Departamento de Matemática e NEAM (Núcleo de Estudo e Ação sobre o Menor)

PROJETO MATEMÁTICA

COMUNIDADE E UNIVERSIDADE

Número 12

Funções e Gráficos: Uma Proposta Com ou Sem Computador

Autores:
Gilda de La Rocque Palis
João Bosco Pitombeira
Alcilea Augusto

Colaboradora:
Valleria do Rego Monteiro Guimarães

PUC RIO

Matemática PUC-Rio

NEAM
NÚCLEO DE ESTUDO E AÇÃO SOBRE O MENOR

PROJETO MATEMÁTICA, COMUNIDADE

E

UNIVERSIDADE

FUNÇÕES E GRÁFICOS

Uma proposta com ou sem computador

Duas sessões

Autores:

Gilda de La Rocque Palis

João Bosco Pitombeira

Alcilea Augusto

Colaboradora:

Valleria do Rego Monteiro Guimarães

2018

Resumo

O curso *Funções e gráficos, Uma proposta com ou sem computador* foi desenvolvido de setembro a novembro de 1989, no âmbito do *Projeto Matemática, Comunidade e Universidade*. O curso era dirigido a professores do ensino do 2^o grau (hoje, ensino médio) e sua proposta incluía: associar a representação algébrica de funções à sua representação gráfica; analisar o uso de diferentes escalas nos gráficos, sua importância e eventual exploração na distorção da comunicação de dados; explorar gráficos na resolução de problemas, entre outros temas que surgissem no desenrolar dessas atividades. Foram planejadas também seções com micro computadores para pôr em prática algumas dessas atividades. Naquela ocasião, foram enunciados mais exercícios do que seria possível resolver durante o curso. Como não era fácil o acesso a questões de concursos ou vestibulares, um acervo de tais questões era muito importante para o professor.

Neste módulo, estão enunciados e resolvidos os exercícios cuja resolução consta de anotações da professora Valleria do Rego Monteiro Guimarães, participante do curso. Alguns deles foram resolvidos com softwares atuais, pois foram considerados interessantes dentro do objetivo do curso. Nem todos foram transcritos aqui, pois hoje em dia há, na Internet, muitos problemas enunciados e resolvidos à disposição dos professores.

Nesta série, o curso será exposto em dois módulos.

Este é o primeiro deles, com as três primeiras sessões, em que problemas eram propostos para resolução manual, em grupos e discussão posterior.

O segundo módulo apresenta alguns dos problemas que foram resolvidos nas sessões com computador. Durante o curso, foi usado o software Winplot, que é gratuito e cabia num disquete que foi distribuído aos participantes. No módulo relativo a essas aulas, utilizamos o Maple e o Geogebra.

Como nosso objetivo é retratar, da maneira mais fiel possível, a experiência que constituiu o *Projeto Matemática Universidade e Comunidade*, não faremos considerações sobre o embasamento te´orico que nos levou a escolher as atividades propostas e a conduzir os trabalhos do grupo. Os leitores poderão facilmente reconhecer nos problemas propostos e nas observações feitas pela equipe a influência das ideias de David Tall, Ed Dubinsky por um lado, e de Raymond Duval, por outro.

A valiosa recuperação de eventos e discussões durante o curso foi possível graças à professora Valleria do Rego Monteiro Guimarães, participante do grupo de cursistas que, gentilmente, nos cedeu suas minuciosas anotações.

Palavras Chave: Representação algébrica de funções; Representação gráfica de funções; Escalas e gráficos; Distorção da comunicação de dados por manipulação de escalas; Uso de gráficos na resolução de problemas, Softwares para o traçado de gráficos.

Conteúdo

1 A proposta e os participantes

Como foi exposto no resumo, a proposta deste curso era estudar e explorar a representação gráfica de funções, com ou sem o uso do computador.

Duas foram as razões que levaram a equipe a fazer tal proposta:

1. Professores dos cursos iniciais nas universidades percebiam que os estudantes vindos do curso básico olhavam as funções e seus gráficos como uma coleção de pontos isolados, em geral, somente aqueles que calculavam para localizar o gráfico ou para estudar pontos de extremos... Faltava ao estudante olhar a função como um objeto, reconhecer seu comportamento global, aplicar translações ou outras transformações ao lidar com os gráficos.

2. Era pequeno o acervo de funções cujos gráficos os estudantes podiam construir só com os recursos algébricos de que dispunham. A possibilidade de traçar gráficos de outras funções abriu um campo muito mais rico para o estudo nesse nível escolar.

A tese da equipe do Projeto era que o trabalho com os gráficos daria ao estudante maior intimidade com a função como um objeto e que o uso de softwares gráficos permitiria a observação desse comportamento numa coleção bem maior de funções.

Foi entregue aos participantes um disquete (lembram-se deles?) com o software Winplot a fim de que pudessem resolver as questões com, ou sem, computador. As primeiras reuniões, porém, foram desenvolvidas sem o uso de computadores e são elas que compõem esse módulo.

2 Sessão do dia 19/09/1989

Do primeiro encontro, a 19 de setembro de 1989, participaram 10 professores do ensino do 2º grau.[1] Eles foram distribuídos em três grupos e cada grupo estudaria duas dentre as questões propostas a fim de resolvê-las e apresentar a solução encontrada a todos os participantes.

Seguem-se as questões que foram resolvidas pelos grupos. Como foi dito no resumo inicial, foram apresentadas muito mais questões do que essas.

2.1 Atividades propostas

1. Considere o sistema $\begin{cases} 2x + 4y = 5 \\ 5x + k_1 y = k_2 \end{cases}$

   Para que pares $(k_1,\ k_2)$ o sistema

   (a) tem uma única solução?

   (b) tem uma infinidade de soluções?

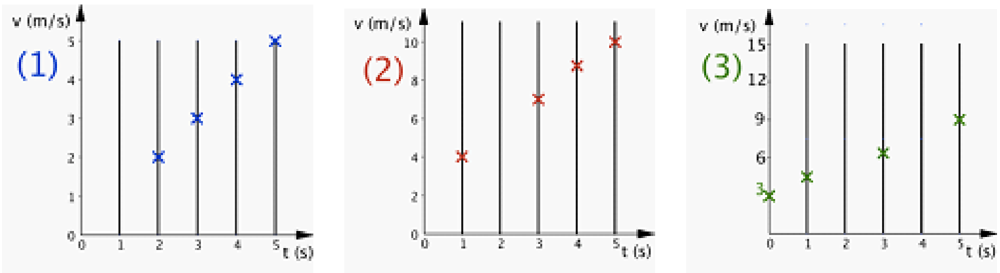
   (c) não tem solução

2. Encontre uma equação de cada uma das retas que passa pelo ponto $(3, 2)$ e que forma com os eixos coordenados um triângulo de área 12.

3. (Prova de Física da 1ª fase do Vestibular para as áreas I a V, UFF, 1989) Os pontos marcados nos gráficos da Figura 1 representam as velocidades de três partículas medidas em instantes diferentes. Pela análise desses gráficos é possível determinar os valores das acelerações das partículas. Assinale a alternativa que relacione os gráficos na ordem crescente destas acelerações.

   (a) 1, 2, 3

[1] Atual Ensino Médio.



(a) Gráfico (1) (b) Gráfico (2) (c) Gráfico (3)

Figura 1: Gráficos da Questão 5.

(b) 1, 3, 2

(c) 2, 1, 3

(d) 3, 1, 2

(e) 3, 2, 1

4. Considere a família de funções

$$y = a(x+1)^2 + b, \quad a \neq 0.$$

Para que pares (a, b) as funções

(a) têm dois zeros reais distintos?

(b) têm somente um zero real?

(c) não têm zeros reais?

5. Dada a família de parábolas

$$y = x^2 + bx + 1,$$

ache o lugar geométrico de seus vértices.

6. Determine a equação de uma família de parábolas cujos vértices descrevam o círculo de centro na origem e raio 2.

2.2 Soluções e comentários

As soluções e comentários apresentados em aula e aqui expostos são retirados dos registros da professora Valleria do Rego Monteiro Guimarães. Ao grupo I coube resolver as questões 1 e 4; ao grupo II as questões 2 e 5 e, ao grupo III, as questões 3 e 6.

1ª questão: *Considere o sistema*

$$\begin{cases} 2x + 4y = 5 \\ 5x + k_1 y = k_2 \end{cases}$$

Para que pares (k_1, k_2) *o sistema*

1. *tem uma única solução?*

2. *tem uma infinidade de soluções?*

3. *não tem solução?*

A resolução apresentada pelo grupo utilizou a regra de Cramer, com cálculo direto dos determinantes. Uma cópia das anotações manuscritas encontra-se no Anexo 1.

Foi lembrado que, para que o sistema tivesse uma única solução, o determinante

$$\Delta = \left\| \begin{array}{cc} 2 & 4 \\ 5 & k_1 \end{array} \right\|$$

teria que ser diferente de 0, ou seja:

$$2k_1 - 20 \neq 0 \text{ ou } k_1 \neq 10 \text{ e } k_2 \text{ qualquer.}$$

Para que houvesse uma infinidade de soluções, o grupo aplicou a regra de Cramer, impondo que os três determinantes fossem nulos.

$$\Delta = \left\| \begin{array}{cc} 2 & 4 \\ 5 & k_1 \end{array} \right\| = 0; \Delta_x = \left\| \begin{array}{cc} 5 & 4 \\ k_2 & k_1 \end{array} \right\| = 0 \text{ e } \Delta_y = \left\| \begin{array}{cc} 2 & 5 \\ 5 & k_2 \end{array} \right\| = 0.$$

Donde,

$$k_1 = 10 \text{ e } k_2 = \frac{25}{2}.$$

E, para que não houvesse solução, impôs que $\Delta = 0$, mas Δ_x, ou Δ_y, fossem diferentes de 0. Isso levou a

$$k_1 = 10 \text{ e } k_2 \neq \frac{25}{2}.$$

Observações da equipe:

Outros caminhos levam à resposta. Um deles, seria pelo escalonamento. Os professores preferiram a regra de Cramer com cálculo direto dos determinantes. Disseram que o aluno utiliza mais a regra de Cramer do que o escalonamento, mesmo no caso de 3 equações.

Com efeito, para duas equações a duas incógnitas, o escalonamento não apresenta grande economia de cálculo, confundindo-se com o processo de adição. Com coeficientes não determinados, como é o caso aqui, fica até mais complicado.

O processo gráfico se baseia no fato de que cada uma das equações define uma reta no plano coordenado. No exemplo aqui estudado, uma reta está bem determinada, e então a resolução gráfica exigiria um estudo preliminar sobre as possibilidades da segunda reta.

Quanto ao uso da regra de Cramer, um cuidado deve ser tomado quando se trata de um sistema com 3 ou mais equações com o mesmo número de incógnitas, em que os determinantes sejam todos nulos. Há livros didáticos que consideram que, nesse caso, o sistema possui infinitas soluções (indeterminado, na nomenclatura usual). Isso é verdade para sistemas lineares com 2 equações a 2 incógnitas.

Com efeito, as possíveis posições relativas de duas retas no plano xy são;

a) concorrentes, quando têm inclinações diferentes, o que faz $\Delta \neq 0$. As retas se encontram num só ponto, e então o sistema tem solução única. Diz-se determinado.

Se têm a mesma inclinação, então $\Delta = 0$ e:

b) as duas retas podem ser paralelas distintas, quando pelo menos um dos determinantes Δ_x ou Δ_y é diferente de 0, isto é, $\Delta_x^2 + \Delta_y^2 \neq 0$.

As retas não se encontram, então o sistema não tem solução. Diz-se impossível.

Ou, ainda:

c) as duas retas coincidem, quando $\Delta = \Delta_x = \Delta_y = 0$.

Todos os pontos de uma reta são comuns à outra, então o sistema tem uma infinidade de soluções, dependem de um parâmetro. Diz-se indeterminado.

Aqui, cabe mais uma observação: no caso de uma equação do 1º grau, a uma incógnita, quando ela é indeterminada (redutível a $k = k$, em que k é um número), qualquer número real satisfaz à equação. No caso de sistemas com uma infinidade de soluções, isso não quer dizer que quaisquer valores das incógnitas sejam soluções. No caso do sistema de duas equações a duas incógnitas em que as 2 retas coincidem, os infinitos pares que são soluções do sistema são as coordenadas dos pontos dessa reta. Podem ser descritos em função de um parâmetro.

Consideremos, agora, um sistema linear de tês equações a tês incógnitas. São, em geral, três planos no espaço x, y, z e, têm-se, de modo análogo, os determinantes de ordem 3, Δ, Δ_x , Δ_y e Δ_z.

As posições relativas de três planos no espaço x, y, z são as seguintes:

1– Os três planos encontram-se num único ponto, quando $\Delta \neq 0$.
Então o sistema tem solução única. Diz-se determinado.

2 – Quando $\Delta = 0$, há três possibilidades:

a) Os três planos têm uma reta e só os pontos dessa reta em comum, quando pelo menos um dos determinantes Δ_x ou Δ_y ou Δ_z é diferente de 0, isto é, $\Delta_x^2 + \Delta_y^2 + \Delta_z^2 \neq 0$.

Os planos se encontram segundo uma reta, então o sistema tem infinitas soluções, que dependem de um parâmetro. Na matemática escolar, diz-se que o sistema é *indeterminado*.

Ou:

b) Dois dos planos são paralelos entre si, distintos. Qualquer que seja a posição do 3º plano, os três planos não têm ponto em comum. Caso em que $\Delta = 0$ e pelo menos um dos determinantes Δ_x, Δ_y ou Δ_z se anula também. Observe que pode acontecer que $\Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = 0$, seria o caso em que o 3º plano seja também paralelo a estes, coincidindo, ou não, com um dos anteriores.

Os três planos não têm ponto em comum, então o sistema não tem solução. Na matemática escolar, diz-se que o sistema é *impossível*.

Ou, ainda:

c) Os três planos coincidem e, nesse caso, $\Delta = 0$ e $\Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = 0$.

Os planos coincidem, então o sistema tem infinitas soluções, que dependem de dois parâmetros. Na matemática escolar diz-se que o sistema é *indeterminado*.

Enfim, em sistemas lineares de ordem três, quando $\Delta = \Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = 0$, o sistema pode ser impossível ou indeterminado, apresentando nenhuma ou uma infinidade de soluções, como nos exemplos a seguir:

$$(A)\begin{cases} x+2y+3z=6 \\ 2x+4y+6z=12 \\ 3x+6y+9z=18 \end{cases} \qquad (B)\begin{cases} x+2y+3z=6 \\ 2x+4y+6z=12 \\ 3x+6y+9z=15 \end{cases}$$

Em ambos os sistemas têm-se $\Delta = \Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = 0$, porque pelo menos duas colunas são proporcionais em cada um dos determinantes.

O sistema (A) tem uma infinidade de soluções dependendo de dois parâmetros: $\begin{cases} x = 6-2s-3t \\ y = s \\ z = t \end{cases}$

e o sistema (B) não tem solução, pois as ternas que satisfizerem às duas primeiras equações não satisfarão à última.

Uma comparação entre o uso da regra de Cramer e o processo de escalonamento é objeto de um artigo de Elon Lages Lima, publicado na Revista do Professor de Matemática, RPM 23,[2] em que é feita essa observação sobre o uso equivocado da regra de Cramer.

2ª questão: Encontre uma equação de cada uma das retas que passa pelo ponto $(3,2)$ *e que forma com os eixos coordenados um triângulo de área* 12.

Uma cópia da resolução apresentada pelo grupo encontra-se no Anexo 2.

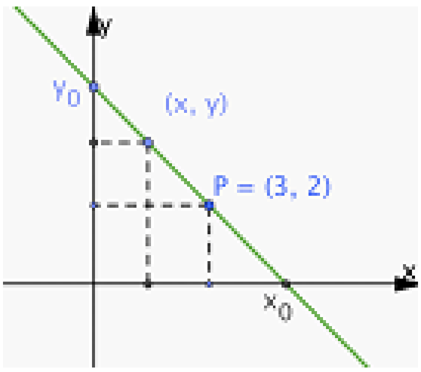


Figura 2: Reta que passa por $P = (3,2)$.

O grupo considerou retas que passam pelo ponto $P = (3,2)$ e encontram o eixo x no ponto $(x_0, 0)$ e o eixo y no ponto $(0, y_0)$ (Veja a Figura 2). A área do triângulo que uma dessas retas faz com os eixos é igual à metade de $|x_0 \times y_0|$. Queremos, então que

[2] <http://rpm.org.br/cdrpm/23/2.htm>.

$$\frac{|x_0 \times y_0|}{2} = 12,$$

o que já implica que x_0 e y_0 sejam diferentes de 0. Uma reta que passe pelos pontos P e $(x_0, 0)$ tem como equação

$$y = ax + b, \text{ com } \quad b = y_0, \quad 2 = 3a + y_0$$

ou

$$a = \frac{2 - y_0}{3} \quad \text{e} \quad x_0 = -\frac{b}{a}.$$

Isto é:

$$x_0 = -\frac{3y_0}{(2 - y_0)}.$$

donde, finalmente:

$$\mid x_0 \times y_0 \mid = 3\frac{{y_0}^2}{|2 - y_0|}.$$

O grupo considerou três casos, conforme os sinais de x_0 e de y_0, a saber (Ver Figura 3):

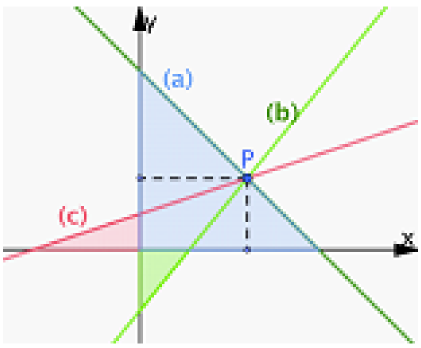


Figura 3: Retas que passam pelo ponto $P = (3, 2)$.

(a) Em que x_0 e y_0 são positivos, então: $x_0 > 3$ e $y_0 > 2$.

(b) Em que x_0 é positivo e y_0 é negativo, então: $0 < x_0 < 3$ e $y_0 < 0$.

(c) Em que x_0 é negativo e y_0 é positivo, então: $x_0 < 0$ e $0 < y_0 < 2$.

Caso (a):

$$\frac{x_0 \times y_0}{2} = 12 \Longrightarrow x_0 \times y_0 = 24 \Longrightarrow \frac{y_0^2}{y_0 - 2} = 8 \Longrightarrow y_0^2 - 8y_0 + 16 = 0.$$

Isso implica que $(y_0 - 4)^2 = 0$, cuja solução é $y_0 = 4$ e uma equação da reta é:

$$y = -\frac{2}{3}x + 4.$$

Casos (b) e (c):

Levando em conta os sinais, a equação será

$$\frac{y_0^2}{2 - y_0} = 8 \Longrightarrow y_0^2 + 8y_0 - 16 = 0,$$

cujas soluções são $-4\left(1 \pm \sqrt{2}\right)$.

A solução do caso (b) é negativa, $y_0 = -4\left(1 + \sqrt{2}\right)$ e a equação da reta será:

$$y = \left(2 + \frac{4\sqrt{2}}{3}\right)x - 4\left(1 + \sqrt{2}\right).$$

E, no caso (c), a solução é positiva e menor do que 2: então, $y_0 = 4\left(\sqrt{2} - 1\right)$ e a equação da reta será:

$$y = \left(2 - \frac{4\sqrt{2}}{3}\right)x + 4\left(\sqrt{2} - 1\right)$$

3ª questão: (*Prova de Física da 1ª fase do Vestibular para as áreas I a V, UFF, 1989*) *Os pontos marcados nos gráficos da Figura 4 representam as velocidades de três partículas medidas em instantes diferentes. Pela análise destes gráficos é possível determinar os valores das acelerações das partículas. Assinale a alternativa que relacione os gráficos na ordem crescente dessas acelerações.*

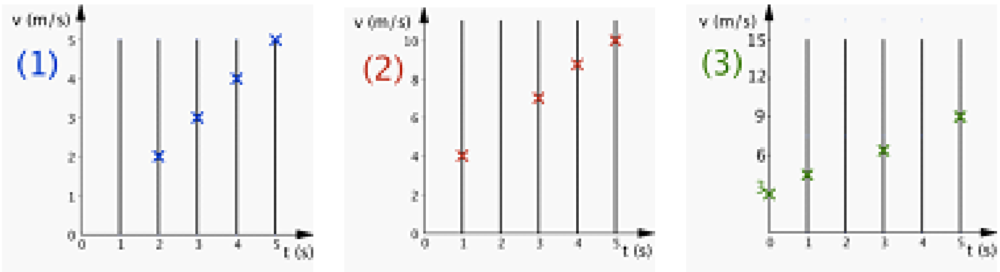
1. *1, 2, 3*

2. *1, 3, 2*

3. *2, 1, 3*

4. *3, 1, 2*

5. *3, 2, 1*



(a) Gráfico 1 (b) Gráfico 2 (c) Gráfico 3

Figura 4: Gráficos da Questão 3.

Para responder a esta questão é preciso lembrar que a aceleração mede o crescimento da velocidade (é a derivada da velocidade). O primeiro cuidado necessário para analisar a variação da velocidade nestes gráficos é a comparação das unidades e das escalas. As unidades são as mesmas nos três gráficos, assim como a escala no eixo dos tempos. A escala no eixo das velocidades, porém, varia de um gráfico para outro. Pelos dados oferecidos, a velocidade no gráfico (1) varia 3 m/s em 3 s. No gráfico (2), ela varia 6 m/s em 4 s e, no gráfico (3), varia 6 m/s em 5 s. Trata-se, portanto, de ordenar as frações $\frac{3}{3}$, $\frac{6}{4} = \frac{3}{2}$ e $\frac{6}{5}$. Ora, tem-se:

$$\frac{3}{3} = 1; \quad \frac{3}{2} = 1,5 \quad \text{e } \frac{6}{5} = 1,2.$$

Logo, a opção correta é (b).

<u>Observações da equipe:</u>

Imagina-se que seja esse o modo como a equipe proponente da questão pretendia que fossem analisados esses gráficos. É claro que com a informação somente desses pontos, não é possível conhecer a aceleração ponto a ponto. Os cálculos acima referem-se à média que pode ser calculada com os poucos dados fornecidos. Nada impede que, nos intervalos, a aceleração assuma valores muito diferentes desses...

4ª questão: Considere a família de funções
$y = a(x+ 1)^2+ b$, em que $a \neq 0$.
Para que pares (a, b) as funções

1. *têm dois zeros reais distintos?*

2. *têm somente um zero real?*

3. *não têm zeros reais?*

Essa é uma questão mais comumente encontrada e, em geral, resolvida algebricamente pelo cálculo do discriminante.

Foi apresentada também a solução gráfica, Anexo 3, levando em conta que os gráficos das funções dessa família são obtidos do gráfico de $y = (x+1)^2$ da seguinte forma: o parâmetro a atua sobre a escala quando $a > 0$ e, quando $a < 0$, também inverte o sentido; o parâmetro b provoca o deslocamento da parábola paralelamente ao eixo y.

Assim, é que o grupo considerou os dois casos:

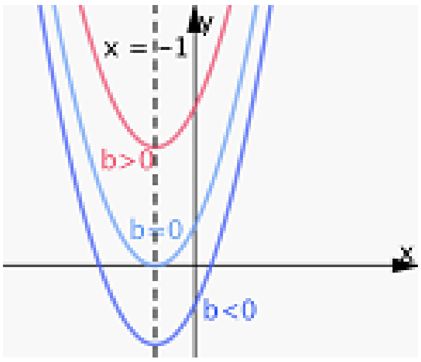


Figura 5: Parábolas com a concavidade para cima.

1º caso: $a > 0$.

A concavidade da parábola é para cima (Veja a Figura 5) e,

- se $b > 0$, a curva é deslocada no sentido positivo do eixo y, afastando-se do eixo x e a função não tem zeros reais;

- se $b = 0$, a parábola tangencia o eixo x e a função tem um único zero real;

- se $b < 0$, a parábola é deslocada no sentido negativo do eixo y, provocando o corte do eixo x em dois pontos distintos, o que implica que a função correspondente tenha dois zeros reais.

2º caso: $a < 0$.

A concavidade da parábola é para baixo (Veja a Figura 6) e,

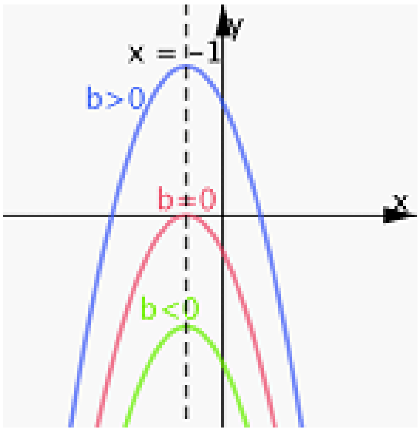


Figura 6: Parábolas com a concavidade para baixo.

- se $b > 0$, a curva é deslocada no sentido positivo do eixo y provocando o corte do eixo x em dois pontos distintos, o que implica que a função correspondente tenha dois zeros reais;
- se $b = 0$, a parábola tangencia o eixo x e a função tem um único zero real;
- se $b < 0$, a parábola é deslocada no sentido negativo do eixo y, afastando-a do eixo x e a função não tem zeros reais.

A resolução algébrica foi feita pela análise do discriminante que, em nosso caso, é

$$\Delta = -4ab,$$

o que levou ao resultado:

- se $b = 0$, $\Delta = 0$ e a função tem um único zero;
- se a e b têm o mesmo sinal, $\Delta < 0$ e a função não tem zeros reais;
- se a e b têm sinais contrários, $\Delta > 0$, e a função tem dois zeros reais.

5ª questão: Dada a família de parábolas

$$y = x^2 + bx + 1,$$

ache o lugar geométrico de seus vértices.

Esta é uma questão menos comum. A resolução do grupo partiu das coordenadas dos vértices dessas parábolas, dependentes do parâmetro b.

$$V_b = (-\frac{b}{2}, 1 - \frac{b^2}{4})$$

Num plano (X, Y), os vértices V_b descrevem a curva $Y = f(X)$, em que (Veja a Figura7)

$$X = -\frac{b}{2} \text{ e } Y = 1 - \frac{b^2}{4},$$

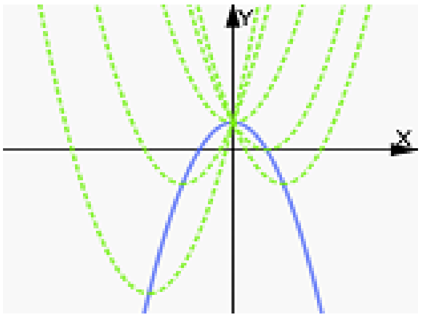


Figura 7: Parábolas da Questão 5.

donde se calcula:

$$Y = 1 - X^2.$$

Observações da equipe:

O manuscrito desta resolução encontra-se no Anexo 4, no qual se lê também que, ao final desta questão, foi discutida a possibilidade de construção do gráfico de qualquer função polinomial do 2º grau pelo processo de completar quadrados.

De fato, dado um trinômio do 2º grau, quando se somam e subtraem termos a fim de separar os termos em x num quadrado, obtém-se a identidade:

$$ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \frac{b}{a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right] = a(x - x_V)^2 + y_V,$$

em que $V = (-\frac{b}{2a}, -\frac{(b^2-4ac)}{4a})$ é o vértice da parábola, gráfico da função

$$y = ax^2 + bx + c.$$

A expressão $y = a(x - x_V)^2 + y_V$ permite perceber que, no sistema de coordenadas (X, Y), no qual

$$X = x - x_V \text{ e } Y = y - y_V,$$

o gráfico da função dada é a parábola

$$Y = aX^2.$$

Observa-se que a mudança de coordenadas $(x, y) \to (X, Y)$ corresponde a um deslocamento, em que a origem do plano (X, Y) fica no vértice da parábola.

O gráfico de $Y = aX^2$, corresponde a uma mudança de unidades no eixo X na parábola $Y = X^2$, se $a > 0$ e na parábola $y = -X^2$, se $a < 0$.

Conclusão: o gráfico de qualquer função $y = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$, é igual à parábola $y = x^2$, se $a > 0$, ou à parábola $y = -x^2$, se $a < 0$, sujeita a uma translação e a uma mudança de unidade no eixo x.

6ª questão: Determine a equação de uma família de parábolas cujos vértices descrevam o círculo de centro na origem e raio 2.

Esta questão é uma inversa da anterior e sua discussão foi feita somente no 3º encontro do curso, datado de 03/10/1989.

É claro que são infinitas as famílias de parábolas com vértice nessa circunferência. A primeira ideia do grupo foi a de considerar parábolas como na Figura 8. Não atinaram, porém, com a forma das equações dessas parábolas e passaram a considerar parábolas com eixos paralelos ao eixo y que são gráficos de funções polinomiais do 2º grau.

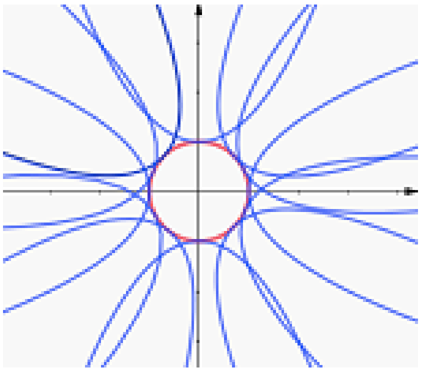


Figura 8: Gráfico da Questão 6.

O círculo de centro na origem e raio 2 tem como equação

$$x^2 + y^2 = 4.$$

A solução apresentada foi um pouco mais complicada do que a apresentada aqui porque a equação de partida foi a mais geral:

$$y = ax^2 + bx + c.$$

Só no final dos cálculos, consideraram $a = 1$ e perceberam que poderiam calcular b em função de c ou c em função de b.

Vamos escolher uma forma mais simples dessa equação neste estudo,

$$y = x^2 + 2bx + c.$$

O vértice desta parábola é o ponto $(-b, c - b^2)$. A escolha de $2b$ é para evitar os denominadores. Esse vértice estará na circunferência de centro na origem e raio 2 quando (Veja a Figura 9)

$$b^2 + (c - b^2)^2 = 4 \text{ ou } c^2 - 2b^2c + b^4 + b^2 - 4 = 0.$$

daqui:

$$c = b^2 \pm \sqrt{4 - b^2}$$

E a família procurada é:

$$y = x^2 + 2bx + b^2 \pm \sqrt{4 - b^2}, \text{ com } |b| < 2.$$

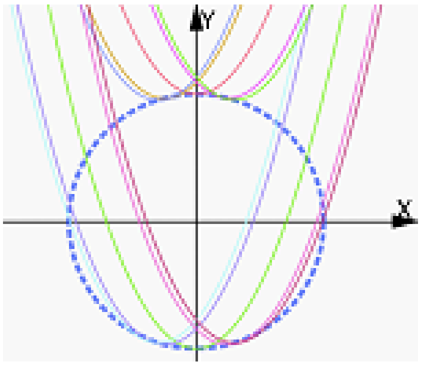


Figura 9: Parábolas verticais com vértice sobre $x^2 + y^2 = 2$.

A equipe interferiu, lembrando a vantagem de completar os quadrados, o que leva à equação na forma $y = a(x - x_V)^2 + y_V$ e, nessa questão, a vantagem de usar a equação paramétrica da circunferência dada.

Tomando a equação paramétrica da circunferência de centro na origem e raio 2,

$$\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 2\,\mathrm{sen}\,t \end{cases}$$

como lugar dos vértices das parábolas, isto é, se

$$\begin{cases} x_V = 2\cos t \\ y_V = 2\,\mathrm{sen}\,t, \end{cases}$$

a equação das parábolas com esses vértices, para $a = 1$, será:

$$y = (x - 2\cos t)^2 + 2\,\mathrm{sen}\,t,$$

e o parâmetro da família é t. A família é a mesma obtida anteriormente e a relação entre os parâmetros é $b = -2\cos t$.

Foi justificada a proposta dessa questão como um procedimento interessante para que o professor possa formular questões sobre famílias como essas.

Observações da equipe:

Outras famílias podem ser construídas explorando as mesmas equações com uma troca de sinal, como, por exemplo,

$$y = -x^2 + 2bx - b^2 \pm \sqrt{4 - b^2}, \text{ com } |b| < 2,$$

ou, na forma paramétrica,

$$y = -(x - 2\cos t)^2 + 2\,\text{sen}\, t.$$

Pela simetria das curvas, a troca entre x e y daria famílias de parábolas com eixos paralelos ao eixo x.

Alunos que tivessem estudado equações gerais de cônicas poderiam ainda construir famílias de parábolas com eixos não paralelos aos eixos coordenados, como aquelas imaginadas, de início, pelo grupo.

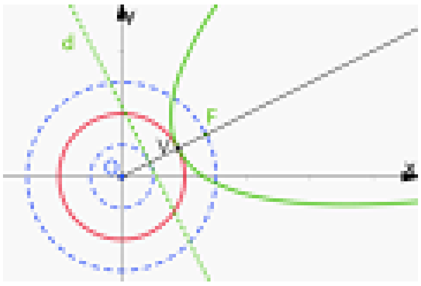


Figura 10: Exemplo de parábola com o vértice sobre $x^2 + y^2 = 1$.

Uma família com aquela imagem seria, por exemplo, obtida por parábolas com focos na circunferência de raio 3 e diretrizes tangentes à circunferência de raio 1 (Veja a Figura 10). Os vértices dessas parábolas ficam à distância 2 da origem (média entre 1 e 3). Tomando a semirreta que sai da origem e passa por esse vértice, o foco da parábola é o encontro da semirreta com a circunferência de raio 3 e a diretriz é a perpendicular a essa semirreta pelo ponto de encontro com a circunferência de raio 1.

Se o foco é o ponto $F = (3\cos t, 3\,\text{sen}\, t)$, a diretriz é a reta que passa pelo ponto $(\cos t, \text{sen}\, t)$, com inclinação igual a $-\frac{1}{\text{tg}\, t}$. A equação da diretriz é, portanto,

$$y - \text{sen}\, t = -\frac{1}{\text{tg}\, t}(x - \cos t) \Longrightarrow x\cos t + y\,\text{sen}\, t = 1$$

Igualando os quadrados das distâncias de $P = (x, y)$ à diretriz e de P a F, obtém-se a equação das parábolas:

$$(x\cos t + y\,\text{sen}\, t - 1)^2 = (x - 3\cos t)^2 + (y - 3\,\text{sen}\, t)^2,$$

ou

$$x^2\text{sen}^2 t + y^2\cos^2 t - 2xy\,\text{sen}\, t\cos t - 4x\cos t - 4y\,\text{sen}\, t + 8 = 0.$$

Durante a discussão, foi lembrado que o aluno do ensino médio não tem o costume de olhar para uma função polinomial do 2º grau que depende de um parâmetro como uma família de funções ou como uma família de parábolas. Foi dado o exemplo de que, ao decidir quais os valores de m para os quais a equação $x^2 + (m-1)x + 2m = 0$ tem duas raízes reais, uma só ou nenhuma, o aluno calcula diretamente o discriminante. Não pensa em completar quadrados para distinguir as parábolas, gráficos de seus primeiros membros, que cortam, ou não, o eixo x.

Acontece que, nesse caso, o cálculo do discriminante é, de fato, o caminho mais curto.

3 Sessão do dia 26/09/1989

Neste segundo encontro, com a presença de oito participantes, a proposta foi para que se formassem dois grupos que resolveriam as mesmas questões a fim de comparar as resoluções entre si.

3.1 Atividades propostas

1. Qual a equação da corda comum às duas circunferências

$$x^2 + y^2 + 2x + 4y - 9 = 0,$$

$$x^2 + y^2 + 6x - 8y - 18 = 0.$$

2. (*Vestibular da PUC – Rio, Grupos I e III, 1989 – Parte* (b) *da 4ª questão discursiva*)

   O conjunto solução do sistema de três variáveis

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ x + 2y + z = 1 \end{cases}$$

   é uma reta em $\mathbb{R}^3$.

   Determine a qual dos três planos coordenados, xy, xz ou yz, a reta solução é paralela.

3. Considere as seis curvas da Figura 11. A curva 1 é o gráfico de uma função $g(x)$. Dentre as curvas, 2, 3, 4, 5 e 6, qual é o gráfico de

$$g(2x),\ g\left(\frac{x}{2}\right),\ 2\,g(x),\ g(x+1) \text{ e de } g(x-1)?$$

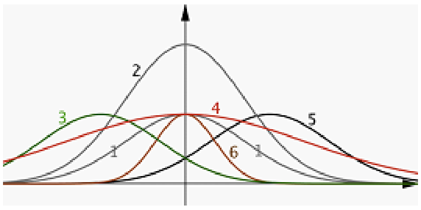


Figura 11: Gráficos da Questão 3.

4. O traçado a seguir é a representação gráfica de uma função (Ver Figura 12).

$$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}.$$

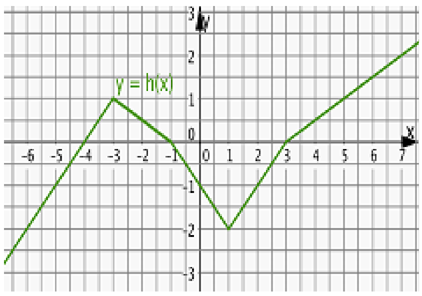


Figura 12: Questão 3.

Trace as representações gráficas das funções a seguir. Explicite, em cada caso, por que transformação geométrica as diferentes representações gráficas se deduzem da representação de h.

$$-h\,(x);\ h\,(x);\ h\,(x)+2;\ h\,(x+2);\ 2\,h\,(x);\ h\,(2x);\ h\,(|x|);\ 3\,h\,(2-x).$$

3.2 Soluções e comentários

Continuamos apresentando sempre algumas soluções e comentários retirados dos registros da professora Valleria.

1ª questão: Qual a equação da corda comum às duas circunferências

$$x^2 + y^2 + 2x + 4y - 9 = 0,$$

$$x^2 + y^2 + 6x - 8y - 18 = 0.$$

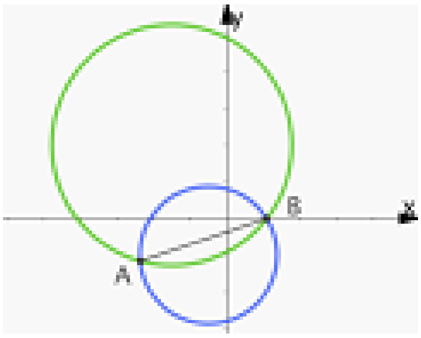


Figura 13: Duas circunferências que têm uma corda comum.

Para que haja uma corda comum, é preciso que essas circunferências (Ver Figura 13) se cortem em dois pontos (ou que coincidam, o que não é o caso). Esses pontos estão nas duas circunferências. Suas coordenadas satisfazem, portanto, às duas equações, logo satisfazem a qualquer combinação linear dessas equações. Um grupo considerou, então, a diferença entre elas e obteve:

$$(x^2 + y^2 + 6x - 8y - 18) - (x^2 + y^2 + 2x + 4y - 9) = 0,$$

ou

$$4x - 12y = 9.$$

Essa é uma equação do 1ºgrau em x e y e, portanto, equação de uma reta. Ela é satisfeita pelos dois pontos que pertencem a ambas as circunferências, logo é uma equação da reta determinada por eles. A corda é um segmento dessa reta.

Outro grupo chegou a essa mesma equação comparando os valores de $x^2 + y^2$ nas duas equações:

$$x^2 + y^2 = -2x - 4y + 9$$

$$x^2 + y^2 = -6x + 8y + 18$$

e assim: $-2x - 4y + 9 = -6x + 8y + 18$, o que leva à mesma equação.

Foi chamada a atenção sobre combinações lineares das equações de duas circunferências. Como na equação de uma circunferência no plano x, y, os termos em x^2 e y^2 têm os mesmos coeficientes e não há termo em xy, sempre há uma combinação linear de equações de duas circunferências que elimine os termos quadráticos.

Ficou a pergunta: O resultado é sempre a equação de uma reta? E essa reta é sempre uma corda comum?

Se escritas na forma canônica, as equações da circunferência de centro (a, b) e raio r e outra de centro (c, d) e raio s são:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2 \quad \text{e} \quad (x - c)^2 + (y - d)^2 = s^2$$

e, subtraindo a 2ª da 1ª:

$$(a - c)x + (b - d)y = k, \text{ em que } 2k = s^2 - r^2 + (a^2 - c^2) + (b^2 - d^2).$$

Essa será, portanto, a equação de uma reta quando $a \neq c$ ou $b \neq d$, isto é, quando as circunferências não forem concêntricas.

Se elas forem concêntricas e com raios distintos a equação obtida será $k = 0$, caso da equação impossível, visto que $a = c$; $b = d$ e $s \neq r$.

Se forem coincidentes, a equação será $0 = 0$, o que não dá informação alguma...

Se não forem concêntricas, a equação será sempre a equação de uma reta, mas..., que reta é essa?

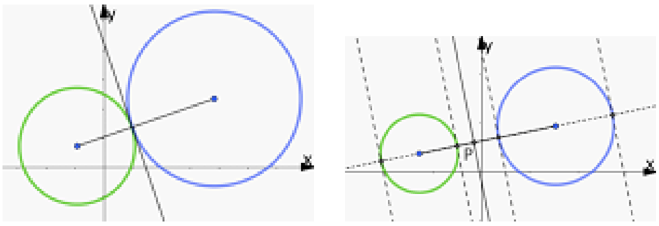
Ora, se as circunferências se cortarem em dois pontos, essa será a reta suporte da corda comum, visto que esses dois pontos satisfazem a ambas as equações, logo satisfazem a qualquer combinação linear delas.

E, se as circunferências tiverem só um ponto ou nenhum ponto em comum (Ver Figura 14)?

A primeira observação que se pode fazer dessa reta quando as circunferências não sejam concêntricas é que ela é perpendicular ao segmento que une os centros.

De fato, a inclinação do segmento que une os centros (a, b) e (c, d), se $a \neq c$ e $b \neq d$, é $\frac{b-d}{a-c}$
e a inclinação da reta $(a - c)x + (b - d)y = k$ é $-\frac{(a-c)}{(b-d)}$.

Se $a = c$, então $d \neq b$, e o segmento que une os centros será paralelo ao eixo y e a reta $(b - d)y = k$ será paralela ao eixo x. Analogamente, no caso em que $b = d$, quando então $a \neq c$, e o segmento que une os centros será paralelo ao eixo x e a reta $(a - c)x = k$ será paralela ao eixo y.



(a) Circunferências tangentes (b) Circunferências que não se cortam

Figura 14: Circunferências que se tangenciam ou que não se cortam.

Sendo assim, se as circunferências tiverem um único ponto em comum, o segmento que une os centros serão raios e a reta perpendicular a esses raios pelo ponto comum será, portanto, a tangente a ambas as circunferências por esse ponto.

Se não tiverem pontos em comum, ela será uma reta paralela a cada uma das tangentes a cada uma das circunferências nos pontos de encontro da reta suporte dos dois centros com cada uma das circunferências.

E o ponto P, em que a reta $(a-c)x+(b-d)y=k$ corta a reta suporte dos centros é a solução do sistema de equações:

$$\begin{cases} (a\ c)x+(b\ d)y=k \\ (b\ d)x-(a\ c)y=bc-ad \end{cases}$$

Para decidir se a equação obtida é a equação da corda comum, será preciso verificar se existe essa corda comum.

No caso do exercício dado, essa verificação poderia ser feita pela obtenção dos gráficos no computador.

Sem o computador, um procedimento geométrico seria comparar a distância entre os centros e os raios. Nesse caso, teríamos que escrever as equações das circunferências na forma canônica:

$$(x+1)+(y+2)=14$$

$$(x+3)+(y-4)=43$$

Os centros são portanto $(-1,-2)$ e $(-3,4)$ que estão à distância d, tal que

$$d^2=(-3+1)^2+(4+2)^2=40$$

e raios $\sqrt{14}$ e $\sqrt{43}$, com $\sqrt{40}<\sqrt{14}+\sqrt{43}$.

Um procedimento puramente algébrico seria tirar o valor de x ou de y na equação da reta, substituir esse valor na equação de uma das circunferências, o que daria uma equação do 2º grau. O sinal do discriminante mostra se a reta não encontra a circunferência, se a encontra em um único ponto ou se haveria dois pontos de encontro. O mesmo se daria com as duas circunferências. Em geral, esse processo é mais trabalhoso. Por exemplo, no caso estudado, tirando o valor de y da equação da reta encontrada, $y = \frac{4x-9}{12}$, e substituindo-o na equação da 1ªcircunferência, obtém-se:

$$x^2 + \left(\frac{4x-9}{12}\right)^2 + 2x + 4\left(\frac{4x-9}{12}\right) - 9 = 0 \Longrightarrow 160x^2 + 408x - 1647 = 0,$$

que tem discriminante positivo. São duas as soluções e os pontos dessa reta que encontram uma das circunferências encontram a outra também.

2ª questão: (*Vestibular da PUC – Rio, Grupos I e III, 1989 – Parte* (b)*da 42ª questão discursiva*).

O conjunto solução do sistema de três variáveis,

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ x + 2y + z = 1, \end{cases}$$

é uma reta em $\mathbb{R}^3$*. Determine a qual dos três planos coordenados,* xy*,* xz *ou* yz*, a reta solução é paralela.*

Combinando as equações, o primeiro grupo escreveu a equação dessa reta como intersecção de outros planos, verificando que

$$\begin{cases} x + z = 3 - y \\ x + z = 1 - 2y \end{cases} \text{ou} \begin{cases} 3 - y = 1 - 2y \\ x + z = 3 - y \end{cases} \text{ou} \begin{cases} y = -2 \\ x + z = 5 \end{cases}$$

Como intersecção destes outros planos, fica evidente que a reta pertence ao plano $y = -2$, sendo, portanto, paralela ao plano x, z.

Outro grupo preferiu o escalonamento, como a seguir:

$$\left\| \begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{matrix} \right\| \begin{pmatrix} 1^{\text{a}} \text{ linha} \\ 2^{\text{a}} \text{ linha} - 1^{\text{a}} \text{ linha} \end{pmatrix} \to \left\| \begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \end{matrix} \right\| \to$$

$$\to \left\| \begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \end{matrix} \right\| \begin{pmatrix} 1^{\text{a}} \text{ linha} - 2^{\text{a}} \text{ linha} \\ 2^{\text{a}} \text{ linha} \end{pmatrix} \to \left\| \begin{matrix} 1 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \end{matrix} \right\|,$$

que leva aos mesmos planos,

$$\begin{cases} x + z = 5 \\ y \quad\;\; = -2 \end{cases},$$

e, portanto, ao mesmo resultado.

A observação dos professores participantes foi que casos como esse, na dimensão 3, são tratados, em geral, só algebricamente pela dificuldade dos estudantes para visualizarem configurações espaciais e dos professores com o desenho.

Pareceu-nos que os próprios professores têm dificuldade de olhar para esse sistema como uma reta no espaço. Ninguém procurou uma representação paramétrica da reta fazendo, por exemplo,

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ x + 2y + z = 1 \end{cases} \text{ou} \begin{cases} x + y = 3 - z \\ x + 2y = 1 - z \end{cases} \text{ou} \begin{cases} 2x + 2y = 6 - 2z \\ -x - 2y = -1 + z \end{cases}$$

Para chegar, finalmente, à equação paramétrica da reta,

$$\begin{cases} x = 5 - z \\ y = -2 \\ z = z \end{cases}$$

que mostra que ela está contida no plano $y = -2$, plano paralelo ao plano coordenado xz.

3ª questão: Considere as seis curvas da Figura 15. A curva 1 é o gráfico de uma função $g(x)$*. Dentre as curvas, 2, 3, 4, 5 e 6, qual é o gráfico de* $g(2x)$, $g\left(\frac{x}{2}\right)$, $2g(x)$, $g(x+1)$ *e de* $g(x-1)$?

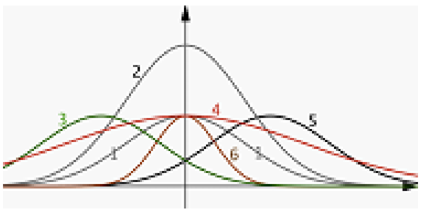


Figura 15: Curvs da Questão 3.

Os grupos seguiram a mesma linha de raciocínio ao resolver essa questão e não encontraram muita dificuldade. Em geral, ao invés de decorar regras, vale a pena estudar cada situação verificando o que acontece com alguns pontos, por exemplo. Nos primeiros casos, a linguagem utilizada pelos grupos foi livre e optamos por transcrevê-la aqui. As respostas e justificativas dos grupos foram as seguintes:

4ªquestão: O traçado a seguir é a representação gráfica de uma função $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (Veja a Figura 16).

Função	Gráfico	Justificativa
$g(2x)$	6	A curva “emagrece” = há uma contração no eixo x.
$g(\frac{x}{2})$	4	A curva “alarga” = há uma dilatação no eixo x.
$2\,g(x)$	2	A “imagem fica multiplicada” por 2 = há uma dilatação no eixo y.
$g(x+1)$	3	Há uma translação no eixo x. Neste caso, o gráfico é deslocado em sentido contrário ao do eixo x.
$g(x-1)$	5	Há uma translação no eixo x. Neste caso, o gráfico é deslocado no sentido positivo do eixo x.

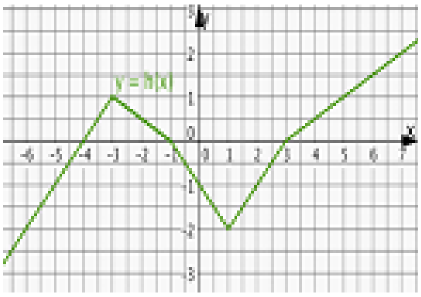


Figura 16: A função $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ da Questão 4.

Trace as representações gráficas das funções a seguir. Explicite, em cada caso, por que transformação geométrica as diferentes representações gráficas se deduzem da representação de h.

$$-h(x);\ |h(x)|;\ h(x)+2;\ h(x+2);\ 2h(x);\ h(2x);\ h(|x|);\ 3h(2-x).$$

Também nesta questão, os dois grupos seguiram o mesmo raciocínio, analisando cada uma das propostas e desenhando o gráfico de acordo com essa análise.

$-h(x)$: Reflexão em relação ao eixo x (Veja a Figura 17).

$|h(x)|$: Reflexão em relação ao eixo Ox dos trechos do gráfico que estão abaixo do eixo Ox (em que as ordenadas sejam negativas)(Veja a Figura 18).

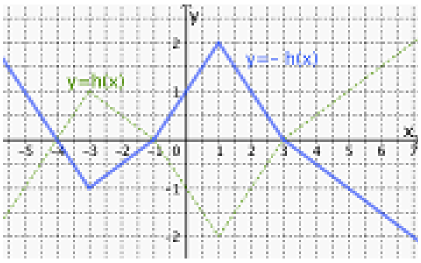


Figura 17: -h(x): Reflexão em torno do eixo Ox.

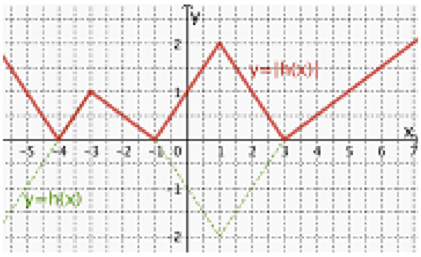


Figura 18: |h(x)|: Reflexão em relação ao eixo Ox dos trechos do gráfico que estão abaixo do eixo Ox.

$h(x)+2$: Deslocamento do gráfico de 2 unidades paralelamente ao eixo y e no sentido positivo desse eixo (Ver Figura 19).

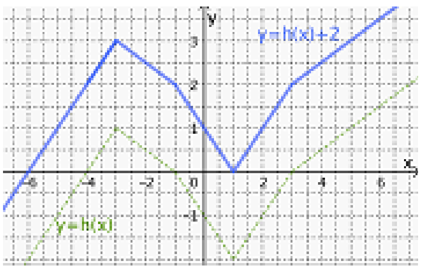


Figura 19: $h(x)+2$: Deslocamento do gráfico de 2 unidades paralelamente ao eixo y e no sentido positivo desse eixo.

$h(x+2)$: O gráfico "anda para a esquerda no eixo x", se deslocando duas unidades = deslocamento do gráfico de 2 unidades paralelamente ao eixo x e no sentido negativo desse eixo (Ver Figura 20).

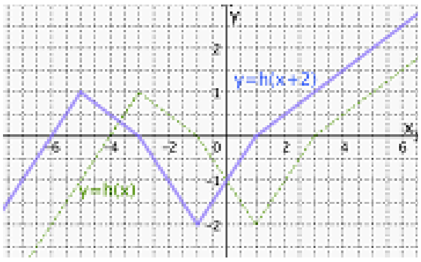


Figura 20: $h(x+2)$: Deslocamento do gráfico de 2 unidades paralelamente ao eixo x e no sentido negativo desse eixo.

$2h(x)$: Dilatação na direção do eixo y, dobrando as coordenadas (Ver Figura 21).

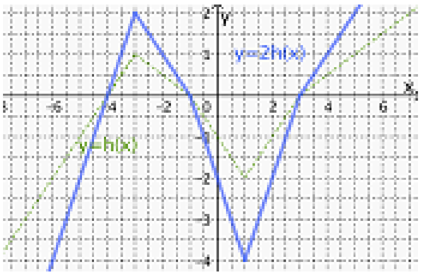


Figura 21: $2h(x)$: Dilatação na direção do eixo y, dobrando as coordenadas.

$h(2x)$: Contração ao longo do eixo x, dividindo por 2 as abscissas (Ver Figura 22).

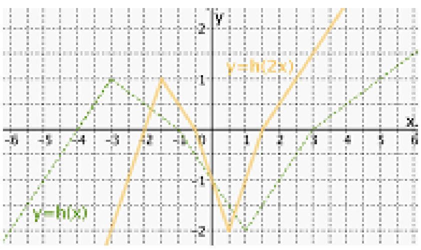


Figura 22: $h(2x)$: Contração ao longo do eixo x, dividindo por 2 as abscissas.

h(|x|): O “lado esquerdo do gráfico desaparece” = o trecho do gráfico com abscissas negativas é substituído por um gráfico simétrico ao trecho com abscissas positivas; simetria relativa ao eixo y (Ver Figura 23).

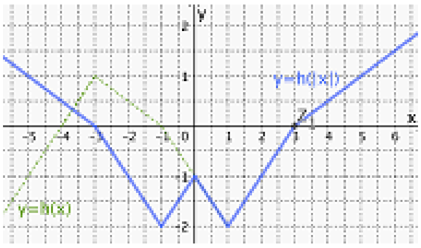


Figura 23: h(|x|): O trecho do gráfico com abscissas negativas é substituído por um gráfico simétrico ao trecho com abscissas positivas; simetria relativa ao eixo y.

$3h(2-x)$: Começaram pela construção do gráfico de $h(-x)$, que corresponde a uma reflexão em relação ao eixo y. A esse gráfico, aplicaram uma translação na direção do eixo x, de 2 unidades, no sentido negativo desse eixo, e aplicaram uma dilatação no eixo y, triplicando as ordenadas (Ver Figura 24).

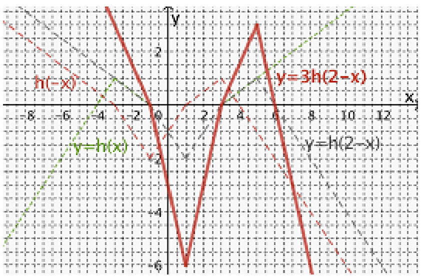


Figura 24: $3h(2-x)$: Reflexão em relação ao eixo y, seguida de uma translação na direção do eixo x, de 2 unidades, no sentido negativo desse eixo, e em seguida uma dilatação no eixo y, triplicando as ordenadas.

4 Sessão do dia 03/10/1989

O terceiro encontro, com a presença de seis participantes, teve início com a discussão das questões 5 e 6 da 1ª sessão, que tinham sido resolvidas por um dos grupos, mas não houve tempo para a discussão com todos os participantes.

Neste módulo, essa discussão já foi exposta na 1ª sessão. Passamos aqui às demais questões resolvidas nesse dia.

4.1 Atividades propostas

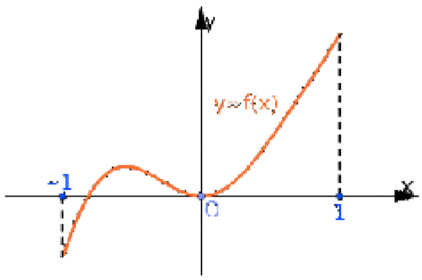
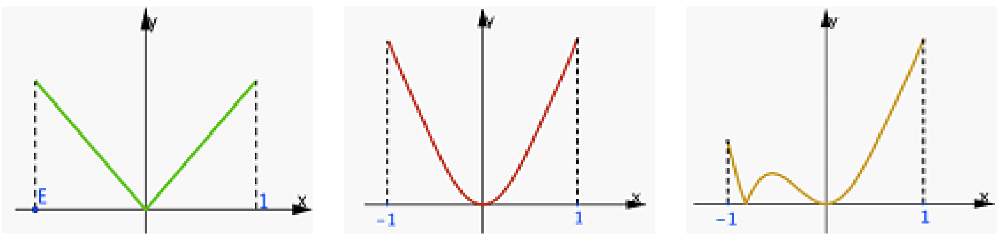


Figura 25: Questão 1.

1. (CESGRANRIO, 1981) Seja f a função definida no intervalo $[-1, +1]$, cujo gráfico é o da figura 25, e seja $|x|$ o valor absoluto de x. A função $g: [-1, +1] \to \mathbb{R}$, definida por $g(x) = f(|x|)$ é representada por que gráfico (Figuras 26 e 27)?



(a) Primeira possibilidade (b) Segunda possibilidade (c) Terceira possibilidade

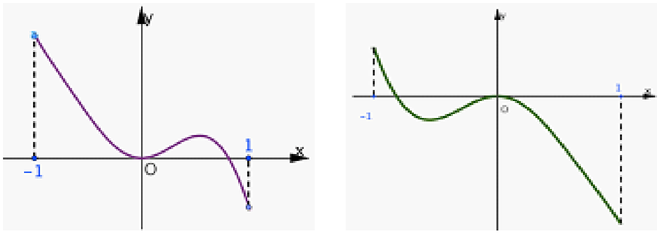
Figura 26: As três primeiras possibilidades.

2. Qual o conjunto dos números reais que satisfazem à desigualdade:

$$|3x + 7| \leq |2x - \sqrt{3}|.$$

3. (FUVEST, vestibular da USP, 1982)

   a) Fatore $a^4 + a^2 + 1$.



(a) Quarta possibilidade (b) Quinta possibilidade

Figura 27: As duas últimas possibilidades.

b) Para que valores inteiros positivos de a o número $a^4 + a^2 + 1$ é primo?

4. Represente graficamente a curva ou região do plano correspondente ao conjunto dado a seguir:

$$\left\{(x, y) \in \mathrm{R}^2 | \left(y - x^2 + 3x - 8\right)\left(y - \sqrt{x-4}\right) = 0\right\}.$$

5. Esboce graficamente o conjunto dos pontos (x, y) tais que

$$x^2 + y^2 = 4,$$

num sistema de coordenadas em que a unidade no eixo Oy seja o triplo da unidade no eixo Ox.

6. Esboce graficamente o conjunto dos pontos (x, y) tais que

$$x^2 - y^2 = 1$$

7. Ache a equação dessa curva num sistema de coordenadas Ouv, obtido girando-se o sistema anterior de 45^0 no sentido dos ponteiros do relógio.

8. Esboce o gráfico de cada uma das funções a seguir:

$$\text{a) } f(x) = -\frac{5}{x}; \text{ b) } f(x) = -\frac{5}{|x|}; \text{ c) } f(x) = \frac{1}{2x-7};$$

$$\text{d) } f(x) = \frac{5}{\left|x+\frac{1}{2}\right|}; \text{ e) } f(x) = \frac{3}{2x+5} - 7.$$

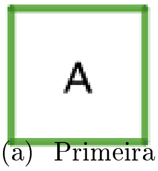
9. Reescreva $y = \text{sen}\left(\frac{\pi}{2}x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ na forma

$$y = A\text{sen}(\omega x + \theta)$$

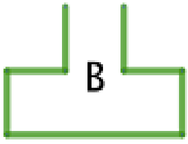
e esboce seu gráfico.

10. *O problema dos vasos.* Uma torneira joga água, com vazão constante, em cada um dos vasos cujos perfis estão desenhados a seguir. Cada vaso é obtido pela rotação em torno do eixo vertical de simetria desse perfil. Os gráficos representam a altura h do nível que a água atinge em cada vaso no tempo t, contado a partir do instante em que o vaso é colocado embaixo da torneira aberta. Relacione a cada vaso o gráfico que representa o comportamento da altura do nível da água em relação ao tempo.

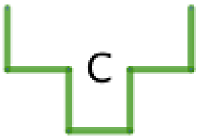
Os vasos estão mostrados nas Figuras 28, 29 e 30 e os gráficos nas três figuras seguintes (Figuras 31, 32 e 33).



(a) Primeira possibilidade



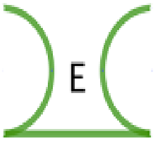
(b) Segunda possibilidade



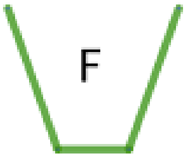
(c) Terceira possibilidade

(d) Quarta possibilidade

Figura 28: Os quatro primeiros vasos.

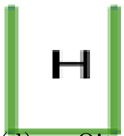


(a) Quinta possibilidade



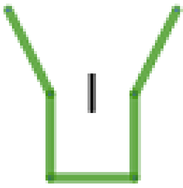
(b) Sexta possibilididade

(c) Sétima possibilidade

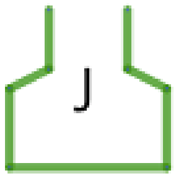


(d) Oitava possibilidade

Figura 29: Os quatro vasos seguintes.

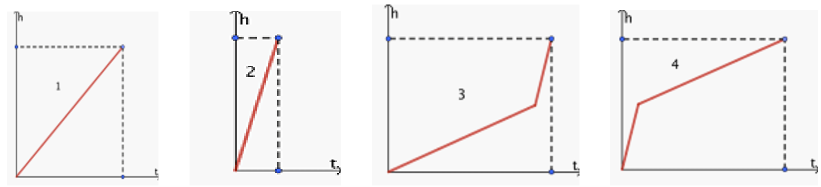


(a) Nona possibilidade



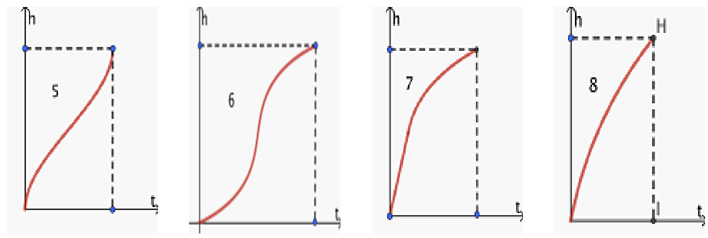
(b) Décima possibilidade

Figura 30: Os dois últimos vasos.



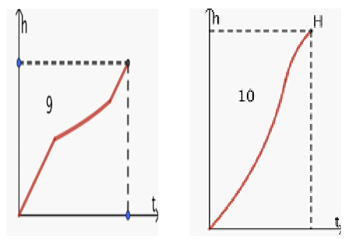
(a) Primeiro gráfico (b) Segundo gráfico (c) Terceiro gráfico (d) Quarto gráfico

Figura 31: Os quatro primeiros gráficos.



(a) Quinto gráfico (b) Sexto gráfico (c) Sétimo gráfico (d) Oitavo gráfico

Figura 32: Os quatro gráficos seguintes.



(a) Nono gráfico (b) Décimo gráfico

Figura 33: Os dois últimos gráficos.

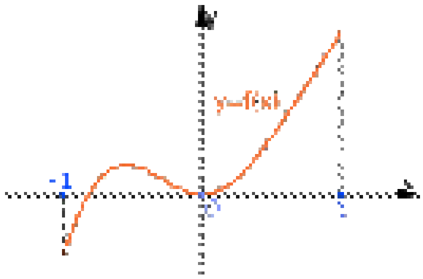


Figura 34: Função da Questão 1.

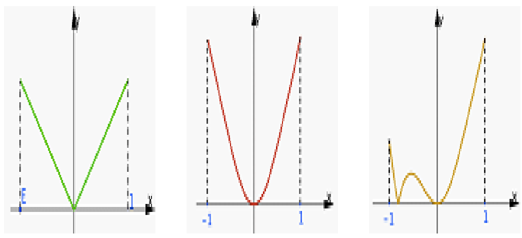
4.2 Soluções e comentários

1ª questão: *(CESGRANRIO, 1981) Seja* f *a função definida no intervalo* $[-1, +1]$, *cujo gráfico é o da figura* 34 *e seja* $|x|$ *o valor absoluto de* x.

A função $g : [-1, +1] \to \mathbb{R}$, *definida por* $g(x) = f(|x|)$ é representada por (Ver Figuras 35 e 36):

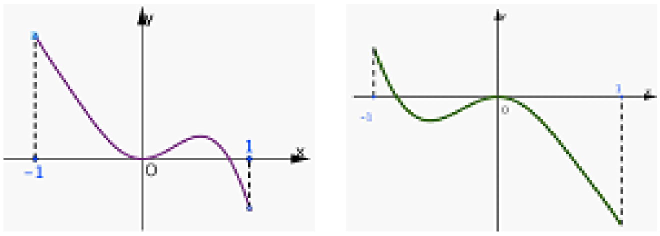
O valor da função g no ponto x é o valor de f calculado em $|x|$, logo só leva em conta os valores de f para x entre 0 e 1. Além disso, os valores de g em x e em $-x$ são iguais. Logo seu gráfico deve ser simétrico em relação ao eixo y. O gráfico que melhor representa a função g é (b), da Figura 35.

Explorando um pouco mais o exercício, o gráfico (a) da Figura 35 é o gráfico de $y = |x|$. O gráfico (c) da mesma figura é o gráfico de $y = |f(x)|$. O gráfico (a) da Figura 36 é o gráfico de $y = f(-x)|$ e o gráfico (b) da Figura 36 é o gráfico de $y = -f(x)$.



(a) Primeiro caso (b) Segundo caso (c) terceiro caso

Figura 35: Três primeiras possibilidades.



(a) Primeiro caso (b) Segundo caso

Figura 36: Duas últimas possibilidades.

2ª questão: Qual o conjunto dos números reais que satisfazem à desigualdade: $|3x+7| \leq \left|2x-\sqrt{3}\right|$.

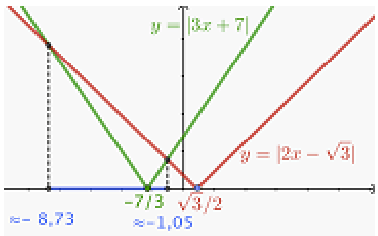


Figura 37: Ilustração para a segunda questão.

Nessa questão foi feita uma comparação entre a solução gráfica e a algébrica.

No primeiro tipo de solução, os gráficos foram desenhados a partir do gráfico de $y = |x|$.

Os zeros e os pontos de encontro são as raízes das equações

$$3x+7=0, \quad 2x-\sqrt{3}=0 \quad \text{e} \quad |3x+7| = |2x-\sqrt{3}|.$$

As raízes das duas primeiras equações são, respectivamente, $x = -7/3$, $x = \sqrt{3}/2$. Por sua vez, as raízes de $|3x+7| = |2x-\sqrt{3}|$ são as raízes de

$$3x+7 = 2x-\sqrt{3} \quad \text{e} \quad 3x+7 = -2x+\sqrt{3}$$

ou seja,

$$x = -7-\sqrt{3} \approx 8,73 \;\; \text{e} \;\; x = (\sqrt{3}-7)/5 \approx -1,05.$$

Vejamos agora como resolver algebricamente a questão.

A resolução algébrica das desigualdades deve respeitar os sinais.

1º caso: quando $3x+7 \geq 0$ e $2x-\sqrt{3} \geq 0$, a inequação é:

$$3x + 7 \leq 2x - \sqrt{3}, \quad \text{com} \quad x \geq -7/3 \;\; \text{e} \;\; x \geq \sqrt{3}/2$$

e assim $x \leq -7 - \sqrt{3}$, o que é impossível.

2º caso: quando $3x + 7 \leq 0$ e $2x - \sqrt{3} \geq 0$, teríamos $x \leq -7/3$ e $x \geq \sqrt{3}/2$, o que também é impossível.

3º caso: quando $3x + 7 \leq 0$ e $2x - \sqrt{3} \leq 0$, a inequação é:

$$-3x - 7 \leq -2x + \sqrt{3}, \quad \text{com} \quad x \leq -7/3 \text{ e } x \leq \sqrt{3}/2,$$

e então $x \geq -7 - \sqrt{3}$, isto é,

$$-7 - \sqrt{3} \leq x \leq -\frac{7}{3}.$$

4º caso: quando $3x + 7 \geq 0$ e $2x - \sqrt{3} \leq 0$, a inequação torna-se:

$$3x + 7 \leq -2x + \sqrt{3}, \quad \text{com} \quad x \geq -7/3 \;\; \text{e} \;\; x \leq \sqrt{3}/2,$$

e assim $x \leq \frac{\sqrt{3}-7}{5}$, isto é,

$$-\frac{7}{3} \leq x \leq \frac{\sqrt{3}-7}{5}.$$

E, finalmente, juntando os dois resultados, a desigualdade é satisfeita para

$$-7 - \sqrt{3} \leq x \leq \frac{\sqrt{3}-7}{5}.$$

Observe que $-7 - \sqrt{3} \approx -8,73$ e $\frac{\sqrt{3}-7}{5} \approx -1,05$, o que coincide com o resultado aproximado obtido no gráfico.

Este é um exemplo em que a melhor solução será uma combinação dos tratamentos gráfico e algébrico. O gráfico mostrou o resultado aproximado e a resolução simples de quatro equações de 1º grau forneceu a resposta irracional. Este é o caso em que o tratamento puramente gráfico só dá o resultado aproximado e o tratamento puramente algébrico é mais trabalhoso, exigindo o estudo de 4 casos.

3ª questão: (FUVEST, vestibular da USP, 1982)

a) Fatore $a^4 + a^2 + 1$

b) Para que valores inteiros positivos de a o número $a^4 + a^2 + 1$ ´e primo?

A tentativa de fatoração foi feita completando quadrados:

$$a^4 + a^2 + 1 = a^4 + 2a^2 + 1 - a^2 = (a^2 + 1)^2 - a^2 = (a^2 + 1 + a)(a^2 + 1 - a).$$

Essa fatoração causou uma discussão no grupo, pois alguns participantes tiveram dúvidas sobre a fatoração de um número primo, esquecendo que um dos fatores pode ser 1.

A fim de que $p = a^4 + a^2 + 1 = (a^2 + a + 1)(a^2 - a + 1)$ seja um número primo, um dos fatores tem que ser 1.

Se o primeiro fator for igual a 1, tem-se $a^2 + a + 1 = 1$, o que implica que $a = 0$ ou $a = -1$. Ora, se $a = 0$, mesmo que se considere 0 como positivo, $p = a^4 + a^2 + 1 = 1$ que não é primo. E $a = -1$ não responde ao problema, que pede o valor positivo de a.

Se o segundo fator for igual a 1, tem-se $a^2 - a + 1 = 1$, que implica que $a = 0$ ou $a = 1$. Já vimos que, se $a = 0$, $p = 1$ não é primo. E, se $a = 1$, tem-se $p = 3$, que é primo.

O único caso que responde ao problema é, portanto, $a = 1$.

4^a questão: Represente graficamente a curva ou região do plano correspondente ao conjunto dado a seguir:

$$\left\{(x, y) \in R^2 | \ (y - x^2 + 3x - 8)\left(y - \sqrt{x-4}\right) = 0\right\}.$$

A fim de que esse produto seja nulo, um dos fatores deve ser nulo. Isto é, esse conjunto é o mesmo que:

$$\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 4 \text{ e } y - x^2 + 3x - 8 = 0 \text{ ou } y - \sqrt{x-4} = 0\right\},$$

o que pode ser escrito como

$$\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, y - x^2 + 3x - 8 = 0 \text{ e } x \geq 4\right\} \cup \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, y - \sqrt{x-4} = 0\right\}.$$

Como o símbolo $\sqrt{\ }$ indica raiz positiva ou nula, esses conjuntos são gráficos das funções (Veja a Figura 38):

$$y = x^2 - 3x + 8 \text{ e } x = y^2 + 4, \text{ com } x \geq 4 \text{ e } y \geq 0.$$

Participantes comentaram que, em geral, os alunos pensam em intersecção de gráficos e não em união dos mesmos. Também foi lembrado que há sempre uma certa confusão na resolução de uma equação do tipo $(x + 3)(x - 1) = 2$ com a da equação do tipo $(x + 3)(x - 1) = 0$.

Mais precisamente, ao tentar resolver $(x + 3)(x - 1) = 2$, os alunos frequentemente costumam procurar as soluções de $x + 3 = 2$ ou de $x - 1 = 2$

5^a questão: Esboce graficamente o conjunto dos pontos (x, y) tais que

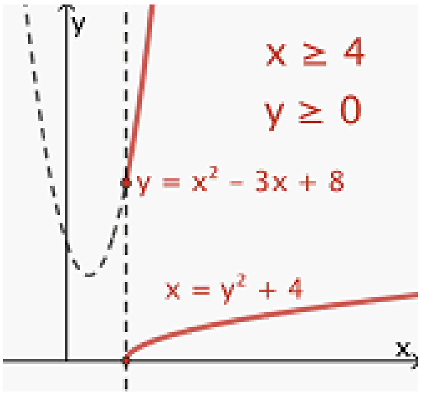


Figura 38: Questão 4.

$$x^2 + y^2 = 4,$$

em um sistema de coordenadas em que a unidade no eixo Oy *seja o triplo da unidade no eixo* Ox.

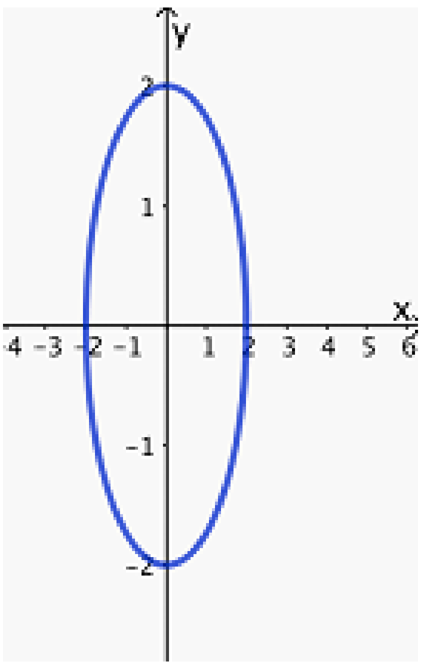


Figura 39: Gráfico da Questão 5.

No Geogebra, basta digitar a equação da curva e marcar na caixa de configurações da Janela de Visualizações a razão 3 : 1 para EixoX:EixoY.

O resultado pode surpreender quem esteja esperando uma circunferência. O comentário dos participantes foi que a equação era da circunferência, mas a "cara" foi da elipse! (Veja a Figura 39.)

Essa foi mais uma questão para mostrar o papel da relação entre as unidades nos dois eixos. É costume que, nas aulas de Matemática, os alunos só se deparem com unidades iguais nos dois eixos. Ao encontrar exemplos em que um eixo mede o tempo em horas e o outro o volume de uma caixa d'água em litros, têm que relacionar números até 10 horas com números acima de 500 litros .... E, quando decidem usar unidades diferentes nos dois eixos, estranham que a reta $y = x$ não seja bissetriz, que a curva $x^2 + y^2 = 100$ não seja uma circunferência.

6ª questão: a) Esboce graficamente o conjunto dos pontos (x, y) *tais que*

$$x^2 - y^2 = 1.$$

b) Ache a equação dessa curva num sistema de coordenadas Ouv, *obtido girando-se o sistema anterior de* 45^o *no sentido dos ponteiros do relógio.*

O gráfico de $x^2 - y^2 = 1$ pode ser visto na Figura 40.

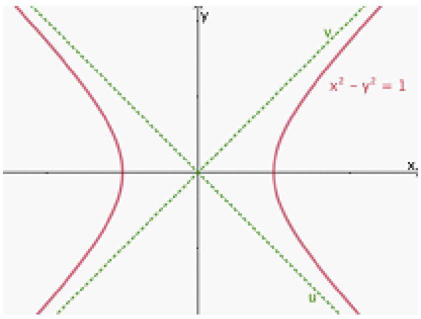


Figura 40: Gráfico de $x^2 - y^2 = 1$.

No plano Oxy, ao girar os eixos de um ângulo α, no sentido horário, o ponto (x, y) passa a ter coordenadas (u, v) de modo que

$$\begin{cases} x = u\cos\alpha + v\,\mathrm{sen}\,\alpha \\ y = -u\,\mathrm{sen}\,\alpha + v\cos\alpha \end{cases}$$

Neste caso, em que $\alpha = 45^o$, $\mathrm{sen}\alpha = \cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$, o que transforma a equação

$$x^2 - y^2 = 1$$

em $uv = \frac{1}{2}$ cujo gráfico, no plano Ouv, pode ser visto na Figura 41.

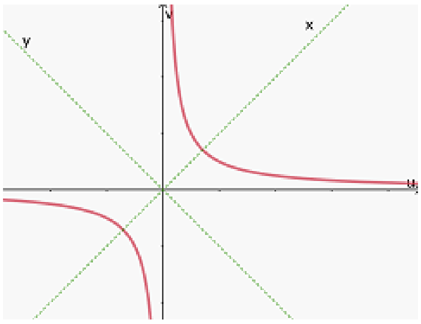


Figura 41: Gráfico de $uv = 1/2$.

7ª questão: Esboce o gráfico das funções a seguir:

1. $f(x) = -\frac{5}{x}$;
2. $f(x) = -\frac{5}{|x|}$;
3. $f(x) = \frac{1}{2x-7}$;
4. $f(x) = \frac{5}{\left|x+\frac{1}{2}\right|}$;
5. $f(x) = \dfrac{3}{2x+5} - 7$.

O grupo reconheceu que todos os gráficos dessa questão podem ser obtidos por transformações do gráfico da função $y = 1/x$, mostrado na Figura 43. Com o uso do computador, a questão foi facilmente resolvida e o comportamento de cada um deles foi analisado perante o gráfico obtido.

1. $y = -\frac{5}{x}$;

   Uma simetria em relação ao eixo x e uma expansão na direção do eixo y. (Veja a Figura 43)

2. $y = -\frac{5}{|x|}$;

   Uma simetria do arco para $x > 0$, em relação ao eixo x e uma expansão na direção do eixo y. (Ver Figura 44)

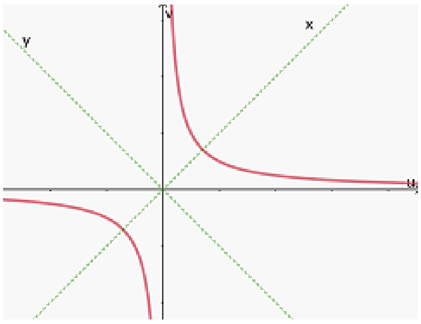


Figura 42: Gráfico de $y = \frac{1}{x}$.

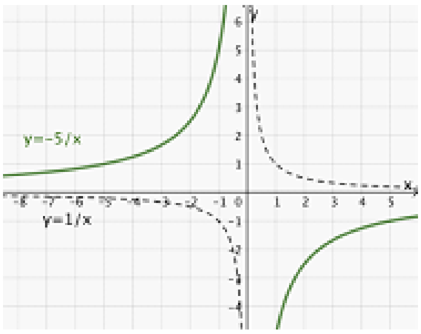


Figura 43: Gráfico de $y = -\frac{5}{x}$.

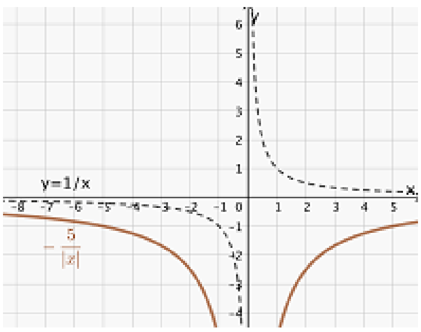


Figura 44: Gráfico de $y = -\frac{5}{|x|}$.

3. $f(x) = \frac{1}{2x-7}$

Uma contração na direção do eixo x leva ao gráfico de $y = 1/(2x)$ e uma translação de $3,5$ unidades na direção e sentido do eixo x, afinal leva ao gráfico solicitado. (Veja a Figura 45)

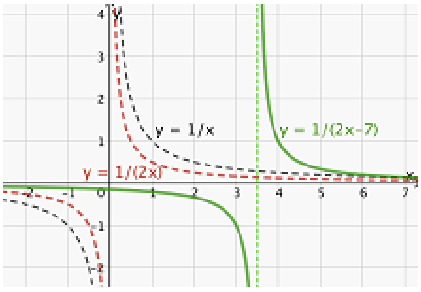


Figura 45: Gráfico de $f(x) = \frac{1}{2x-7}$.

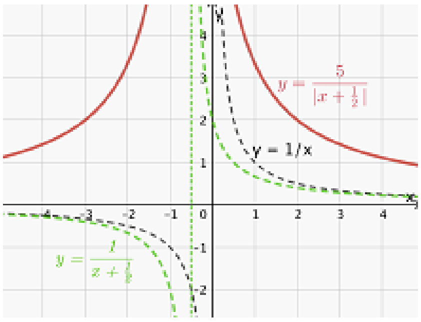


Figura 46: Gráfico de $f(x) = \frac{5}{|x+\frac{1}{2}|}$.

4. $f(x) = \frac{5}{|x+\frac{1}{2}|}$

   Uma translação de meia unidade na direção e em sentido contrário ao do eixo x. Depois uma expansão na direção do eixo y e uma simetria em relação ao eixo x do arco de ordenadas negativas (Figura 46).

5. $f(x) = \frac{3}{2x+5} - 7$

   Uma contração no eixo x, depois uma translação na direção e em sentido contrário ao do eixo x de 2,5 unidades, uma expansão na direção do eixo y e uma translação na direção e em sentido contrário ao do eixo y de 7 unidades (Ver Figura 47).

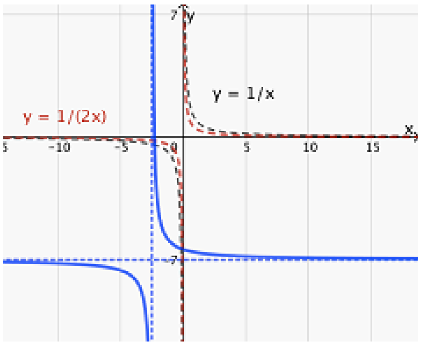


Figura 47: Gráfico de $f(x) = \frac{3}{2x+5} - 7$.

8ª questão: Reescreva

$$y = -\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$$

na forma

$$y = A\,\text{sen}\,(\omega x + \theta)$$

e esboce seu gráfico.

Na ocasião, o exercício foi resolvido a partir da expressão que transforma somas em produtos:

$$\text{sen}p + \text{sen}q = 2\text{sen}\left(\frac{p+q}{2}\right) \times \cos\left(\frac{p-q}{2}\right),$$

considerando

$$y = -\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) = \text{sen}\left(-\frac{\pi}{2}x\right) + \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}x\right)$$

e, determinando p e q tais que:

$$\begin{cases} p = -\frac{\pi}{2}x \\ q = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}x \end{cases},$$

têm-se:

$$y = 2\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2}x\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

e, sendo $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, temos finalmente

$$y = \sqrt{2}\,\text{sen}\left(-\frac{\pi}{2}x + \frac{\pi}{4}\right)$$

isto é,

$$A = \sqrt{2},\ \omega = -\frac{\pi}{2} \ \text{ e } \ \theta = \frac{\pi}{4}.$$

Um outro modo de resolver a questão é a partir da fórmula do seno da soma de arcos:

$$\text{sen}(\omega x + \theta) = \text{sen}\,(\omega x)\cos\theta + \text{sen}\ \theta\,\mathbf{cos}(\omega x),$$

donde

$$A\,\text{sen}(\omega x + \theta) = -\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right),$$

se, e só se

$$-\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) = A\,[\text{sen}\,(\omega x)\cos\theta + \text{sen}\,\theta\cos(\omega x)]$$

ou seja, $\omega = \frac{\pi}{2}$, θ é o ângulo tal que $\cos\theta = \frac{-1}{\sqrt{(-1)^2+1^2}}$ e $\text{sen}\theta = \frac{1}{\sqrt{(-1)^2+1^2}}$ ou seja, $\theta = \frac{3\pi}{4}$ e $A = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$.

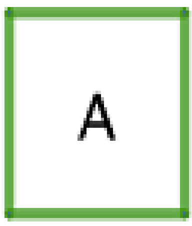
Por este caminho chega-se a

$$y = \sqrt{2}\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}x + \frac{3\pi}{4}\right).$$

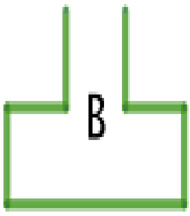
Vale observar que ambas as expressões têm os mesmos valores. Cabe ainda uma outra observação sobre estas expressões. É evidente que a expressão que envolve só o seno de um ângulo é mais transparente do que aquela que envolve o seno e o cosseno. Como a expressão da solução de muitas equações diferenciais de 2ª ordem é obtida como combinação linear de senos e cossenos, cresce a importância desse exercício.

9ª questão: O problema dos vasos. *Uma torneira joga água, com vazão constante, em cada um dos vasos cujos perfis estão desenhados a seguir. Cada vaso é obtido pela rotação em torno do eixo vertical de simetria desse perfil. Os gráficos representam a altura* h *do nível que a água atinge em cada vaso no tempo* t*, contado a partir do instante em que o vaso é colocado embaixo da torneira aberta. Relacione a cada vaso o gráfico que representa o comportamento da altura do nível da água em relação ao tempo.*

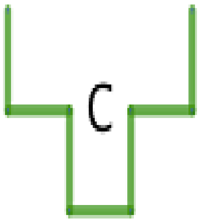
Os vasos estão mostrados nas Figuras 48, 49 e 50 e os gráficos nas três figuras seguintes (Figuras 51, 52 e 53).



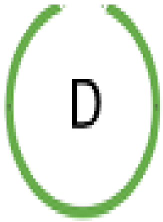
(a) Primeira possibilidade



(b) Segunda possibilidade



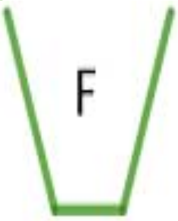
(c) Terceira possibilidade



(d) Quarta possibilidade

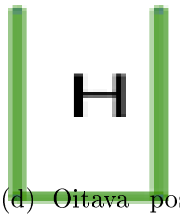
Figura 48: Os quatro primeiros vasos.

(a) Quinta possibilidade



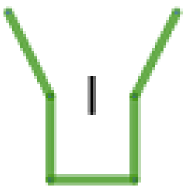
(b) Sexta possibilididade

(c) Sétimoa possibilidade

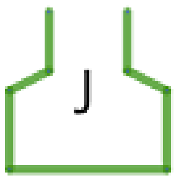


(d) Oitava possibilidade

Figura 49: Os quatro vasos seguintes.

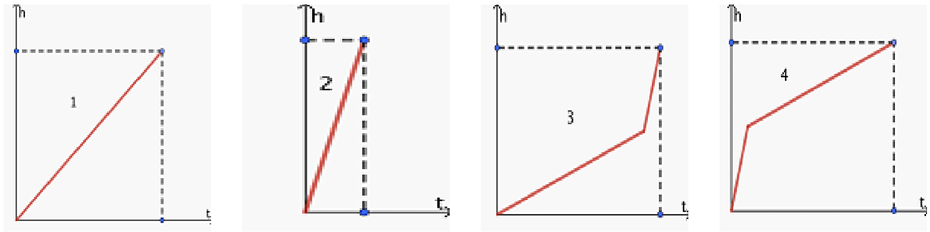


(a) Nona possibilidade



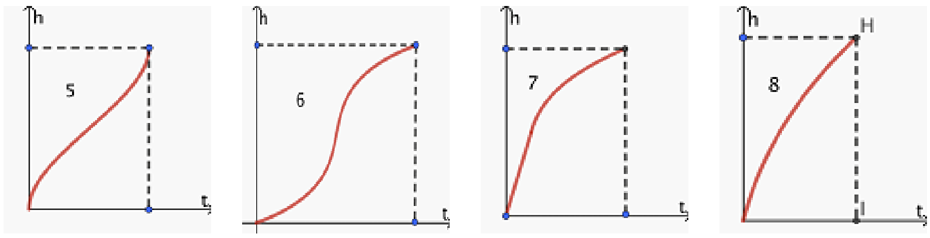
(b) Décima possibilidade

Figura 50: Os dois últimos vasos.



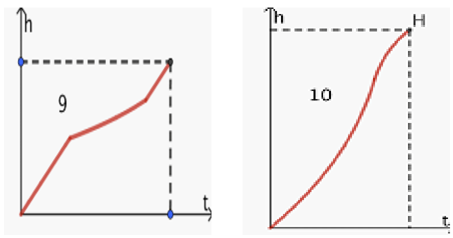
(a) Primeiro gráfico (b) Segundo gráfico (c) Terceiro gráfico (d) Quarto gráfico

Figura 51: Os quatro primeiros gráficos.



(a) Quinto gráfico (b) Sexto gráfico (c) Sétimo gráfico (d) Oitavo gráfico

Figura 52: Os quatro gráficos seguintes.



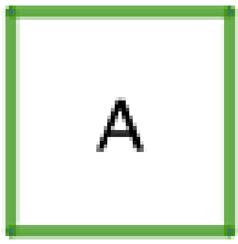
(a) Nono gráfico (b) Décimo gráfico

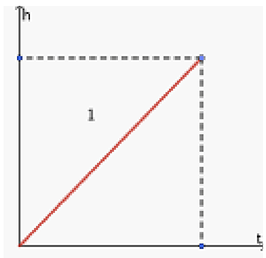
Figura 53: Os dois últimos gráficos.

Mesmo sem citar a velocidade em que a altura da água sobe, esse problema exige a atenção para essa velocidade que, no gráfico, está indicada pela inclinação da tangente à curva. Sendo os vasos obtidos por rotação em relação a um eixo vertical, as seções desses vasos por planos horizontais são círculos. Quanto menor o raio desses círculos, mais depressa a altura cresce ..., aí está a velocidade. A maioria dos alunos do ensino médio não conhece ainda o conceito de velocidade e sua relação com a inclinação da tangente, mas pode comparar o crescimento da altura (acréscimos da ordenada) em intervalos iguais de tempo (acréscimos da abscissa).

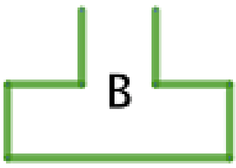
Foi lembrado que há questões já conhecidas parecidas com esta, relativas a movimentos de elevador, carro, ...em que se pede o gráfico que melhor represente o espaço percorrido ou a velocidade em função do tempo.

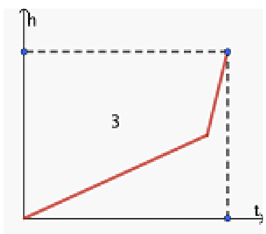
Seguem-se as respostas e as justificativas anotadas pela colega Valleria:



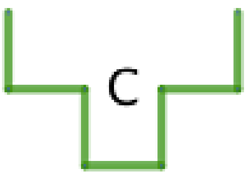


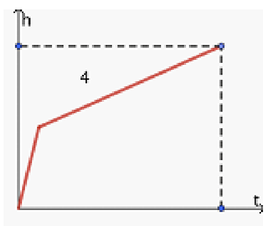
Raio constante, velocidade constante, gráfico linear.



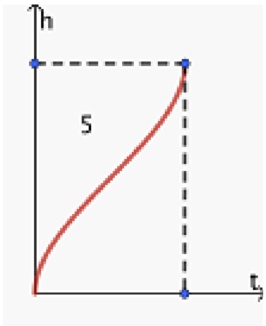


Começa devagar e depois vai mais rápido porque o vaso “afunila”- raio constante em dois trechos, maior no início e menor depois.

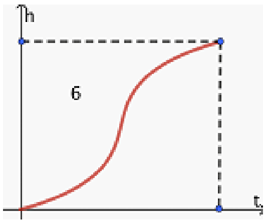




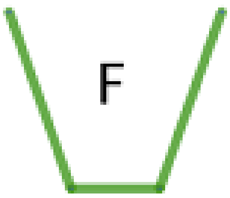
Ao contrário do anterior, começa mais depressa e depois vai mais lentamente porque o vaso “alarga” – raio constante em 2 trechos, menor no início e maior depois.

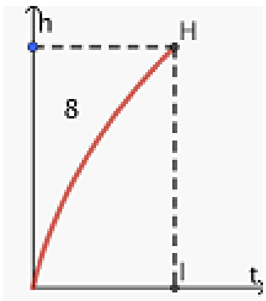


O raio das secções começa do 0, vai aumentando e depois diminui até 0 – começa rapidamente, vai diminuindo e volta a subir rapidamente. Há simetria no vaso e a correspondente no gráfico.

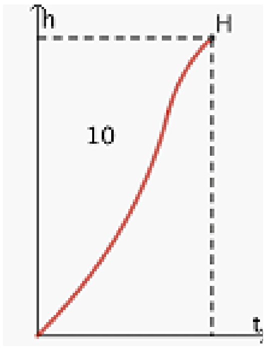


O raio das seções começa maior, vai diminuindo e depois aumenta de novo – começa devagar, vai indo mais depressa e volta a subir devagar. Há também uma simetria no vaso e a correspondente no gráfico.

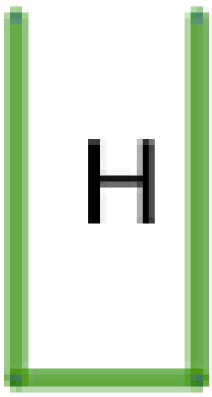


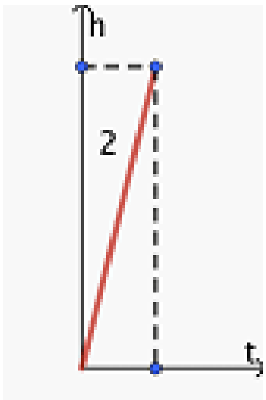


O raio aumenta, logo o nível da água vai subindo mais rapidamente e vai diminuindo – pois o vaso vai alargando.

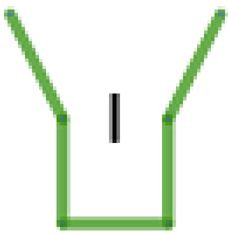


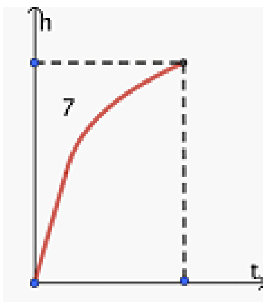
Como no vaso E, o raio vai diminuindo e passa a crescer. Acontece que neste caso, não há simetria nessa configuração. A altura passa mais tempo aumentando a velocidade de subida do que o tempo em que diminui a velocidade.



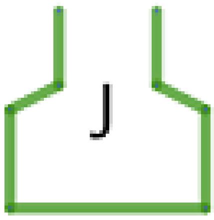


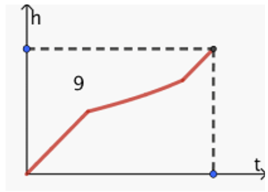
Como no vaso A, o raio é constante, mas como ele é menor do que aquele, a velocidade é maior, o vaso fica cheio mais depressa do que aquele – no gráfico, o coeficiente linear é maior do que naquele correspondente ao vaso A.





No primeiro trecho, o comportamento é o mesmo do vaso H e, no segundo, repete o que acontece no vaso F.





Logo de início, é o mesmo comportamento que a 1ª metade do vaso A; depois, como no início do vaso G para finalizar como no último trecho do vaso H. Num teste, seria fácil identificar este caso porque é o único vaso em que o comportamento é diferente em três intervalos de tempo.