

## 2 Análise Limite em Geotecnia

### 2.1. Considerações do Problema da Análise Limite

A importância da determinação de cargas de colapso de uma estrutura para seu dimensionamento é incontestável. Nos últimos anos, a precisão dessa determinação melhorou significativamente com o rápido desenvolvimento de meios computacionais, tornando as análises mais realísticas o aperfeiçoamento e o aumento da complexidade dos modelos de análise.

Os problemas de estabilidade em meios geológicos como, por exemplo, aqueles relacionados à determinação da capacidade de carga em fundações, ou a determinação do fator de colapso ou fator de segurança em estabilidade de taludes e estabilidade de escavações subterrâneas são em geral tratados através de procedimentos numéricos, dentre os quais se tem os de análise elastoplástica que são os mais comumente utilizados. Alternativamente, podem-se utilizar procedimentos baseados nas teorias de estado limite, dentre as quais se destacam o equilíbrio limite, de utilização corrente na geotecnia, e a análise limite, baseada nos chamados teoremas dos limites superior e inferior da teoria da plasticidade.

A teoria da plasticidade dos solos e o conceito do equilíbrio do limite plástico, desenvolvido em 1773 por Coulomb deram origem à teoria da plasticidade dos metais que teve impulso entre 1950 e 1960, quando foram incluídos os conceitos da lei de fluxo e a relação tensão-velocidade de deformação (Chen, 1975). Os conceitos da análise limite evoluíram até a década dos anos 50 em diferentes áreas da engenharia. Drucker e Prager (1952), num estudo sobre materiais plásticos com a lei de escoamento de Mohr-Coulomb, definiram os limites superior e inferior para a carga de colapso.

Existem três considerações importantes dentro da teoria da plasticidade: consideração de plasticidade perfeita, considerações sobre Escoamento, considerações sobre a Lei de Fluxo.

### 2.1.1. Considerações da Plasticidade Perfeita

Em muitas situações práticas, supõe-se que o material apresenta um efeito de endurecimento, isto é, o seu diagrama uniaxial tensão deformação após o ponto de plastificação pode ser aproximado por uma linha reta horizontal como se apresenta na Figura 2.1. Assim, supõe-se que a deformação plástica ocorre sob um nível constante de tensão como é mostrado na curva tensão-deformação quando a tensão atinge o valor de  $\sigma_0$ . Este comportamento é chamado de comportamento elástico perfeitamente plástico.

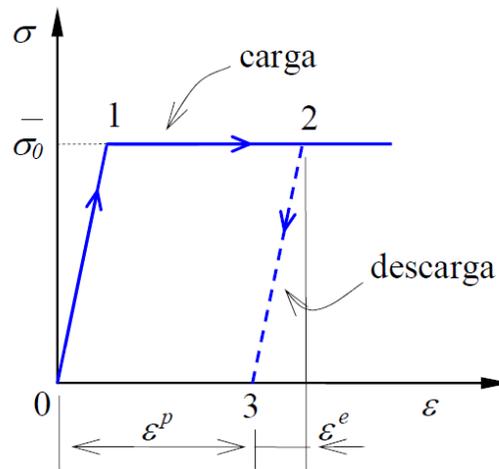


Figura 2.1 - Modelo elasto-plástico.

Para tensões suficientemente pequenas satisfazendo  $\sigma < \sigma_0$ , o material se comporta elasticamente. As deformações elásticas são obtidas através da lei de Hooke como se apresenta na Equação (2.1).

$$\varepsilon^e = \frac{\sigma}{E} \quad (2.1)$$

onde  $\sigma_0$  é a tensão de escoamento,  $\varepsilon^e$  é a deformação elástica e  $E$  é o módulo de elasticidade longitudinal ou módulo de Young do material.

Quando a tensão atinge o valor de  $\sigma_0$  pode-se observar fluxo plástico livre sob tensão constante, durante este fluxo não há incremento da tensão. Com um só

valor da tensão ( $\sigma$ ) pode haver vários valores de deformações associados. Após um descarregamento, uma quantidade de deformação permanece no material, esta deformação é conhecida como deformação plástica  $\varepsilon^p$ .

Durante certo processo de carregamento, a deformação total no material pode ser expressa, considerando-se a hipótese de pequenas deformações, pela soma da deformação elástica  $\varepsilon^e$  e da deformação plástica  $\varepsilon^p$  (Davis & Selvadurai, 2002).

$$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^p \quad (2.2)$$

No método da análise limite se faz a consideração de que o material no colapso se comporta como um material rígido plástico, o qual está mostrado na Figura 2.2. O material rígido plástico é hipoteticamente um sólido que não sofre deformações quando está atuando sobre ele uma tensão menor do que a tensão de escoamento, neste caso as características de elasticidade, endurecimento e amolecimento são ignoradas.

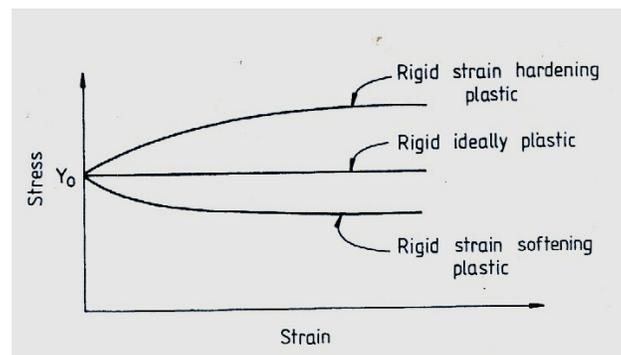


Figura 2.2 – Curva de tensão deformação para materiais rígido plásticos.

### 2.1.2. Considerações de Escoamento

Para caracterizar o comportamento rígido plástico de um material, pressuposto na definição do problema, se introduz a definição do denominado critério de escoamento ou também conhecida na Teoria de Plasticidade como superfície de escoamento ou função de escoamento.

Esta superfície de escoamento ( $F$ ) é definida através de uma função escalar do tensor das tensões ( $\sigma$ ), que delimita os estados de tensão considerados admissíveis. A superfície de escoamento pode ser interpretada como: para um

determinado estado de tensões dentro da superfície, só acontecem deformações elásticas; se o estado de tensões alcança a superfície ocorrem deformações elásticas e plásticas (Figura 2.3). A superfície de escoamento é convexa, e a posição do estado de tensões em relação a esta superfície implica um determinado comportamento, que é da seguinte maneira:

Estado de tensões:  $F(\sigma) < 0$ ; o material tem comportamento elástico.

Estado de tensões:  $F(\sigma) = 0$ ; ocorre fluxo plástico.

Estado de tensões:  $F(\sigma) > 0$ ; estado de tensões excluído.

De acordo com os comportamentos anteriormente descritos para um material perfeitamente plástico, a função de escoamento ( $F$ ) depende somente do conjunto de componentes de tensões ( $\sigma$ ) e não de componentes de deformações ( $\varepsilon$ ). Portanto, a função de escoamento é fixa no espaço de tensões, ou seja, a superfície de escoamento deverá permanecer inalterada ao longo de toda história do carregamento; e o fluxo plástico ocorre quando a função de escoamento ( $F$ ) é igual à zero.

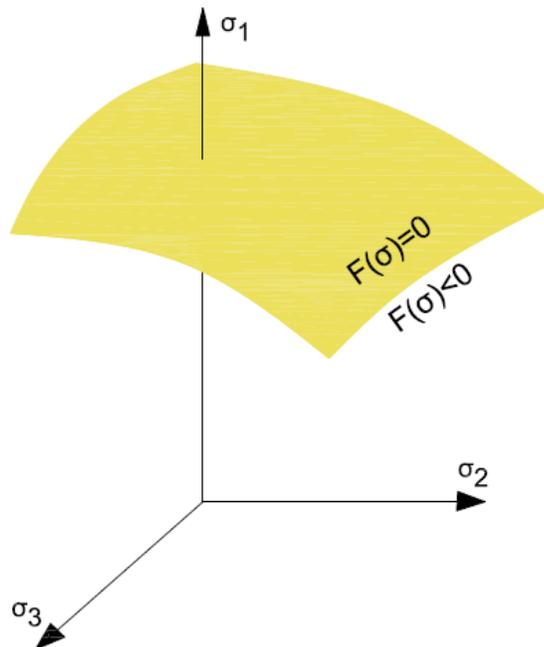


Figura 2.3 - Superfície de escoamento no espaço de tensões principais.

### 2.1.3. Considerações sobre a Lei de Fluxo

Como se revisou na seção 2.1.1 a deformação total no material pode ser expressa, considerando-se a hipótese de pequenas deformações, pela soma da deformação elástica ( $\epsilon^e$ ) e a deformação plástica ( $\epsilon^p$ ) de acordo com a Equação 2.2. De fato, pode-se afirmar que a deformação plástica num ponto de um sólido exibindo um comportamento perfeitamente plástico é a priori indefinida e não limitada. Deste modo, torna-se mais adequado exprimir a relação constitutiva em termos da taxa de deformação ou velocidade de deformação.

$$\dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}^e + \dot{\epsilon}^p \quad (2.3)$$

onde:

- $\dot{\epsilon}$  : Taxa ou velocidade de deformação total.
- $\dot{\epsilon}^e$  : Taxa ou velocidade de deformação elástica.
- $\dot{\epsilon}^p$  : Taxa ou velocidade de deformação plástica

A taxa ou velocidade de deformação elástica e as tensões estão relacionadas somente através da lei de Hooke. A velocidade de deformação plástica depende do estado de tensões (Chen e Liu, 1990).

A taxa ou velocidade de deformação plástica tem relação com o Princípio do Trabalho Plástico Máximo (PTPM), o qual estabelece que considerando um estado de tensão admissível ( $\sigma$ ), e uma taxa de deformação plástica ( $\dot{\epsilon}^p$ ), gerada nesse estado de tensão, verifica-se a seguinte relação:

$$\forall \sigma^* | F(\sigma^*) \leq 0, \forall \sigma | F(\sigma) \leq 0, (\sigma - \sigma^*) \dot{\epsilon}^p \geq 0 \quad (2.4)$$

O PTPM é também muitas vezes observado como consequência do Postulado de Estabilidade de Drucker (Kachanov, 1996; Lubliner, 1990). Da aplicação do PTPM resultam três consequências relevantes:

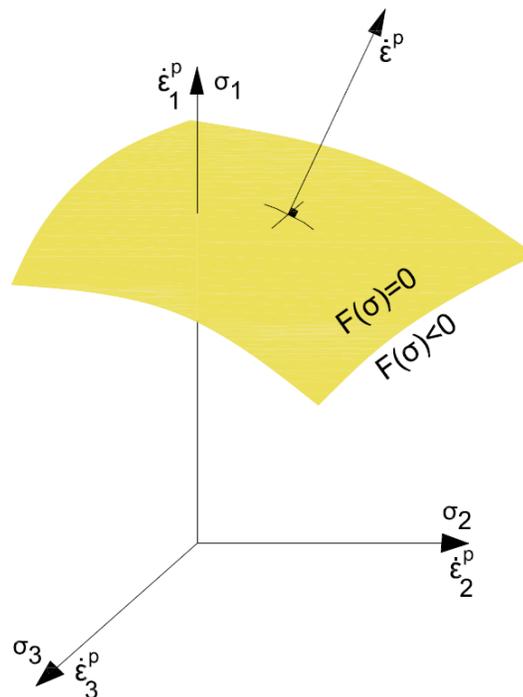
- A taxa de deformação plástica tem de ser orientada segundo uma normal exterior à superfície de escoamento.

- A superfície de escoamento define obrigatoriamente um espaço das tensões admissíveis convexo.
- A dissipação plástica por unidade de volume,  $Dp$ , definida pelo produto interno das tensões pela taxa de deformação plástica,

$$Dp(\boldsymbol{\sigma}, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p) = \boldsymbol{\sigma} \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p \quad (2.5)$$

pode passar a ser expressa como uma função unívoca da taxa de deformação plástica, desde que seja conhecida a função de escoamento.

Então, no caso dos materiais estáveis a taxa de deformação plástica tem uma direção normal ou perpendicular à superfície de escoamento (Figura 2.4).



**Figura 2.4 - Superfície de escoamento e o vetor de deformação plástica.**

A introdução de uma nova grandeza que traduza a lei de fluxo plástico na função de escoamento ( $F$ ) permite estabelecer a seguinte relação com as componentes da taxa das deformações plásticas (Davis & Selvadurai, 2002):

$$\dot{\varepsilon}^p = \omega \frac{\partial F(\sigma)}{\partial \sigma}, \quad \omega \in \mathbb{R}^+ \quad (2.6)$$

onde:

- $\dot{\varepsilon}^p$  : Velocidade de deformação plástica.
- $\sigma$  : Campo de Tensões.
- $\omega$  : Fator de proporcionalidade (escalar).

## 2.2. Campos Admissíveis

### 2.2.1. Campo de Tensão Estaticamente Admissível

Define-se um campo de tensão estaticamente admissível quando cumpre as seguintes condições:

- Satisfaz as condições de equilíbrio no volume.
- Satisfaz as condições de contorno.
- Satisfaz um critério de escoamento.

### 2.2.2. Campo de Velocidade Cinematicamente Admissível

Define-se um campo de velocidade cinematicamente admissível quando cumpre as seguintes condições:

- Satisfaz as condições de contorno em termos de velocidades.
- Satisfaz as condições de compatibilidade em termos de deformação.

## 2.3. Princípio do Trabalho Virtual

O princípio do trabalho virtual pode ser usado para tratar problemas de colapso de estruturas com materiais geotécnicos. Este princípio é uma expressão de trabalho equilibrado e pode ser aplicado tanto a corpos rígidos como a corpos deformáveis.

- a) **Corpos rígidos:** “se um corpo rígido está em equilíbrio, o trabalho realizado por todas as forças ativas para um deslocamento virtual, compatíveis com as condições de contorno, deve ser zero” (Lancellota, 1995).
- b) **Corpos deformáveis:** “se uma estrutura está em equilíbrio, o trabalho realizado pelas forças externas para um campo de deslocamento virtual dado, compatível com condições de fronteira, deve ser igual ao trabalho interno feito pelas tensões nas deformações virtuais compatíveis com o deslocamento virtual dado” (Lancellota, 1995).

## 2.4. Teoremas da Análise Limite

A Análise Limite é baseada em dois teoremas da plasticidade, conhecidos como Teoremas dos Limites Superior e Inferior, demonstrados por Drucker et al. (1952).

Para a demonstração dos teoremas da Análise Limite, são necessárias as seguintes hipóteses (Chen, 1975):

- O comportamento plástico do material é perfeitamente ou idealmente plástico, ignorando o endurecimento ou amolecimento do material, dessa forma a superfície de escoamento é fixa.
- Não existem deformações elásticas e a deformação total é igual à deformação plástica.
- A superfície de escoamento é convexa e as taxas de deformação plástica são deduzidas da função de escoamento através da lei de fluxo associado.
- As mudanças na geometria no corpo são consideradas insignificantes quando o carregamento atinge o carregamento limite ou carga de colapso. Portanto o princípio de trabalho virtual pode ser aplicado.

A seguir são apresentados os enunciados dos teoremas da Análise Limite, sem suas demonstrações, que podem ser encontradas, em Chen (1975) e Drucker et. al. (1952).

### **2.4.1. Teorema de Limite Inferior**

Se um campo de tensões distribuído em todo o corpo pode ser construído, satisfazendo as condições de equilíbrio com as cargas no contorno e no domínio e não viola o critério de escoamento, então, o campo das tensões é estaticamente admissível e a carga correspondente é um limite inferior da carga de colapso.

### **2.4.2. Teorema de Limite Superior**

Se um mecanismo compatível de deformação plástica satisfaz as condições de compatibilidade em velocidades no contorno e a lei de fluxo associado, então, o campo das velocidades é cinematicamente admissível e os carregamentos superficiais e as cargas de volume, determinados pela igualdade da taxa do trabalho externo com a taxa a dissipação interna, serão iguais ou maiores que a carga limite verdadeira, o fator de colapso assim obtido será um limite superior ao fator de colapso real.

## **2.5. Critérios de Escoamento**

Entre os critérios de escoamento que serão utilizados neste trabalho temos os critérios de escoamento de Mohr Coulomb (caso 2D) e o critério de escoamento de Drucker-Prager (caso 2D e 3D).

### **2.5.1. Critério de Mohr-Coulomb**

Um dos critérios de escoamento mais simples e mais utilizado na modelagem do comportamento mecânico de materiais geotécnicos é o de Mohr-Coulomb. Este critério é usado para a modelagem do problema da análise limite neste trabalho.

O critério de escoamento de Mohr-Coulomb pode ser escrito (Lambe e Whitman, 1969), na condição de deformação plana, usando a convenção de sinais de resistência dos materiais, na forma.

$$q = -p \operatorname{sen} \phi + c \cos \phi \quad (2.7)$$

onde

$\phi$ : ângulo de atrito do material.

$c$ : coesão do material.

$p$ : tensão média.

$q$ : tensão cisalhante máxima.

Os parâmetros de resistência do material ( $c$  e  $\phi$ ) podem ser obtidos de ensaios apropriados de laboratório ou de campo. Agora em termos das tensões principais ( $\sigma_1$  e  $\sigma_3$ ), tem-se

$$q = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3) = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (2.8)$$

$$p = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_3) = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y)$$

onde  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  e  $\tau_{xy}$  e são componentes de tensão no sistema de referência do problema. A substituição da Equação (2.8) na Equação (2.7) conduz ao resultado:

$$F(\sigma) = (\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2 - [2c \cos \phi - (\sigma_x + \sigma_y) \operatorname{sen} \phi]^2 \quad (2.9)$$

Observa-se que o critério de escoamento de Mohr-Coulomb impõe uma relação não linear nas componentes de tensão.

### 2.5.2. Critério de Druker-Prager

No caso de problemas tridimensionais pelo método dos elementos finitos (MEF), os autores, normalmente, preferem empregar os critérios Drucker-Prager ou Von Mises em lugar dos critérios de Tresca ou Mohr-Coulomb (Chen & Liu, 1990). O critério de escoamento de Drucker e Prager (1952) pode ser colocado sob a forma:

$$F(\sigma) = \sqrt{J_2} + \alpha I_1 - K \quad (2.10)$$

Onde

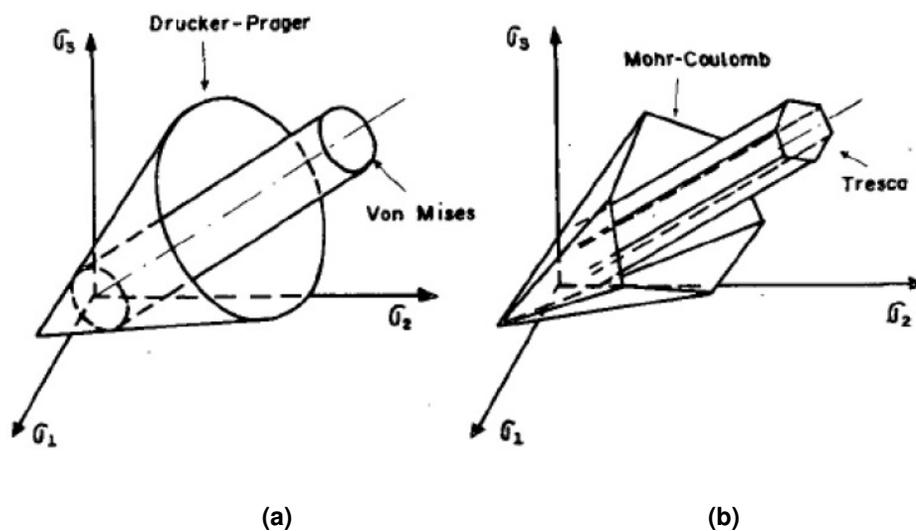
$F$ : Função de escoamento.

$I_1$ : Primeiro invariante do tensor de tensões.

$J_2$ : Segundo invariante do tensor de tensões.

$\alpha, K$ : Parâmetros do material.

A superfície de escoamento Drucker-Prager é uma superfície cônica que em comparação com o critério de Mohr Coulomb ou Tresca, é uma superfície contínua sem arestas ou descontinuidades, como se pode ver na Figura 2.5:



**Figura 2.5 - Superfícies de Escoamento no espaço das tensões principais:**  
**a) Drucker-Prager e Von Mises b) Mohr-Coulomb e Tresca.**

Dado que o critério de escoamento de Mohr Coulomb tem singularidades ou arestas, que dificulta seu uso em análise numérica, os autores preferem utilizar em caso de problemas tridimensionais o critério de Drucker-Prager o qual tem uma superfície contínua que é muito vantajosa quando para as implementações numéricas de formulações do MEF (Owen & Hinton, 1980). Os parâmetros  $K$  e  $\alpha$  podem ser obtidos do critério de Mohr Coulomb para o caso 3D, utilizando aproximações para os casos de compressão e tração (Figura 2.6)

O caso da compressão se atinge quando a superfície de escoamento de Drucker Prager esta circunscrita à superfície de escoamento de Mohr Coulomb

para o caso 3D, onde os parâmetros são calculados utilizando os parâmetros de do critério de Mohr Coulomb.

$$\alpha = \frac{2 \operatorname{sen} \phi}{\sqrt{3}(3 - \operatorname{sen} \phi)} \quad (2.11)$$

$$K = \frac{6c \cos \phi}{\sqrt{3}(3 - \operatorname{sen} \phi)} \quad (2.12)$$

O caso da tração se atinge quando a superfície de escoamento de Drucker Prager passa através dos vértices da superfície de escoamento de Mohr Coulomb para o caso 3D, como médio na Figura 2.6, onde os parâmetros são calculados utilizando os parâmetros de do critério de Mohr Coulomb.

$$\alpha = \frac{2 \operatorname{sen} \phi}{\sqrt{3}(3 + \operatorname{sen} \phi)} \quad (2.13)$$

$$K = \frac{6c \cos \phi}{\sqrt{3}(3 + \operatorname{sen} \phi)} \quad (2.14)$$

onde :  $c$  e  $\phi$  são os parâmetros de resistência do material.

No caso 2D, no qual são estudados problemas em estado plano de deformações, os parâmetros  $\alpha$  e  $K$  do critério de Drucker-Prager são aproximados pelas Equações (2.15) e (2.16) (Chen e Liu, 1990).

$$\alpha = \frac{\tan \phi}{\sqrt{9 + 12 \tan^2 \phi}} \quad (2.15)$$

$$K = \frac{6c}{\sqrt{9 + 12 \tan^2 \phi}} \quad (2.16)$$

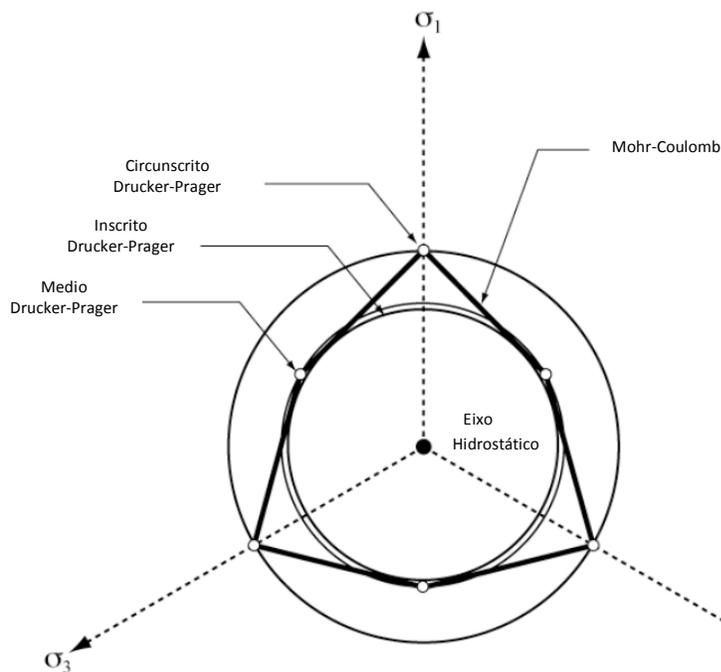


Figura 2.6 - Aproximação da superfície de escoamento de Drucker-Prager para Mohr Coulomb caso 3D. (Chen e Liu, 1990)

## 2.6. Formulações Variacionais do Problema de Análise Limite

Entre uns dos principais objetivos da Análise Limite esta determinar a carga que leva ao colapso as estruturas geotécnicas. Quando se tem determinado o fator de colapso ( $\lambda$ ) o fator de segurança ( $FS$ ) na estrutura pode ser obtido através do método de redução da resistência do material. O problema de Análise Limite pode ser definido tendo em conta as condições de equilíbrio, do critério de escoamento, da consistência cinemática e a lei de fluxo associada, integrando todas estas condições, da seguinte maneira:

Seja:

$V$  : Volume ocupado por um corpo de material rígido-plástico ideal.

$S_t$  : Fronteira ou contorno de  $V$

Define-se:

$f$  em  $V$  (Domínio)

$t$  em  $S_t$  (Contorno)

Deve-se encontrar:  $\lambda$ ,  $\sigma$ ,  $\dot{u}$ ,  $\dot{\varepsilon}$ ,  $\dot{\lambda}$

Sujeito as seguintes restrições

Restrição de Equilíbrio

$$\begin{aligned} \nabla^T \sigma &= \lambda f & , \text{ em } V \\ \sigma \eta &= \lambda t & , \text{ em } S_t \end{aligned} \quad (2.17)$$

Restrição do Critério de Escoamento

$$F(\sigma) \leq 0 \quad , \text{ em } V \quad (2.18)$$

Restrição de Compatibilidade Cinemática

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon} &= \nabla \dot{u} & , \text{ em } V \\ \dot{u} &= 0 & , \text{ em } S_u \end{aligned} \quad (2.19)$$

Restrição da Lei de Fluxo:

$$\dot{\varepsilon}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial F}{\partial \sigma} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \dot{\lambda} = 0, \text{ se } F(\sigma) < 0 \\ \dot{\lambda} \geq 0, \text{ se } F(\sigma) = 0 \end{cases} \quad (2.20)$$

Onde:

$f$ : Forças de massa aplicadas no domínio.

$t$ : Forças aplicadas no contorno do sistema.

$\eta$ : Vetor normal à superfície  $S_t$ .

$\lambda$ : Fator do colapso do sistema.

$\sigma$ : Campo de tensões.

$\dot{u}$ : Campo de velocidades.

$\dot{\varepsilon}^p$ : Taxas de velocidades plásticas.

$\dot{\lambda}$ : Fatores de Plastificação.

$\nabla$ : Operador diferencial do equilíbrio estático.

A solução do problema consiste na solução do sistema de Equações (2.17) – (2.20). Muitas vezes encontrar a solução deste sistema de equações não é trivial, já que o sistema é um conjunto de expressões de igualdade e desigualdade não linear. Este sistema de equações pode ser resolvido utilizando técnicas matemáticas no qual, pode-se tratar o sólido que é um meio contínuo, como um meio discretizado com a finalidade de poder aplicar as soluções numéricas no meio discretizado que se aproximem à solução real no meio contínuo. Uma das técnicas é o MEF no qual a aproximação do fator de colapso melhora a medida que a malha utilizada na discretização é mais refinada.

Existem formulações existentes as quais foram já estudadas em anteriores trabalhos de pesquisa, no qual utilizaram o MEF e as técnicas de Programação Matemática como ferramenta numérica para obtenção da solução do sistema. Estas formulações dependendo da gênese da qual estão sendo geradas podem ser classificadas como estática, cinemática ou mista.

Estas formulações podem ainda ser classificadas em fortes ou fracas:

- Formulação Forte: Quando o modelo respeita o cumprimento estrito das condições impostas pelos teoremas da Análise Limite.
- Formulação Fraca: Quando as condições são satisfeitas através do princípio dos trabalhos virtuais.

Esta apresentação não pretende efetuar um relato exaustivo de todas as formulações existentes, mas antes fornecer uma ideia dos trabalhos considerados mais marcantes neste domínio, bem como das tendências atuais de evolução das formulações.

### **2.6.1. Formulação Estática**

Esta formulação deriva puramente da aplicação do Teorema do Limite Inferior, neste caso as equações de compatibilidade cinemática não são satisfeitas. O primeiro trabalho usando esta formulação e elementos finitos foi apresentado por Lysmer (1970), onde desenvolve problemas de deformação plana e utilizando o critério de Mohr-Coulomb. Recorrendo a um elemento triangular de tensão

(com um campo de aproximações linear) e a uma linearização da superfície de escoamento, descrita por uma circunferência no espaço das tensões  $(x,y)$ , com  $x = \sigma_x - \sigma_y$  e  $y = 2\tau_{xy}$ , através de um polígono de 12 lados, a abordagem utilizada resulta num problema de otimização linear, resolvido através do algoritmo Simplex (Nocedal e Wright, 1999).

Uma variante desta formulação estática forte foi proposta por Bottero et al (1980), Sloan (1987) e Assadi e Sloan (1991). A principal diferença desta variante é que estes autores consideram como variáveis primárias o campo de tensões nodais, a diferença de Lysmer (1970) que considera como tensões nodais as tensões normais às faces atuantes nos nós. A restrição de escoamento utilizada foi o critério de Mohr Coulomb linearizado, com um polígono inscrito de 18 lados e a função objetivo a otimizar considera a orientação e o comprimento da aresta onde atuam as cargas variáveis. O problema de programação linear foi colocado da seguinte forma:

$$\text{Maximizar } c^T \sigma \quad (2.21)$$

Sujeito à:

$$D_1 \sigma = b_1 \quad (2.22)$$

$$D_2 \sigma \leq b_2$$

onde:

$D_1$ : Somatória das matrizes dos coeficientes da equação de equilíbrio nos nós, nas faces entre elementos adjacentes e nas faces dos elementos de contorno com tensões prescritas.

$D_2$ : Somatória da matriz de coeficientes resultado da linearização do critério de escoamento em cada nó.

$b_1$ : Somatória dos vetores de coeficientes com forças aplicadas nos nós, dos vetores com coeficientes nulos resultado da aplicação das equações de equilíbrio nas faces entre elementos adjacentes, vetores com forças (normal e cisalhante) aplicadas nos contornos com tensões prescritas.

$b_2$ : Somatória dos vetores de coeficientes resultado da linearização da tensão de escoamento em cada nó.

No trabalho de Lyamin e Sloan (2002), os autores apresentam uma variante da formulação proposta por Sloan (1987a). O novo modelo, ao invés de uma linearização da superfície de escoamento, apenas executa uma suavização da superfície junto de zonas com singularidades, seguindo a estratégia delineada por Abbo e Sloan (1995). Surge, conseqüentemente, um problema de minimização não-linear que os autores resolvem com base num algoritmo Quase-Newton com deflexão.

Zouain et al. (1993) tecem considerações sobre o modo de obter a correspondente formulação de limite inferior, utilizando algoritmos baseados em problemas de programação não linear (PNL). Andersen e Christiansen (1995), Pastor et al (2003) desenvolveram trabalhos utilizando o algoritmo de pontos interiores para sua aplicação a problemas de programação linear a grande escala. Para resolver o problema de otimização resultante, o autor recorre a uma biblioteca de otimização comercial denominada MINOS (Murtagh e Saunders, 1982). Makrodimopoulos e Martin (2006) desenvolvem algoritmos baseados na técnica de programação cônica de segunda ordem (SOCP), colocando a função de escoamento como uma restrição cônica quadrática, e utilizando um otimizador de grande escala como o Mosek (Mosek ApS, 2012) resolvem problemas relacionados a materiais com coesão e atrito.

### **2.6.2. Formulação Cinemática**

Esta formulação é derivada do teorema do limite superior (cinemático). Neste caso as condições cinemáticas são satisfeitas, e as condições de equilíbrio não são garantidas necessariamente. Existem na literatura inúmeras propostas alternativas de formulações fortes de limite superior. Estas apresentam, no entanto, uma característica comum: a utilização de elementos finitos com funções de aproximação polinomiais de grau reduzido, produzindo campos de taxas de deformação constantes ou de variação linear no domínio dos elementos. O motivo para tal reside na dificuldade em impor, de uma forma exata, a lei de escoamento plástico associada para os critérios de escoamento habitualmente adotados (Zhu e Michalowski, 2005).

Entre um dos trabalhos desenvolvidos se tem o de Sloan (1987b) onde o meio contínuo é discretizado em elementos triangulares com as velocidades nodais variando linearmente em cada elemento. A lei de fluxo associado as velocidades nas descontinuidades e no contorno são utilizadas na formulação da restrição de igualdade. Neste caso a função objetivo consiste em minimizar a energia dissipada pela distorção volumétrica dos elementos mais a energia dissipada nas descontinuidades. Além disso, este algoritmo usa variáveis de folga para transformar as restrições de desigualdade em restrições de igualdade. Este problema é colocado na forma de programação linear, já que é uma extensão da formulação estática realizada por Lysmer (1970), e é formulado da seguinte forma.

$$\text{Minimizar } c_1^T \dot{u} + c_2^T \dot{\gamma} + c_3^T s_v \quad (2.23)$$

Sujeito à:

$$A_{11} \dot{u} + A_{12} \dot{\gamma} = b_1$$

$$A_2 \dot{u} + I \dot{\gamma} = b_2$$

$$A_3 \dot{u} = b_3$$

$$A_4 \dot{u} = b_4$$

$$\dot{\gamma}, s \geq 0 \quad (2.24)$$

Onde:

$$b_1 = b_2 = b_3 = c_3 = 0$$

$A_{11}$ : Somatória das matrizes com as constantes das funções de interpolação.

$A_{12}$ : Somatória das matrizes com as constantes dos hiperplanos das funções de escoamento

$A_2$ : Somatória das matrizes com os sinais das orientações nas descontinuidades

$A_3$ : Somatória com os sinais da orientação do ângulo de atrito da descontinuidade.

$A_4$ : Somatória das matrizes unitárias referente à imposição das condições de contorno em velocidade.

$c_1$  : Somatória dos vetores cujos elementos estão em função da energia de dissipação da descontinuidade o qual considera o comprimento, o sinal da face e a coesão do segmento descontínuo.

$c_2$  : Somatória dos vetores cujos elementos estão em função da energia de dissipação volumétrica nos triângulos o qual considera o ângulo de atrito, coesão e a área do elemento.

$s_v$  : Vetor das variáveis de folga.

Jiang (1995) e Antão (1997) desenvolveram uma formulação que foi a continuação do trabalho de Gennouni e Le Tallec (1982). Esta formulação elimina as descontinuidades do modelo através da substituição de uma lei rígido-plástica por uma lei de regularização tipo Norton-Hoff, no cálculo da dissipação plástica. São utilizadas duas aproximações distintas: a primeira interpola linearmente o campo das velocidades e a segunda aproxima o campo da taxa das deformações, considerado constante no domínio dos elementos. Através do método do Lagrangeano aumentado é imposta a compatibilidade entre as aproximações dos diferentes campos. Recorrendo a uma variante do algoritmo de Uzawa com relaxações, a solução do problema não linear (PNL) de otimização resultante da formulação é obtida. O referido algoritmo permite que no trabalho de Antão (1997), a não linearidade seja tratada localmente através de uma minimização quadrática, sucedida por uma projeção da solução sobre a superfície que delimita o espaço da taxa das deformações normais.

A utilização de programação cônica de segunda ordem (SOCP) no desenvolvimento de formulações fortes de limite superior é igualmente relatada nos trabalhos de Makrodimopoulos e Martin (2005 e 2007), para problemas de deformação plana, utilizando elementos sub-paramétricos triangulares de três nós de deformação linear.

Li e Yu (2005) desenvolveram uma formulação com base numa função de escoamento genérica para materiais friccionais, a qual permite modelar, entre outros, os critérios de Mohr-Coulomb e de Drucker-Prager. Recorrendo a um elemento finito quadrilátero isoparamétrico, o modelo cinemático é derivado resultando num problema de otimização não linear. Analogamente ao modelo anterior, os autores convertem o problema original com restrições num problema

de otimização sem restrições utilizando o método dos multiplicadores de Lagrange. O processo iterativo de resolução assume que todos produzem dissipação. A identificação de elementos que não apresentam dissipação no final de uma dada iteração (sendo por isso a sua expressão da dissipação não diferenciável) é realizada através de uma estratégia passo a passo. Para proceder à iteração seguinte introduz-se uma restrição no modelo, com base no método das penalidades, por forma a que a dissipação nestes elementos conserve um valor praticamente nulo.

### **2.6.3. Formulação Mista**

Neste tipo de formulação a solução é procurada com aproximações nos campos estático e cinemático, onde o campo de tensões e o campo de velocidades são interpolados no interior do elemento. Anderheggen e Knöpfel (1972) apresentaram esta formulação mista utilizando o princípio das tensões virtuais para discretizar a equação da taxa de dissipação interna. A função de escoamento é linearizada através de hiperplanos.

Christiansen (1981) faz uma caracterização matemática do problema do colapso, usando o MEF, onde emprega elementos quadriláteros com interpolação bilinear no campo de velocidades, e no campo de tensão a interpolação é bilinear ou de tensão constante. Utiliza uma aproximação poliédrica da superfície de escoamento de Von Mises para obtenção de um problema de Programação Linear (PL).

Casciaro e Cascini (1982) utilizaram o princípio do cálculo variacional misto para resolver o problema da análise limite, no qual os campos de tensões e velocidades foram obtidos da condição de estacionaridade de um funcional tipo Hellinger-Reissner definido de forma apropriada. Com o problema colocado dessa forma e através de uma discretização conveniente do meio contínuo, a solução é reduzida a um processo de minimização sem restrição para um problema de programação não linear (PNL). Nesta formulação satisfaz a condição de escoamento e as equações de consistência cinemática, no entanto, as condições de equilíbrio e a lei de fluxo são satisfeitas aproximadamente.

Pontes (1993) apresentou a aplicação de um algoritmo de programação matemática não-linear (PNL) denominado algoritmo de pontos interiores, para resolver problemas de análise limite. Este algoritmo originalmente desenvolvido por Herskovits (1989) baseia-se em um algoritmo tipo Newton que resolve as equações que representam as condições de Kuhn-Tucker do problema de programação matemática gerado.

Neste estágio da evolução da formulação numérica através dos trabalhos virtuais, Faria (1992) e Araujo (1997) aplicam esta técnica a vários problemas de geotecnia, os quais são cuidadosamente estudados e validados com soluções analíticas. O problema de otimização é resolvido por meio da programação linear (PL) linearizando a restrição de escoamento de Mohr Coulomb da mesma forma que na formulação de Lysmer (1970).

Farfán (2000) utilizou a formulação mista utilizando o princípio dos deslocamentos virtuais. O meio contínuo neste trabalho é considerado como um meio contínuo de Cosserat. A aplicação da metodologia da formulação mista e da discretização do meio em uma malha de elementos finitos nos contínuos de Cosserat (2D) fornece problemas de programação linear (PL) e nos contínuos convencionais (2D e 3D), problemas de programação não-linear (PNL).

Carrión (2004) testou a eficiência de otimizadores para problemas de programação não linear (PNL) como LANCELOT, LINGO, MINOS e conclui que o otimizador MINOS se torna mais eficiente para a otimização não linear de problemas decorrentes de análise limite. Carrión (2009) implementa um otimizador baseado no método quase-newton de pontos interiores no qual é acoplado no programa da análise limite GEOLIMA (Carrión, 2004) utilizado para resolver problemas de grande escala em estruturas geotécnicas reais, tais como, barragem de terra e barragem de rejeito.

## 2.7. Programação Matemática

O problema de análise limite numérica como foi visto na seção anterior constitui geralmente um problema de programação matemática com restrições de igualdade e desigualdade, onde o objetivo consiste em minimizar ou maximizar uma determinada expressão, denominada função objetivo, e satisfazer simultaneamente um conjunto de restrições de igualdade e desigualdade. As variáveis incógnitas nessas funções são denominadas variáveis de projeto.

Estes problemas de programação matemática tratam da análise e resolução de problemas de otimização segundo a forma:

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar (ou Maximizar):} & f(x), x \in R^n \\ \text{Sujeito a:} & h_k(x) = 0 \quad k=1\dots m \end{array} \quad (2.25)$$

$$c_l(x) < 0 \quad l=1\dots p \quad (2.26)$$

Onde:

$x$  : Vetor das variáveis.

$f(x)$  : Função objetivo.

$h(x)$  e  $c(x)$  : Funções das restrições de igualdade e desigualdade respectivamente.

As funções  $f(x)$ ,  $h(x)$  e  $c(x)$  são funções contínuas em  $R^n$  e qualquer ponto, definido pelo vetor  $x$ . Um ponto que satisfaça todas as restrições (igualdade e desigualdade) é denominado de *ponto viável* e o espaço ou região que contém todos os pontos que satisfaçam todas as restrições é conhecido como região viável. Uma restrição de desigualdade define uma fronteira que divide o  $R^n$  em uma região viável e outra inviável. O seguinte exemplo apresenta um problema de programação linear (PL) no qual apresenta restrições de desigualdade.

$$\text{Maximizar: } Z = 11x_1 + 12x_2$$

$$\text{Sujeito a: } x_1 + 4x_2 \leq 10000$$

$$5x_1 + 2x_2 \leq 30000$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Na Figura 2.7, a região sombreada representa a região viável do problema que está delimitada pelas restrições do problema. Quando um ponto está sobre esta fronteira, a restrição é dita *ativa*; quando um ponto está no interior da região viável, a restrição está *inativa* e, quando um ponto está fora desta região, a restrição está violada.

Para uma solução gráfica desse problema que pode ser obtida facilmente para problemas de duas variáveis de projeto, deve-se inicialmente representar a região viável. Em seguida traçam-se superfícies paralelas à função objetivo. São traçadas diversas paralelas a ela no sentido crescente da função objetivo (maximização da função), como na Figura 2.8. O ponto ótimo é o ponto onde a superfície de maior valor possível tangencia a região viável.

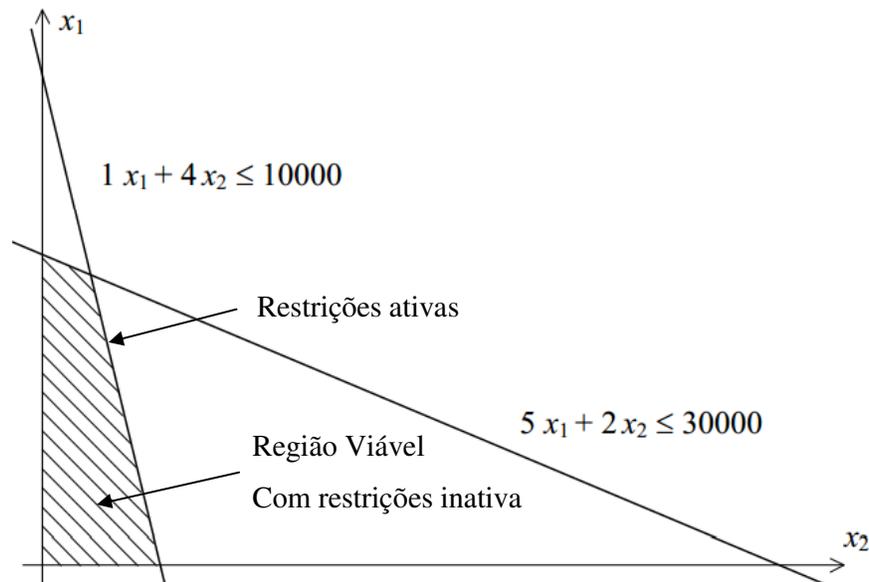
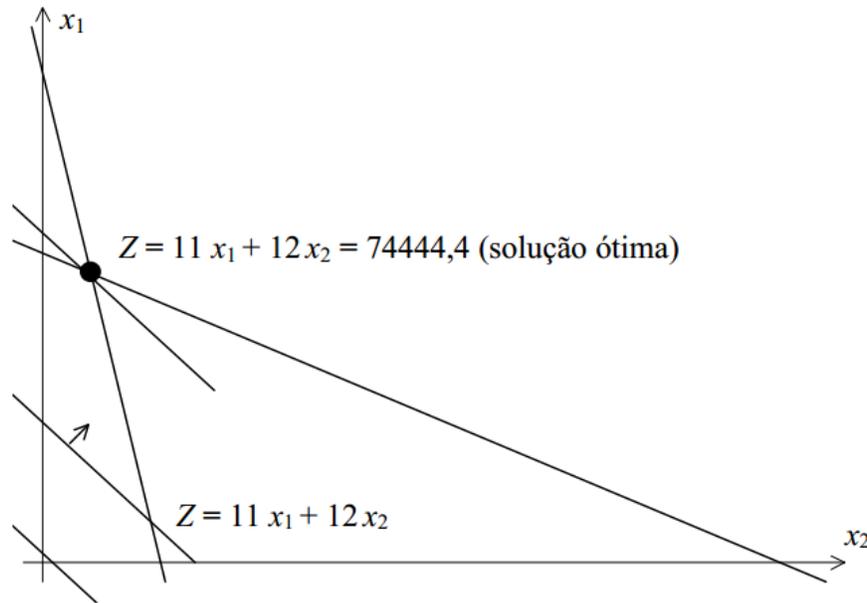


Figura 2.7 - Região Viável do problema.



**Figura 2.8 - Busca da solução ótima para o problema.**

Os problemas de programação matemática podem ser classificados de acordo com suas características da função objetivo e das funções de restrição. A Tabela 2.1 mostra esta classificação.

**Tabela 2.1 - Classificação dos Problemas de Programação Matemática**

Função Objetivo	Restrições	Programação
Linear	Linear	Linear (PL)
Linear	Não-Linear	Não Linear (PNL)
Quadrática	Linear	Quadrática (PQ)
Não Linear	Não-Linear	Não Linear (PNL)

### 2.7.1. Função Lagrangeana

Define-se uma função formada pelo somatório da função objetivo e as funções de restrições de igualdade e desigualdade multiplicadas por uns fatores denominados de multiplicadores de Lagrange. Esta função constituída por este somatório é denominado função Lagrangeana associada:

$$L(x, \lambda, \mu) = f(x) + \sum_{k=1}^m \lambda_k h_k(x) + \sum_{l=1}^p \mu_l c_l(x) \quad (2.27)$$

Onde:

$\lambda_k$  : Multiplicadores de Lagrange associados às restrições de igualdade.

$\mu_l$  : Multiplicadores de Lagrange associados às restrições de desigualdade.

## 2.7.2. Dualidade

Com a finalidade de introduzir o conceito de Dualidade, revisa-se o seguinte exemplo. Considerando o seguinte problema de programação matemática:

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar } f(x) \\ &\text{Sujeito a: } g(x) \leq 0 \end{aligned} \quad (2.28)$$

A função lagrangeana aplicada a este problema fica da seguinte forma

$$L(x, u) = f(x) + u^T g(x) \quad x \in R^n, \quad u \in R^m \quad (2.29)$$

Na função  $L \in R^{m+n}$ , existe um ponto  $(x^*, u^*) \in R^{m+n}$  com  $u^* \geq 0$ , este ponto é denominado ponto de sela da função lagrangeana  $L(x, u)$ , se:

$$L(x^*, u^*) = \max L(x^*, u) \quad \forall u \in R_+^m = \min L(x, u^*) \quad \forall x \in R^n \quad (2.30)$$

Isto é, o ponto  $(x^*, u^*)$  maximiza a função  $L$  se  $x=x^*$  for fixo e minimiza esta função se  $u=u^*$  for fixo (Zörnig, 2011).

Um ponto de sela  $(x^*, u^*)^T = (2, 1)^T$ , é ilustrado geometricamente na Figura 2.9 para o caso de  $m=1, n=1$ .

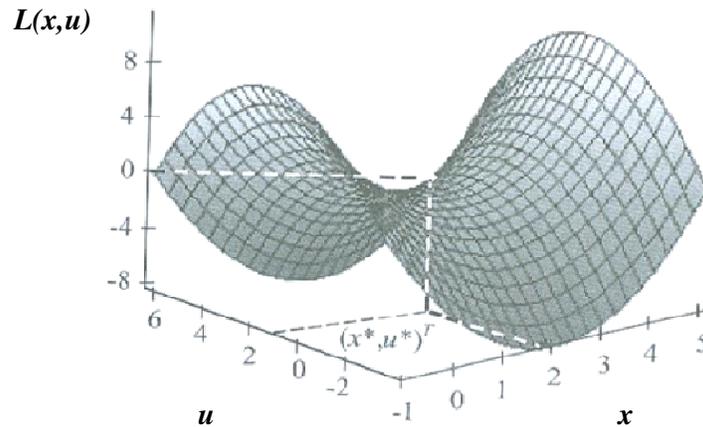


Figura 2.9 - Ponto de Sela da Função Lagrangeana (Zörnig, 2011).

Se  $(x^*, u^*)$  for um ponto de sela da Função Lagrangeana  $L(x, u)$  então  $x^*$  é solução ótima do problema enunciado na Equação (2.28). Esta definição pode ser colocada da seguinte forma:

$$\min_{x \in R^n} \sup_{u \in R^m} L(x, u) = \max_{u \in R^m} \inf_{x \in R^n} L(x, u) \quad (2.31)$$

O termo na parte direita da Equação (2.31) é denominado dentro da programação matemática como problema *primal* (PP) e o termo da esquerda é denominado problema *dual* (PD).

O conceito de dualidade permite, a partir de um dado problema de programação matemática ou problema *primal*, obter um outro problema, chamado problema *dual*, cuja solução tem relação com a solução do problema primal. (Zörnig, 2011). Além disso, é possível, conhecendo-se a solução de um deles, obter a solução do outro. A teoria da plasticidade das estruturas apresenta dois teoremas para o cálculo do fator de colapso em estruturas que são os teoremas do limite inferior e do limite superior. Quando se formulam os dois teoremas como problemas de programação matemática, eles se apresentam como duais, ou seja, um é o problema primal e outro é o problema dual. A dualidade permite mostrar que, dado um problema primal (PP) com restrições de igualdade e desigualdade:

Minimizar:  $f(x), x \in R^n$

$$\text{Sujeito a: } h_k(x) = 0 \quad k=1\dots m \quad (2.32)$$

$$c_l(x) < 0 \quad l=1\dots p \quad (2.33)$$

e sua respectiva função lagrangeana (função convexa):

$$L(x, \lambda, \mu) = f(x) + \sum_{k=1}^m \lambda_k h_k(x) + \sum_{l=1}^p \mu_l h_l(x) \quad (2.34)$$

onde  $\lambda, \mu$  são vetores que correspondem aos multiplicadores de Lagrange associados às restrições.

Seu problema dual (PD) é dado por:

Maximizar:  $L(x, \lambda, \mu)$

$$\text{Sujeito a: } \frac{\partial L(x, \lambda, \mu)}{\partial x} = 0$$

$$\lambda \geq 0 \quad k=1\dots m \quad (2.35)$$

$$\mu \geq 0 \quad l=1\dots p \quad (2.36)$$

As soluções dos problemas primal e dual se relacionam da seguinte forma:

- Sejam as funções  $f$  e  $g_i$  do problema primal (PP) continuamente diferenciáveis e convexas. Seja  $x^*$  um ponto ótimo regular do problema primal. Temos:
  - (i) O problema dual (PD) tem uma solução ótima nos pontos  $(\lambda, \mu)$
  - (ii) Os valores ótimos do problema primal (PP) e o problema dual (PD) são idênticos.

Este tipo de formulação alternativa (dual) é de grande vantagem por reduzir em certos casos o número das restrições e o estudo dos vetores duais  $(\lambda, \mu)$  é importante na análise de sensibilidade do problema. O uso da teoria de dualidade é muito importante para os problemas da Análise Limite, porque ele permite determinar o campo de velocidades, que descrevem o mecanismo de colapso, como solução dual do campo de tensões.

Este problema é conhecido também como propriedade de dualidade estático-cinemático dos meios contínuos, definido como:

$$f = \nabla \sigma \quad (2.37)$$

$$\varepsilon = \nabla^T u \quad (2.38)$$

Onde:

$f$  : Vetor de forças externas.

$\sigma$  : Vetor do campo de tensões.

$\varepsilon$  : Vetor do campo de deformações.

$u$ : Vetor do campo de velocidades de deformação.

$\nabla$  : Operador diferencial do equilíbrio estático.

$\nabla^T$  : Operador diferencial das relações de compatibilidade.

### 2.7.3. Condições de Ótimo

Para que a solução  $x^*$  seja um mínimo local do problema enunciado nas Equações (2.25) e (2.26) é necessário que esta atenda as condições de 1ª ordem, também chamadas de condições de Kuhn-Tucker, que são obtidas partindo da função Lagrangeana:

$$\begin{aligned} \text{Minimizar:} \quad & f(x), x \in R^n \\ \text{Sujeito a:} \quad & h_k(x) = 0 \quad k=1\dots m \end{aligned} \quad (2.39)$$

$$c_l(x) < 0 \quad l=1\dots p \quad (2.40)$$

A função Lagrangeana associada é dada por:

$$L(x, \lambda, \mu) = f(x) + \sum_{k=1}^m \lambda_k h_k(x) + \sum_{l=1}^p \mu_l c_l(x) \quad (2.41)$$

As condições necessárias (condições de primeira ordem) de KKT são dadas pelas seguintes expressões:

$$\frac{\partial L(x^*, \lambda^*, \mu^*)}{\partial x} = 0 \quad (2.42)$$

$$g^* = \sum_{k=1}^m \lambda_k^* \nabla h_k^* + \sum_{l=1}^p \mu_l^* \nabla c_l^* \quad k=1\dots m; l=1\dots p \quad (2.43)$$

$$h_k(x^*) = 0 \quad k=1...m \quad (2.44)$$

$$c_l(x^*) \leq 0 \quad l=1...p \quad (2.45)$$

$$\lambda_k^* \text{ valor } \forall \quad k=1...m \quad (2.46)$$

$$\mu_l^* \geq 0 \quad l=1...p \quad (2.47)$$

$$\lambda_k^* h_k^* = 0 \quad k=1...m \quad (2.48)$$

$$\mu_l^* c_l^* = 0 \quad l=1...p \quad (2.49)$$

Os conceitos de programação matemática como as condições de otimalidade e a teoria de dualidade, são aproveitados neste trabalho para obter os resultados do problema de análise limite, utilizando ferramentas de otimização colocadas de diferentes formas com a finalidade de testar a eficiência de cada um delas.

No caso do problema da análise limite para estruturas geotécnicas o significado dos multiplicadores de Lagrange têm grande importância, aqueles que estão associados às restrições de igualdade são as velocidades de deformação nodais no colapso, o qual mostra o mecanismo de falha da estrutura, e aqueles que estão associados às restrições de desigualdade são os fatores de plastificação presentes na estrutura.

## 2.8. Otimização Convexa

Um conjunto é convexo se e somente se ele contém todo o segmento unindo dois dos seus pontos. Além disso, a função  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ , é convexa se e apenas se o seu domínio  $D$  e sua epígrafe, definida por

$$\text{epi } f = \{(x,t) | x \in D \text{ e } f(x) \leq t\} \quad (2.50)$$

são dois conjuntos convexos.

O problema padrão de otimização convexa trata da minimização de uma função convexa em um conjunto convexo, e pode ser escrita como se segue:

$$\begin{aligned} & \text{Minimizar } f_1(x) \text{ para } x \in R^n \\ & \text{Sujeito a: } x \in S \end{aligned} \tag{2.51}$$

Onde  $S \subseteq R^n$  é um conjunto convexo fechado e  $f_1 \rightarrow R$  é uma função convexa definida em  $S$ . A convexidade tanto da função objetivo  $f_1$  e a região viável  $S$  desempenha um papel muito importante, desde que é responsável por duas seguintes propriedades:

- Algum ótimo local do problema da Equação (2.51) é também um ótimo global, o qual implica que o mínimo da função objetivo é único. (Glineur, 2001)
- Existe um problema dual convexo fortemente relacionado com a Equação (2.51). Ou seja, o par de problemas que consistem em um problema de otimização convexa e sua dupla satisfaz uma propriedade de dualidade fraca (o valor objetivo de qualquer solução viável para um desses problemas fornece um limite sobre o valor objetivo ótimo para o problema dual) e, sob certas condições, uma propriedade de dualidade forte (igualdade e realização dos valores objetivos ideais para os dois problemas). (Glineur, 2001)

Notamos que a função objetivo  $f_1$  pode ser assumida como linear com algumas perdas de generalidade, portanto pode-se definir esta como:  $\hat{f}_1(x) = c^T x$  usando um vetor  $c \in R^n$ . Com efeito, pode-se ver que o problema da Equação (2.51) é equivalente ao seguinte problema com um objetivo linear:

$$\begin{aligned} & \text{Minimizar } t \\ & \text{Sujeito a: } (x, t) \in \hat{S} \end{aligned} \tag{2.52}$$

Onde  $\hat{S} \subseteq R^{n+1}$  é adequadamente definido:

$$\hat{S} = \{(x, t) \mid x \in R^n \times R \mid x \in S \text{ e } f_1(x) \leq t\} \tag{2.53}$$

A equivalência decorre do fato de que a definição da restrição  $\hat{S}$  é necessariamente satisfeita com a igualdade a qualquer solução ótima  $(x^*, t^*)$ , ou seja, tem-se que  $t^* = f_I(x^*)$ . Além disso, este problema convexo é equivalente, uma vez que  $S$  é a epígrafe da função convexa  $f_I$ , então tem-se que:

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar } c^T x \text{ para } x \in R^n \\ &\text{Sujeito a: } x \in S \end{aligned} \quad (2.54)$$

Agora pode-se especificar os dados do problema (2.51), isto é, como se pode descrever sua função objetivo e o conjunto viável. Enquanto a especificação da função objetivo é facilmente feita através do fornecimento do vetor  $c$ , descrevendo o conjunto viável  $S$ , que é responsável da estrutura do problema (2.54), pode ser feito de várias maneiras.

A maneira tradicional de proceder de uma otimização não linear é fornecer uma lista de restrições convexas que definem  $S$ , isto é:

$$S = \{x \in R^n \mid f_i(x) \leq 0 \quad \forall i \in I = \{1, 2, \dots, m\}\} \quad (2.55)$$

Onde as “ $m$ ” funções  $f_i: R^n \rightarrow R$  são convexas. Isto garante a convexidade de  $S$ , como uma interseção dos conjuntos convexas, e o problema (2.48) transforma-se:

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar } c^T x \\ &\text{Sujeito a: } f_i(x) \leq 0 \quad \forall i \in I = \{1, 2, \dots, m\} \end{aligned} \quad (2.56)$$

A Equação (2.56) é a formulação mais comumente encontrada de um problema de otimização convexa.

No entanto, uma forma muito mais elegante para descrever a região viável consiste na definição de  $S$  como a interseção de um cone convexo e um subespaço afim, o que leva a otimização cônica.

## 2.9. Otimização Cônica

Nos últimos anos, uma significativa quantidade de trabalhos está dedicada à programação cônica, tendo como um dos primeiros trabalhos o desenvolvido por Lobo et al. (1998), onde mostrou o algoritmo de programação cônica de segunda ordem (SOCP) para a solução de diferentes problemas em distintas áreas da engenharia .

Embora a programação cônica esteja relativamente bem estabelecida, são poucas as aplicações feitas no campo da plasticidade apesar de seu evidente uso nos problemas em superfícies de escoamento com presença de singularidades. Entre as aplicações na última década pode-se mencionar os trabalhos de Makrodimopoulos e Martin (2005) nos quais se aplicou o uso da programação cônica de segundo ordem (SOCP) para alguns problemas tradicionalmente complexos. Outras aplicações em problemas de menor complexidade também foram bem sucedidas, tais como Gilbert e Tyas (2003), Makrodimopoulos (2006); Bisbos et al. (2005). Krabbenhoft, et. al. (2006) apresentam aplicações para problemas de plasticidade, mostrando a utilidade da técnica de programação cônica e sua aplicação nos critérios de resistência de Drucker-Prager, Mohr-Coulomb e Nielsen. Um dois principais algoritmos de programação cônica de segunda ordem (SOCP) é o desenvolvido por Andersen et al. (2003), o qual tem sido implementado no programa Mosek (Mosek ApS, 2012), que é um pacote comercial para problemas de otimização a grande escala e mostrou um grande desempenho na solução destes problemas.

### 2.9.1. Conjunto de Cones

Um conjunto  $\mathcal{K}$  é chamado um cone se  $\forall x \in \mathcal{K}$  e  $\gamma \geq 0$ ,  $\gamma x \in \mathcal{K}$ . Seu cone dual  $\mathcal{K}^*$  é definido como:

$$x^T y \geq 0 \quad \forall x \in \mathcal{K} \Leftrightarrow y \in \mathcal{K}^* \quad (2.57)$$

Se  $\mathcal{K} = \mathcal{K}^*$  então o cone é auto-dual. Por exemplo, o conjunto  $R^+ = \{x : x \geq 0\}$  é um cone auto-dual.

O cone quadrático de segunda ordem qual tem a forma apresentada na Equação (2.58).

$$\mathcal{K} = \{x \in R^d : \|x_{2:d}\| \leq x_1, x_1 \geq 0\} \quad (2.58)$$

onde  $x_{2:d} = [x_2 \dots x_d]^T$ .

Outro interessante exemplo auto-dual é o cone quadrático rodado que é apresentado na Equação (2.59).

$$\mathcal{K} = \{x \in R^d : \|x_{3:d}\|^2 \leq 2x_1x_2, x_1, x_2 \geq 0\} \quad (2.59)$$

Pode ser demonstrado que o cone rodado pode ser transformado para um cone quadrático através de uma transformação linear. (Andersen et. al., 2003)

## 2.9.2. Programação Cônica da Segunda Ordem (SOCP)

A programação cônica da segunda ordem (SOCP, por suas siglas em inglês) também referida na literatura como otimização cônica quadrática, envolve um problema de otimização da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \text{Minimizar:} & \quad c^T x \\ \text{Sujeito a:} & \quad Ax = b \\ & \quad x_i \in \mathcal{K}_i \quad \forall i \in [1, \dots, N] \end{aligned} \quad (2.60)$$

onde:  $x = [x_1 \dots x_N] \in R^n$ ,  $x_i \in R^{d_i}$ ,  $A \in R^{m \times n}$ ,  $b \in R^m$ ,  $c \in R^n$ ,  $\mathcal{K}_i$  são os cones quadráticos ou cones quadráticos rotativos. O problema dual correspondente ao problema de programação cônica das Equações (2.60) é:

$$\begin{aligned} \text{Maximizar:} & \quad b^T y \\ \text{Sujeito a:} & \quad A^T y + s = c \\ & \quad s_i \in \mathcal{K}_i \quad \forall i \in [1, \dots, N] \end{aligned} \quad (2.61)$$

Onde  $y \in R^m$ ,  $s \in R^n$ ,  $s_i \in R^{d_i}$ . O ponto ótimo deve satisfazer as seguintes condições (Andersen et. al., 2003; Tsuchiya, 1997):

$$\begin{aligned}
 Ax &= b \\
 A^T y + s &= c \\
 x_i &\in \mathcal{K}_i \quad \forall i \in [1, \dots, N] \\
 s_i &\in \mathcal{K}_i \quad \forall i \in [1, \dots, N] \\
 X_i S_i e_i &= 0 \quad \forall i \in [1, \dots, N]
 \end{aligned} \tag{2.62}$$

Onde  $X_i, S_i \in R^{d_i \times d_i}$  e  $e_i = [1 \ 0 \ \dots \ 0]^T \in R^{d_i}$ . As matrizes  $X_i$  e  $S_i$  são dadas por  $\text{mat}(T_i x_i)$  e  $\text{mat}(T_i s_i)$ , respectivamente onde  $T_i = I_{d_i}$  para um cone quadrático e a função “mat” é definida de acordo com Makrodimpoulos e Martín (2005) como:

$$\text{mat}(u) = \begin{bmatrix} u_1 & u_{2:d}^T \\ u_{2:d} & u_1 I_{d-1} \end{bmatrix} \tag{2.63}$$

As equações (2.60) e (2.61) mostram que SOCP pode ser considerado uma generalização da programação linear (PL). As restrições de igualdade primal e dual são as mesmas que na programação linear (PL). As restrições são cônicas e são versões generalizadas das restrições de não negatividade na programação linear (PL) onde  $x_i \geq 0$ ,  $s_i \geq 0$  e a condição de complementaridade é uma versão generalizada deste na programação linear (PL) onde  $x_i s_i = 0$ , o qual corresponde para  $T_i = 1$  e  $e_i = 1$  (Makrodimpoulos e Martín, 2005).

SOCP também engloba várias importantes classes de otimização não linear como casos especiais. Isto inclui a minimização da soma das normas, programação quadrática convexa, e programação linear com restrições quadráticas (Makrodimpoulos e Martín, 2005).

### 2.9.3. Algoritmos e Software para SOCP

Como é no caso da programação linear (PL), problemas de grande escala podem ser resolvidos efetivamente usando algoritmos de problemas primal-dual, baseados no método dos pontos interiores. Na realidade, tem sido demonstrado que esta abordagem mantém a sua eficiência teórica quando estes problemas são generalizados da programação linear para a programação cônica. Devido a estes

motivos, o algoritmo de pontos interiores para SOCP está recebendo uma considerável atenção nos anos recentes.

No presente, o algoritmo que esta liderando a atenção dos pesquisadores que trabalham na área de otimização, é aquele desenvolvido por Andersen et. al (2003) que foi implementado em Mosek (Mosek ApS, 2012), e provou ser altamente robusto e eficiente em uma variedade de testes em independentes áreas de pesquisa.

Alguns exemplos de problemas que Mosek pode resolver são:

- Problemas de programação linear (PL).
- Problema de programação quadrática (PQ).
- Problemas de programação cônica (PC)
- Problemas Mistos inteiros.

Para o presente trabalho se faz uso do programa Mosek, para a solução do problemas na forma cônica quadrática.

### 2.9.3.1. Exemplo de Aplicação de Programação Cônica utilizando o programa Mosek

A seguir é apresentado um exemplo de aplicação de maneira de mostrar as condições do problema dentro do programa.

$$\begin{aligned}
 &\text{Minimizar } x_5 + x_6 \\
 &\text{Sujeito a: } x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\
 &\quad x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \\
 &\quad x_5 \geq (x_1^2 + x_3^2)^{1/2} \\
 &\quad x_6 \geq (x_2^2 + x_4^2)^{1/2}
 \end{aligned} \tag{2.64}$$

O problema envolve algumas restrições lineares e duas restrições cônicas quadráticas, então, neste caso se tem um problema de programação cônica de segunda ordem, onde parte das restrições tem a forma de um cone quadrático.

Quando é utilizado o programa Mosek as restrições lineares, que devem ser especificadas como se fosse um problema de programação linear. As restrições

cônicas devem ser especificadas usando um vetor que receba os tipos de cones que estão sendo usados no processo de otimização.

A especificação da parte linear do problema é especificada da seguinte forma:

```
% cqp1.m

clear prob;

% Specify the non-conic part of the problem.

prob.c = [0 0 0 0 1 1];
prob.a = sparse([1 1 1 1 0 0]);
prob.blc = 1;
prob.buc = 1;
prob.blx = [0 0 0 0 -inf -inf];
prob.bux = inf*ones(6,1);
```

Como se pode ver, a matriz das restrições de igualdade é especificada na forma esparsa e são colocados os mesmos valores nos limites superior e inferior, aqueles valores das variáveis que não tem especificados os limites estão sendo consideradas como podendo tomar valores infinitos negativos e positivos.

Deve-se definir um vetor ou arranjo linear para armazenar as restrições cônicas, o que é feito da seguinte maneira:

```
prob.cones = cell(2,1);
```

Precisa-se especificar o tipo de cone que será utilizado na otimização, ou seja, deve-se especificar se o cone é do tipo cônico quadrático ou do tipo rotativo. No caso de se utilizar o tipo de cone cônico quadrático deve-se especificar no programa o cone como 'MSK\_CT\_QUAD'; e no caso de utilizar o cone cônico rotativo deve-se especificar o cone como 'MSK\_CT\_RQUAD'. Então, no exemplo, tem-se que:

```
% The first cone is specified.

prob.cones{1}.type = 'MSK_CT_QUAD';
prob.cones{1}.sub = [5 3 1];

% The second cone is specified.

prob.cones{2}.type = 'MSK_CT_QUAD';
prob.cones{2}.sub = [6 2 4];
```

Onde os números dentro dos vetores são os sub-índices das variáveis que estão implicadas nas restrições cônicas. Finalmente utiliza-se o comando 'mosekopt', para realizar o processo de otimização.

```
% Optimize the problem.  
[r,res]=mosekopt('minimize',prob);
```

No seguinte capítulo se mostrará como as condições do problema de análise limite são utilizadas de maneira de poder fazer uso da programação cônica quadrática, e desta forma fazer uso desta técnica no algoritmo de solução, além disso se faz uma breve explicação do algoritmo que utiliza o programa Mosek para resolver o problema de otimização.