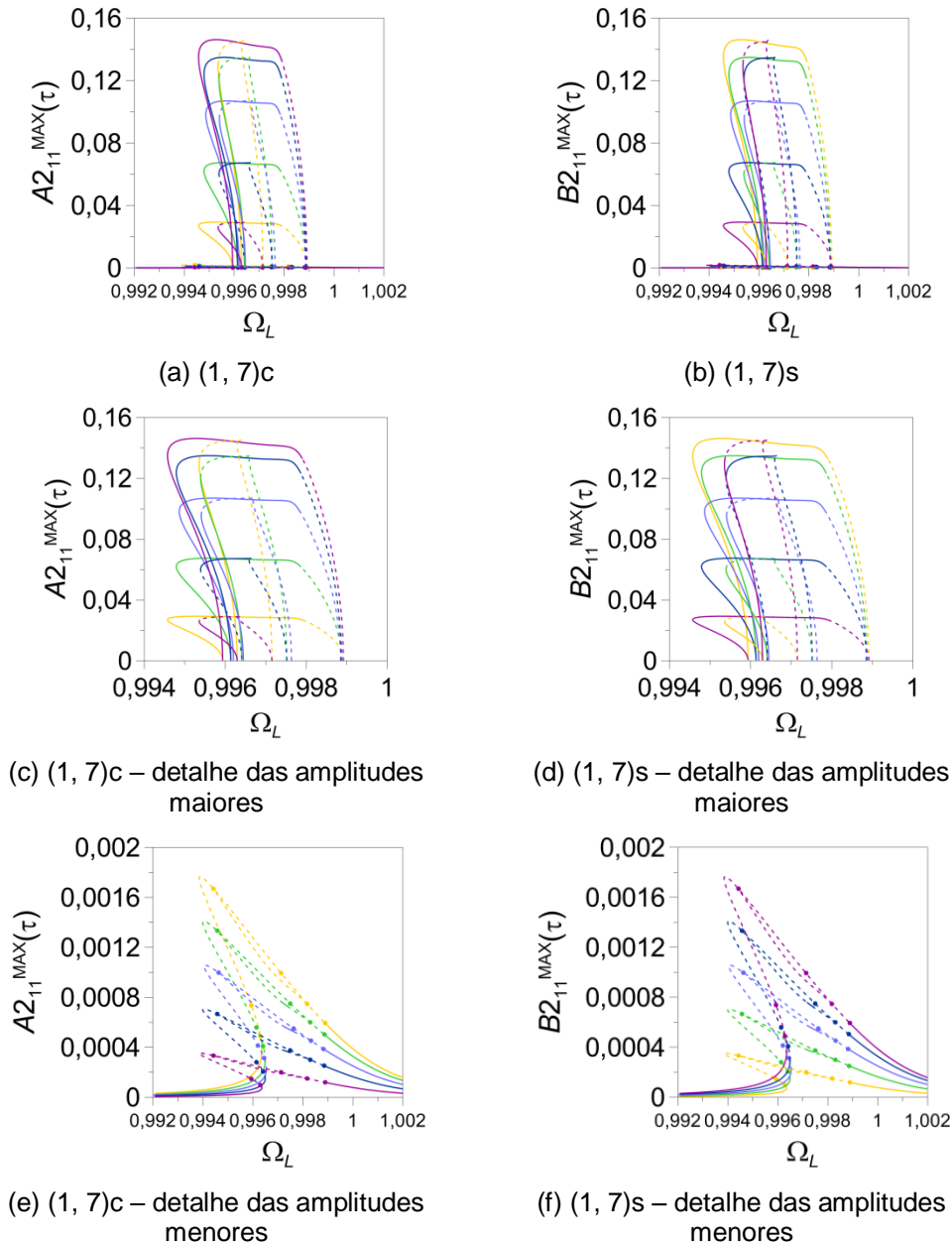


Figura 5.25 – Curvas de ressonância para a casca imperfeita com ressonância 1:1:1:1 sendo $P_{L1} \neq 0$ e $P_{L2} = 0$ com $W_{i11}/h \neq 0$.

5.1.5.











Casca cilíndrica com imperfeições geométricas de magnitudes aleatórias

Finalmente assume-se que a casca cilíndrica é submetida a uma imperfeição descrita pela soma dos quatro modos de mesma frequência que compõem a interação modal, ou seja:

$$W_i = W_{11}^i \cos(n\theta) \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) + W_{11}^{ii} \sin(n\theta) \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) + W_{11}^i \cos(N\theta) \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) + W_{11}^{ii} \sin(N\theta) \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \quad (5.10)$$

As amplitudes dos quatro modos são gerados de forma aleatória e mostrados na Tabela 5.5. Nestes casos a magnitude máxima da imperfeição é fixa e aproximadamente igual a 0,18. Cabe aqui lembrar que, na maioria das estruturas reais, a forma da imperfeição não segue uma forma modal específica. Na análise experimental, em geral, a superfície da casca é mapeada e a imperfeição, para fins de análise numérica, é representada por uma série de Fourier dos modos de flambagem ou vibração. A partir desta série verifica-se a participação de cada modo na imperfeição. Entretanto, na análise teórica e numérica da estabilidade estática e dinâmica de estruturas é comum se adotar a forma da imperfeição igual à forma do modo de flambagem ou do modo vibração fundamental.

Tabela 5.5 – Valores das amplitudes da imperfeição obtidos aleatoriamente para ressonância 1:1:1:1.

Caso	Curva de ressonância	W_{11}^i	W_{11}^{ii}	W_{21}^i	W_{21}^{ii}
1		0,00927	0,05590	0,00019	0,11464
2		0,05619	0,00969	0,06835	0,04577
3		0,07716	0,03081	0,03978	0,03225
4		0,00493	0,04724	0,09809	0,02974
5		0,06728	0,05842	0,05148	0,00282
6		0,03470	0,06920	0,00387	0,07223
7		0,01708	0,00194	0,15589	0,00509
8		0,00927	0,10433	0,00062	0,06578
9		0,00035	0,01776	0,00545	0,15644
10		0,01585	0,01957	0,02068	0,12390

As Figuras 5.26 a 5.36 ilustram as curvas de ressonância para cada um dos casos apresentados na Tabela 5.5. A Figura 5.26 compara os diagramas de bifurcação dos quatro modos envolvidos na ressonância interna para todos os casos de imperfeições aleatórias apresentados na Tabela 5.5. As Figuras 5.27 a 5.36 mostram a resposta dos quatro modos para cada tipo de imperfeição.

Analisando-se os gráficos da Figura 5.26 percebe-se, como esperado, que todos os modos que participam da interação modal são excitados em toda a

faixa de frequências, independente da forma da imperfeição geométrica inicial. A forma, a magnitude e a estabilidade dos diagramas de bifurcação são bastante sensíveis à forma da imperfeição, como mostram as Figuras 5.26 a 5.36. Nota-se que a maior amplitude de vibração ocorre sempre para o modo (1, 6)c, Figura 5.28 (a), que é o modo diretamente excitado. O valor dessa amplitude, $A_{11}^{MAX}(\tau)$, varia muito pouco para todos os casos, sendo ligeiramente maior sempre que as amplitudes que têm a forma do modo excitado e do modo (1, 6)s, respectivamente W_{11}^i e $W_{11}^{i_{11}}$, forem predominante, sendo esses os casos onde se observa também o maior número de trechos instáveis em todas as curvas de ressonância. A maior variação da amplitude de vibração ocorre para o modo (1, 6)s, Figura 5.26 (b), sendo que as maiores amplitudes ocorrem quando as magnitudes W_{11}^i e $W_{11}^{i_{11}}$ da imperfeição geométrica forem predominantes.

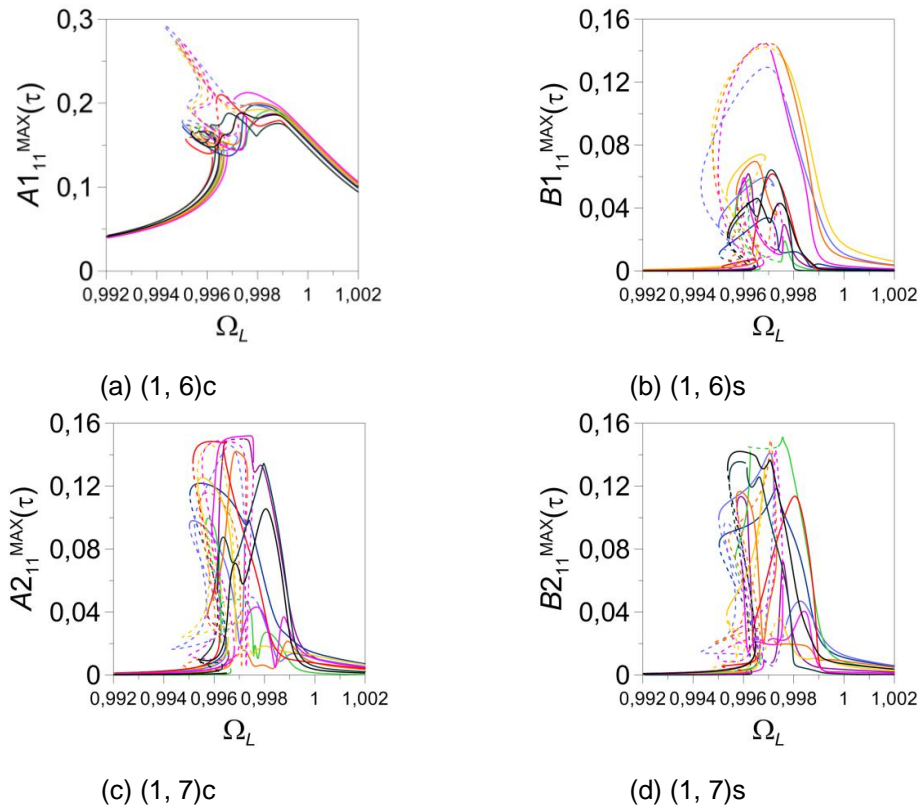


Figura 5.26 – Curvas de ressonância para a casca imperfeita com ressonância 1:1:1:1 sendo $P_{L1} \neq 0$ e $P_{L2} = 0$ com $W_i/h \neq 0$.

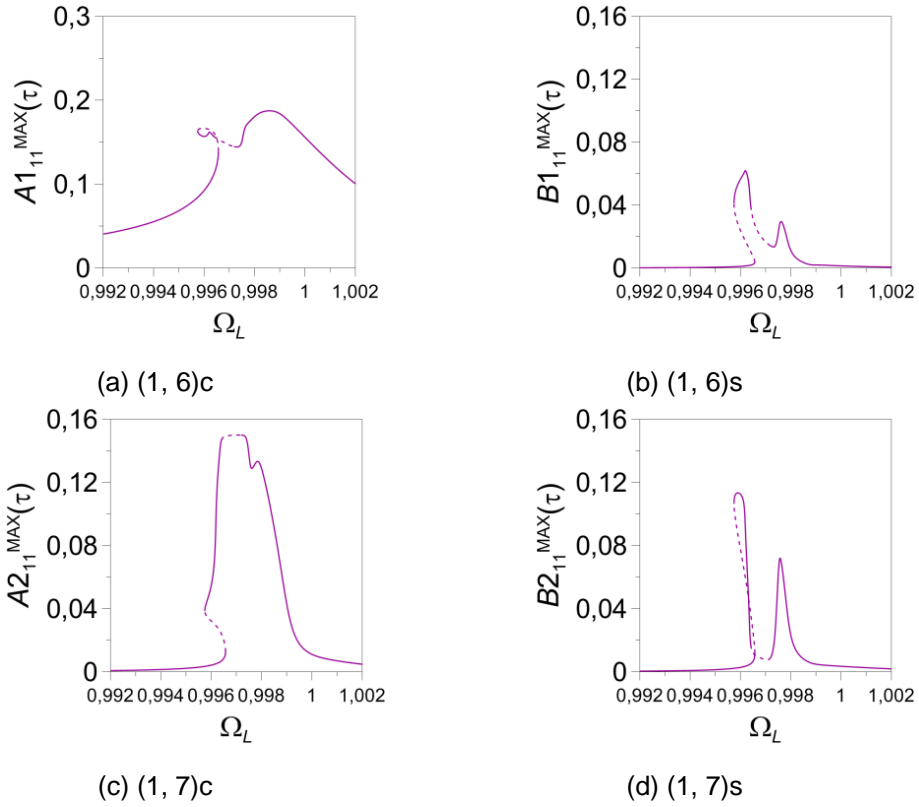


Figura 5.27 – Curvas de ressonância para a casca imperfeita com ressonância 1:1:1:1 sendo $P_{L1} \neq 0$ e $P_{L2} = 0$ com $W/h \neq 0$, caso 1.

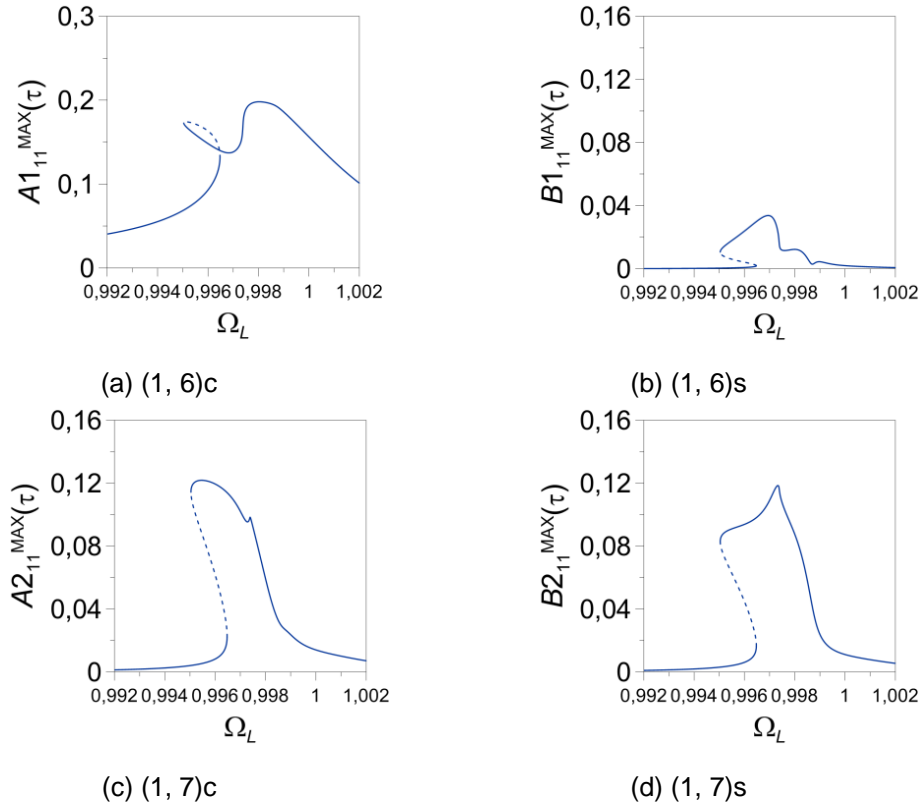


Figura 5.28 – Curvas de ressonância para a casca imperfeita com ressonância 1:1:1:1 sendo $P_{L1} \neq 0$ e $P_{L2} = 0$ com $W/h \neq 0$, caso 2.

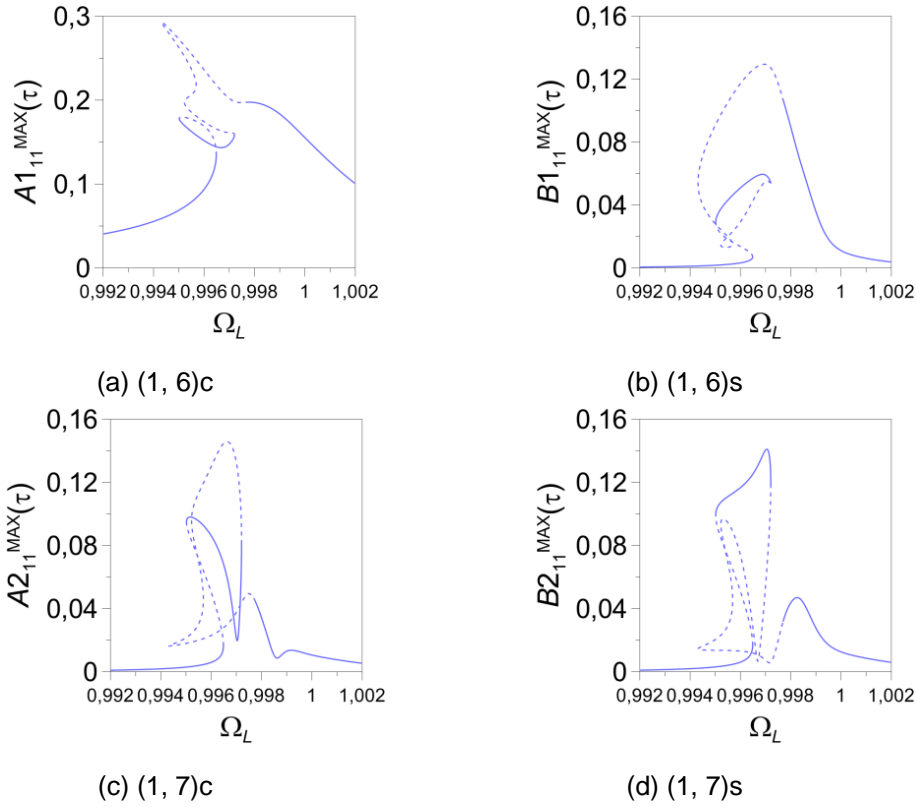


Figura 5.29 – Curvas de ressonância para a casca imperfeita com ressonância 1:1:1:1 sendo $P_{L1} \neq 0$ e $P_{L2} = 0$ com $W/h \neq 0$, caso 3.

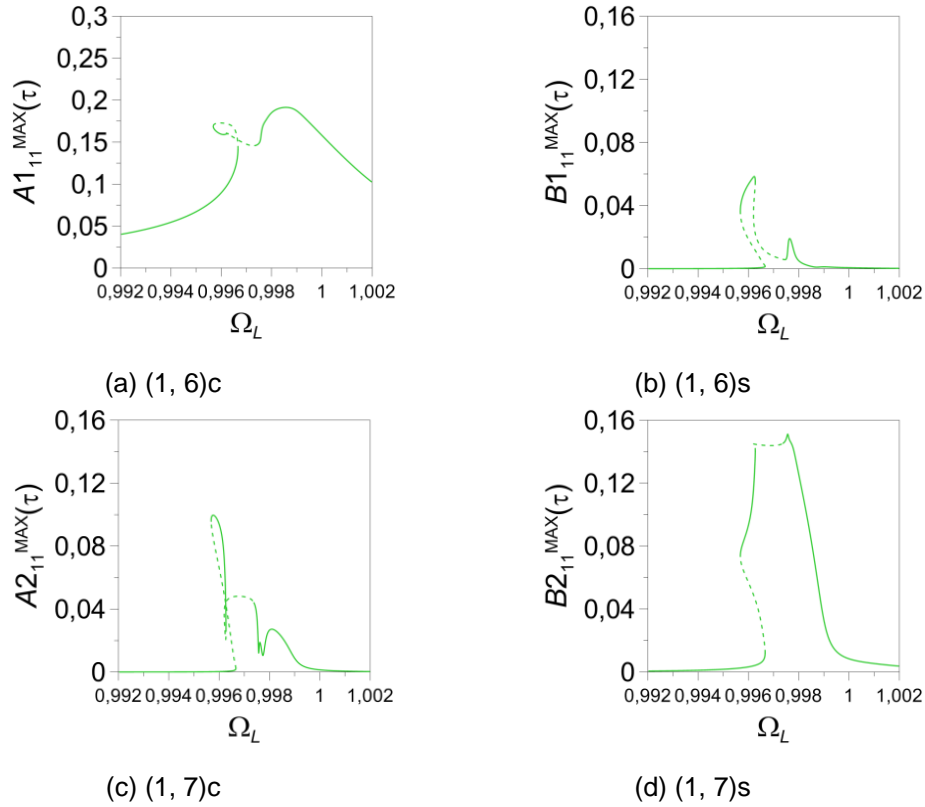


Figura 5.30 – Curvas de ressonância para a casca imperfeita com ressonância 1:1:1:1 sendo $P_{L1} \neq 0$ e $P_{L2} = 0$ com $W/h \neq 0$, caso 4.

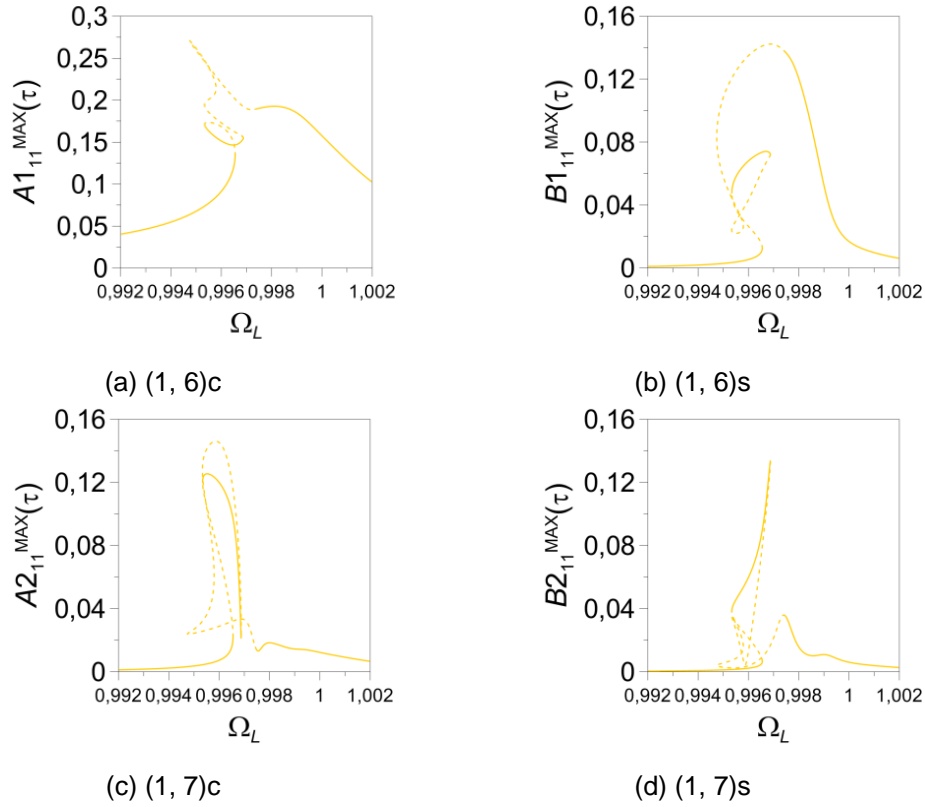


Figura 5.31 – Curvas de ressonância para a casca imperfeita com ressonância 1:1:1:1 sendo $P_{L1} \neq 0$ e $P_{L2} = 0$ com $W/h \neq 0$, caso 5.

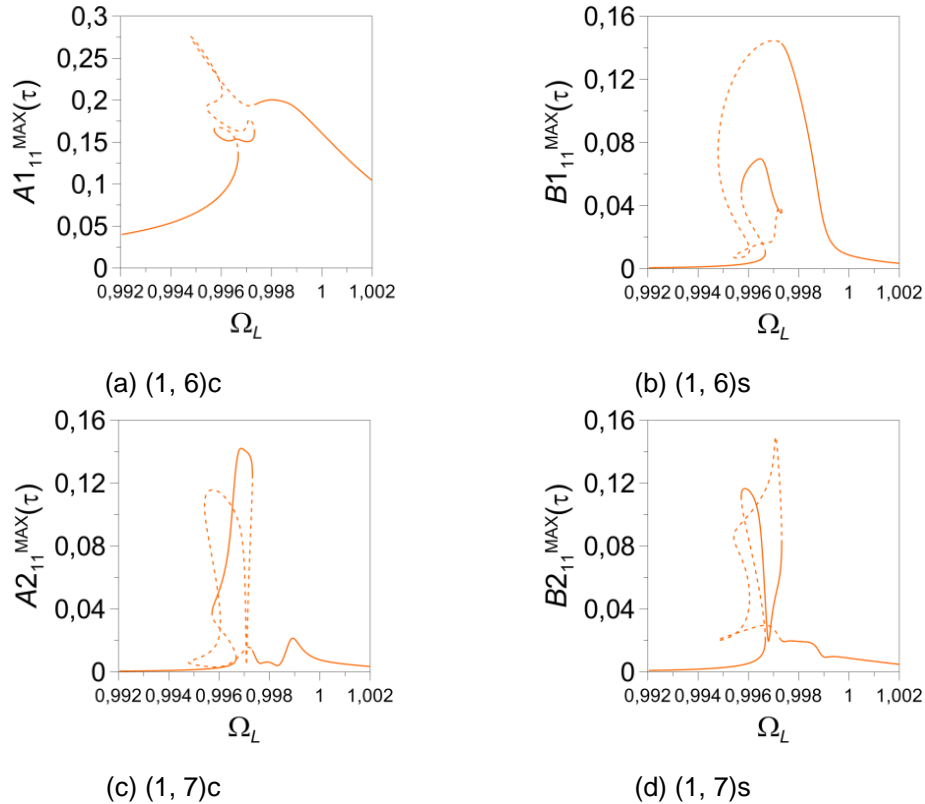


Figura 5.32 – Curvas de ressonância para a casca imperfeita com ressonância 1:1:1:1 sendo $P_{L1} \neq 0$ e $P_{L2} = 0$ com $W/h \neq 0$, caso 6.

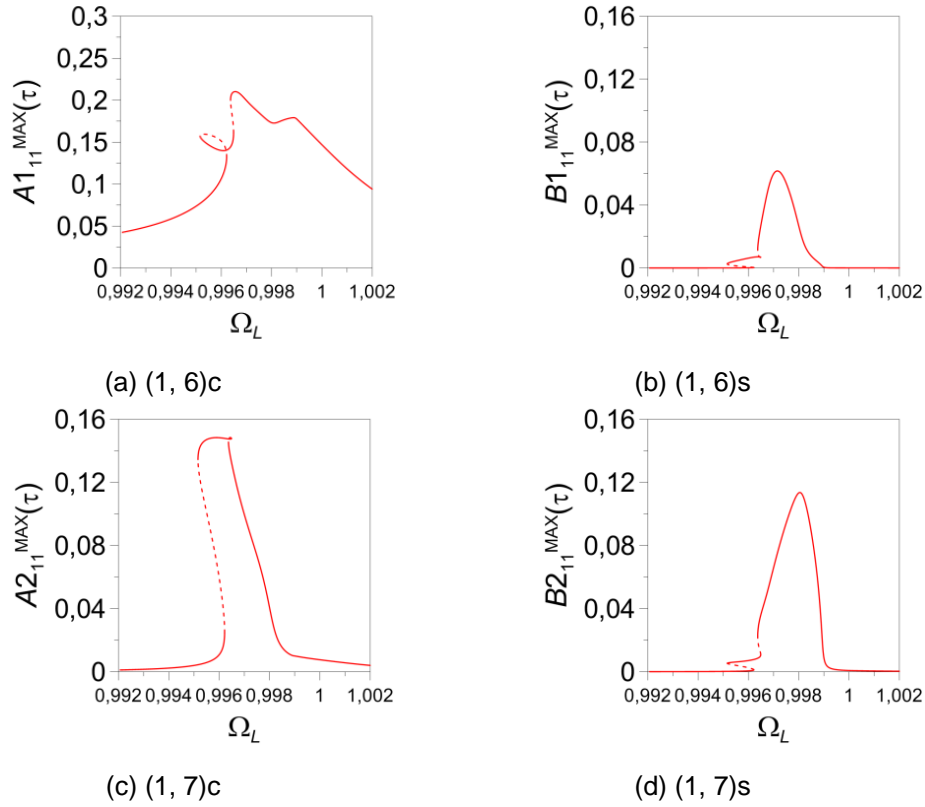


Figura 5.33 – Curvas de ressonância para a casca imperfeita com ressonância 1:1:1:1 sendo $P_{L1} \neq 0$ e $P_{L2} = 0$ com $W/h \neq 0$, caso 7.

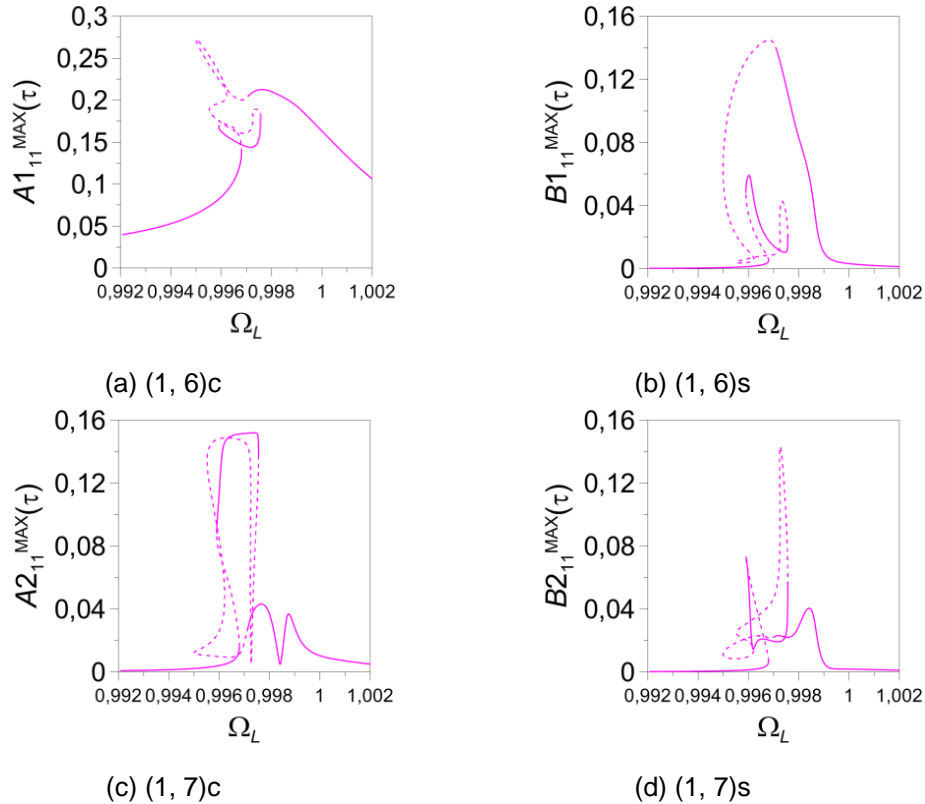


Figura 5.34 – Curvas de ressonância para a casca imperfeita com ressonância 1:1:1:1 sendo $P_{L1} \neq 0$ e $P_{L2} = 0$ com $W/h \neq 0$, caso 8.

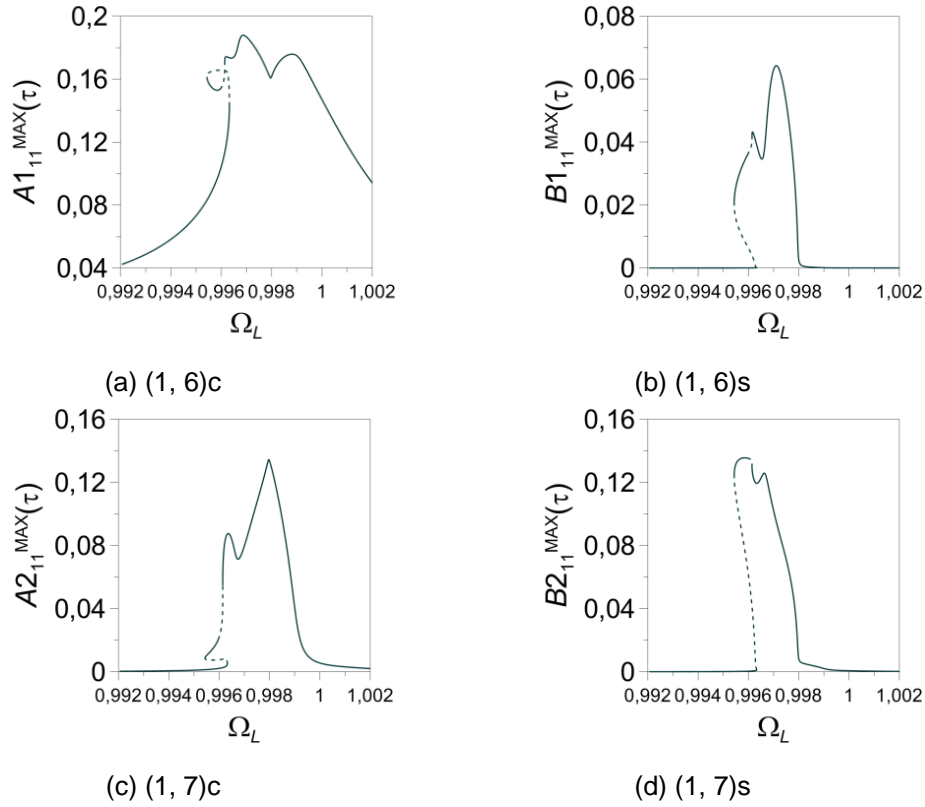


Figura 5.35 – Curvas de ressonância para a casca imperfeita com ressonância 1:1:1:1 sendo $P_{L1} \neq 0$ e $P_{L2} = 0$ com $W/h \neq 0$, caso 9.

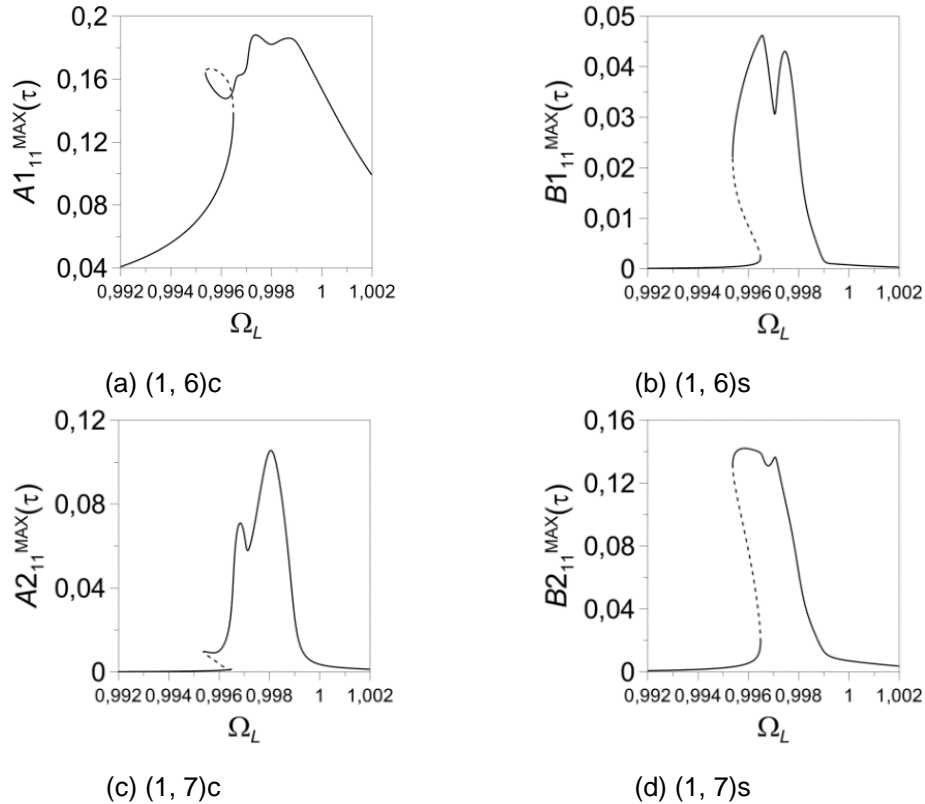


Figura 5.36 – Curvas de ressonância para a casca imperfeita com ressonância 1:1:1:1 sendo $P_{L1} \neq 0$ e $P_{L2} = 0$ com $W/h \neq 0$, caso 10.

Cabe aqui ressaltar que caso o modo excitado fosse o modo (1, 6)s, em vez do modo (1, 6)c, teríamos os mesmos diagramas de bifurcação aqui apresentados, por outro lado caso o modo (1, 7)c ou (1, 7)s sejam excitados, deve-se esperar mudanças no cenário das bifurcações.

5.2.

Casca cilíndrica excitada lateralmente no modo (m, N)

As mesmas análises realizadas anteriormente nesse capítulo são agora realizadas para um carregamento lateral com amplitude $P_{L2} = 600 \text{ N/m}^2$ e $P_{L1} = 0$, excitando diretamente o modo (1, 7)c (vide equação (5.1)). Os resultados mostrados a seguir são aqueles para os quais há ativação dos quatro modos que participam da ressonância interna.

Inicialmente, como referência, considera-se a casca cilíndrica sem imperfeições. A Figura 5.37 ilustra as curvas de ressonância sendo a Figura 5.37 (a) relativa ao modo diretamente excitado, (1, 7)c, enquanto a Figura 5.37 (b) refere-se ao modo (1, 7)s. Os modos $A_{111}(\tau)$, $B_{111}(\tau)$ e todos os demais que representam a interação modal são nulos, pois, para a casca perfeita, não há transferência de energia dos modos (1, 7) para os modos (1, 6).

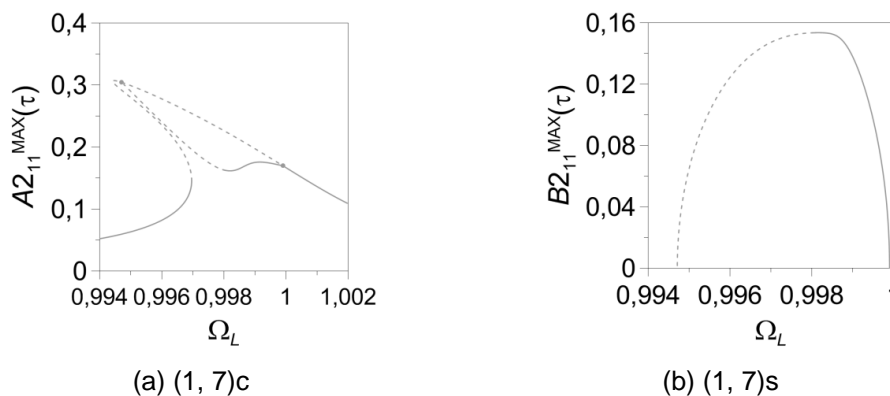


Figura 5.37 – Curvas de ressonância para a casca perfeita com $P_{L1} = 0$ e $P_{L2} \neq 0$. Onde: — Trecho estável, --- Trecho instável.

A Figura 5.38 mostra a comparação dos resultados obtidos para as curvas de ressonância da casca perfeita considerando-se a excitação P_{L1} , cuja curva está representada em cinza, e considerando-se a excitação P_{L2} , cuja curva está representada em preto. Observa-se que os resultados não são coincidentes. Embora as curvas de ressonância, Figura 5.38 (a), sejam coincidentes, são encontrados pontos de bifurcação diferentes. A curva obtida excitando-se P_{L2} apresenta um trecho instável maior. A maior diferença

encontra-se na magnitude do modo (1, 7)s e na faixa de frequências onde este é excitado, sendo as amplitudes do modo (1, 6)s menores que as amplitudes de (1, 7)s. Isto mostra que, apesar dos dois modos terem a mesma frequência natural, o modo (1, 7) tem maior energia associada a sua vibração que o modo (1, 6). Isto se deve ao maior número de ondas circunferenciais do modo (1, 7).

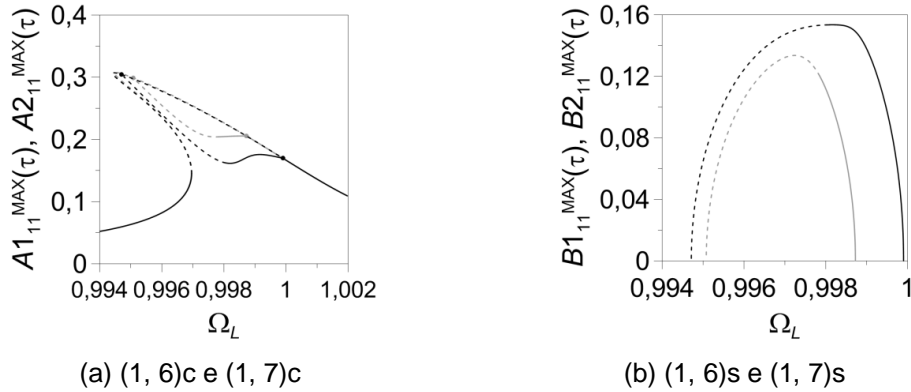


Figura 5.38 – Comparação das curvas de ressonância para a casca perfeita para $P_{L1} \neq 0$ e $P_{L2} = 0$ (em cinza) e $P_{L1} = 0$ e $P_{L2} \neq 0$ (em preto).

5.2.1.

Casca cilíndrica com imperfeição na forma do modo (1, 6)c

Assume-se que a casca cilíndrica analisada esteja sujeita a uma imperfeição na forma do modo (1, 6)c, ou seja:

$$W_i = W_{11}^i \cos(n\theta) \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \quad (5.11)$$

A Figura 5.39 ilustra as curvas de ressonância dos modos (1, 7)c e (1, 7)s para este caso, considerando-se $P_{L2} = 600 \text{ N/m}^2$, enquanto a Figura 5.40 apresenta isoladamente alguns resultados apresentados na Figura 5.39 com o intuito de facilitar a análise. As magnitudes da imperfeição são aquelas dadas na Tabela 5.1. A Figura 5.41 exhibe os resultados das curvas de ressonância dos modos (1, 7)c e (1, 7)s adotando os valores das imperfeições mostradas na Tabela 5.3. Todos os modos que compõem a interação são excitados. As curvas de ressonância dos modos (1, 6)c e (1, 6)s são mostradas na Figura 5.42. Comparando-se estes resultados com aqueles das Figuras 5.4 a 5.8, observa-se a semelhança com os resultados obtidos quando o modo (1, 6)c é excitado e a imperfeição tem a forma do modo (1, 7)c. A amplitude máxima do modo $A1_{11}(\tau)$ é aproximadamente a metade de $A2_{11}(\tau)$, enquanto as amplitudes $B1_{11}(\tau)$ e $B2_{11}(\tau)$ têm aproximadamente a mesma ordem de grandeza e são pouco afetadas pela

magnitude da imperfeição. Comparando-se as Figuras 5.40 e 5.42, nota-se que os pontos de bifurcação, que são praticamente coincidentes para $W_{11}/h = 0,030$, se afastam à medida que a magnitude da imperfeição aumenta.

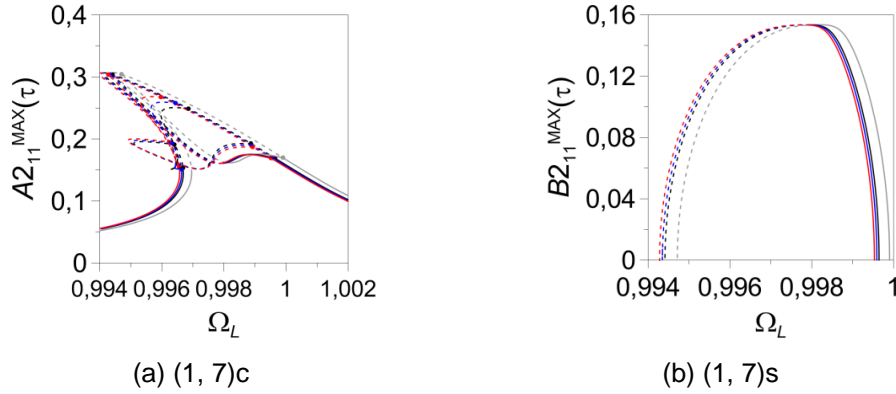


Figura 5.39 – Curvas de ressonância para a casca imperfeita com ressonância 1:1:1:1 sendo $P_{L1} = 0$ e $P_{L2} \neq 0$ com $W_{11}/h \neq 0$.

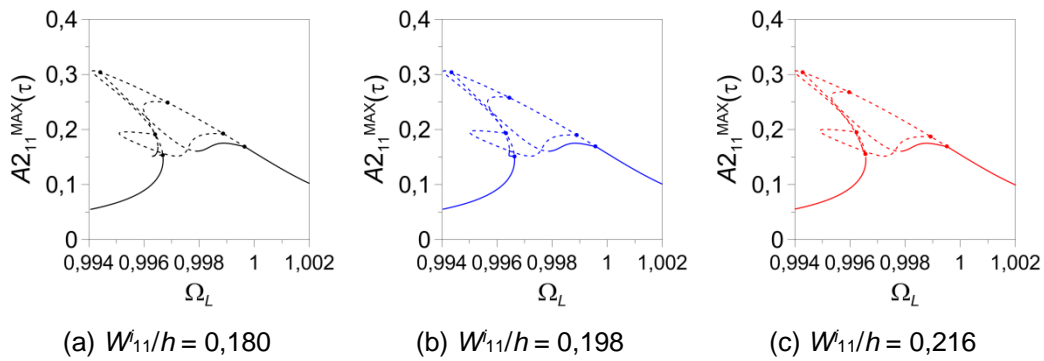


Figura 5.40 – Curvas de ressonância do modo (1, 7)c da casca imperfeita com $P_{L1} = 0$ e $P_{L2} \neq 0$. (a) $W_{11}/h = 0,180$, (b) $W_{11}/h = 0,198$ e (c) $W_{11}/h = 0,216$.

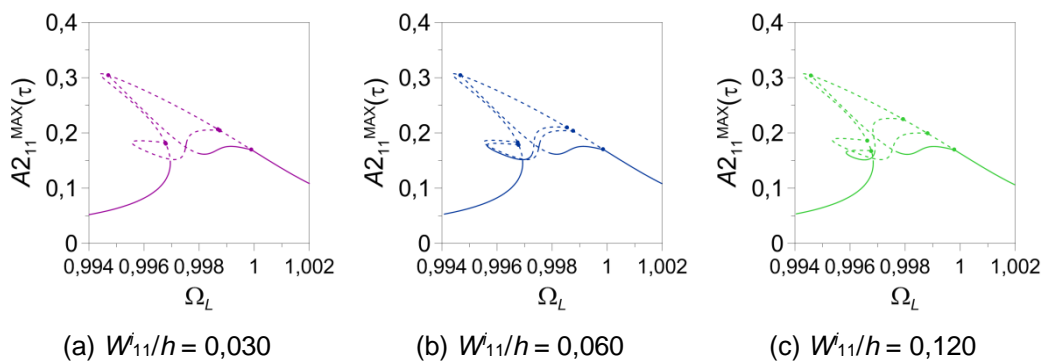


Figura 5.41 – Curvas de ressonância do modo (1, 7)c da casca imperfeita com $P_{L1} = 0$ e $P_{L2} \neq 0$. (a) $W_{11}/h = 0,030$, (b) $W_{11}/h = 0,060$ e (c) $W_{11}/h = 0,120$.

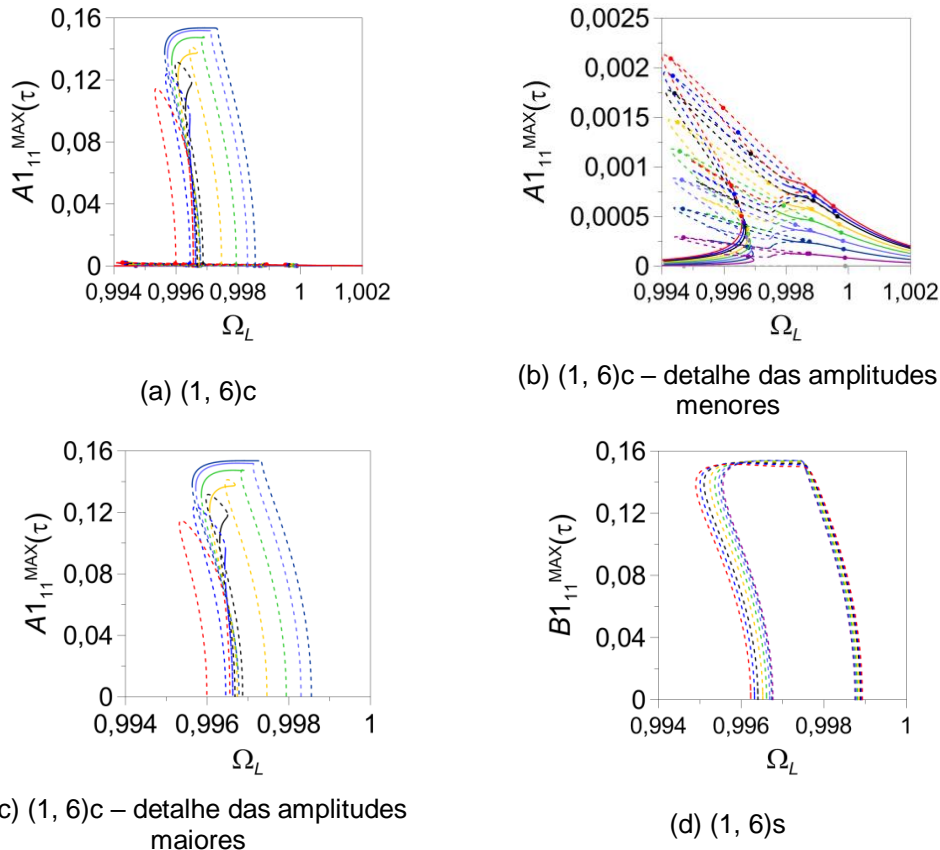


Figura 5.42 – Curvas de ressonância para a casca imperfeita com $P_{L1} = 0$ e $P_{L2} \neq 0$ e $W_{11}/h \neq 0$.

5.2.2.

Casca cilíndrica com imperfeição na forma do modo (1, 6)s

Assume-se agora que a casca cilíndrica analisada tenha uma imperfeição na forma:

$$W_i = W_{11}^i \sin(n\theta) \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \quad (5.12)$$

Os valores de imperfeição adotados são mostrados na Tabela 5.1. A Figura 5.43 ilustra as curvas de ressonância para valores selecionados da magnitude da imperfeição para o modo diretamente excitado, (1, 7)c, e para o modo (1, 7)s. A Figura 5.44 ilustra as curvas de ressonância para os modos (1, 6)c e (1, 6)s. Novamente todos os modos são excitados, sendo os resultados similares ao caso anterior, onde a imperfeição tem a forma do modo (1, 6)c.

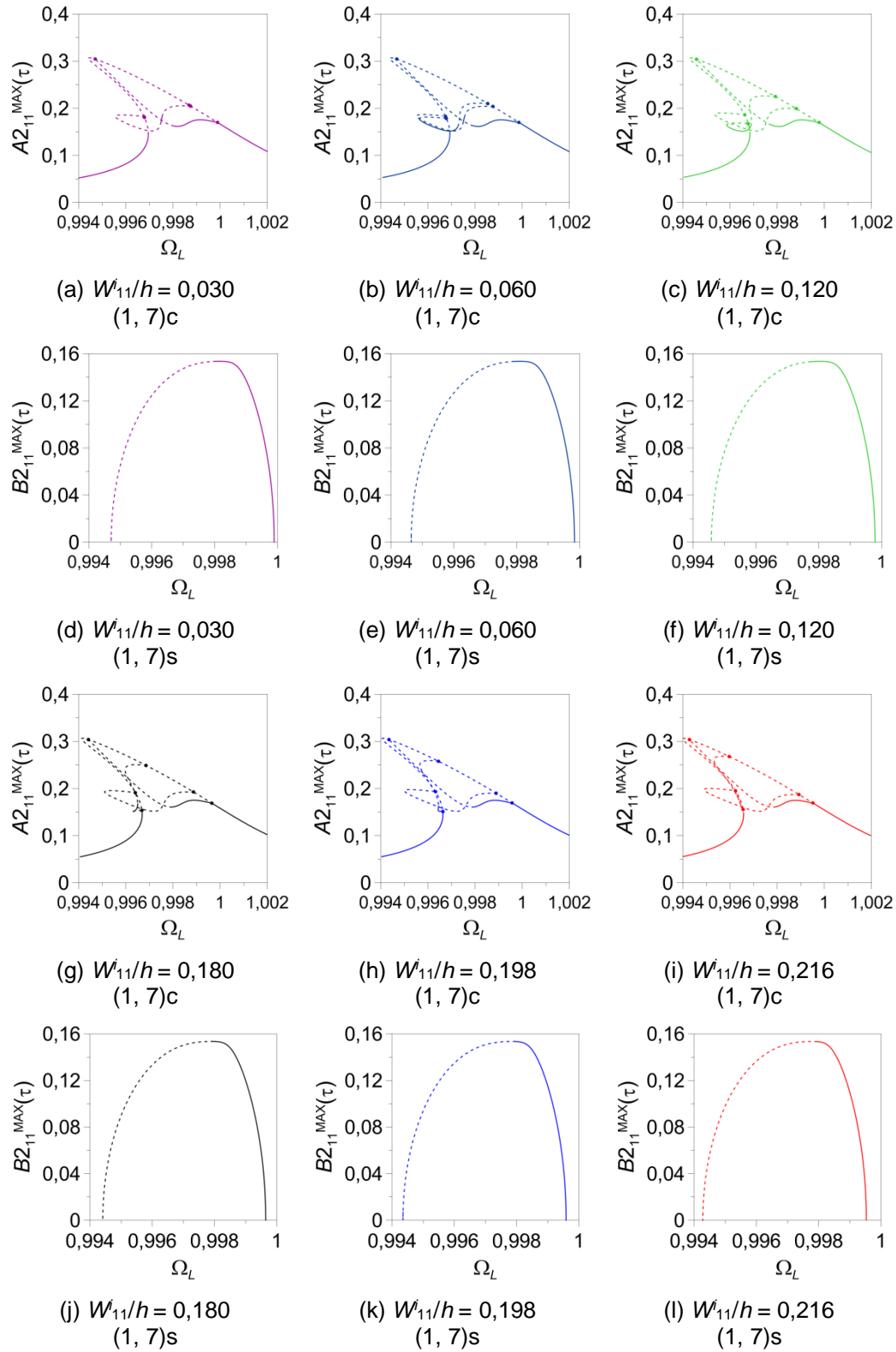


Figura 5.43 – Curvas de ressonância da casca com imperfeição na forma do modo (1, 6)s com (a) e (d) $W_{11}/h = 0,030$, (b) e (e) $W_{11}/h = 0,060$, (c) e (f) $W_{11}/h = 0,120$, (g) e (j) $W_{11}/h = 0,180$, (h) e (k) $W_{11}/h = 0,198$ e (i) e (l) $W_{11}/h = 0,216$.

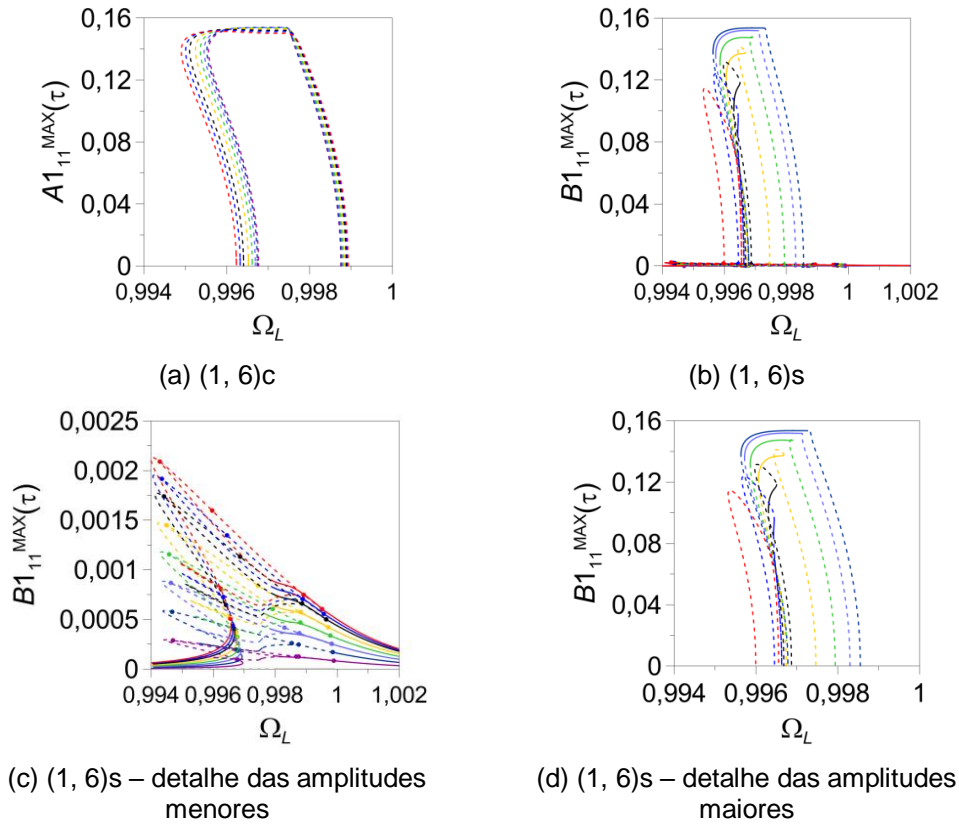


Figura 5.44 – Curvas de ressonância para a casca com imperfeição na forma do modo (1, 6)s com $W_{11}/h \neq 0$.

5.2.3. Casca cilíndrica com imperfeição na forma dos modos (1, 6)c e (1, 6)s

Assume-se agora uma imperfeição na forma da soma dos modos (1, 6)c e (1, 6)s, ou seja:

$$W_i = W_{11}^i \cos(n\theta) \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) + W_{11}^{i'} \sin(n\theta) \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \quad (5.13)$$

A Figura 5.45 ilustra as curvas de ressonância da casca imperfeita para os modos (1, 7)c e (1, 7)s. Os modos (1, 6)c e (1, 6) são também ativados, gerando as curvas de ressonância mostradas na Figura 5.46. Os resultados são qualitativamente semelhantes a aqueles apresentados nas Figuras 5.23 a 5.25, quando se excita o modo (1, 6)c e a imperfeição tem a forma da soma dos modos (1, 7)c e (1, 7)s.

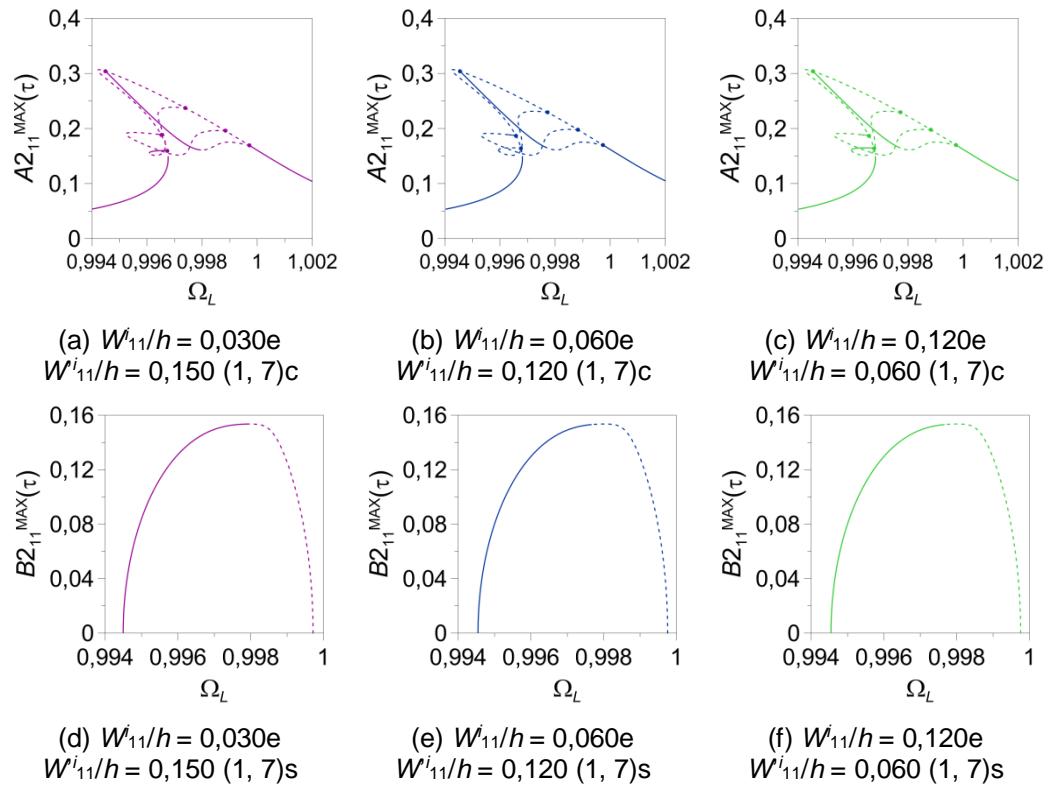


Figura 5.45 – Curvas de ressonância da casca com imperfeição na forma da soma dos modos (1, 6)c e (1, 6)s.

Foram apresentados neste capítulo resultados da análise paramétrica da influência da forma e magnitude da imperfeição geométrica inicial na resposta dinâmica não linear de cascas cilíndricas com ressonância interna 1:1:1:1. Conclui-se que para todos os casos onde o carregamento é aplicado na forma do modo (m, n) e a imperfeição assume a forma de alguma componente dos modos (m, N) , todos os modos são ativados. De forma análoga, se um dos modos (m, N) é excitado e a imperfeição tem componentes em um dos modos os modos (m, n) , todos os modos são excitados, mesmo quando se consideram imperfeições com magnitude bem menor que a espessura da casca. Como em estruturas imperfeitas reais estas componentes devem fazer parte da expansão modal, espera-se que a ressonância interna 1:1:1:1 seja sempre observada. Lembrando-se que as imperfeições introduzem pequenas variações entre as quatro frequências, espera-se que a ressonância interna 1:1:1:1 seja observada para geometrias próximas a aqui analisada, onde as frequências dos modos (m, n) e (m, N) sejam relativamente próximas. Por fim cabe mencionar, como apresentado no capítulo 3, que existem infinitas geometrias (valores de R/h e L/R) onde a igualdade das frequências dos modos (m, n) e (m, N) ocorre, em

particular o caso onde $(m, N) = (m, n + 1)$ e este modo corresponde à frequência mínima, onde os fenômenos de ressonância interna são mais importantes.

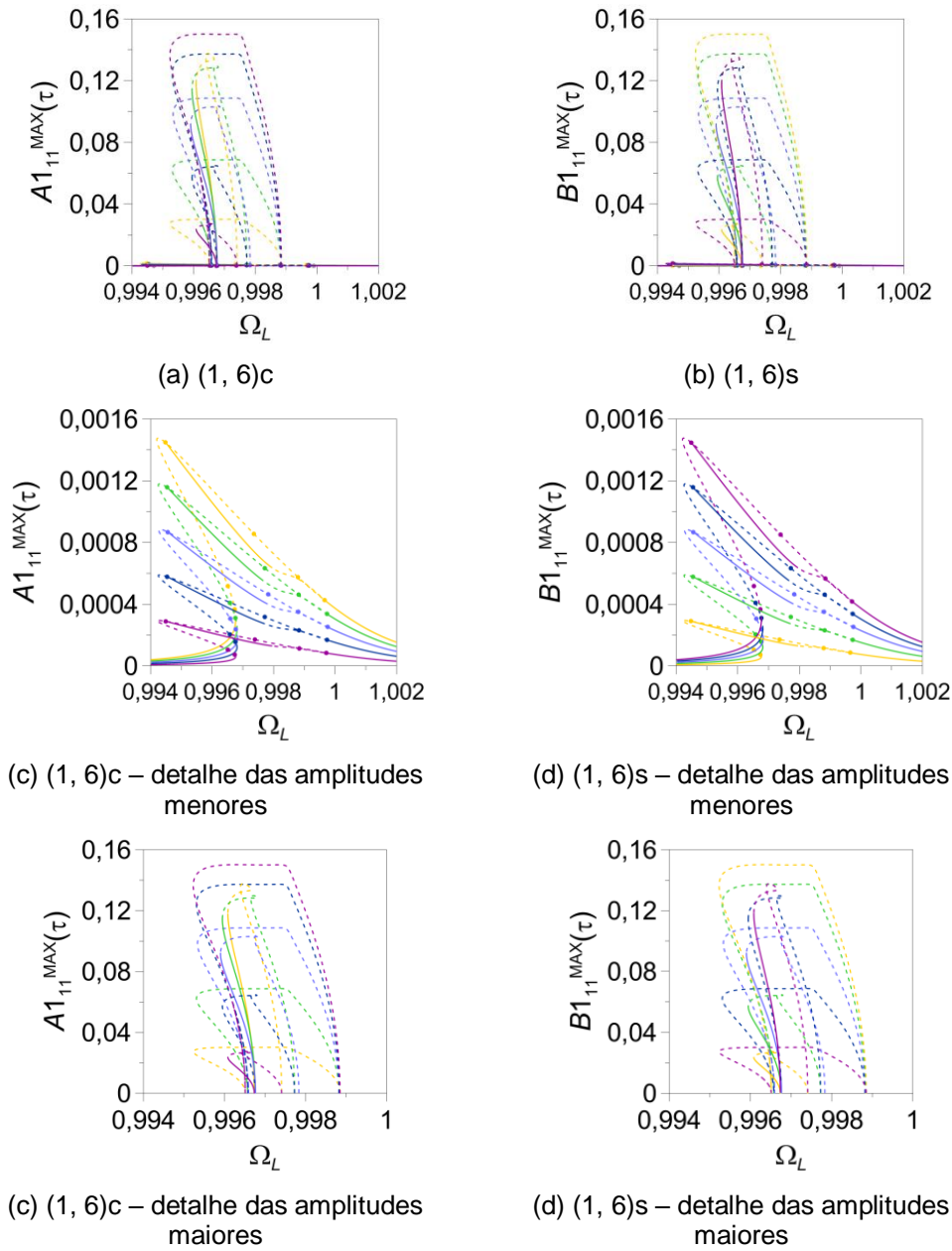


Figura 5.46 – Curvas de ressonância para a casca imperfeita com ressonância 1:1:1 sendo $P_{L1} = 0$ e $P_{L2} \neq 0$ com $W_{11}^i/h \neq 0$.

A Tabela 5.6 apresenta o resumo de quais modos foram indiretamente ativados em cada um dos casos de imperfeição analisados para uma pressão lateral excitando diretamente o modo (1, 6)c. É importante destacar que o modo (1, 6)c é sempre excitado.

Tabela 5.6 – Modos ativados em cada um dos casos de imperfeição com ressonância interna 1:1:1:1. Pressão lateral excitando diretamente o modo (1, 6)c.

Imperfeição	Modo (1, 6)s	Modo (1, 7)c	Modo (1, 7)s
Perfeita	Ativa	Não ativa	Não ativa
(1, 6)c	Ativa parcialmente	Não ativa	Não ativa
(1, 7)c	Ativa	Ativa	Ativa
(2, 0)+	Ativa	Não ativa	Não ativa
(2, 0)-	Ativa	Não ativa	Não ativa
(1, 6)s	Ativa	Não ativa	Não ativa
(1, 7)s	Ativa	Ativa	Ativa
(1, 6)c + (1, 6)s	Ativa	Não ativa	Não ativa
(1, 7)c + (1, 7)s	Ativa	Ativa	Ativa
Aleatórias	Ativa	Ativa	Ativa

Já a Tabela 5.7 apresenta o resumo de quais modos foram ativados em cada um dos casos de imperfeição analisados neste capítulo para uma pressão lateral excitando diretamente o modo (1, 7)c. Nestes casos o modo (1, 7)c é sempre excitado.

Tabela 5.7 – Modos ativados em cada um dos casos de imperfeição com interação 1:1:1:1. Pressão lateral excitando diretamente o modo (1, 7)c.

Imperfeição	Modo (1, 7)s	Modo (1, 6)c	Modo (1, 6)s
Perfeita	Ativa	Não ativa	Não ativa
(1, 6)c	Ativa	Ativa	Ativa
(1, 6)s	Ativa	Ativa	Ativa
(1, 6)c + (1, 6)s	Ativa	Ativa	Ativa

No próximo capítulo analisa-se a influência paramétrica da imperfeição na casca cilíndrica perfeita e sujeita a interação modal em m , com ressonância interna 1:1:2:2.

6

Influência da imperfeição geométrica inicial na resposta dinâmica não linear de cascas cilíndricas com ressonância 1:1:2:2

Neste capítulo estuda-se as vibrações não lineares de uma casca cilíndrica imperfeita e sujeita a interação modal 1:1:2:2. Este tipo de interação é importante em virtude do acoplamento modal dos modos axiais da casca e da forte não linearidade quadrática de cascas cilíndricas. Interações 1:2 ocorrem quando um modo de vibração da forma $(M, n) = (m + 1, n)$ tem o dobro da frequência de um dado modo (m, n) .

Para analisar a influência da imperfeição no comportamento não linear da casca é utilizado neste capítulo a expansão modal para os deslocamentos laterais nomeada como Modelo 5, que apresenta 20 graus de liberdade e consiste na adição dos Modelos 1 e 4 aos modos que surgem devido à interação modal entre os modos de vibração $(m, n) = (1, 6)$ e $(M, n) = (2, 6)$ (graus de liberdade destacados em negrito):

$$A_{111}(\tau) + B_{111}(\tau) + A_{211}(\tau) + B_{211}(\tau) + A_{502}(\tau) + A_{602}(\tau) + A_{522}(\tau) + A_{622}(\tau) + A_{113}(\tau) + B_{113}(\tau) + A_{213}(\tau) + B_{213}(\tau) + A_{131}(\tau) + B_{131}(\tau) + A_{231}(\tau) + B_{231}(\tau) + \mathbf{A_{411}(\tau)} + \mathbf{B_{411}(\tau)} + \mathbf{A_{421}(\tau)} + \mathbf{B_{421}(\tau)}.$$

Nessa expansão alguns dos modos provenientes do método da perturbação e que descrevem a interação, apresentados na equação (3.13), são nulos, pois contêm termos com a parcela $(M - 2m)$.

O carregamento é uma pressão lateral distribuída ao longo da superfície da casca cilíndrica composta de dois termos. Um com magnitude P_{L1} , que excita diretamente o modo de vibração (m, n) e outro com magnitude P_{L2} , que excita diretamente o modo de (M, n) , ou seja:

$$p(x, \theta, t) = \left[P_{L1} \cos(n\theta) \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) + P_{L2} \cos(n\theta) \sin\left(\frac{M\pi x}{L}\right) \right] \cos(\omega_L t) \quad (6.1)$$

Os resultados apresentados neste capítulo são obtidos para uma casca cilíndrica simplesmente apoiada, composta de material homogêneo, elástico e isotrópico, com $E = 210$ GPa, $\nu = 0,3$ e $\rho = 7850$ kg/m³. As dimensões da casca cilíndrica são $R = 0,1$ m, $L = 0,07405$ m e $h = 0,002$ m. Para essa geometria, a menor

frequência natural ocorre para a combinação modal $(m, n) = (1, 6)$ e a combinação modal $(M, n) = (2, 6)$ apresenta o dobro da frequência natural do modo $(m, n) = (1, 6)$. O coeficiente de amortecimento viscoso, η_1 , é 0,001 e o coeficiente de amortecimento do material, η_2 , é nulo.

Para obtenção das curvas de ressonância e bifurcações do sistema, integra-se os sistemas de equações não lineares de movimento utilizando-se o software AUTO 97 (Doedel *et al.*, 1998), que emprega o método da continuação. Inicialmente, como referência, considera-se a casca cilíndrica sem imperfeições.

A Figura 6.1 ilustra as curvas de ressonância da casca cilíndrica considerando-se $P_{L1} = 1000 \text{ N/m}^2$. As Figuras 6.1 (a) e (b) são relativas aos modos $(1, 6)c$ e $(1, 6)s$, respectivamente. Nessas figuras, as curvas contínuas representam os trechos estáveis da curva de ressonância enquanto as curvas tracejadas representam os trechos instáveis. Os símbolos \bullet representam os pontos de bifurcação encontrados ao longo das curvas de ressonância. Verifica-se que as curvas de ressonância apresentam um comportamento não linear do tipo *hardening* e o trecho estável da solução não trivial do tipo *softening*, em concordância com a relação frequência-amplitude obtida para esta geometria e modo de vibração. As amplitudes dos modos aos modos $(2, 6)c$ e $(2, 6)s$ são praticamente nulas na região fundamental de ressonância em torno de $\Omega_L = 1$. O mesmo ocorre para todos os modos do Modelo 5 na região de ressonância em torno de $\Omega_L = 2$.

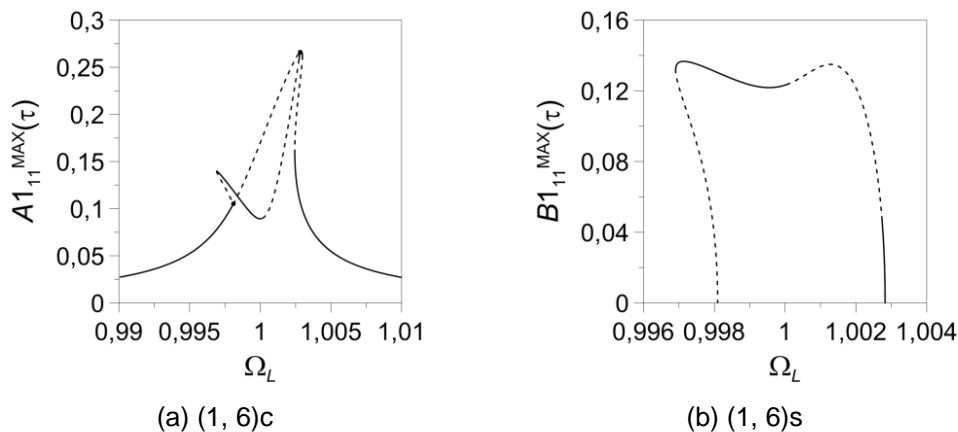


Figura 6.1 – Curvas de ressonância para a casca perfeita com ressonância 1:1:2:2 sendo $P_{L1} \neq 0$ e $P_{L2} = 0$. Onde: — Trecho estável, --- Trecho instável.





6.1. Casca cilíndrica com imperfeição na forma do modo (1, 6)c

Considere que a casca cilíndrica apresenta uma imperfeição geométrica inicial na forma do modo principal de vibração, (1, 6)c:

W_i = W_{11}^i \cos(n\theta) \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \tag{6.2}

Com base na geometria adotada foram escolhidos os valores de imperfeição mostrados na Tabela 6.1, sendo estes valores o resultado exato da relação (4.4), $W_{11}^i/h = 0,107$, um valor 10% maior que o resultado dessa relação, $W_{11}^i/h = 0,118$, e um valor 20% maior que o resultado dessa relação, $W_{11}^i/h = 0,128$. Cabe observar que estas magnitudes são uma pequena fração da espessura da casca.

Tabela 6.1 – Resumo das cores utilizadas nas curvas de ressonância para os casos com ressonância 1:1:2:2.

Modelo	Curva de ressonância	W_{11}^i/h
Modelo 5		0,000
		0,107
		0,118
		0,128

A Figura 6.2 ilustra as curvas de ressonância da casca cilíndrica, obtidas com o Modelo 5, considerando-se $P_{L1} = 1000 \text{ N/m}^2$.

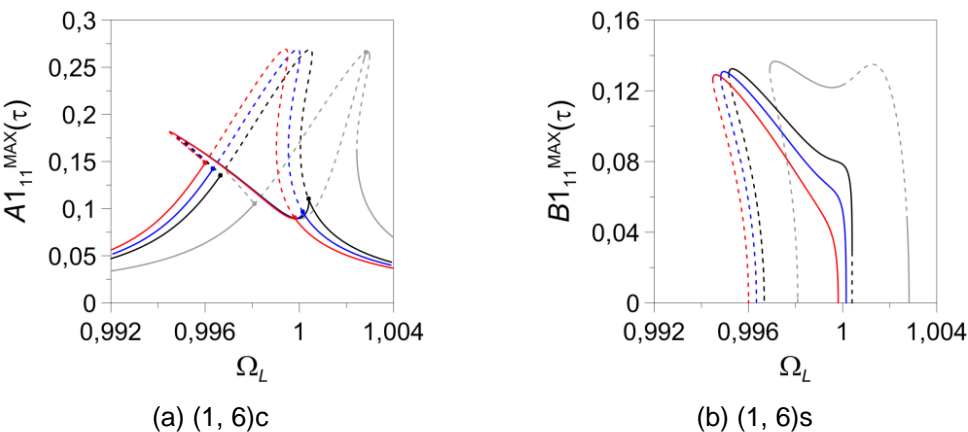


Figura 6.2 – Curvas de ressonância para a casca imperfeita com ressonância 1:1:2:2 sendo $P_{L1} \neq 0$, $P_{L2} = 0$ e $m = 1$ com $W_{11}^i/h \neq 0$.

Observa-se nesta figura que para esta imperfeição o carregamento lateral excita apenas os modos (1, 6)c e (1, 6)s. Entretanto, a presença das

imperfeições iniciais altera ligeiramente a estabilidade da resposta do modo (1, 6)c. Uma maior influência é observada na estabilidade da resposta do modo (1, 6)s, com um decréscimo das regiões instáveis. Verifica-se ainda um deslocamento das curvas de ressonância para a esquerda, em virtude da diminuição do valor da frequência fundamental de vibração. A participação dos modos (2, 6)c e (2, 6)s é praticamente nula, sendo as respostas para os modos (1, 6)c e (1, 6)s similares às encontradas utilizando-se o modelo desacoplado.

As frequências naturais podem ser encontradas através da solução de um problema de autovalor e autovetor do sistema imperfeito como descrito no capítulo 4 na equação (4.6). Como o modelo utilizado na análise apresenta 20 graus de liberdade, as matrizes **M** e **K** apresentam dimensão 20x20 e os vetores **$\ddot{\mathbf{W}}$** e **w** apresentam dimensão 20x1. Pode-se então calcular as frequências naturais do sistema em função dos parâmetros analisados.

Tabela 6.2 – Variação da frequência com o nível de imperfeição aplicada na forma do modo fundamental de vibração (1, 6)c para os casos com ressonância 1:1:2:2.

W_{11}/h	ω (rad/s) (1, 6)c	ω (rad/s) (1, 6)s	ω (rad/s) (2, 6)c	ω (rad/s) (2, 6)s
0,000	24145,02463	24145,02463	48290,78406	48289,31445
0,107	24196,34389	24155,29764	48341,46373	48300,32642
0,118	24207,41668	24157,52468	48352,51645	48302,60253
0,128	24218,43263	24159,72286	48363,58612	48304,77819

Com o objetivo de facilitar essa análise, os vetores de deslocamentos e acelerações foram reduzidos à dimensão 4x1, contendo apenas os modos considerados principais (1, 6)c, (1, 6)s, (2, 6)c e (2, 6)s, e as matrizes **M** e **K** foram reduzidas à dimensão 4x4 apresentando também apenas os coeficientes relativos a esses modos. Dessa forma os resultados apresentados na Tabela 6.2 são uma aproximação e por isso vê-se que para casca perfeita as frequências relativas aos modos (2, 6)c e (2, 6)s não são perfeitamente coincidentes. Pode-se observar, no entanto, que para todos os casos, as duas frequências menores são levemente diferentes, bem como as duas maiores. Também não se tem mais exatamente a relação 1:2, resultado da quebra de simetria que ocorre devido à presença das imperfeições.

6.2.

Casca cilíndrica com imperfeição na forma do modo (2, 6)c

Analisa-se a seguir a resposta da casca cilíndrica com uma imperfeição na forma do segundo modo linear que compõe a interação, modo (2, 6)c, ou seja:

$$W_i = W_{11}^i \cos(n\theta) \sin\left(\frac{M\pi x}{L}\right) \quad (6.3)$$

Observa-se, a partir da análise da Figura 6.3, que a presença das imperfeições iniciais na forma do modo (M, n) altera significativamente a estabilidade do sistema.

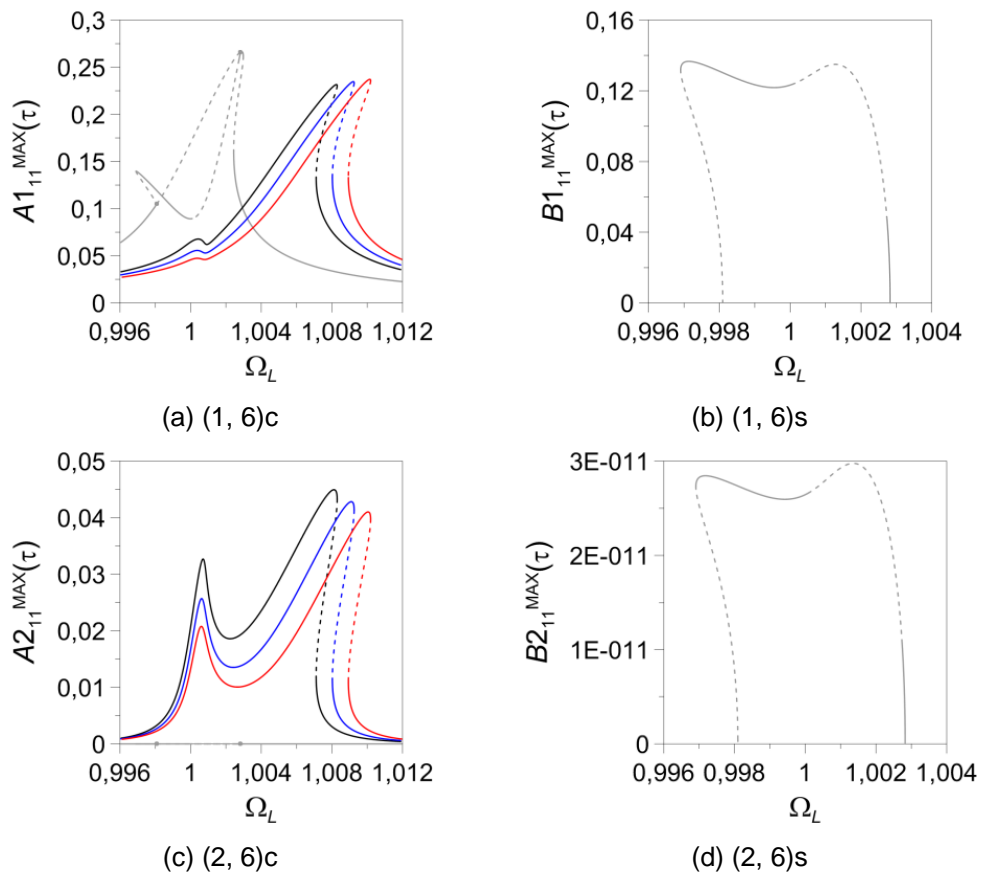


Figura 6.3 – Curvas de ressonância para a casca imperfeita com ressonância 1:1:2:2 sendo $P_{L1} \neq 0$, $P_{L2} = 0$ e $M = 2$ com $W_{11}/h \neq 0$.

A presença da imperfeição geométrica dada pela equação (6.3) é capaz de excitar os modos da interação modal. Observa-se um deslocamento das curvas de ressonância para a direita, devido a um aumento do valor da frequência fundamental de vibração. É possível observar que o comportamento não linear da casca cilíndrica é do tipo *hardening*, que as regiões instáveis decrescem e o carregamento excita os modos (1, 6)c, (1, 6)s e (2, 6)c, mas a participação do

modo (2, 6)s é praticamente nula. Percebe-se ainda o aparecimento de um segundo pico de ressonância na resposta do modo (2, 6)c que tem um comportamento praticamente linear, o que causa uma pequena perturbação na resposta do modo (1, 6)c. Finalmente, observa-se que as bifurcações e o caminho secundário presentes na resposta do modo (1, 6)c da casca perfeita desaparecem.






A Tabela 6.3 apresenta as frequências naturais da casca cilíndrica com imperfeição na forma do modo (2, 6)c obtidas através da equação (4.6) a partir das quais é possível notar que a quebra de simetria que ocorre também para esse caso.

Tabela 6.3 – Variação da frequência com o nível de imperfeição aplicada na forma do modo fundamental de vibração (2, 6)c para os casos com ressonância 1:1:2:2.

W_{11}/h	ω_0 (rad/s) (1, 6)c	ω_0 (rad/s) (1, 6)s	ω_0 (rad/s) (2, 6)c	ω_0 (rad/s) (2, 6)s
0,000	24145,02463	24145,02463	48290,78406	48289,31445
0,107	24247,62505	24165,63758	48392,72911	48372,13740
0,118	24269,74802	24170,09106	48414,86082	48389,90118
0,128	24291,71754	24174,51615	48436,89190	48407,50731

Para entender melhor como estas modificações ocorrem, a Figura 6.4 exhibe os resultados das curvas de ressonância da casca cilíndrica adotando os valores das amplitudes de imperfeições mostradas na Tabela 6.4, com magnitude menores que $W_{11}/h = 0,107$, obtido da relação (4.4).

Tabela 6.4 – Resumo das cores utilizadas nas curvas de ressonância com W_{11}/h entre 0 e 0,107 para os casos com ressonância 1:1:2:2.

Modelo	Curva de ressonância	W_{11}/h
Modelo 5		0,018
		0,036
		0,054
		0,072
		0,090

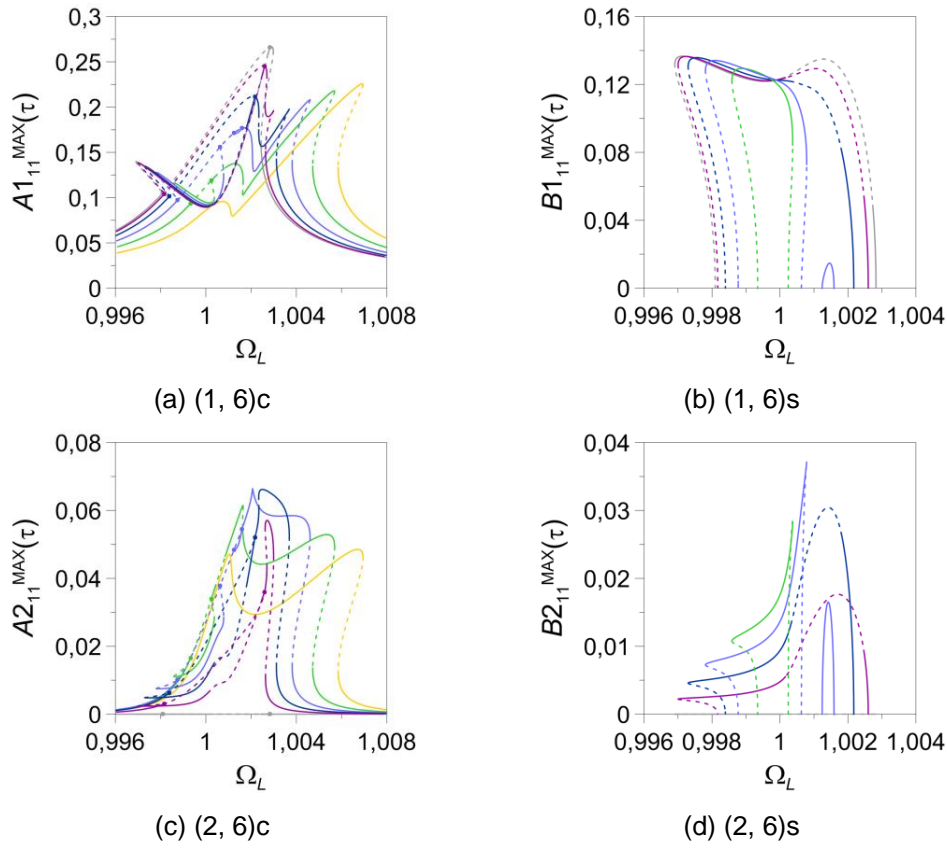


Figura 6.4 – Curvas de ressonância da casca imperfeita com $P_{L1} \neq 0$, $P_{L2} = 0$ e W_{11}/h entre 0 e 0,107.

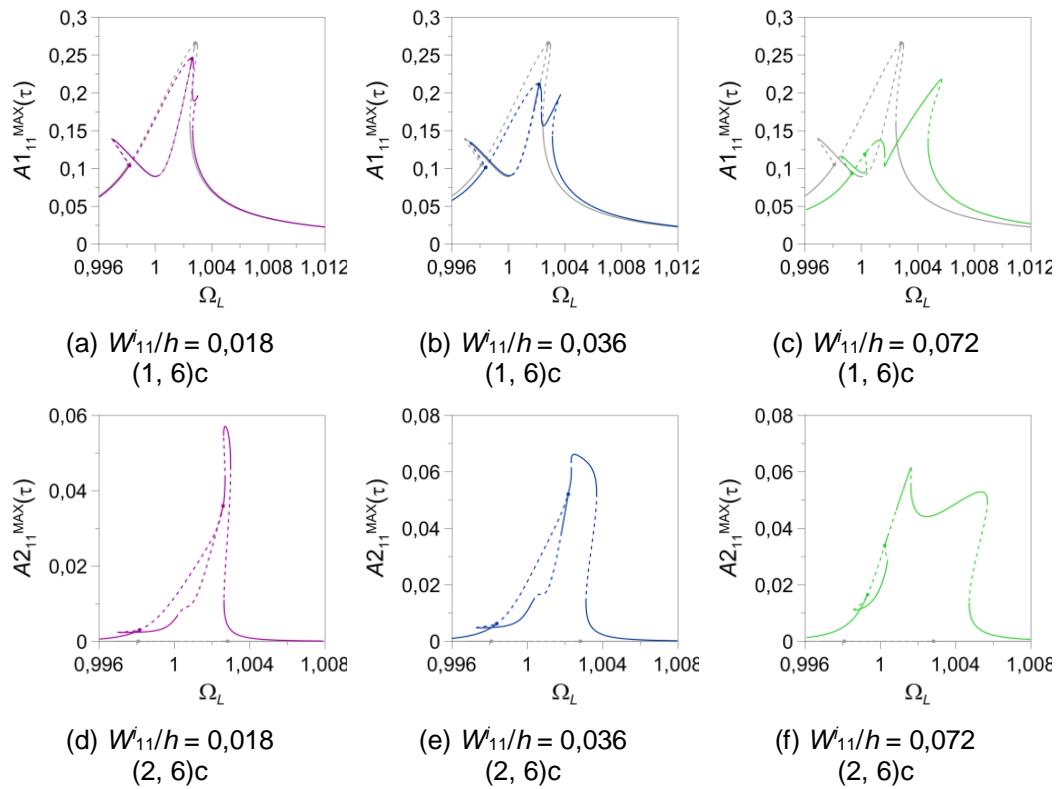


Figura 6.5 – Curvas de ressonância para a casca imperfeita com ressonância 1:1:2:2 sendo $P_{L1} \neq 0$, $P_{L2} = 0$ e $M = 2$ com $W_{11}/h = 0,018$, $W_{11}/h = 0,036$ e $W_{11}/h = 0,072$.

Detalhes das respostas dos modos (1, 6)c e (2, 6)c são mostrados na Figura 6.5. É possível observar através da análise das Figuras 6.4 e 6.5 a mudança gradativa da resposta do sistema. Verifica-se na Figura 6.4 (a) que o pico de ressonância do sistema imperfeito vai decrescendo seguindo a relação frequência-amplitude do sistema perfeito e, ao mesmo tempo, diminui o ramo secundário de soluções, como mostra a Figura 6.5, que desaparece para maiores níveis de imperfeição. Ao mesmo tempo surge um novo pico de ressonância à direita cuja amplitude cresce com a magnitude da imperfeição e decresce a participação dos modos (1, 6)s e (2, 6)s. A resposta do modo (2, 6)c também apresenta duas bifurcações conectadas por um ramo secundário de soluções que decresce com o nível da imperfeição.

6.3.

Casca cilíndrica com imperfeição na forma do modo axissimétrico de vibração associado ao modo (1, 6)

Assume-se, nesta seção, que a casca cilíndrica apresenta uma imperfeição geométrica na forma do modo axissimétrico de vibração associado ao modo (1, 6):

$$W_i = W_{02}^i \left[\frac{3}{4} - \cos\left(\frac{2m\pi x}{L}\right) + \frac{1}{4} \cos\left(\frac{4m\pi x}{L}\right) \right] \quad (6.4)$$

Como no caso do modo axissimétrico o sinal da amplitude da imperfeição altera os resultados, foram analisadas tanto valores positivos quanto valores negativos da imperfeição geométrica inicial.

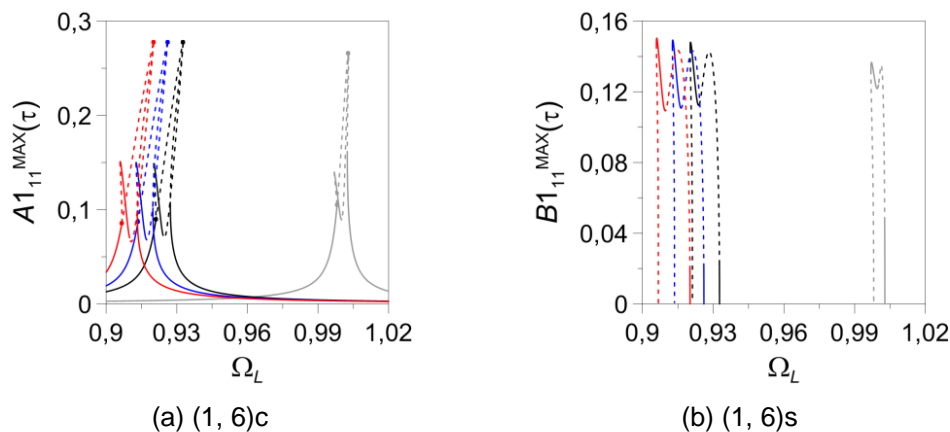


Figura 6.6 – Curvas de ressonância para a casca imperfeita com ressonância 1:1:2:2 sendo $P_{L1} \neq 0$, $P_{L2} = 0$ e $m = 1$ com $W_{02}/h \neq 0$ (valores positivos).

Os valores das amplitudes da imperfeição geométrica adotadas são os mesmos apresentados na Tabela 6.1, mostrados na Figura 6.6. A Figura 6.7 exibe os resultados das curvas de ressonância adotando os valores das imperfeições mostradas na Tabela 6.4. Observa-se a partir da análise das Figuras 6.6 e 6.7 que o carregamento P_{L1} excita apenas os modos (1, 6)c e (1, 6)s. Observa-se também um deslocamento das curvas de ressonância para a esquerda, em consequência da diminuição do valor da frequência fundamental de vibração. Observa-se o mesmo comportamento não linear em todos os casos, com a mesma sequência de bifurcação. A amplitude máxima não sofre variação, com exceção do caso onde $W_{02}/h = 0,036$ onde se observa a diminuição da amplitude máxima de vibração, $A_{11}^{MAX}(\tau)$.

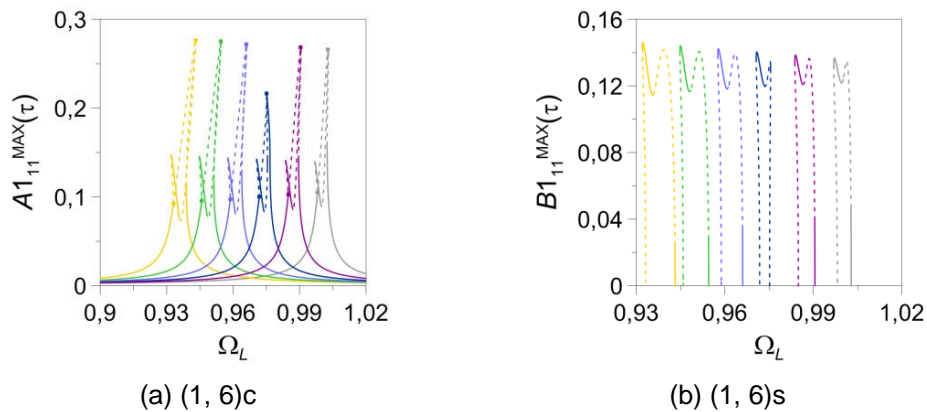


Figura 6.7 – Curvas de ressonância para a casca imperfeita com ressonância 1:1:2:2 sendo $P_{L1} \neq 0$, $P_{L2} = 0$ e $m = 1$ com $W_{02}/h \neq 0$ (valores positivos entre 0 e 0,107).

Adota-se, agora, os equivalentes negativos dos valores empregados na análise anterior e apresentados na Tabela 6.1. A Figura 6.8 ilustra as curvas de ressonância para os níveis de imperfeição apresentados na Tabela 6.1.

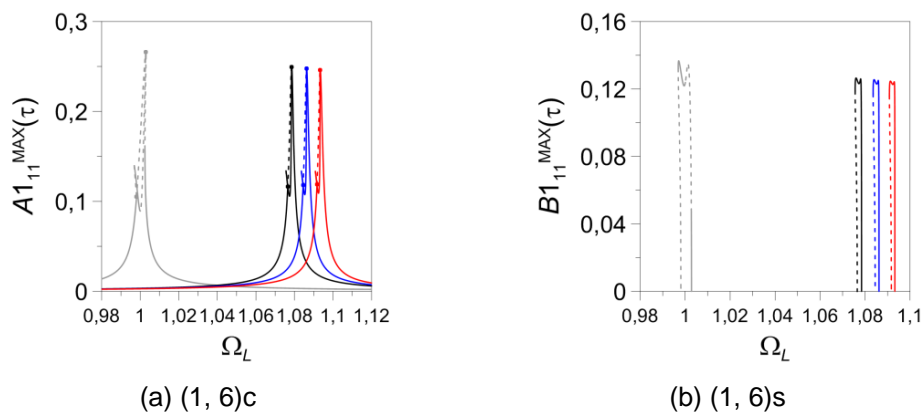


Figura 6.8 – Curvas de ressonância para a casca imperfeita com ressonância 1:1:2:2 sendo $P_{L1} \neq 0$, $P_{L2} = 0$ e $m = 1$ com $W_{02}/h \neq 0$ (valores negativos).

Chega-se às mesmas conclusões do caso anterior, exceto que neste caso há um aumento na frequência fundamental de vibração. Observa-se grande similaridade com os resultados do capítulo 5, onde a ressonância 1:1:1:1 é analisada.

A Tabela 6.5 apresenta as frequências naturais da casca cilíndrica com imperfeição na forma do modo axissimétrico de vibração associado ao modo (1, 6) a partir das quais é possível notar que a quebra de simetria que ocorre no caso de imperfeições axissimétricas é menor que a observada nos casos das seções anteriores.

Tabela 6.5 – Variação da frequência com o nível de imperfeição aplicada na forma do modo axissimétrico de vibração associado ao modo (1, 6) para os casos com ressonância 1:1:2:2.

W_{02}/h	ω_0 (rad/s) (1, 6)c	ω_0 (rad/s) (1, 6)s	ω_0 (rad/s) (2, 6)c	ω_0 (rad/s) (2, 6)s
-0,128	26567,24245	26565,95926	47173,16153	47171,36408
-0,118	26367,36051	26367,36051	47258,55366	47258,15946
-0,107	26150,41063	26149,60707	47354,18883	47352,42275
0,000	24145,02463	24145,02463	48290,78406	48289,31445
0,107	22375,01519	22374,42283	49249,67491	49249,67491
0,118	22208,75549	22207,89314	49350,54215	49348,60256
0,128	22059,81022	22059,81022	49441,30839	49439,86129

6.4. Casca cilíndrica com imperfeição na forma do modo axissimétrico de vibração associado ao modo (2, 6)

Considera-se agora uma imperfeição geométrica inicial na forma:

$$W_i = W_{02}^i \left[\frac{3}{4} - \cos\left(\frac{2M\pi x}{L}\right) + \frac{1}{4} \cos\left(\frac{4M\pi x}{L}\right) \right] \quad (6.5)$$

Como no caso anterior, consideram-se valores positivos e negativos da amplitude da imperfeição.

A Figura 6.9 ilustra as curvas de ressonância da casca cilíndrica para valores positivos das imperfeições mostrados na Tabela 6.1 enquanto a Figura 6.10 ilustra as curvas de ressonância para valores negativos das imperfeições. A participação dos modos (2, 6)c e (2, 6)s é praticamente nula em torno de $\Omega_L = 1$. Observa-se que para ambos os sinais a resposta é praticamente a mesma, deslocando as curvas para a esquerda, mas sem influência na forma e

estabilidade dos diagramas de bifurcação. A invariância com o sinal da imperfeição deve-se ao fato da imperfeição ter duas ondas axiais. Quando se inverte o sinal da imperfeição inverte-se apenas a configuração com relação à meia altura da casca.

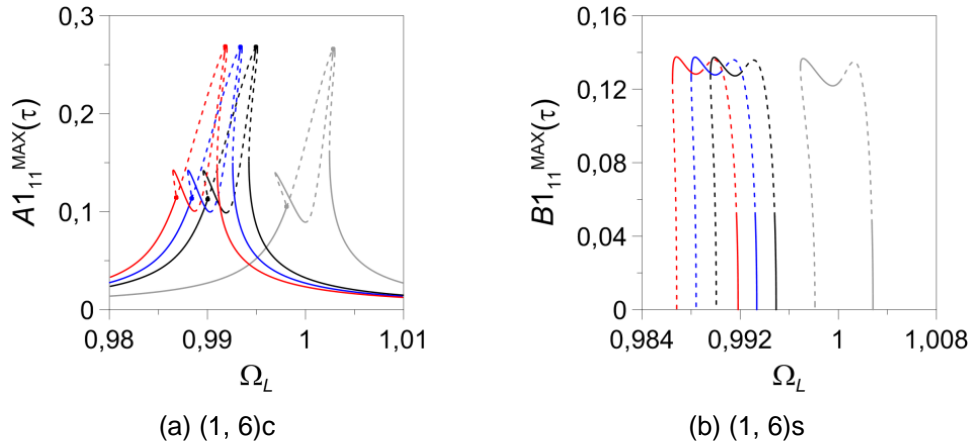


Figura 6.9 – Curvas de ressonância para a casca imperfeita com ressonância 1:1:2:2 sendo $P_{L1} \neq 0$, $P_{L2} = 0$ e $M = 2$ com $W_{02}/h \neq 0$ (valores positivos).

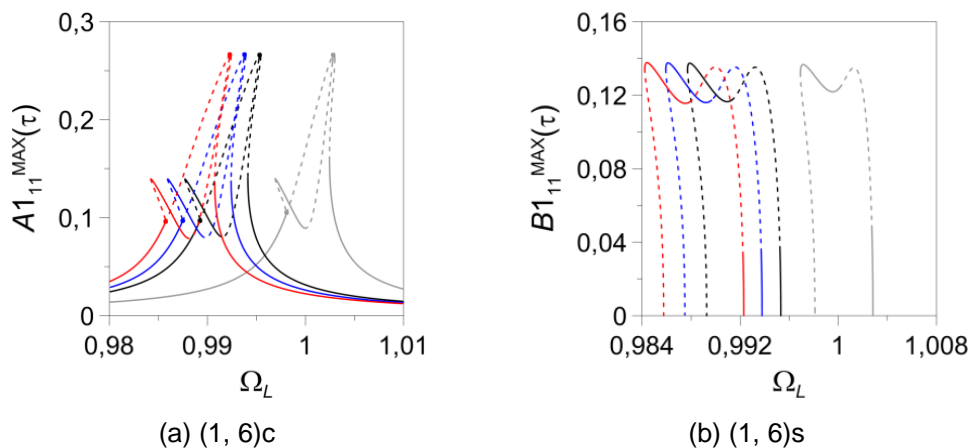


Figura 6.10 – Curvas de ressonância para a casca imperfeita com ressonância 1:1:2:2 sendo $P_{L1} \neq 0$, $P_{L2} = 0$ e $M = 2$ com $W_{02}/h \neq 0$ (valores negativos).

Analisando-se as frequências naturais do sistema para imperfeições aplicadas na forma do modo axissimétrico de vibração associado ao modo (2, 6), mostradas na Tabela 6.6, pode-se notar que embora haja diferença nos valores das duas frequências menores, bem como nos valores das duas maiores, essa diferença é muito pequena.

Tabela 6.6 – Variação da frequência com o nível de imperfeição aplicada na forma do modo axissimétrico de vibração associado ao modo (2, 6) para os casos com ressonância 1:1:2:2.

W_{02}/h	ω_0 (rad/s) (1, 6)c	ω_0 (rad/s) (1, 6)s	ω_0 (rad/s) (2, 6)c	ω_0 (rad/s) (2, 6)s
-0,128	24449,52312	24448,94476	53055,54037	53053,61932
-0,118	24403,85628	24403,74358	52668,35468	52666,45729
-0,107	24358,00335	24358,00335	52244,94533	52243,48202
0,000	24145,02463	24145,02463	48290,78406	48289,31445
0,107	24358,00334	24358,00334	44684,20561	44684,20561
0,118	24404,66868	24402,93130	44338,34928	44335,06344
0,128	24449,23393	24449,23393	44025,31687	44024,49288

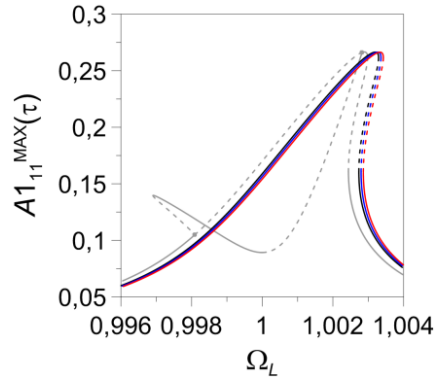
6.5.

Casca cilíndrica com imperfeição na forma do modo (1, 6)s

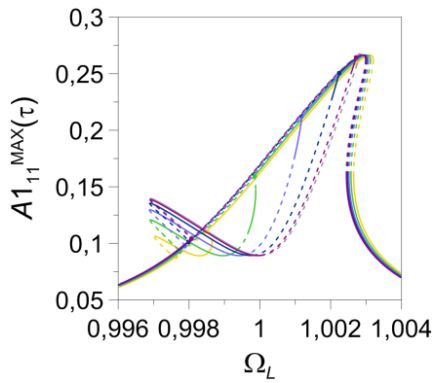
Considera-se neste item uma imperfeição na forma do modo (1, 6)s:

$$W_i = W_{11}^i \sin(n\theta) \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \quad (6.6)$$

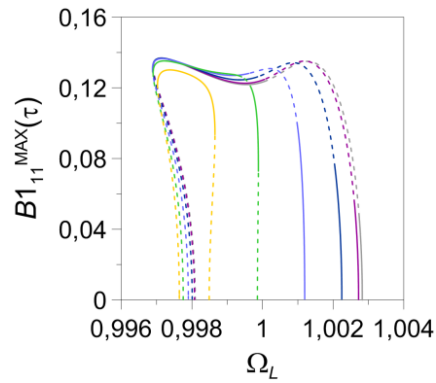
A Figura 6.11 (a) ilustra as curvas de ressonância da casca cilíndrica para os níveis de imperfeição geométrica apresentadas na Tabela 6.1, enquanto as Figuras 6.11 (b) e 6.11 (c) apresentam os resultados para níveis menores de imperfeição (Tabela 6.4), a partir das quais é possível observar a gradativa perda de participação do modo (1, 6)s nas curvas de ressonância. Para os níveis de imperfeição geométrica apresentados na Tabela 6.1 já não há participação do modo (1, 6)s. A Figura 6.12 ilustra separadamente as curvas de ressonância da casca cilíndrica para valores selecionados de amplitude de imperfeição geométrica analisados na Figura 6.11, onde se observa que as duas bifurcações que geram o caminho secundário de soluções e a instabilidade de um trecho do ramo ressonante se aproximam e desaparecem para níveis mais elevados de imperfeição, como ilustra a Figura 6.12 (a). A participação dos modos (2, 6)c e (2, 6)s é praticamente nula na região de ressonância. Observa-se que a influência da imperfeição na frequência fundamental é insignificante.



(a) (1, 6)c

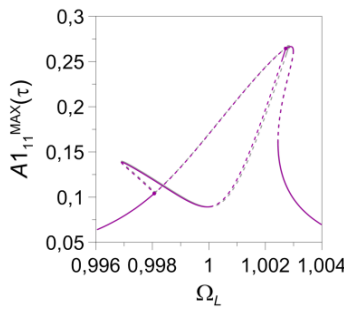


(b) (1, 6)c

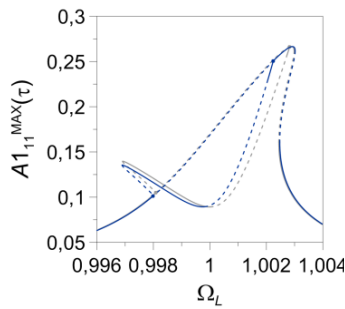


(c) (1, 6)s

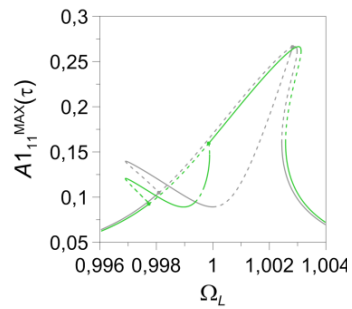
Figura 6.11 – Curvas de ressonância para a casca imperfeita com ressonância 1:1:2:2 sendo $P_{L1} \neq 0$, $P_{L2} = 0$ e $m = 1$ com $W_{11}^i/h \neq 0$.



(a) $W_{11}^i/h = 0,018$
(1, 6)c



(b) $W_{11}^i/h = 0,036$
(1, 6)c



(c) $W_{11}^i/h = 0,072$
(1, 6)c

Figura 6.12 – Curvas de ressonância para a casca imperfeita com ressonância 1:1:2:2 sendo $P_{L1} \neq 0$, $P_{L2} = 0$ e $m = 1$ com $W_{11}^i/h = 0,018$, $W_{11}^i/h = 0,036$ e $W_{11}^i/h = 0,072$.

A Tabela 6.7 apresenta as frequências naturais da casca cilíndrica com imperfeições na forma do modo (1, 6)s:

Tabela 6.7 – Variação da frequência com o nível de imperfeição aplicada na forma do na forma do modo (1, 6)s de vibração para os casos com ressonância 1:1:2:2.

W_{11}^i/h	ω_0 (rad/s) (1, 6)c	ω_0 (rad/s) (1, 6)s	ω_0 (rad/s) (2, 6)c	ω_0 (rad/s) (2, 6)s
0,000	24145,02463	24145,02463	48290,78406	48289,31445
0,107	24155,29764	24196,34389	48300,32642	48341,46373
0,118	24157,52468	24207,41668	48302,60253	48352,51645
0,128	24159,72286	24218,43263	48304,77819	48363,58612

6.6.
Casca cilíndrica com imperfeição na forma do modo (2, 6)s

Analisa-se agora a casca cilíndrica com uma imperfeição geométrica na forma do modo (2, 6)s:

$$W_i = W_{11}^i \text{sen}(n\theta) \text{sen}\left(\frac{M\pi x}{L}\right) \tag{6.7}$$

A Figura 6.13 ilustra as curvas de ressonância da casca cilíndrica imperfeita (Tabela 6.1).

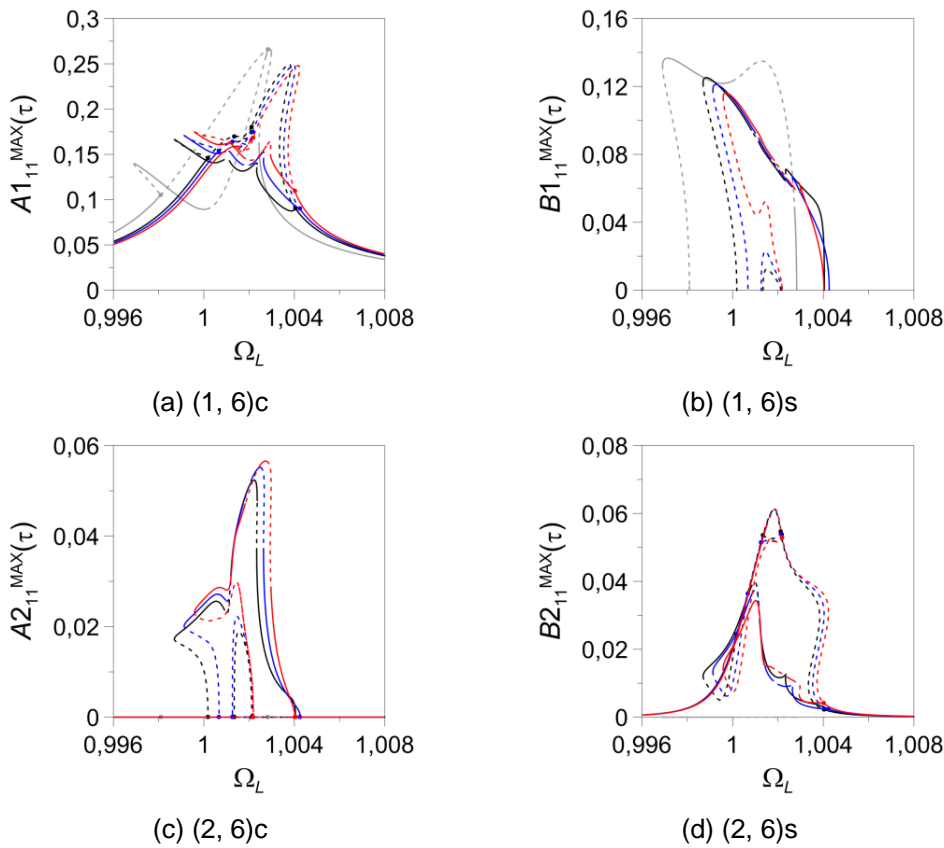


Figura 6.13 – Curvas de ressonância para a casca imperfeita com ressonância 1:1:2:2 sendo $P_{L1} \neq 0$, $P_{L2} = 0$ e $M = 2$ com $W_{11}^i/h \neq 0$.

A Figura 6.14 ilustra as curvas de ressonância da casca cilíndrica imperfeita para menores níveis de imperfeição (Tabela 6.4). A Figura 6.15 mostra, para a melhor compreensão dos resultados, algumas curvas de ressonância analisados nas Figuras 6.13 e 6.14 para os modos (1, 6)c e (2, 6)c e níveis crescentes de imperfeição. Neste caso a imperfeição altera significativamente a estabilidade do sistema, sendo todos os modos excitados. Verifica-se um ligeiro deslocamento das curvas de ressonância para a direita, representando um aumento do valor da frequência fundamental de vibração. Os modos (1, 6)c e (2, 6)s são excitados em toda a faixa de frequências analisadas, enquanto os modos (1, 6)s e (2, 6)c, surgem através de bifurcações da solução trivial. Para níveis de imperfeição entre $W_{11}^i/h = 0,090$ e $W_{11}^i/h = 0,118$ se observam quatro bifurcações da solução trivial, gerando duas famílias de soluções para os modos (1, 6)s e (2, 6)c.

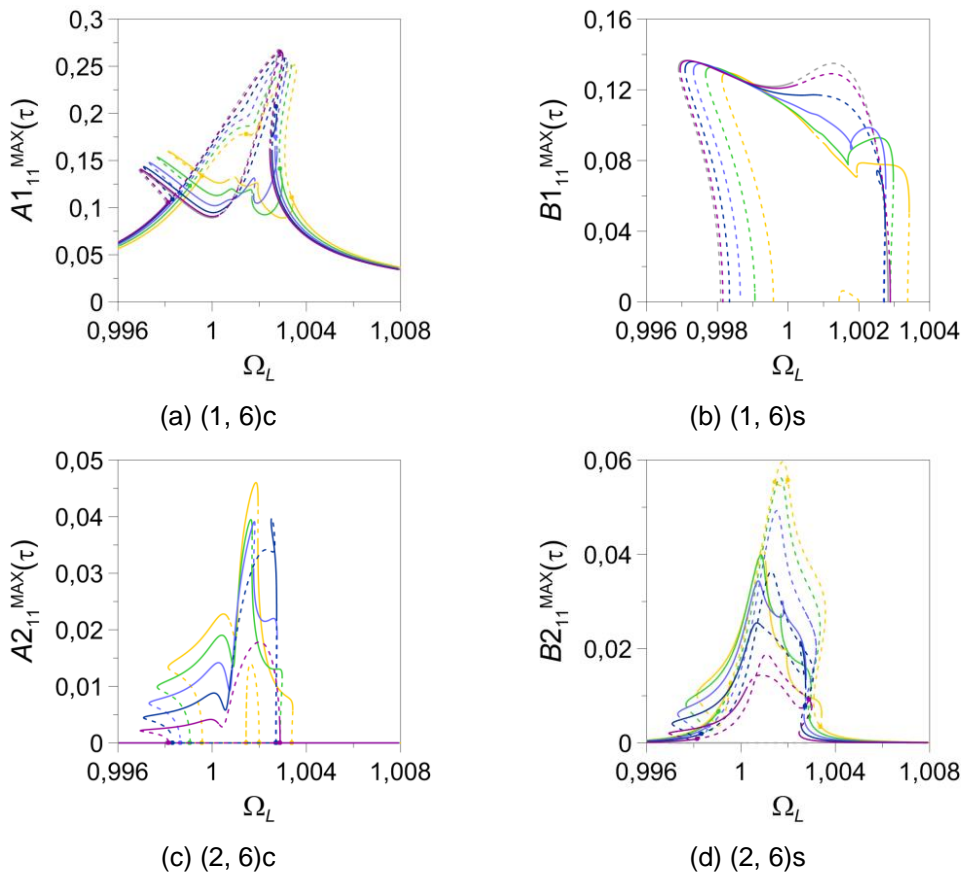


Figura 6.14 – Curvas de ressonância para a casca imperfeita com ressonância 1:1:2:2 sendo $P_{L1} \neq 0$, $P_{L2} = 0$ e $M = 2$ com W_{11}^i/h entre 0 e 0,107.

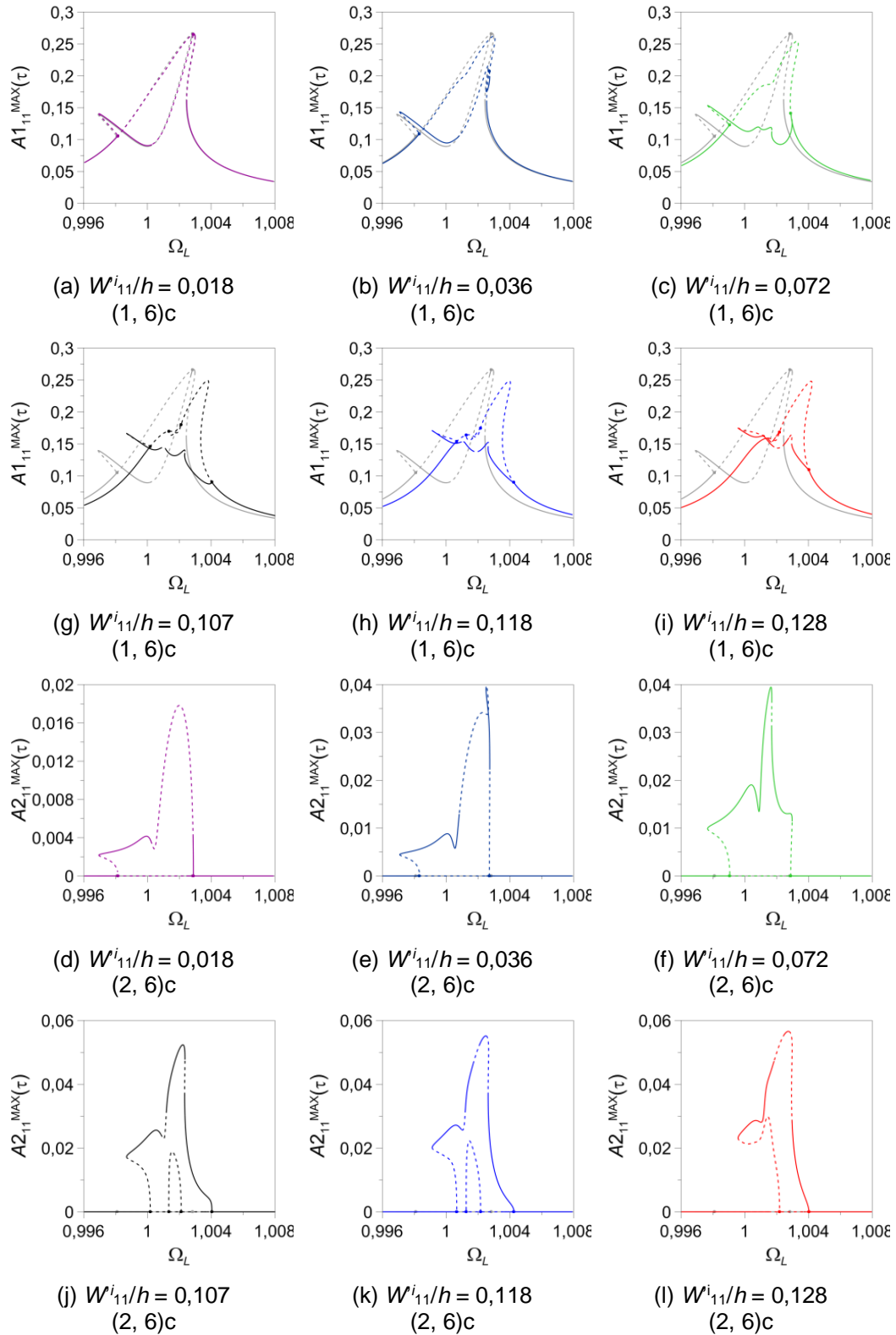


Figura 6.15 – Curvas de ressonância apresentadas separadamente para a casca imperfeita com ressonância 1:1:2:2 sendo $P_{L1} \neq 0$, $P_{L2} = 0$ e $M = 2$ com $W_{11}^i/h \neq 0$.

A Tabela 6.8 apresenta as frequências naturais da casca cilíndrica com imperfeições na forma do modo (2, 6)s a partir das quais é possível notar que a perda de simetria para os casos analisados nessa seção é mais acentuada:

Tabela 6.8 – Variação da frequência com o nível de imperfeição aplicada na forma do modo de vibração (2, 6)s para os casos com ressonância 1:1:2:2.






W_{i11}/h	ω_0 (rad/s) (1, 6)c	ω_0 (rad/s) (1, 6)s	ω_0 (rad/s) (2, 6)c	ω_0 (rad/s) (2, 6)s
0,000	24145,02463	24145,02463	48290,78406	48289,31445
0,107	24165,63758	24247,62505	48372,13740	48392,72911
0,118	24170,08821	24269,75089	48389,88976	48414,87221
0,128	24174,51374	24291,71998	48407,49763	48436,90156

6.7.
Casca cilíndrica com imperfeição na forma dos modos (1, 6)

Nesta seção é considerada uma imperfeição geométrica inicial na forma da soma dos modos (1, 6)c e (1, 6)s:

$$W_i = W_{11}^i \cos(n\theta) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right) + W_{i11}^i \operatorname{sen}(n\theta) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \tag{6.8}$$

Tabela 6.9 – Resumo das cores utilizadas nas curvas de ressonância com $W_i/h + W_{i11}/h \neq 0$ para os casos com ressonância 1:1:2:2.

Modelo	Curva de ressonância	W_{11}/h	W_{i11}/h
Modelo 5		0,018	0,090
		0,036	0,072
		0,054	0,054
		0,072	0,036
		0,090	0,018

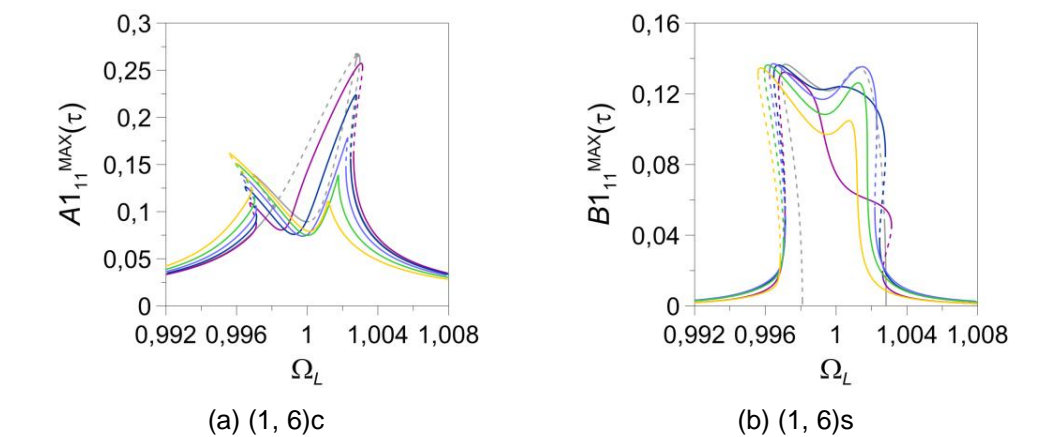







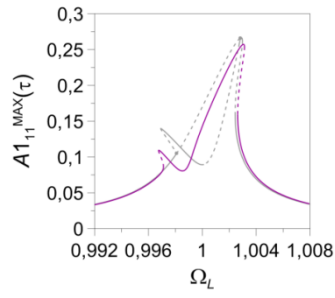
Figura 6.16 – Curvas de ressonância para a casca imperfeita com ressonância do tipo 1:1:2:2 sendo $P_{L1} \neq 0$, $P_{L2} = 0$ e $m = 1$ com $W_{11}/h \neq 0$ e $W_{i11}/h \neq 0$.

Foram escolhidas as amplitudes de imperfeição mostradas na Tabela 6.9 de modo que a amplitude máxima da imperfeição seja aproximadamente igual ao resultado da relação (4.4).

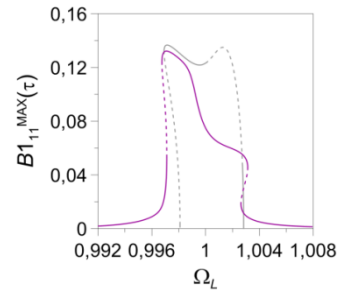
A Figura 6.16 ilustra as curvas de ressonância da casca cilíndrica. A Figura 6.17 mostra separadamente as curvas de ressonância da casca cilíndrica para cada um dos casos de imperfeição geométrica analisados na Figura 6.16, comparando-as com a resposta da casca perfeita. Nota-se um comportamento não linear da casca cilíndrica do tipo *hardening*, com um ramo secundário de soluções do tipo *softening*, similar ao da casca perfeita. Entretanto, a imperfeição modifica a estabilidade das soluções, aumentando sensivelmente as regiões estáveis. Nota-se também que o modo (1, 6)s passa a ser excitado em toda a faixa de frequências, desaparecendo a solução trivial. A participação dos modos (2, 6)c e (2, 6)s é praticamente nula na primeira região de ressonância, $\Omega_L = 1$, sendo os resultados similares aos encontrados utilizando-se o modelo desacoplado da expansão dos deslocamentos laterais. Verifica-se que a forma da imperfeição (participação relativa dos dois modos) tem influência marcante na forma da curva de ressonância. A Tabela 6.10 apresenta as frequências naturais da casca cilíndrica para esses casos.

Tabela 6.10 – Variação da frequência com o nível de imperfeição aplicada na forma dos modos (1, 6) de vibração para os casos com ressonância 1:1:2:2.

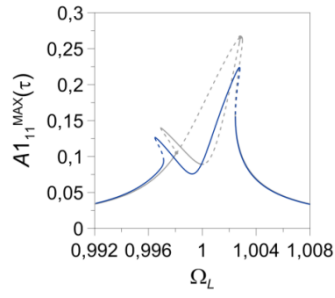
Caso	ω (rad/s) (1, 6)c	ω (rad/s) (1, 6)s	ω (rad/s) (2, 6)c	ω (rad/s) (2, 6)s
0,000	24145,02463	24145,02463	48290,78406	48289,31445
	24152,59330	24182,78558	48297,65398	48327,84185
	24150,83536	24174,08834	48295,83355	48319,18867
	24150,24354	24171,19437	48295,21792	48316,31275
	24174,09045	24150,83325	48319,18919	48295,83303
	24182,79277	24152,58614	48327,86439	48297,63140



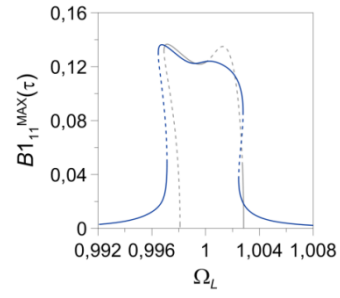
(a) (1, 6)c



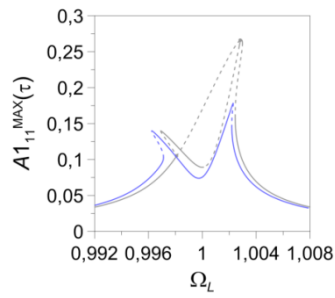
(b) (1, 6)s



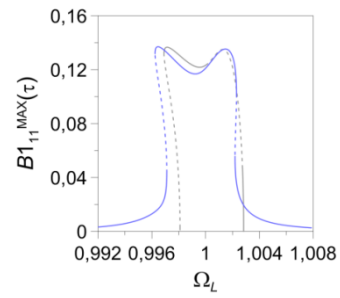
(c) (1, 6)c



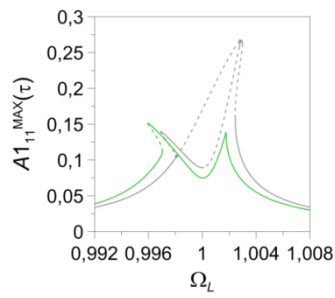
(d) (1, 6)s



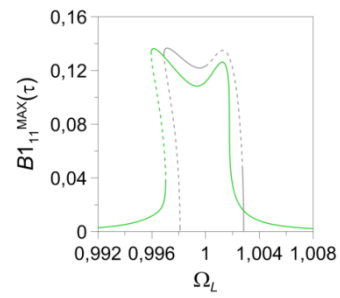
(e) (1, 6)c



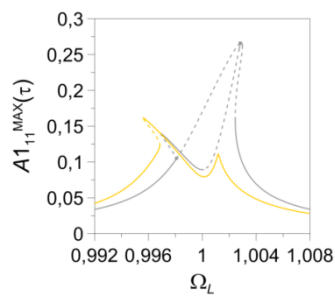
(f) (1, 6)s



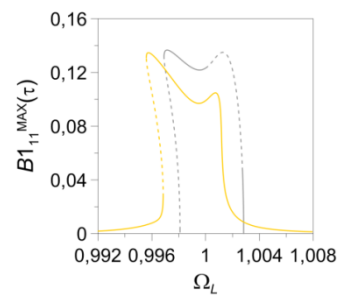
(g) (1, 6)c



(h) (1, 6)s



(i) (1, 6)c



(j) (1, 6)s

Figura 6.17 – Curvas de ressonância mostradas separadamente para a casca imperfeita com ressonância 1:1:2:2 sendo $P_{L1} \neq 0$, $P_{L2} = 0$ e $m = 1$ com $W_{i11}/h \neq 0$ e $W^{i11}/h \neq 0$.

6.8.

Casca cilíndrica com imperfeição na forma dos modos (2, 6)

Analisa-se neste item a casca cilíndrica com uma imperfeição geométrica na forma da soma dos modos (2, 6)c e (2, 6)s, a saber:

$$W_i = W_{11}^i \cos(n\theta) \sin\left(\frac{M\pi x}{L}\right) + W_{11}^i \sin(n\theta) \sin\left(\frac{M\pi x}{L}\right) \quad (6.9)$$

Foram escolhidas as amplitudes de imperfeição mostradas na Tabela 6.9 de modo que a amplitude máxima da imperfeição seja aproximadamente igual ao resultado da relação (4.4).

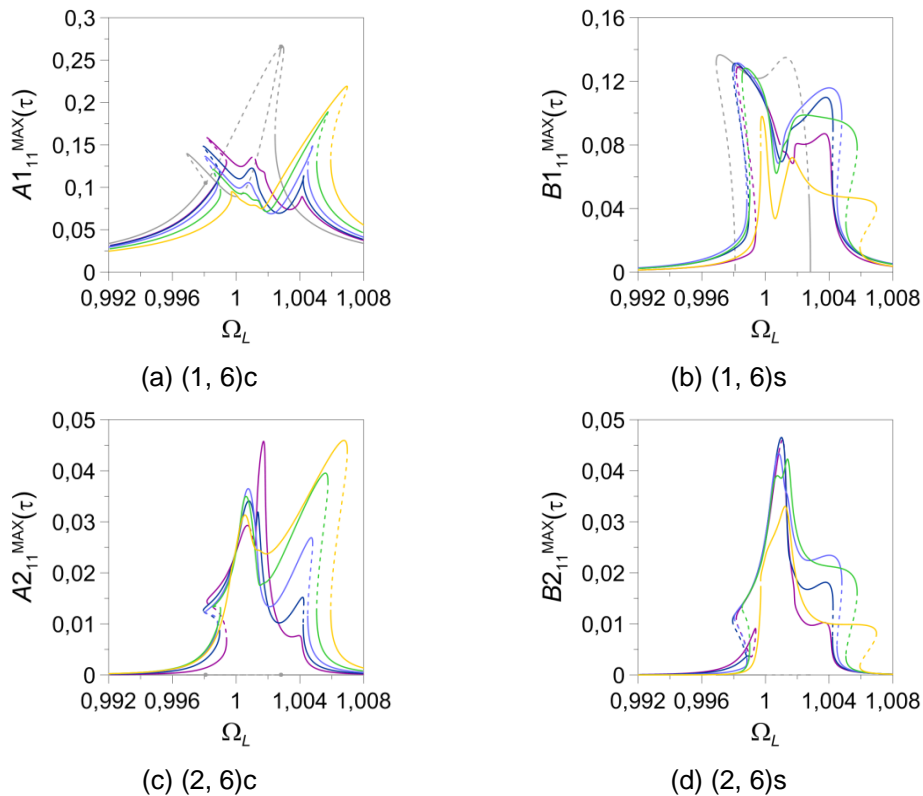


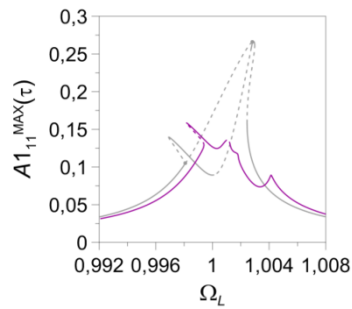
Figura 6.18 – Curvas de ressonância para a casca imperfeita com ressonância do tipo 1:1:2:2 sendo $P_{L1} \neq 0$, $P_{L2} = 0$ e $M = 2$ com $W_{11}^i/h \neq 0$ e $W_{11}^i/h \neq 0$.

A Figura 6.18 ilustra as curvas de ressonância da casca cilíndrica. Verifica-se que todos os modos são excitados e que as soluções triviais desaparecem. As Figuras 6.19 a 6.23 mostram separadamente as curvas de ressonância da casca cilíndrica para os quatro modos principais. Há um ligeiro deslocamento das curvas de ressonância para a direita, indicando um aumento do valor da frequência fundamental de vibração.

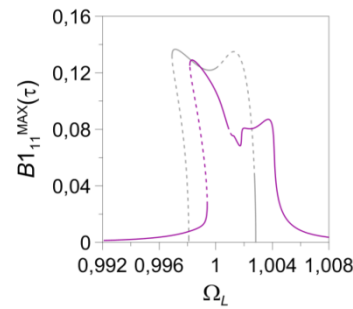
A Tabela 6.11 apresenta as frequências naturais da casca cilíndrica para imperfeições aleatórias aplicadas na forma dos modos (1, 6) e (2, 6), a partir dos quais observa-se que a quebra de simetria também varia com a forma da imperfeição.

Tabela 6.11 – Variação da frequência com o nível de imperfeição geométricas aleatórias na forma do modo linear de vibração para os casos com ressonância 1:1:2:2.

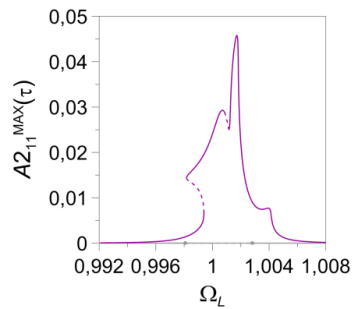
W_{11}^i	ω_0 (rad/s) (1, 6)c	ω_0 (rad/s) (1, 6)s	ω_0 (rad/s) (2, 6)c	ω_0 (rad/s) (2, 6)s
0,000	24145,02463	24145,02463	48290,78406	48289,31445
—	24154,49544	24191,66607	48324,32684	48336,89418
—	24171,05010	24150,93670	48316,38504	48308,52711
—	24163,94798	24149,20708	48309,34893	48298,86892
—	24179,51584	24154,81688	48324,85834	48319,48922
—	24164,34804	24150,91652	48310,54984	48299,84739
—	24151,06863	24170,28414	48305,53469	48315,84447
—	24222,55948	24160,59764	48367,62663	48351,79463
—	24151,29218	24176,06929	48304,48103	48321,22359
—	24160,71660	24223,15531	48352,27682	48368,19867
—	24155,45074	24195,86126	48330,42987	48340,90799



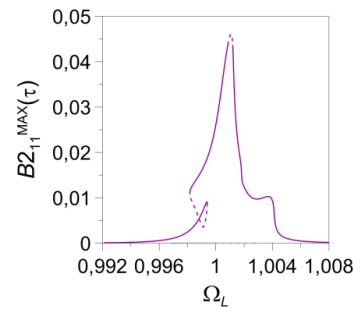
(a) (1, 6)c



(b) (1, 6)s



(c) (2, 6)c



(d) (2, 6)s

Figura 6.19 – Curvas de ressonância para a casca imperfeita com ressonância 1:1:2:2 sendo $P_{L1} \neq 0$, $P_{L2} = 0$ e $M = 2$ com $W_{11}^i/h = 0,018$ e $W_{11}^i/h = 0,090$.

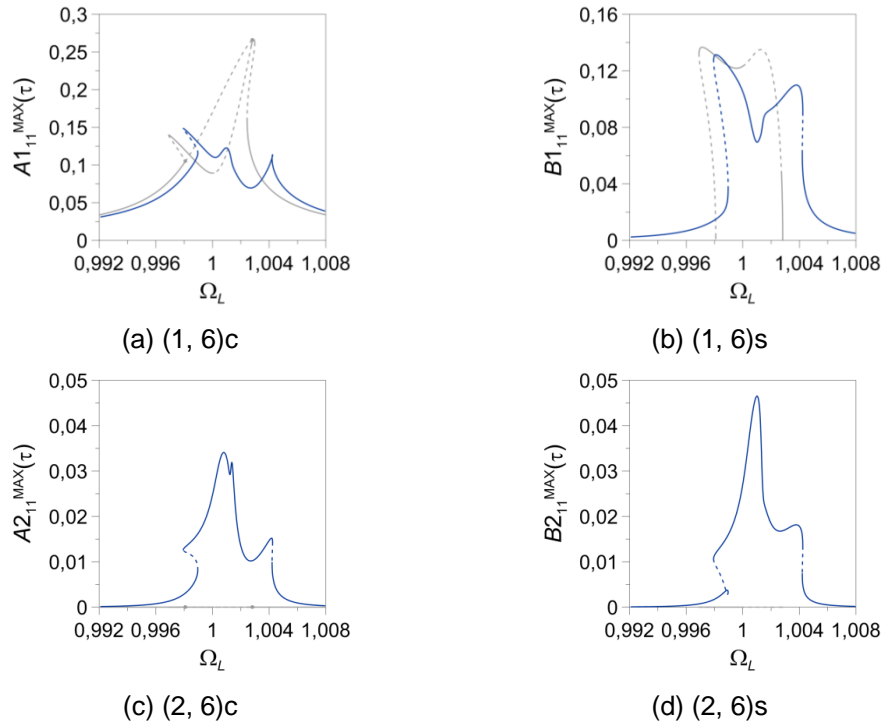


Figura 6.20 – Curvas de ressonância para a casca imperfeita com ressonância 1:1:2:2 sendo $P_{L1} \neq 0$, $P_{L2} = 0$ e $M = 2$ com $W'_{11}/h = 0,036$ e $W'_{i11}/h = 0,072$.

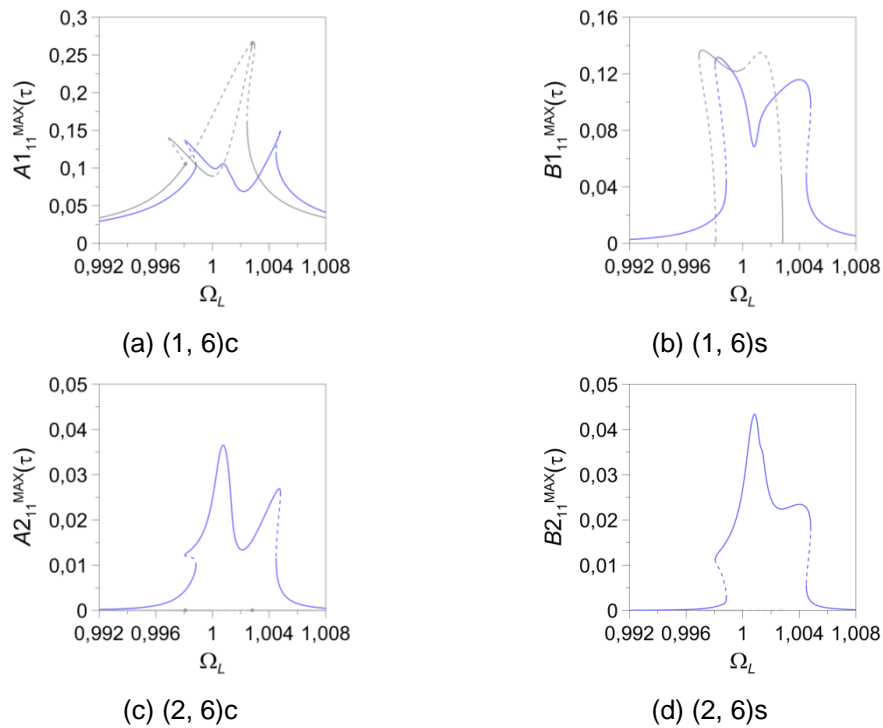


Figura 6.21 – Curvas de ressonância para a casca imperfeita com ressonância 1:1:2:2 sendo $P_{L1} \neq 0$, $P_{L2} = 0$ e $M = 2$ com $W'_{11}/h = 0,054$ e $W'_{i11}/h = 0,054$.

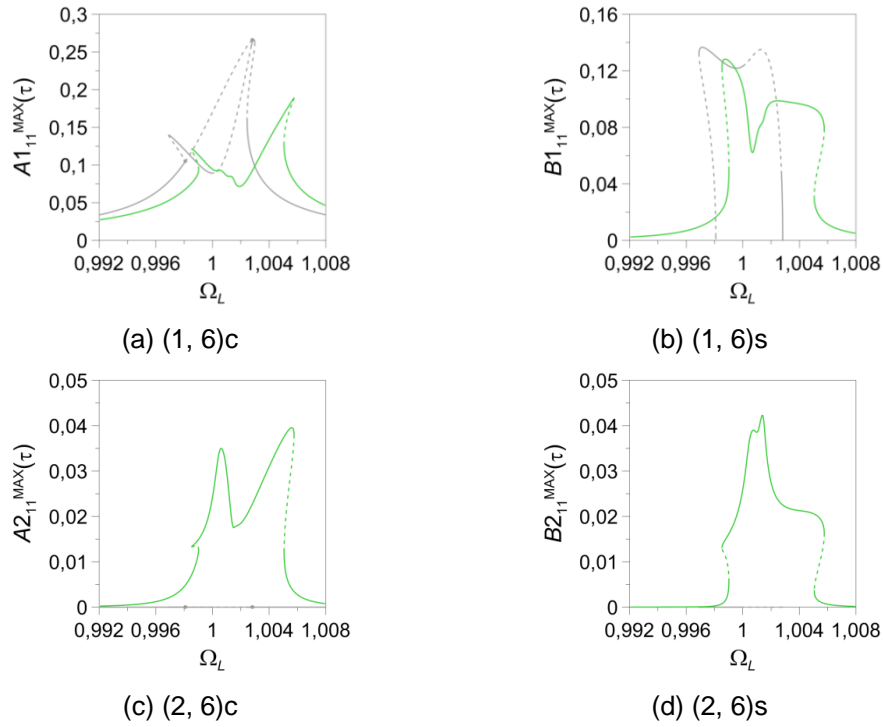


Figura 6.22 – Curvas de ressonância para a casca imperfeita com ressonância 1:1:2:2 sendo $P_{L1} \neq 0$, $P_{L2} = 0$ e $M = 2$ com $W'_{11}/h = 0,072$ e $W'_{i11}/h = 0,036$.

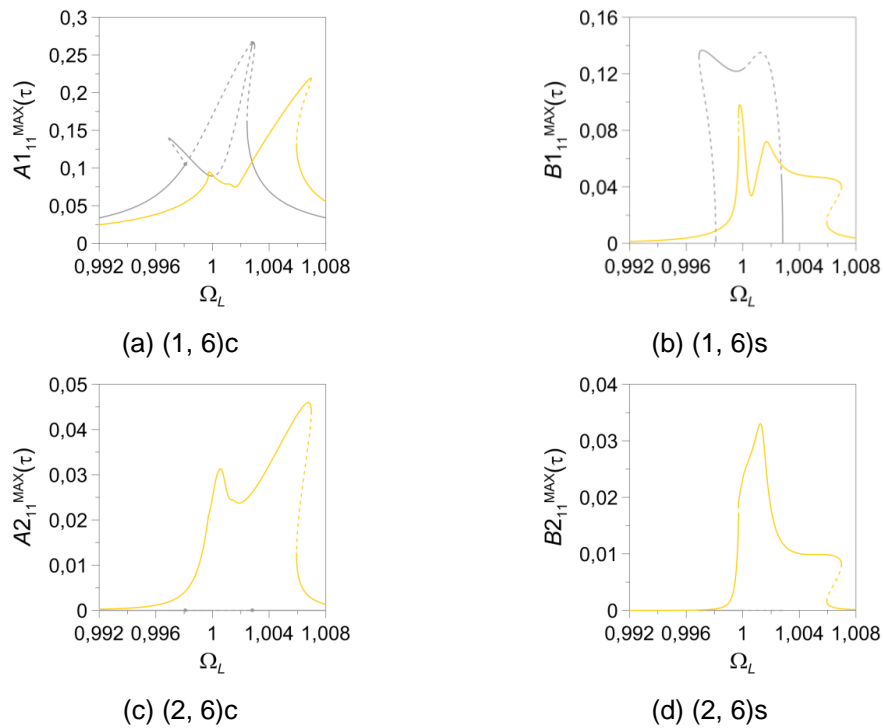







Figura 6.23 – Curvas de ressonância para a casca imperfeita com ressonância 1:1:2:2 sendo $P_{L1} \neq 0$, $P_{L2} = 0$ e $M = 2$ com $W'_{11}/h = 0,090$ e $W'_{i11}/h = 0,018$.

Observa-se que a presença das imperfeições geométricas iniciais altera significativamente a estabilidade do sistema, com um aumento das regiões estáveis e o surgimento de novos picos de ressonância.

A Tabela 6.12 apresenta as frequências naturais da casca cilíndrica para imperfeições aplicadas na forma dos modos (2, 6). Analisando-se os resultados encontrados pode-se concluir que, assim como acontece para os casos anteriores há uma pequena quebra de simetria devido à adição da imperfeição e embora a relação entre as frequências não se mantenha exatamente igual 1:1:2:2 esses valores de frequência são ainda muito próximos.

Tabela 6.12 – Variação da frequência com o nível de imperfeição aplicada na forma dos modos (2, 6) de vibração para os casos com ressonância 1:1:2:2.

Caso	ω_0 (rad/s) (1, 6)c	ω_0 (rad/s) (1, 6)s	ω_0 (rad/s) (2, 6)c	ω_0 (rad/s) (2, 6)s
0,000	24145,02463	24145,02463	48290,78406	48289,31445
	24160,19195	24220,55980	48350,40254	48365,68017
	24156,70606	24203,13604	48336,63316	48348,08584
	24155,52654	24197,34288	48331,86952	48342,39252
	24203,14582	24156,69633	48348,16854	48336,55040
	24220,55980	24160,19195	48365,68017	48350,40254

6.9.

Casca cilíndrica com imperfeições geométricas aleatórias na forma do modo linear de vibração

Finalmente assume-se que a casca cilíndrica analisada tenha uma imperfeição na forma da soma dos quatro modos que dão origem a interação:











$$W_i = W_{11}^i \cos(n\theta) \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) + W_{11}^i \sin(n\theta) \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) + W_{11}^i \cos(n\theta) \sin\left(\frac{M\pi x}{L}\right) + W_{11}^i \sin(n\theta) \sin\left(\frac{M\pi x}{L}\right) \quad (6.10)$$

Os valores das amplitudes da imperfeição geométrica adotadas são gerados de forma aleatória e mostrados na Tabela 6.13.

A Figura 6.24 ilustra as curvas de ressonância da casca cilíndrica imperfeita. As Figuras 6.25 a 6.34 mostram separadamente as curvas de ressonância da casca cilíndrica para os quatro modos principais. Todos os modos que fazem parte da ressonância interna 1:1:2:2 são excitados para todos os casos de imperfeição geométrica inicial. Nota-se que a maior amplitude de

vibração ocorre sempre para o modo (1, 6)c, que é o modo diretamente excitado. Há grande variabilidade na forma e estabilidade das respostas dos quatro modos, ressaltando a importância da forma da imperfeição na resposta não linear da casca imperfeita.

Tabela 6.13 – Valores das parcelas da imperfeição obtidos aleatoriamente para os casos com ressonância 1:1:2:2.

Caso	Curva de ressonância	W'_{111}	W'^{i}_{111}	W'_{211}	W'^{i}_{211}
1		0,005510	0,033234	0,000110	0,068150
2		0,033398	0,005762	0,040629	0,027210
3		0,045863	0,018317	0,023646	0,019173
4		0,002929	0,028084	0,058308	0,017677
5		0,039991	0,034729	0,030604	0,001675
6		0,020627	0,041138	0,002300	0,042935
7		0,010156	0,001150	0,092665	0,003027
8		0,005509	0,062020	0,000366	0,039104
9		0,000201	0,010559	0,003242	0,092997
10		0,009422	0,011632	0,012292	0,073653

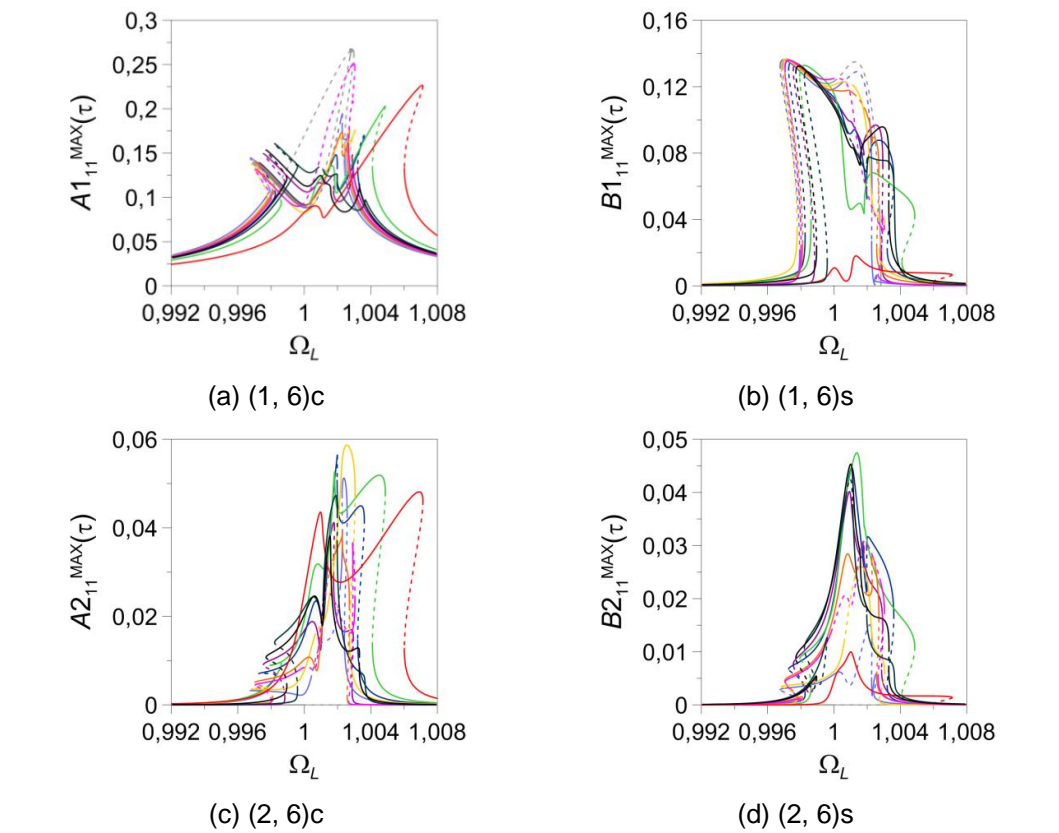


Figura 6.24 – Curvas de ressonância para a casca imperfeita com ressonância 1:1:2:2 sendo $P_{L1} \neq 0$, $P_{L2} = 0$ e $m = 1$ com $W/h \neq 0$.

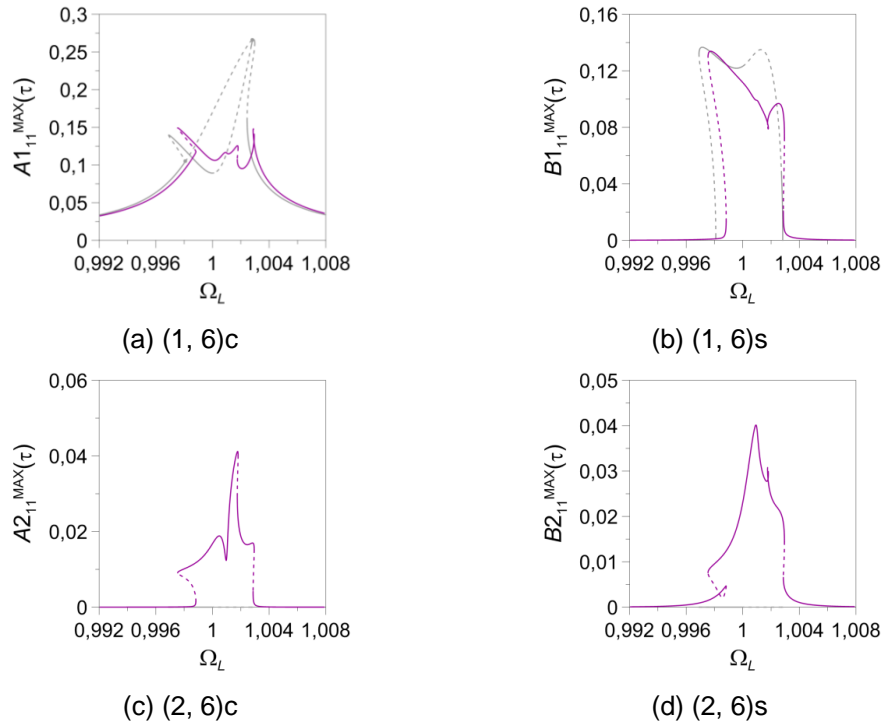


Figura 6.25 – Curvas de ressonância para a casca imperfeita com ressonância 1:1:2:2 sendo $P_{L1} \neq 0$, $P_{L2} = 0$ e $m = 1$ com $W/h \neq 0$ caso 1.

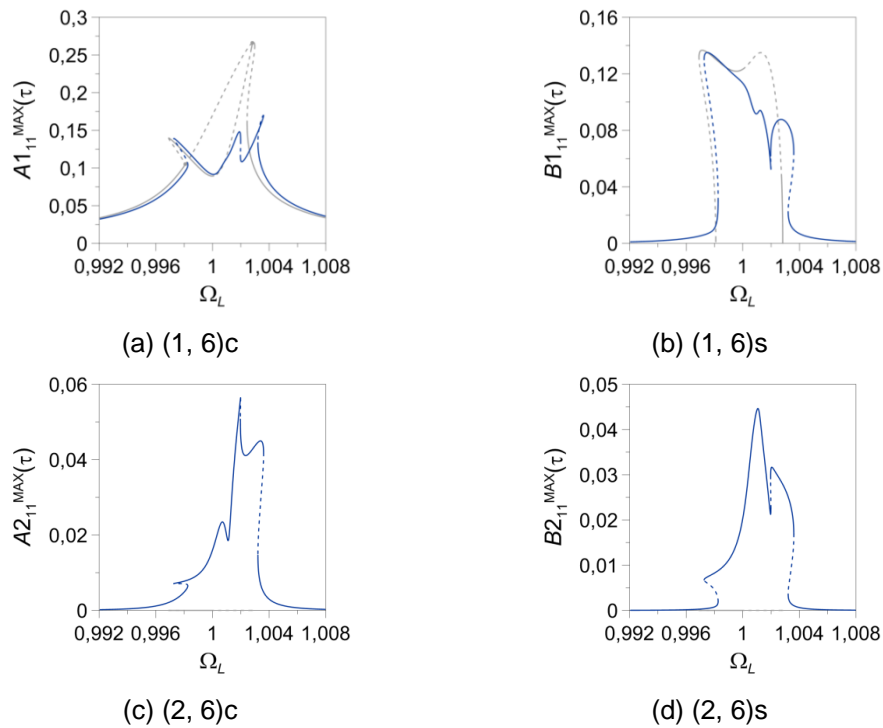


Figura 6.26 – Curvas de ressonância para a casca imperfeita com ressonância 1:1:2:2 sendo $P_{L1} \neq 0$, $P_{L2} = 0$ e $m = 1$ com $W/h \neq 0$ caso 2.

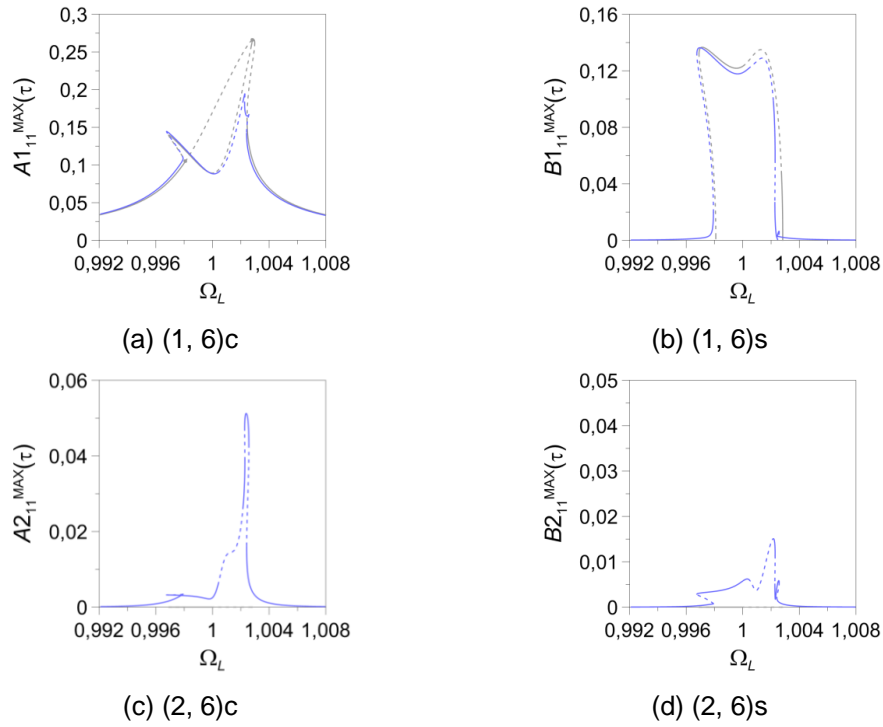


Figura 6.27 – Curvas de ressonância para a casca imperfeita com ressonância 1:1:2:2 sendo $P_{L1} \neq 0$, $P_{L2} = 0$ e $m = 1$ com $W/h \neq 0$ caso 3.

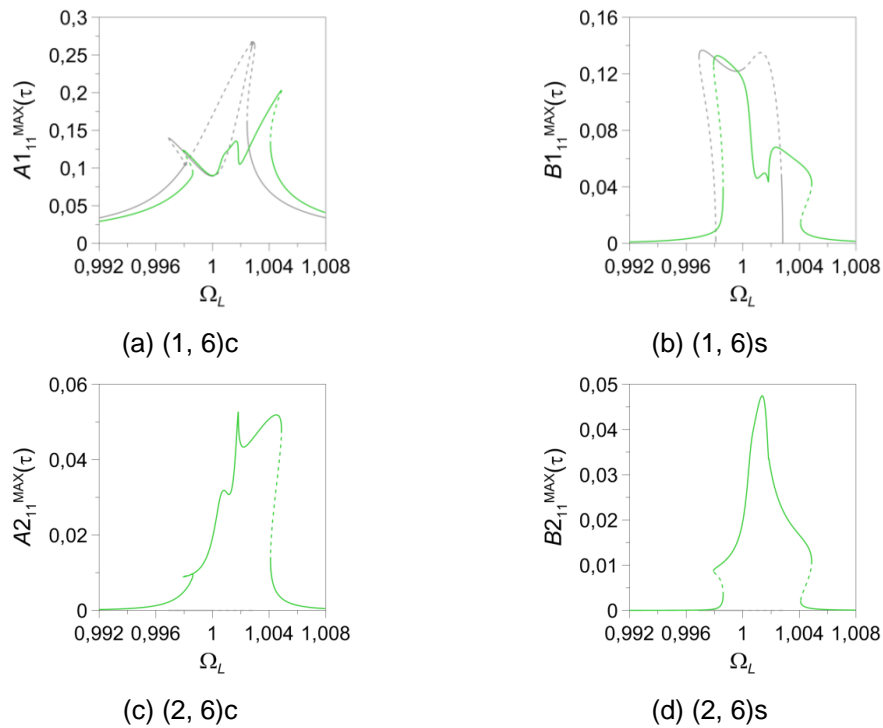


Figura 6.28 – Curvas de ressonância para a casca imperfeita com ressonância 1:1:2:2 sendo $P_{L1} \neq 0$, $P_{L2} = 0$ e $m = 1$ com $W/h \neq 0$ caso 4.

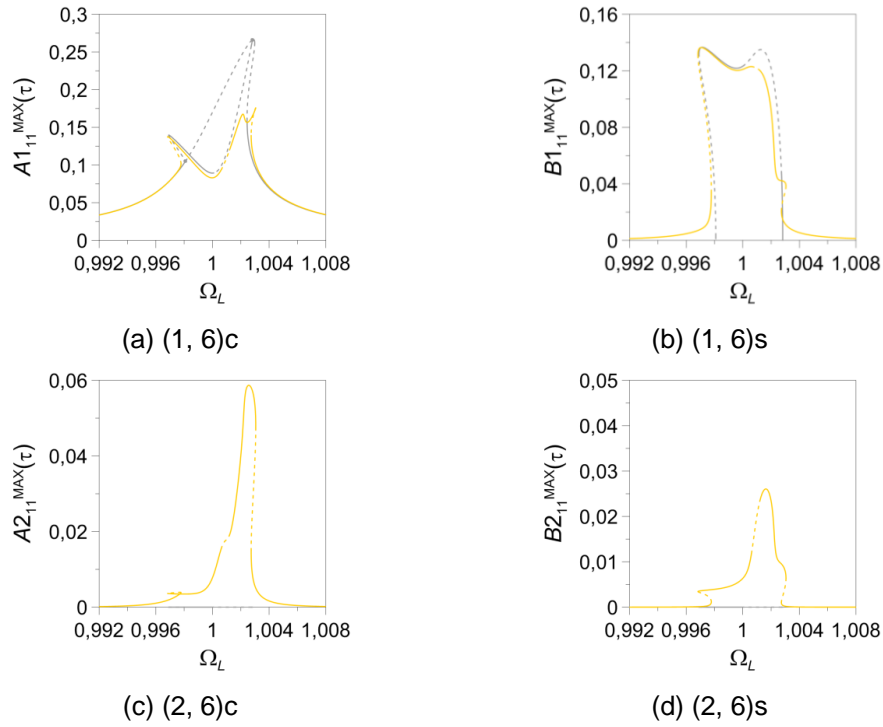


Figura 6.29 – Curvas de ressonância para a casca imperfeita com ressonância 1:1:2:2 sendo $P_{L1} \neq 0$, $P_{L2} = 0$ e $m = 1$ com $W/h \neq 0$ caso 5.

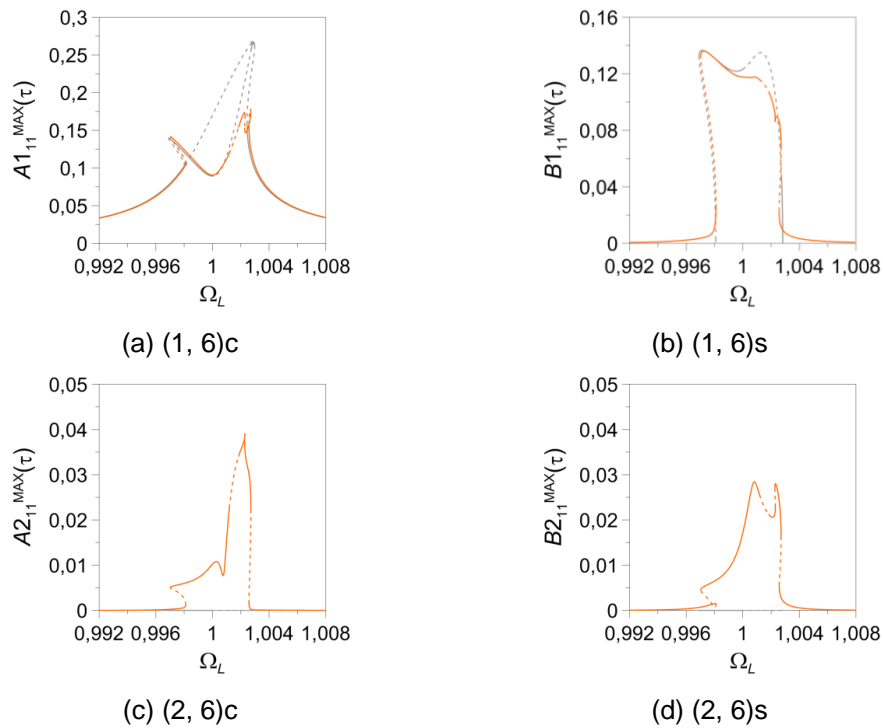


Figura 6.30 – Curvas de ressonância para a casca imperfeita com ressonância 1:1:2:2 sendo $P_{L1} \neq 0$, $P_{L2} = 0$ e $m = 1$ com $W/h \neq 0$ caso 6.

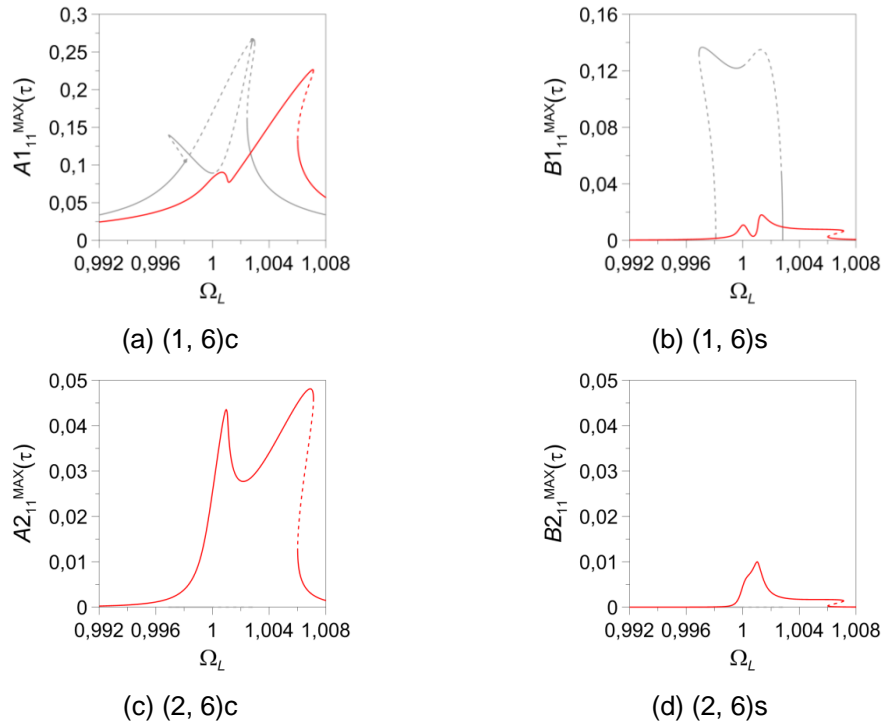


Figura 6.31 – Curvas de ressonância para a casca imperfeita com ressonância 1:1:2:2 sendo $P_{L1} \neq 0$, $P_{L2} = 0$ e $m = 1$ com $W/h \neq 0$ caso 7.

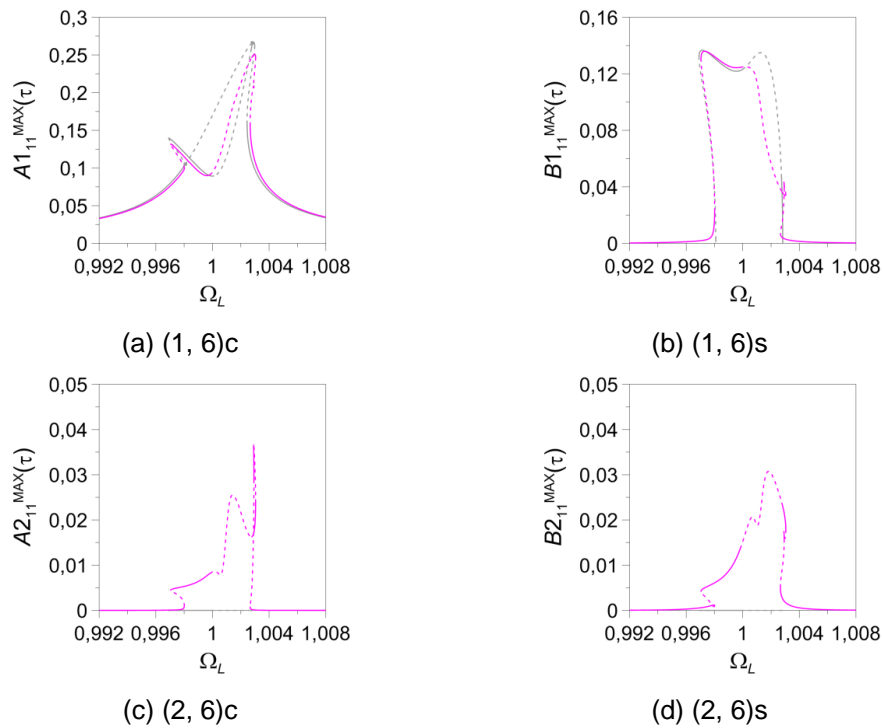


Figura 6.32 – Curvas de ressonância para a casca imperfeita com ressonância 1:1:2:2 sendo $P_{L1} \neq 0$, $P_{L2} = 0$ e $m = 1$ com $W/h \neq 0$ caso 8.

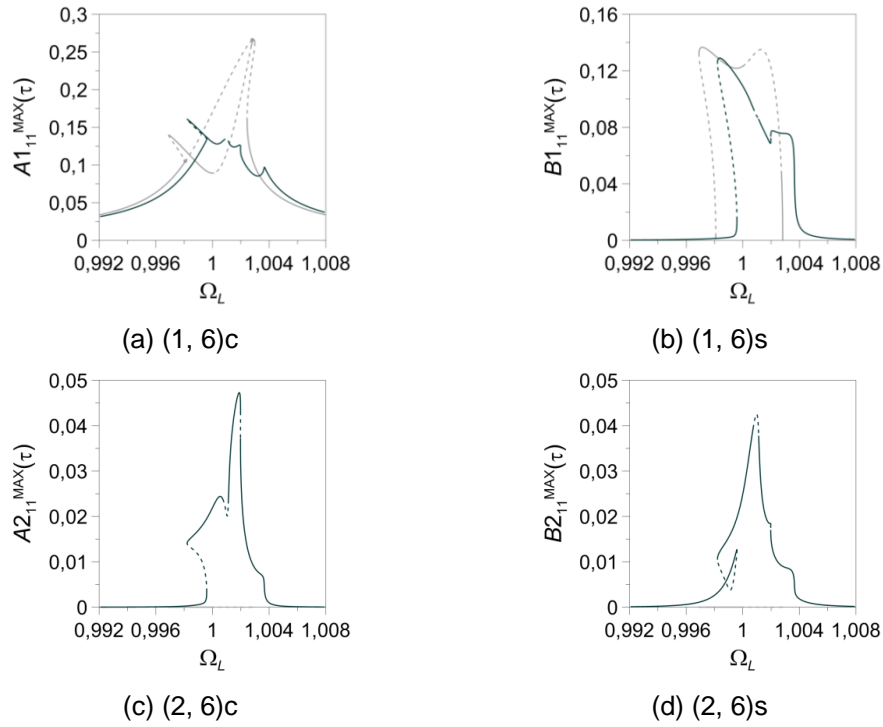


Figura 6.33 – Curvas de ressonância para a casca imperfeita com ressonância 1:1:2:2 sendo $P_{L1} \neq 0$, $P_{L2} = 0$ e $m = 1$ com $W/h \neq 0$ caso 9.

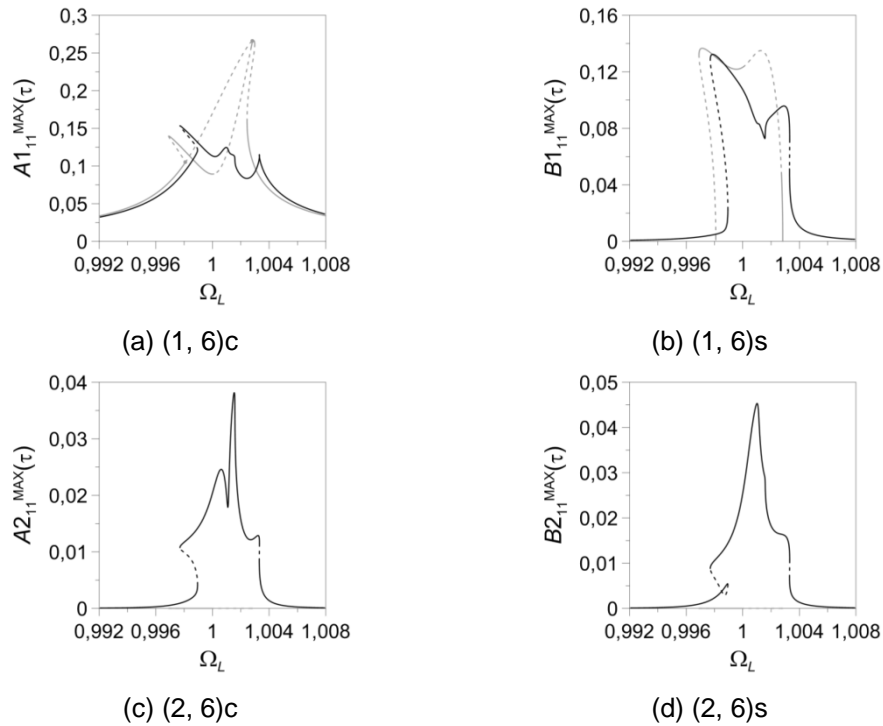


Figura 6.34 – Curvas de ressonância para a casca imperfeita com ressonância 1:1:2:2 sendo $P_{L1} \neq 0$, $P_{L2} = 0$ e $m = 1$ com $W/h \neq 0$ caso 10.

Observa-se também, analisando as Figuras 6.24 a 6.34, que a amplitude máxima do deslocamento varia muito pouco, sendo maior sempre que as

parcelas que têm a forma dos modos (1, 6)c e (1, 6)s, amplitudes W'_{11} e W''_{11} , forem dominantes, sendo esses os casos onde se observa também o maior número de trechos instáveis nas curvas de ressonância. A maior variação da amplitude de vibração ocorre para o modo (1, 6)s, $B_{11}^{\text{MAX}}(\tau)$. As menores amplitudes ocorrem quando a amplitude da imperfeição associada ao modo (2, 6)c é dominante (resposta em vermelho).

A Tabela 6.14 apresenta o resumo de quais modos foram ativados em cada um dos casos de imperfeição analisados para uma pressão lateral excitando diretamente o modo (1, 6)c. Destaca-se que a amplitude do modo (1, 6)c é sempre ativada nesse caso e a Tabela 6.14 apresenta como é participação dos modos (1, 6)s, (2, 6)c e (2, 6)s nas curvas de ressonância da casca cilíndrica.

As respostas considerando o carregamento P_{L2} , que excita diretamente o modo (2, 6)s não levaram, para nenhum dos casos de imperfeição, à excitação dos modos (1, 6)c e (1, 6)s.

Tabela 6.14 – Modos ativados em cada um dos casos de imperfeição com interação 1:1:2:2. Pressão lateral excitando diretamente o modo (1, 6)c.

Imperfeição	Modo (1, 6)s	Modo (1, 7)c	Modo (1, 7)s
Perfeita	Ativa	Não ativa	Não ativa
(1, 6)c	Ativa	Não ativa	Não ativa
(2, 6)c	Ativa parcialmente	Ativa	Ativa parcialmente
(2m, 0)+	Ativa	Não ativa	Não ativa
(2m, 0)-	Ativa	Não ativa	Não ativa
(2M, 0)+	Ativa	Não ativa	Não ativa
(2M, 0)-	Ativa	Não ativa	Não ativa
(1, 6)s	Ativa parcialmente	Não ativa	Não ativa
(2, 6)s	Ativa	Ativa	Ativa
(1, 6)c + (1, 6)s	Ativa	Não ativa	Não ativa
(2, 6)c + (2, 6)s	Ativa	Ativa	Ativa
Aleatórias	Ativa	Ativa	Ativa

Foram apresentados neste capítulo resultados paramétricos da influência da imperfeição geométrica inicial na resposta dinâmica não linear de cascas cilíndricas simplesmente apoiadas com ressonância 1:1:2:2. No próximo capítulo apresentam-se as principais conclusões obtidas neste trabalho.

7

Conclusões e sugestões

O objetivo principal desta tese é realizar a análise de múltiplas ressonâncias internas em cascas cilíndricas delgadas simplesmente apoiadas, com ênfase na influência das imperfeições geométricas iniciais nas ressonâncias internas $1:1:1:1$ e $1:1:2:2$. As equações de movimento da casca cilíndrica são deduzidas usando-se a teoria não linear de Donnell para cascas abatidas. A expansão modal para o deslocamento transversal aqui proposta é deduzida a partir da aplicação de um método da perturbação e atende às condições de contorno relativas a uma casca simplesmente apoiada. Esse método permite identificar todos os modos não lineares que se acoplam aos modos principais de vibração da casca cilíndrica através de não linearidades quadráticas e cúbicas.

Com a finalidade de se analisar os efeitos nas ressonâncias internas $1:1:1:1$ e $1:1:2:2$ propõe-se, ao se aplicar técnicas de perturbação, uma solução inicial para o deslocamento transversal da casca que apresente os quatro modos que participam desta interação. Assim obtém-se uma expansão que descreve de forma precisa os modos não lineares de vibração e os acoplamentos e interações modais. A importância de cada um desses modos é aferida através do método de Karhunen-Loève, que quantifica a participação de cada modo da expansão na energia total do sistema. A utilização do método da perturbação associado ao método de Karhunen-Loève torna possível a dedução de modelos de baixa dimensão que descrevem de forma consistente o comportamento não linear da casca cilíndrica. A forma da imperfeição inicial é descrita pela mesma expansão modal, o que permite modelar diversas formas de imperfeições iniciais e quantificar sua influência nas vibrações não lineares e estabilidade dinâmica da casca.

Com base na expressão analítica das frequências naturais da casca, identificam-se as geometrias onde os fenômenos de ressonância interna são mais importantes.

Utilizando-se um modelo consistente de baixa dimensão, realiza-se uma análise paramétrica das bifurcações utilizando-se algoritmos de continuação que permitem identificar os trechos estáveis e instáveis das curvas de ressonância e classificar as bifurcações que surgem nas regiões de ressonância. Uma análise

paramétrica detalhada mostra a influência das múltiplas ressonâncias e imperfeições iniciais nas frequências naturais, relações frequência-amplitude e diagramas de bifurcação.

Com base na análise paramétrica, observa-se que:

- O método da perturbação associado ao método de Karhunen-Loève pode ser usado para derivar expansões modais consistentes e de baixa dimensão para descrever a interação modal entre dois ou mais modos de vibração, permitindo a análise dos vários tipos de ressonâncias internas que podem ocorrer nas cascas cilíndricas dependendo da geometria adotada.
- Com um número relativamente pequeno de modos obtém-se a convergência dos resultados até amplitudes de vibração igual a duas vezes a espessura da casca. Esta convergência é obtida com apenas 9 GDL para a ressonância interna 1:1, 29 GDL para a ressonância interna 1:1:1:1 e 20 GDL para a ressonância interna 1:1:2:2 sendo os resultados convergentes para amplitudes iguais até duas vezes a espessura da casca.
- Devido à continuidade e à simetria da casca na direção circunferencial, se $\cos(n\theta)$ é solução do problema, $\sin(n\theta)$ também é solução. Assim as frequências naturais da casca ocorrem aos pares, sendo os dois modos defasados de $\pi/2n$. As imperfeições iniciais têm influência marcante nestas frequências naturais, sendo o principal efeito a quebra da axissimetria da casca e da igualdade das frequências dos dois modos com o mesmo número de ondas circunferenciais. Entretanto, para pequenos níveis de imperfeição, estas duas frequências têm valores próximos e ainda pode ocorrer transmissão de energia do modo excitado para o não excitado.
- Para uma casca sujeita a pressão lateral distribuída, considerando-se apenas a interação 1:1, intrínseca a esse elemento estrutural, a forma da imperfeição altera significativamente a resposta não linear do sistema bem como a transferência de energia entre os dois modos principais de vibração, havendo grande variabilidade na forma e estabilidade das respostas, o que ressalta a importância da forma da imperfeição na resposta não linear da casca imperfeita.

- Imperfeições cuja expansão modal contenham parcelas semelhantes aos modos não diretamente excitados induzem sempre a transferência de energia do modo excitado.
- Verifica-se que a ressonância interna 1:1:1:1 deve ser esperada em cascas cilíndricas reais, já que um número infinito de geometrias pode exibir quatro modos com a mesma frequência. De particular importância é quando as frequências associadas aos pares de modos (m, n) e $(m, N = n + 1)$ correspondem à frequência mínima da casca, o que pode levar a grandes amplitudes de vibração na região principal de ressonância.
- A forma e a magnitude da imperfeição têm influência marcante nos resultados. Para uma casca sujeita a pressão lateral na forma de na forma do modo (m, n) e a expansão modal da imperfeição contenham parcelas de dos modos (m, N) , todos os modos são ativados ainda que se considerem imperfeições com magnitude bem menor que a espessura da casca. O mesmo acontece quando um dos modos (m, N) é excitado e a imperfeição tem componentes em um dos modos (m, n) .
- A ressonância interna 1:1:2:2 também pode ser observada no projeto de cascas cilíndricas reais, já que existem infinitas geometrias que podem conduzir a esse tipo de interação modal. De particular importância é a ressonância interna entre um modo $(1, n)$ associado à frequência mínima, e um modo $(2, n)$ com o dobro desta frequência. Neste caso, quando a pressão lateral excita o modo principal de vibração $(1, n)$ e a expansão modal da imperfeição contem alguma componente dos dois modos $(2, n)$, todos os modos são excitados, mesmo nos casos de imperfeições com magnitude bem menor que a espessura da casca. Diferentemente do que acontece para interação 1:1:1:1, nesse caso, quando um dos modos (M, n) é excitado, para nenhum dos casos de imperfeição analisados há transferência de energia para os modos (m, n) . Porém cabe aqui lembrar que, na maioria das estruturas reais, a forma da imperfeição não segue uma forma modal específica, podendo até mesmo ser alterada durante a vida útil da estrutura e, em geral, tem participação de todos os modos,

mesmo que pequena. Assim espera-se que sempre seja observada a ressonância interna.

Sugerem-se, como continuidade deste trabalho, pesquisas que contribuam com os seguintes temas:

- Analisar das ressonâncias internas 1:1:3:3 assim como outros casos de interações modais entre quatro modos de vibração que possam surgir para determinadas geometrias.
- Efetuar análises dos diagramas de bifurcação com técnicas de continuação de uma casca cilíndrica submetida a uma carga axial, considerando a solução modal para os deslocamentos transversais aqui proposta.
- Avaliar o efeito das ressonâncias internas e imperfeições em cascas cilíndricas com fluido interno.
- Avaliar o efeito das ressonâncias internas e imperfeições em cascas cilíndricas com material ortotrópico, cascas cilíndricas laminadas e sanduíche e cascas de material com gradação funcional.

ABE, A.; KOBAYASHI, Y.; YAMADA, G. Nonlinear dynamic behaviors of clamped laminated shallow shells with one-to-one internal resonance. **Journal of Sound and Vibration**, [s. l.], v. 304, p. 957-968, 2007.

ALIJANI, F.; AMABILI, M. Non-linear vibrations of shells: A literature review from 2003 to 2013. **International Journal of Non-Linear Mechanics**, [s. l.], v. 58, p. 233-257, 2014a.

ALIJANI, F.; AMABILI, M. Nonlinear vibrations and multiple resonances of fluid filled arbitrary laminated circular cylindrical shells. **Composite Structures**, [s. l.], v. 108, p. 951-962, 2014b.

AMABILI, M.; PELLICANO, F.; PAÏDOUSSIS, M. P. Nonlinear vibrations of simply supported, circular cylindrical shells, coupled to quiescent fluid. **Journal of Fluids and Structures**, [s. l.], v. 12, p. 883-918, 1998.

AMABILI, M.; PELLICANO, F.; PAÏDOUSSIS, M. P. Addendum to "Nonlinear vibrations of simply supported, circular cylindrical shells, coupled to quiescent fluid". **Journal of Fluids and Structures**, [s. l.], v. 13, p. 785-788, 1999

AMABILI, M.; PAÏDOUSSIS, M. P. Review of studies on geometrically non-linear vibrations and dynamics of circular cylindrical shells and panels, with and without fluid-structure interaction. **Applied Mechanics Reviews**, [s. l.], v. 56, n. 4, p. 655-699, 2003.

AMABILI, M. **Nonlinear vibrations and stability of shells and plates**. 1 ed. England: Cambridge University Press, 2008. 374 p.

AMABILI, M. Internal resonances in non-linear vibrations of laminated circular cylindrical shell. **Nonlinear Dynamics**, [s. l.], v. 69, p. 755-770, 2012.

AMABILI, M.; BALASUBRAMANIAN, P.; FERRARI, G. Travelling wave and non-stationary response in nonlinear vibrations of water-filled circular cylindrical shells: Experiments and simulations. **Journal of Sound and Vibration**, [s. l.], v. 301, n. 1, p. 220-245, 2016.

ATLURI, S. A perturbation analysis of non-linear free flexural vibration of circular cylindrical shell. **Internal Journal of Solids and Structures**, Great Britain, v. 8, p. 549-569, 1972.

BRESLAVSKY, I. D.; AMABILI, M. Nonlinear vibrations of a circular cylindrical shell with multiple internal resonances under multi-harmonic excitation. **Nonlinear Dyn**, <https://doi.org/10.1007/s11071-017-3983-2>, 2017.

CHU, H. N. Influence of large amplitudes on flexural vibrations of thin circular cylindrical shells. **Journal of Aerospace Science**, [s. l.], v. 58, p. 302-609, 1961.

CROLL, J. G. A.; BATISTA, R. C. Explicit lower bounds for the buckling of axially loaded cylinders. **International Journal of Mechanical Sciences**, [s. l.], v. 23, n. 6, p. 331-343, 1981.

DEL PRADO, Z. J. G. N. **Acoplamento e interação modal na instabilidade dinâmica de cascas cilíndricas**. 2001. 119 f. Tese (Doutorado em Engenharia Civil) – Departamento de Engenharia Civil, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2001.

DOEDEL, E. J.; CHAMPNEYS, A. R.; FAIRGRIEVE, T. F.; KUZNETSOV, Y. A.; SANDSTEDE, B.; WANG, X. AUTO 97: Continuation and bifurcation software for ordinary differential equations (with HomCont). **Concordia University**. Montreal, Canada, 1998.

DOWELL, E. H.; VENTRES, C. S. Modal equations for the nonlinear flexural vibrations of a cylindrical shell. **Internal Journal of Solids and Structures**, Great Britain, v. 4, p. 975-991, 1968.

DU, C.; LI, Y.; JIN, X. Nonlinear forced vibration of functionally graded cylindrical thin shells. **Thin-Walled Structures**, [s. l.], v. 78, n. 1, p. 26-36, 2014.

DYM, C. L. Some new results for the vibrations of circular cylinders. **Journal of Sound and Vibration**, [s. l.], v. 29, n. 2, p. 189-205, 1973.

EVENSEN, D. A. Some observations on the nonlinear vibrations of thin cylindrical shells. **AIAA Journal**, [s. l.], v. 1, n. 12, p. 2857-2858, 1963.

EVENSEN, D. A. Nonlinear flexural vibrations of thin-walled circular cylinders. **NASA TN**, [s. l.], D-4090, 1967.

FRIEDRICH, L.; SCHMID-FUERTE, T-A.; SCHRÖDER, K-U. Comparison of theoretical approaches to account for geometrical imperfections of unstiffened isotropic thin walled cylindrical shell structures under axial compression. **Thin-Walled Structures**, [s. l.], v. 92, n. 1, p. 1-9, 2015.

GONÇALVES, P. B. **Interação dinâmica não-linear entre fluido e cascas delgadas**. 1987. 168 f. Tese (Doutorado em Engenharia Civil) – COPPE, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 1987.

GONÇALVES, P. B.; BATISTA, R. C. Frequency response of cylindrical shells partially submerged or filled with liquid. **Journal of Sound and Vibration**, [s. l.], v. 113, n. 1, p. 59-70, 1987.

GONÇALVES, P. B.; DEL PRADO, Z. J. G. N. Nonlinear oscillations and stability of parametrically excited cylindrical shells. **Meccanica**, [s. l.], v. 37, p. 569-597, 2002.

GONÇALVES, P. B.; DEL PRADO, Z. G. Effect of non-linear modal interaction on the dynamic instability of axially excited cylindrical shells. **Computers and Structures**, [s. l.], v. 82, p. 2621-2634, 2004.

GONÇALVES, P. B.; DEL PRADO, Z. G. Low-dimensional Galerkin models for nonlinear vibration and instability analysis of cylindrical shells. **Nonlinear Dynamics**, [s. l.], v. 41, p. 129-145, 2005.

GONÇALVES, P. B.; SILVA, F. M. A.; REGA, G.; STEFANO, L. Global dynamics and integrity of a two-dof model of parametrically excited cylindrical shell. **Nonlinear Dynamics**, [s. l.], v. 63, p. 61-82, 2011.

GONÇALVES, P. B.; SILVA, F. M. A.; DEL PRADO, Z. J. G. N. Reduced order models for the nonlinear dynamic analysis of shells. **Procedia IUTAM**, [s. l.], v. 19, p. 118-125, 2016.

HUNT, G. W.; WILLIAMS, K. A. J.; COWELL, R. G. Hidden symmetry concepts in the elastic buckling of axially-loaded cylinders. **International Journal of Solids and Structures**, [s. l.], v. 22, n. 12, p. 1501-1515, 1986.

KIM, Y-W.; LEE, Y-S.; KO, S-H. Coupled vibration of partially fluid-filled cylindrical shells with ring stiffeners. **Journal of Sound and Vibration**, [s. l.], v. 276, p. 869-897, 2004.

KUBENKO, V. D.; KOVAL'CHUK, P. S. Modeling the nonlinear interaction of standing and traveling bending waves in fluid-filled cylindrical shells subject to internal resonances. **International Applied Mechanics**, [s. l.], v. 50, n. 4, p. 353-364, 2014.

LANDAU, L. D.; LIFSHITZ, E. M. **Fluid mechanics**. Pergamon Press, 1966, 536 p.

MONTEIL, M.; TOUZÉ, C.; THOMAS, T.; BENACCHIO, S. Nonlinear forced vibrations of thin structures with tuned eigenfrequencies: the cases of 1:2:4 and 1:2:2 internal resonances. **Nonlinear Dyn**, [s. l.], v. 75, p. 175-200, 2014.

MOUSSAOUI, F.; BENAMAR, R. Non-linear vibrations of shell-type structures: a review with bibliography. **Journal of Sound and Vibration**, [s. l.], v. 255, n. 1, p. 161-184, 2002.

NAYFEH, A. H.; BALACHANDRAN, B. **Applied nonlinear dynamics. Analytical, computational and experimental methods**. 1 ed. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1995. 685 p.

NOWINSKI, J. L. Nonlinear transverse vibration of orthotropic cylindrical shells. **AIAA Journal**, [s. l.], v. 1, n. 3, p. 617-620, 1963.

OLSON, M. D. Some experimental observations on the nonlinear vibrations of cylindrical shells. **AIAA Journal**, [s. l.], v. 3, p. 1775-1777, 1965.

POPOV, A. A.; THOMPSON, J. M. T.; MCROBIE, F. A. Low dimensional models of shell vibrations: parametrically excited vibrations of cylindrical shells. **Journal of Sound and Vibration**, [s. l.], v. 209, n. 1, p. 163-186, 1998.

RITTO, T. G. **Análise de vibrações de sistemas lineares e não-lineares no contexto da formulação fraca, análise modal e decomposição de Karhunen-Loève**. 2005.107 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) – Departamento de Engenharia Mecânica, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2005.

RODRIGUES, L.; SILVA, F. M. A.; DEL PRADO, Z. J. G. N; GONÇALVES, P. B. Effects of modal coupling on the dynamics of parametrically and directly excited cylindrical shells. *In*: The 6th International Conference on Coupled Instabilities in Metal Structures, 2012, Glasgow. **Anais... CIMS**, 2012, v. 01, p. 1-8.

RODRIGUES, L.; SILVA, F. M. A.; DEL PRADO, Z. J. G. N.; GONÇALVES, P. B. Effect of internal resonance on the global stability of cylindrical shells axially excited. *In: XV International Symposium on Dynamic Problems of Mechanics*, 2013, Buzios. **Anais... DINAME**, 2013a, v. 01, p. 1-4.

RODRIGUES, L.; SILVA, F. M. A.; GONÇALVES, P. B.; DEL PRADO, Z.J.G.N. Análise da região principal de ressonância de uma casca cilíndrica axialmente excitada: Considerações do efeito da interação modal. *In: XXXIV Iberian-Latin-America Congress on Computational Methods in Engineering*, 2013, Pirenópolis. **Anais... CILAMCE**, 2013b, v. 01, p. 1-12.

RODRIGUES, L. **Uma introdução à influência da interação modal nas oscilações não lineares de cascas cilíndricas**. 2013. 143 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Programa de Pós-Graduação em Geotecnia, Estruturas e Construção Civil, Universidade Federal de Goiás, Goiânia, 2013c.

RODRIGUES, L.; SILVA, F. M. A.; GONÇALVES, P. B.; DEL PRADO, Z.J.G.N. Effects of modal coupling on the dynamics of parametrically and directly excited cylindrical shells. **Thin-Walled Structures**, [s. l.], v. 81, p. 210-224, 2014.

RODRIGUES, L.; SILVA, F. M. A.; GONÇALVES, P. B. The influence of modal geometric imperfections on the nonlinear vibrations of a thin-walled circular cylindrical shell. *In: Proceedings of the ASME 2016 International Design & Engineering Technical Conferences and Computers & Information in Engineering Conference IDETC/CIE 2016*, North Carolina, USA. **Anais... IDETC2016-59649**.

RODRIGUES, L.; GONÇALVES, P. B.; SILVA, F. M. A. Internal resonances in a transversally excited imperfect circular cylindrical shell. *In: X International Conference on Structural Dynamics, EURODYN 2017*, Roma, Itália. **Procedia Engineering**... [s. l.], v. 199, p. 838-843, 2017.

ROSSIKHIN, Y. A.; SHITIKOVA, M. V. Nonlinear dynamic response of a fractionally damped cylindrical shell with a three-to-one internal resonance. **Applied Mathematics and Computation**, [s. l.], v. 257, n. 1, p. 498-525, 2015.

SILVA, F. M. A. **Modelos de dimensão reduzida para análise das oscilações não-lineares e estabilidade de cascas cilíndricas**. 2008. 101 f. Tese (Doutorado em Engenharia Civil) – Departamento de Engenharia Civil, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2008.

SILVA, F. M. A.; DEL PRADO, Z. J. G. N.; GONÇALVES, P. B. On the influence of a companion mode on the nonlinear oscillations of fluid-filled cylindrical shells. *In: 20th International Congress on Mechanical Engineering*, 2009, Gramado. **Anais... COBEM**, 2009, p. 1-15.

SILVA, F. M. A.; GONÇALVES, P. B.; DEL PRADO, Z. J. G. N. Effect of nonlinear modal interaction on the dynamics behavior of cylindrical shells. *In: Congresso Ibero-Latino-Americano de Métodos Computacionais em Engenharia*, 2011, Ouro Preto. **Anais...** Ouro Preto: Universidade Federal de Ouro Preto, 2011a, v. 01, p. 1-10.

SILVA, F. M. A.; GONÇALVES, P. B.; DEL PRADO, Z. J. G. N. An alternative procedure for the non-linear vibration analysis of fluid-filled cylindrical shells. **Nonlinear Dynamics**, [s. l.], v. 66, p. 303-333, 2011b.

SILVA, F. M. A.; GONÇALVES, P. B.; DEL PRADO, Z. J. G. N. Parametric instability and snap-through of partially fluid-filled cylindrical shells. **Procedia Engineering**, [s. l.], v. 14, p. 598-605, 2011c.

SILVA, F. M. A.; GONÇALVES, P. B.; DEL PRADO, Z. J. G. N. The influence of internal resonances on the dynamics of fluid-filled cylindrical shells. **Blucher Mechanical Engineering Proceedings**, [s. l.], v. 1, n. 1, p. 1-16, 2014.

SIROVICH, L., Turbulence and the dynamics of coherent structures part I: coherent structures. **Quarterly of Applied Mathematics**, v. 45, p. 561-571, 1987a.

SIROVICH, L., Turbulence and the dynamics of coherent structures part II: symmetries and transformations. **Quarterly of Applied Mathematics**, v. 45, p. 573-582, 1987b.

SIROVICH, L., Turbulence and the dynamics of coherent structures part III: dynamics and scaling. **Quarterly of Applied Mathematics**, v. 45, p. 583-590, 1987c.

VARADAN, T. K.; PRATHAP, G.; RAMANI, H. V. Nonlinear free flexural vibrations of thin circular cylindrical shells. **AIAA Journal**, [s. l.], v. 27, n. 9, p. 1303-1304, 1989.

VRIES, J. **The Imperfection Data Bank and its Applications**. 2009. 190 f. Tese Nederlandse Defensie Academie, Faculteit Militaire Wetenschappen, Netherlands, 2009.

WOLTER, C. **Uma introdução à redução de modelos através da expansão de Karhunen-Loève**. 2001. 54 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) – Departamento de Engenharia Mecânica, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2001.