

4

Análise linear

O presente capítulo apresenta a análise linear da casca cilíndrica, mostrando as equações de equilíbrio linearizadas, o cálculo das frequências naturais e o cálculo das cargas críticas. Além disso, mostram-se comparações das frequências naturais e das cargas críticas, aqui calculadas, com diversos outros trabalhos presentes na bibliografia. Estes cálculos serão realizados tanto para materiais isotrópicos como para MGF.

4.1

Introdução

As três Equações (2.28) não lineares de movimento, vistas no Capítulo 2, podem ser escritas em função do campo de deslocamentos u , v e w , resultando nas Equações (4.1). Estas equações são para um MGF, onde há algumas modificações no funcional de energia e nos esforços de membrana e flexão, como visto no capítulo anterior (Equação 3.11).

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} \left(\left(\frac{1}{2} \rho_c + \frac{1}{2} \rho_a \right) u_t h \right) \right) + \left(\frac{\partial}{\partial x} \left[1 \left(- \frac{1 (2 E a - 2 E c) w_{xx}}{2 h (1 - \nu^2)} \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + \frac{1 (2 E a - 2 E c) \left(-w_{xx} + \frac{\nu (\alpha v_y - w_{yy})}{R^2} \right)}{2 h (1 - \nu^2)} + \frac{1 (2 E a - 2 E c) \nu (\alpha v_y - w_{yy})}{2 h (1 - \nu^2) R^2} \right) R h^3 / \right. \right. \quad (4.1a)$$

$$\begin{aligned}
& 12 + \left(\frac{\left(\frac{1}{2} Ec + \frac{1}{2} Ea \right) \left(u_x + \frac{1}{2} w_x^2 \right)}{1 - \nu^2} \right. \\
& + \frac{\left(\frac{1}{2} Ec + \frac{1}{2} Ea \right) \left(u_x + \frac{1}{2} w_x^2 + \nu_1 \left(\frac{1}{R} (v_y + w) + \frac{1}{2 R^2} (w_y - \alpha v)^2 \right) \right)}{1 - \nu_1^2} \\
& + \left. \frac{\left(\frac{1}{2} Ec + \frac{1}{2} Ea \right) \nu \left(\frac{1}{R} (v_y + w) + \frac{1}{2 R^2} (w_y - \alpha v)^2 \right)}{1 - \nu^2} \right) R h - \frac{1}{2} R P \left. \right) + \left(\frac{\partial}{\partial y} \left(1 \left(\right. \right. \right. \\
& - \frac{\left(\frac{1}{2} Ec + \frac{1}{2} Ea \right) \left(-\frac{2}{R} w_{xy} + 2 \alpha \left(\frac{3}{4 R} v_x - \frac{1}{4 R^2} u_y \right) \right) \alpha}{(2 - 2 \nu^2) R^2} \\
& + \frac{(2 Ea - 2 Ec) \left(-\frac{2}{R} w_{xy} + 2 \alpha \left(\frac{3}{4 R} v_x - \frac{1}{4 R^2} u_y \right) \right)}{h (2 - 2 \nu^2) R} \\
& - \frac{1 (2 Ea - 2 Ec) \left(v_x + \frac{1}{R} (u_y + w_x w_y - \alpha v w_x) \right) \alpha}{2 h (2 - 2 \nu^2) R^2} \left. \right) R h^{3/12} \\
& + \left. \frac{2 \left(\frac{1}{2} Ec + \frac{1}{2} Ea \right) \left(v_x + \frac{1}{R} (u_y + w_x w_y - \alpha v w_x) \right) h}{2 - 2 \nu^2} \right) \right) = \beta_1 R u_t
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{\partial}{\partial t} \left(\left(\frac{1}{2} \rho_c + \frac{1}{2} \rho_a \right) v_t h \right) \right) - 1 \left(\frac{1 (2 Ea - 2 Ec) \nu (w_y - \alpha v) \alpha w_{xx}}{2 h (1 - \nu^2) R^2} \right. \\
& - \frac{1 (2 Ea - 2 Ec) (w_y - \alpha v) \alpha (\alpha v_y - w_{yy})}{2 h (1 - \nu^2) R^4} \\
& - \frac{1 (2 Ea - 2 Ec) \left(\frac{1 (\alpha v_y - w_{yy})}{R^2} - \nu w_{xx} \right) (w_y - \alpha v) \alpha}{2 h (1 - \nu^2) R^2} \\
& - \frac{(2 Ea - 2 Ec) \alpha w_x \left(-\frac{2}{R} w_{xy} + 2 \alpha \left(\frac{3}{4 R} v_x - \frac{1}{4 R^2} u_y \right) \right)}{h (2 - 2 \nu^2) R} \left. \right) R h^{3/12} - \left(\right. \\
& - \frac{\left(\frac{1}{2} Ec + \frac{1}{2} Ea \right) \nu (w_y - \alpha v) \alpha \left(u_x + \frac{1}{2} w_x^2 \right)}{(1 - \nu^2) R^2}
\end{aligned}$$

(4.1b)

$$\begin{aligned}
& - \frac{\left(\frac{1}{2}Ec + \frac{1}{2}Ea\right)(w_y - \alpha v)\alpha \left(\frac{1(v_y + w)}{R} + \frac{1(1)(w_y - \alpha v)^2}{2R^2}\right)}{(1 - v^2)R^2} \\
& - \frac{\left(\frac{1}{2}Ec + \frac{1}{2}Ea\right)\left(\frac{1(v_y + w)}{R} + \frac{1(1)(w_y - \alpha v)^2}{2R^2} + v\left(u_x + \frac{1w_x^2}{2}\right)\right)(w_y - \alpha v)\alpha}{(1 - v^2)R^2} \\
& - \frac{2\left(\frac{1}{2}Ec + \frac{1}{2}Ea\right)\left(v_x + \frac{1(u_y + w_x w_y - \alpha v w_x)}{R}\right)\alpha w_x}{(2 - 2v_1^2)R} \Bigg) R h + \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(1 \left(\right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. 3\left(\frac{1}{2}Ec + \frac{1}{2}Ea\right)\left(-\frac{2w_{xy}}{R} + 2\alpha\left(\frac{3(1)v_x}{4R} - \frac{1(1)u_y}{4R^2}\right)\right)\alpha \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. + \frac{(2Ea - 2Ec)\left(-\frac{2w_{xy}}{R} + 2\alpha\left(\frac{3(1)v_x}{4R} - \frac{1(1)u_y}{4R^2}\right)\right)\right)}{h(2 - 2v^2)} \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. + \frac{3(2Ea - 2Ec)\left(v_x + \frac{1(u_y + w_x w_y - \alpha v w_x)}{R}\right)\alpha}{2h(2 - 2v^2)R} \right) R h^3/12 \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{2\left(\frac{1}{2}Ec + \frac{1}{2}Ea\right)\left(v_x + \frac{1(u_y + w_x w_y - \alpha v w_x)}{R}\right)R h}{2 - 2v^2} \right) \right) + \left(\frac{\partial}{\partial y} \left(1 \left(\right. \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. - \left(\frac{\left(\frac{1}{2}Ec + \frac{1}{2}Ea\right)v\alpha}{(1 - v^2)R^2} + \frac{1(2Ea - 2Ec)v}{2h(1 - v^2)R}\right)w_{xx} + \frac{1(2Ea - 2Ec)v_1\alpha\left(u_x + \frac{1w_x^2}{2}\right)}{2h(1 - v^2)R^2} \right. \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. + \frac{\left(\left(\frac{1}{2}Ec + \frac{1}{2}Ea\right)\alpha + \frac{1(2Ea - 2Ec)}{2h(1 - v^2)R}\right)(\alpha v_y - w_{yy})}{R^2} + \left(\right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. \frac{\left(\frac{1}{2}Ec + \frac{1}{2}Ea\right)\left(\frac{1(\alpha v_y - w_{yy})}{R^2} - v w_{xx}\right)}{1 - v^2} \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. + \frac{1(2Ea - 2Ec)\left(\frac{1(v_y + w)}{R} + \frac{1(1)(w_y - \alpha v)^2}{2R^2} + v\left(u_x + \frac{1w_x^2}{2}\right)\right)\right)}{2h(1 - v^2)} \right) \alpha / (R^2) \right. \\
& \left. \left. + \frac{1(2Ea - 2Ec)\alpha\left(\frac{1(v_y + w)}{R} + \frac{1(1)(w_y - \alpha v)^2}{2R^2}\right)}{2h(1 - v^2)R^2} \right) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1(2Ea - 2Ec) \left(\frac{1(\alpha v_y - w_{yy})}{R^2} - v w_{xx} \right)}{2h(1 - v^2)R} \Bigg) R h^3/12 + \left(\right. \\
& \frac{\left(\frac{1Ec}{2} + \frac{1Ea}{2} \right) v \left(u_x + \frac{1w_x^2}{2} \right)}{(1 - v^2)R} + \frac{\left(\frac{1Ec}{2} + \frac{1Ea}{2} \right) \left(\frac{1(v_y + w)}{R} + \frac{1(1)(w_y - \alpha v)^2}{2R^2} \right)}{(1 - v^2)R} \\
& \left. + \frac{\left(\frac{1Ec}{2} + \frac{1Ea}{2} \right) \left(\frac{1(v_y + w)}{R} + \frac{1(1)(w_y - \alpha v)^2}{2R^2} + v \left(u_x + \frac{1w_x^2}{2} \right) \right)}{(1 - v^2)R} \right) R h \Bigg) = \\
& \beta_1 R v_t
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{\partial}{\partial t} \left(\left(\frac{1\rho_c}{2} + \frac{1\rho_a}{2} \right) w_t h \right) \right) - 1 \left(- \frac{1(2Ea - 2Ec) v_1 w_{xx}}{2h(1 - v^2)R} + \frac{1(2Ea - 2Ec)(\alpha v_y - w_{yy})}{2h(1 - v^2)R^3} \right. \\
& + \frac{1(2Ea - 2Ec) \left(\frac{1(\alpha v_y - w_{yy})}{R^2} - v w_{xx} \right)}{2h(1 - v^2)R} \Bigg) R h^3/12 - \left(\right. \\
& \frac{\left(\frac{1Ec}{2} + \frac{1Ea}{2} \right) v \left(u_x + \frac{1w_x^2}{2} \right)}{(1 - v^2)R} + \frac{\left(\frac{1Ec}{2} + \frac{1Ea}{2} \right) \left(\frac{1(v_y + w)}{R} + \frac{1(1)(w_y - \alpha v)^2}{2R^2} \right)}{(1 - v^2)R} \\
& \left. + \frac{\left(\frac{1Ec}{2} + \frac{1Ea}{2} \right) \left(\frac{1(v_y + w)}{R} + \frac{1(1)(w_y - \alpha v)^2}{2R^2} + v \left(u_x + \frac{1w_x^2}{2} \right) \right)}{(1 - v^2)R} \right) R h \\
& + R(P_H + p) + \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(1 \left(- \frac{1(2Ea - 2Ec) w_x w_{xx}}{2h(1 - v^2)} \right. \right. \right. \\
& + \frac{1(2Ea - 2Ec) \left(-w_{xx} + \frac{v(\alpha v_y - w_{yy})}{R^2} \right) w_x}{2h(1 - v^2)} + \frac{1(2Ea - 2Ec) v w_x (\alpha v_y - w_{yy})}{2h(1 - v^2)R^2} \\
& \left. \left. \left. + \frac{(2Ea - 2Ec)(w_y - \alpha v) \left(-\frac{2w_{xy}}{R} + 2\alpha \left(\frac{3(1)v_x}{4R} - \frac{1(1)u_y}{4R^2} \right) \right) \right)}{h(2 - 2v^2)R} \right) R h^3/12 + \left(\right. \right. \\
& \left. \left. \frac{\left(\frac{1Ec}{2} + \frac{1Ea}{2} \right) w_x \left(u_x + \frac{1w_x^2}{2} \right)}{1 - v^2} \right) \right)
\end{aligned} \tag{4.1c}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\left(\frac{1}{2} \frac{Ec}{R} + \frac{1}{2} \frac{Ea}{R}\right) \left(u_x + \frac{1}{2} \frac{w_x^2}{R} + v \left(\frac{1}{R} (v_y + w) + \frac{1}{2 R^2} (w_y - \alpha v)^2\right)\right)}{1 - v^2} w_x \\
& + \frac{\left(\frac{1}{2} \frac{Ec}{R} + \frac{1}{2} \frac{Ea}{R}\right) v w_x \left(\frac{1}{R} (v_y + w) + \frac{1}{2 R^2} (w_y - \alpha v)^2\right)}{1 - v^2} \\
& + \frac{2 \left(\frac{1}{2} \frac{Ec}{R} + \frac{1}{2} \frac{Ea}{R}\right) \left(v_x + \frac{1}{R} (u_y + w_x w_y - \alpha v w_x)\right) (w_y - \alpha v)}{(2 - 2 v^2) R} R h \left) + \left(\frac{\partial}{\partial y} \left(1 \left(\right. \right. \right. \right. \\
& - \frac{1}{2 h (1 - v^2) R^2} (2 E a - 2 E c) v (w_y - \alpha v) w_{xx} + \frac{1}{2 h (1 - v^2) R^4} (2 E a - 2 E c) (w_y - \alpha v) (\alpha v_y - w_{yy}) \\
& + \frac{1}{2 h (1 - v^2) R^2} (2 E a - 2 E c) \left(\frac{1}{R^2} (\alpha v_y - w_{yy}) - v w_{xx}\right) (w_y - \alpha v) \\
& + \frac{(2 E a - 2 E c) w_x \left(-\frac{2}{R} w_{xy} + 2 \alpha \left(\frac{3}{4 R} v_x - \frac{1}{4 R^2} u_y\right)\right)}{h (2 - 2 v^2) R} R h^3/12 + \left(\right. \\
& \frac{\left(\frac{1}{2} \frac{Ec}{R} + \frac{1}{2} \frac{Ea}{R}\right) v_1 (w_y - \alpha v) \left(u_x + \frac{1}{2} \frac{w_x^2}{R}\right)}{(1 - v^2) R^2} \\
& + \frac{\left(\frac{1}{2} \frac{Ec}{R} + \frac{1}{2} \frac{Ea}{R}\right) (w_y - \alpha v) \left(\frac{1}{R} (v_y + w) + \frac{1}{2 R^2} (w_y - \alpha v)^2\right)}{(1 - v^2) R^2} \\
& + \frac{\left(\frac{1}{2} \frac{Ec}{R} + \frac{1}{2} \frac{Ea}{R}\right) \left(\frac{1}{R} (v_y + w) + \frac{1}{2 R^2} (w_y - \alpha v)^2 + v \left(u_x + \frac{1}{2} \frac{w_x^2}{R}\right)\right) (w_y - \alpha v)}{(1 - v^2) R^2} \\
& + \frac{2 \left(\frac{1}{2} \frac{Ec}{R} + \frac{1}{2} \frac{Ea}{R}\right) \left(v_x + \frac{1}{R} (u_y + w_x w_y - \alpha v w_x)\right) w_x}{(2 - 2 v_1^2) R} R h \left) - \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(1 \left(\right. \right. \right. \right. \\
& \frac{\left(\frac{1}{2} \frac{Ec}{R} + \frac{1}{2} \frac{Ea}{R}\right) w_{xx}}{1 - v^2} - \frac{\left(\frac{1}{2} \frac{Ec}{R} + \frac{1}{2} \frac{Ea}{R}\right) \left(-w_{xx} + \frac{v (\alpha v_y - w_{yy})}{R^2}\right)}{1 - v^2} \\
& - \frac{1}{2 h (1 - v^2)} (2 E a - 2 E c) \left(u_x + \frac{1}{2} \frac{w_x^2}{R} + v \left(\frac{1}{R} (v_y + w) + \frac{1}{2 R^2} (w_y - \alpha v)^2\right)\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{1(2Ea - 2Ec) \left(u_x + \frac{1}{2} \frac{w_x^2}{R} \right)}{2h(1 - \nu^2)} - \frac{\left(\frac{1}{2} \frac{Ec}{R} + \frac{1}{2} \frac{Ea}{R} \right) \nu (\alpha v_y - w_{yy})}{(1 - \nu^2) R^2} \\
& - \frac{1(2Ea - 2Ec) \nu \left(\frac{1}{R} \left(\frac{v_y + w}{R} + \frac{1}{2} \frac{(w_y - \alpha v)^2}{R^2} \right) \right)}{2h(1 - \nu^2)} R h^3/12 \left. \right) - \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(1 \left(\right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. \frac{\left(\frac{1}{2} \frac{Ec}{R} + \frac{1}{2} \frac{Ea}{R} \right) \nu w_{xx}}{(1 - \nu^2) R^2} - \frac{1(2Ea - 2Ec) \nu \left(u_x + \frac{1}{2} \frac{w_x^2}{R} \right)}{2h(1 - \nu^2) R^2} \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. - \frac{\left(\frac{1}{2} \frac{Ec}{R} + \frac{1}{2} \frac{Ea}{R} \right) (\alpha v_y - w_{yy})}{(1 - \nu^2) R^4} - \left(\frac{\left(\frac{1}{2} \frac{Ec}{R} + \frac{1}{2} \frac{Ea}{R} \right) \left(\frac{1}{R^2} (\alpha v_y - w_{yy}) - \nu w_{xx} \right)}{1 - \nu^2} \right) \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. + \frac{1(2Ea - 2Ec) \left(\frac{1}{R} \left(\frac{v_y + w}{R} + \frac{1}{2} \frac{(w_y - \alpha v)^2}{R^2} \right) + \nu \left(u_x + \frac{1}{2} \frac{w_x^2}{R} \right) \right) \right)}{2h(1 - \nu^2)} \right) \right) / (R^2) \\
& - \frac{1(2Ea - 2Ec) \left(\frac{1}{R} \left(\frac{v_y + w}{R} + \frac{1}{2} \frac{(w_y - \alpha v)^2}{R^2} \right) \right)}{2h(1 - \nu^2) R^2} R h^3/12 \left. \right) - \left(\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} \left(1 \left(\right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. 4 \left(\frac{1}{2} \frac{Ec}{R} + \frac{1}{2} \frac{Ea}{R} \right) \left(-\frac{2}{R} w_{xy} + 2\alpha \left(\frac{3}{4} \frac{(1)v_x}{R} - \frac{1}{4} \frac{(1)u_y}{R^2} \right) \right) \right) \right) \right. \\
& \left. \left. \left. - \frac{2(2Ea - 2Ec) \left(v_x + \frac{1}{R} \left(\frac{u_y + w_x w_y - \alpha v w_x}{R} \right) \right) \right)}{h(2 - 2\nu^2) R} \right) R h^3/12 \right) = \beta_1 R w_t
\end{aligned}$$

Os modos de vibração para uma casca cilíndrica simplesmente apoiada ou infinitamente longa, que atendem as condições de contorno especificadas no Capítulo 2, são dados por:

$$u = U_{mn} \cos qx \cos n\theta e^{i\omega t} \quad (4.2a)$$

$$v = V_{mn} \sin qx \sin n\theta e^{i\omega t} \quad (4.2b)$$

$$w = W_{mn} \sin qx \cos n\theta e^{i\omega t} \quad (4.2c)$$

onde $q = m\pi/L$, sendo m o número de semi-ondas longitudinais, n o número de ondas circunferenciais, ω a frequência circular, $i = \sqrt{-1}$ e U_{mn} , V_{mn} e W_{mn} são

as amplitudes dos modos de vibração. Por fim, a expressão $e^{i\omega t}$ denota a função harmônica ($f(t)$).

Ao substituir as Equações (4.2) e suas respectivas derivadas no tempo, em x e em θ nas Equações (4.1) linearizadas, chega-se à matriz de massa $M = -\omega^2 I$, sendo I a matriz identidade, e a matriz de rigidez K . De posse destas matrizes, obtém-se o problema de autovalor:

$$\left\{ \begin{bmatrix} K_{1,1} & K_{1,2} & K_{1,3} \\ K_{2,1} & K_{2,2} & K_{2,3} \\ K_{3,1} & K_{3,2} & K_{3,3} \end{bmatrix} - R\rho \quad h \begin{bmatrix} \omega^2 & 0 & 0 \\ 0 & \omega^2 & 0 \\ 0 & 0 & \omega^2 \end{bmatrix} \right\} \cdot \begin{Bmatrix} U_{mn} \\ V_{mn} \\ W_{mn} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4.3)$$

onde:

$$K_{1,1} = \frac{RCm^2\pi^2}{L^2} + \frac{Cn^2}{2R} - \frac{Cv_{MGF}n^2}{2R} + \frac{D\alpha^2n^2}{8R^3} - \frac{D\alpha^2v}{8R^3} \frac{n^2}{n^2} \quad (4.4a)$$

$$K_{1,2} = K_{2,1} = -\frac{Cv}{2L} \frac{m\pi n}{n} - \frac{Cm\pi n}{2L} + \frac{3D\alpha^2m\pi n}{8LR^2} - \frac{3D\alpha^2v}{8LR^2} \frac{m\pi n}{n} \quad (4.4b)$$

$$K_{1,3} = K_{3,1} = -\frac{Cv}{L} \frac{m\pi}{n} + \frac{D\alpha m\pi n^2}{2LR^2} - \frac{D\alpha v}{2LR^2} \frac{m\pi n^2}{n^2} \quad (4.4c)$$

$$K_{2,2} = \frac{RCm^2\pi^2}{2L^2} - \frac{RCv}{L^2} \frac{m^2\pi^2}{n^2} + \frac{9D\alpha^2m^2\pi^2}{8L^2R} - \frac{9D\alpha^2v}{8L^2R} \frac{m^2\pi^2}{n^2} + \frac{Cn^2}{R} + \frac{D\alpha^2n^2}{R^3} \quad (4.4d)$$

$$K_{2,3} = K_{3,2} = \frac{3D\alpha m^2\pi^2n}{2L^2R} - \frac{D\alpha v}{2L^2R} \frac{m^2\pi^2n}{n^2} + \frac{Cn}{R} + \frac{D\alpha n^3}{R^3} \quad (4.4e)$$

$$K_{3,3} = \frac{C}{R} + \frac{RDm^4\pi^4}{L^4} + \frac{Dn^4}{R^3} + \frac{2Dm^2\pi^2n^2}{RL^2} \quad (4.4f)$$

Os autovalores da equação $|K - \omega^2 I| = 0$ são as frequências naturais de vibração da casca e os autovetores, os modos de vibração.

A seguir, estudam-se as frequências naturais e as cargas críticas.

4.2

Frequências naturais

4.2.1

Material homogêneo isotrópico

Na Tabela 4.1, comparam-se os valores das menores frequências naturais (ω) (que corresponde ao modo de vibração predominantemente radial, isto é, em w) obtidas neste trabalho utilizando-se tanto a teoria de *Sanders* ($\alpha = 1$) quanto a teoria de *Donnell* ($\alpha = 0$), com os encontrados por *Shah et al.* (2009) e *Gonçalves & Ramos* (1996) para uma casca com $L = 0,41m$, $h = 0,001m$ e $R = 0,3015m$. Considera-se $m = 1$ e valores crescentes de n ($n = 7, 12$). As propriedades do material da casca são: $E = 2,1 \times 10^{11} \frac{N}{m^2}$; $\nu = 0,3$; $\rho = 7,85 \times 10^3 \frac{N}{m^4}$.

Tabela 4.1 – Comparação das frequências naturais ($m = 1, L = 0,41m, h = 0,001m$ e $R = 0,3015m$).

n	Shah et al. (2009)	Gonçalves & Ramos (1996)	Presente Trabalho					
	ω (Hz)	ω (Hz)	ω (Hz)					
			$(\alpha = 0)$	$^*\varepsilon_R$	$^{**}\varepsilon_R$	$(\alpha = 1)$	$^*\varepsilon_R$	$^{**}\varepsilon_R$
7	301,60	305,22	303.35	0,58	-0,61	301.94	0,11	-1,07
8	278,64	281,31	280.94	0,83	-0,13	279.01	0,13	-0,82
9	286,02	288,24	288.71	0,94	0,16	286.38	0,13	-0,65
10	315,51	317,49	318.41	0,92	0,29	315.84	0,10	-0,52
11	360,36	362,20	363.33	0,82	0,31	360.65	0,08	-0,43
12	416,19	417,94	419.19	0,72	0,30	416.44	0,06	-0,36

Propriedades da casca: $E = 2,1 \times 10^{11} \frac{N}{m^2}$; $\nu = 0,3$; $\rho = 7,85 \times 10^3 \frac{N}{m^4}$.
 * Diferença percentual entre Shah et al. e o presente trabalho (%)
 ** Diferença percentual entre Gonçalves & Ramos e o presente trabalho (%)

A Tabela 4.1 omite as frequências naturais referentes às direções u e v da casca.

A Tabela 4.2, apresenta as frequências naturais calculadas desprezando-se os termos de inércia nas duas primeiras equações de movimento (4.1a, b),

hipótese usual quando se deseja obter apenas as menores frequências de vibração da casca.

Tabela 4.2 – Comparação das frequências naturais para $\omega = 0$ nas duas primeiras equações de movimento ($m = 1, L = 0,41m, h = 0,001m$ e $R = 0,3015m$).

n	Shah <i>et al.</i> (2009)	Gonçalves & Ramos (1996)	Presente Trabalho					
	ω (Hz)	ω (Hz)	ω (Hz)					
			$(\alpha = 0)$	$^*\varepsilon_R$	$^{**}\varepsilon_R$	$(\alpha = 1)$	$^*\varepsilon_R$	$^{**}\varepsilon_R$
7	301,60	305,22	306,74	1,70	0,50	305,32	1,23	0,03
8	278,64	281,31	283,32	1,68	0,71	281,37	0,98	0,02
9	286,02	288,24	290,63	1,61	0,83	288,28	0,79	0,01
10	315,51	317,49	320,10	1,45	0,82	317,52	0,64	0,01
11	360,36	362,20	364,92	1,27	0,75	362,22	0,52	0,01
12	416,19	417,94	420,71	1,09	0,66	417,96	0,43	0,00

Propriedades da casca: $E = 2,1 \times 10^{11} \frac{N}{m^2}$; $\nu = 0,3$; $\rho = 7,85 \times 10^3 \frac{N}{m^4}$; $L = 0,410m$; $R = 0,3015m$; $h = 0,001m$.

*Diferença percentual entre Shah *et al.* e o Presente Trabalho (%)

**Diferença percentual entre Gonçalves & Ramos e o Presente Trabalho (%)

Constata-se que os valores presentes na Tabela 4.2 são maiores que os da Tabela 4.1 e mais próximos dos valores encontrados por Gonçalves & Ramos (1996). Todavia, os valores presentes na Tabela 4.1 são mais próximos dos obtidos por Shah *et al.* (2009). Em ambos os casos a frequência fundamental ocorre para $m = 1$ e $n = 7$.

O cálculo do erro relativo, ε_R , é usado como forma de comparar a proximidade dos resultados.

$$\varepsilon_R = \left(\frac{PT-T}{T} \right) \cdot 100 \quad \rightarrow \text{PT-presente trabalho; e T-trabalho comparado} \quad (4.5)$$

Para melhor ratificar os resultados aqui obtidos com as equações de Sanders, apresenta-se na Tabela 4.3 uma comparação das frequências naturais com diversos trabalhos anteriores a este. Considera-se nesta tabela $\alpha = 1$.

Tabela 4.3 – Comparação das frequências naturais com diversos trabalhos.

m	n	Gasser (1987)	Dym (1973)	Gonçalves & Ramos (1996)	Soares (2005)	Silva (2008)	Presente Trabalho
1	5	---	---	---	479,45	476,97	471,92
1	6	---	---	---	366,62	364,67	360,31
1	7	318	305,32	305,22	304,44	303,35	299,06
1	8	278	281,37	281,31	281,09	280,94	276,34
1	9	290	288,28	288,24	288,14	288,71	283,65
1	10	334	317,51	317,49	317,56	318,40	312,82
1	11	362	362,22	362,20	362,79	363,33	357,20
1	12	418	417,96	417,94	419,54	419,19	412,47
1	13	478	482,23	482,22	485,62	483,51	476,16
1	14	550	553,67	553,67	559,70	554,97	546,95

Propriedades da casca: $E = 206010 \frac{N}{m^2}$; $\nu = 0,3$; $\rho = 7,85 \times 10^{-9} \frac{N}{mm^4}$; $L = 0,400mm$;
 $R = 0,3015mm$; $h = 1mm$.

Fonte: Silva (2008).

Vê-se que os valores encontrados neste trabalho de dissertação estão em conformidade com as formulações para cascas cilíndricas isotrópicas. Já para cascas cilíndricas com MGF, formulação presente no Capítulo 3 desta dissertação, ver-se-á que também estão em conformidade com os valores obtidos em trabalhos anteriores.

4.2.2

Material com gradação funcional

As frequências naturais para uma casca de material com gradação funcional também são comparadas com aqueles obtidos por Shah *et al.* (2009). A Tabela 4.4 mostra os resultados para um expoente de gradação k igual a 0,5.

Tabela 4.4 – Comparação das frequências naturais para MGF com $k = 0,5$ ($m = 1, h/R = 0,002, L/R = 20$).

Shah et al. (2009)		Presente Trabalho							
		$\omega = 0$, nas duas primeiras Equações.				ω_1, ω_2 e ω_3 , para ω_1			
		ω (Hz)				ω_1 (Hz)			
n	ω (Hz)	$(\alpha = 0)$	ε_R	$(\alpha = 1)$	ε_R	$(\alpha = 0)$	ε_R	$(\alpha = 1)$	ε_R
1	13,3210	19,0134	42,73	19,0077	42,69	13,3728	0,39	13,3688	0,36
2	4,5168	5,1753	14,58	5,0310	11,38	4,6261	2,42	4,4972	-0,43
3	4,1911	4,6447	10,82	4,2454	1,30	4,4058	5,12	4,0270	-3,92
4	7,0972	7,4035	4,32	6,9536	-2,02	7,1821	1,20	6,7457	-4,95
5	11,3360	11,4312	0,84	10,9761	-3,17	11,2090	-1,12	10,7628	-5,06
$E_{níquel} = 2,05098 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$						$E_{aço} = 2,07788 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$			
$\nu_{níquel} = 0,31$						$\nu_{aço} = 0,317756$			
$\rho_{níquel} = 8900 \text{ kg/m}^3$						$\rho_{aço} = 8166 \text{ kg/m}^3$			

A Tabela 4.4 apresenta os resultados considerando somente a inércia em w , fazendo $\omega = 0$ nas duas primeiras Equações (4.1), e a inércia nas três direções (u , v e w), tanto para a teoria de *Sanders* quanto para a teoria de *Donnell*.

Constata-se que na Tabela 4.4 os valores das frequências naturais são mais próximos aos do trabalho de Shah et al. (2009) quando se considera o $\alpha = 1$ (*Sanders*) e a inércia nas três direções (u , v e w).

Tabela 4.5 – Comparação das frequências naturais para MGF com $k = 5$ ($m = 1, h/R = 0,002, L/R = 20$).

Shah et al. (2009)		Presente Trabalho							
		$\omega = 0$, nas duas primeiras Equações.				ω_1, ω_2 e ω_3 , para ω_1			
		ω (Hz)				ω_1 (Hz)			
n	ω (Hz)	$(\alpha = 0)$	ε_R	$(\alpha = 1)$	ε_R	$(\alpha = 0)$	ε_R	$(\alpha = 1)$	ε_R
1	13,3210	18,5511	41,80	18,5455	41,75	13,0477	-0,62	13,0437	-0,65
2	4,5168	5,0494	14,60	4,9087	11,11	4,5136	2,40	4,3879	-0,72
3	4,1911	4,5318	14,61	4,1421	4,54	4,2986	8,71	3,9291	-0,85
4	7,0972	7,2235	8,87	6,7845	2,24	7,0075	5,61	6,5817	-0,82
5	11,3360	11,1533	-3,38	10,7092	-7,23	10,9365	-5,26	10,5011	-9,03
$E_{níquel} = 2,05098 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$						$E_{aço} = 2,07788 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$			
$\nu_{níquel} = 0,31$						$\nu_{aço} = 0,317756$			
$\rho_{níquel} = 8900 \text{ kg/m}^3$						$\rho_{aço} = 8166 \text{ kg/m}^3$			

A Tabela 4.5 apresenta uma comparação semelhante à da Tabela 4.4, considerando neste caso um valor de $k = 5$.

Nas Tabelas 4.6 e 4.7 comparam-se as frequências naturais aqui obtidas com as apresentadas no trabalho de Arshad *et al.* (2011) para um material composto de aço e níquel, considerando respectivamente o material aço inoxidável na parte externa e o material níquel na parte interna da casca e o oposto. Nestas tabelas se considera a inércia nas três direções (u , v e w).

Tabela 4.6 – Frequências para aço inoxidável na parte externa e níquel na parte interna ($m = 1, h/R = 0,002, L/R = 20$).

n	Arshad <i>et al.</i> (2011)			Presente trabalho ($\alpha = 1$)		
	$k = 0,5$	$k = 1$	$k = 5$	$k = 0,5$	$k = 1$	$k = 5$
1	13,321	13,211	12,998	13,3688	13,2582	13,0437
2	4,5162	4,5162	4,4063	4,4972	4,460	4,3879
3	4,1903	4,1561	4,0884	4,0270	4,9937	3,9291
4	7,0967	7,0379	6,9247	6,7457	6,6899	6,5817
5	11,335	11,241	11,061	10,7628	10,6737	10,5011
$E_{\text{níquel}} = 2,05098 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$				$E_{\text{aço inoxidável}} = 2,07788 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$		
$\nu_{\text{níquel}} = 0,31$				$\nu_{\text{aço inoxidável}} = 0,317756$		
$\rho_{\text{níquel}} = 8900 \text{ kg/m}^3$				$\rho_{\text{aço inoxidável}} = 8166 \text{ kg/m}^3$		

Tabela 4.7 – Frequências para material níquel na parte externa e aço inoxidável na parte interna ($m = 1, h/R = 0,002, L/R = 20$).

n	Arshad <i>et al.</i> (2011)			Presente trabalho ($\alpha = 1$)		
	$k = 0,5$	$k = 1$	$k = 5$	$k = 0,5$	$k = 1$	$k = 5$
1	13,103	13,221	13,433	13,1499	13,2582	13,4817
2	4,4376	4,4736	4,5498	4,4235	4,4600	4,5352
3	4,1145	4,1478	4,2181	3,9610	4,9937	4,0610
4	6,9749	7,0325	7,1505	6,6352	6,6899	6,8026
5	11,145	11,237	11,425	10,5865	10,6737	10,8536
$E_{\text{aço inoxidável}} = 2,07788 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$				$E_{\text{níquel}} = 2,05098 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$		
$\nu_{\text{aço inoxidável}} = 0,317756$				$\nu_{\text{níquel}} = 0,31$		
$\rho_{\text{aço inoxidável}} = 8166 \text{ kg/m}^3$				$\rho_{\text{níquel}} = 8900 \text{ kg/m}^3$		

Finalmente, comparam-se as frequências naturais do presente trabalho com as do trabalho de Iqbal *et al.* (2009). Tal comparação se encontra na Tabela 4.8.

Tabela 4.8 – Comparação das frequências naturais com MGF ($m = 1, h/R = 0,002, L/R = 20$).

n	$k = 0,5$		$k = 1$		$k = 15$	
	Iqbal et al. (2009)	Presente trabalho	Iqbal et al. (2009)	Presente trabalho	Iqbal et al. (2009)	Presente trabalho
1	13,321	13,369	13,211	13,258	12,933	12,978
2	4,5162	4,4972	4,479	4,460	4,383	4,366
3	4,1903	4,0270	4,156	3,994	4,065	3,909
4	7,0967	6,7457	7,0379	6,6899	6,885	6,549
5	11,335	10,7628	11,2407	10,6737	10,998	10,448
6	16,5935	15,7535	16,4549	15,6232	16,101	15,293
7	22,8258	22,6699	22,6349	21,4907	22,148	21,037
8	30,0225	28,5023	29,771	28,267	29,132	27,670
9	38,1811	36,2478	37,8615	35,9480	37,048	36,189
10	47,3005	44,9056	46,9046	44,5342	45,897	43,594
$E_{\text{metal}} = 2,07788 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$ $E_{\text{cerâmica}} = 2,05098 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$ $\nu_{\text{metal}} = 0,317756$ $\nu_{\text{cerâmica}} = 0,31$ $\rho_{\text{metal}} = 8166 \text{ kg/m}^3$ $\rho_{\text{cerâmica}} = 8900 \text{ kg/m}^3$						

4.3

Carga crítica

A matriz geométrica (G) provém das Equações (2.32). Apresenta-se a seguir a matriz geométrica para uma carga axial (P) e a matriz geométrica para uma carga lateral ($q = p_i + p_e$), respectivamente.

$$G_P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{Pm^2\pi^2R}{L^2C} \end{bmatrix} \quad (4.5a)$$

$$G_q = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\alpha^2 q}{C} & \frac{\alpha n q}{C} \\ 0 & -\frac{\alpha n q}{C} & -\frac{n^2 q}{C} \end{bmatrix} \quad (4.5b)$$

Ao fazer $|K + G| = 0$, encontram-se os autovalores que neste caso são as cargas críticas.

4.3.1

Material isotrópico

Comparam-se na Tabela 4.9 os valores das cargas críticas laterais com as encontradas no trabalho de Huang *et al.* (2011).

Tabela 4.9 – Carga crítica lateral q ($\times 10^{-4}$ MPa) para casca cilíndrica homogênea.

L/R	R/h	Huang <i>et al.</i> (2011)	Presente ($\alpha = 0$)	Presente ($\alpha = 1$)
0,5	300	2809,31(1,16) ^a	2849,291(1,15)	2831,316(1,15)
	3000	7,94526(1,29)	8,04951(1,28)	8,03428(1,28)
1	300	1294,65(1,11)	1310,55	1294,69
	500	353,781(1,13)	359,430	356,115
	1000	61,3375(1,15)	62,3726	61,9674
	1500	21,9684(1,17)	22,4337	22,3155
	2000	10,6375(1,18)	10,8823	10,8328
	3000	3,83065(1,20)	3,92663	3,91209
2	300	617,626(1,8)	629,506	614,824
	3000	1,89097(1,14)	1,94469	1,93051
3	300	413,996(1,7)	424,150	409,944
	3000	1,25669(1,12)	1,29214	1,27813
5	300	239,831(1,5)	246,466	232,778
	3000	0,748563(1,9)	0,770329	0,756483
^a Os números entre parênteses denotam o modo de flambagem (m,n)				
$E_{\text{niteto de silício}} = 3,2227\text{MPa}$		$E_{\text{aço inoxidável}} = 2,0779\text{MPa}$		
$\nu_{\text{niteto de silício}} = 0,28$		$\nu_{\text{aço inoxidável}} = 0,28$		

Nota-se que os valores das cargas críticas laterais obtidos com a teoria de Sanders ($\alpha = 1$) são mais próximos dos valores encontrados em Huang *et al.* (2011) que os obtidos com a teoria de Donnell ($\alpha = 0$).

A Figura 4.1 apresenta para a primeira geometria de casca cilíndrica presente na Tabela 4.9 a variação das cargas de bifurcação para valores crescentes

do número de semi-ondas axiais m ($m = 1, 4$) em função do número de ondas circunferenciais (n) para um material isotrópico.

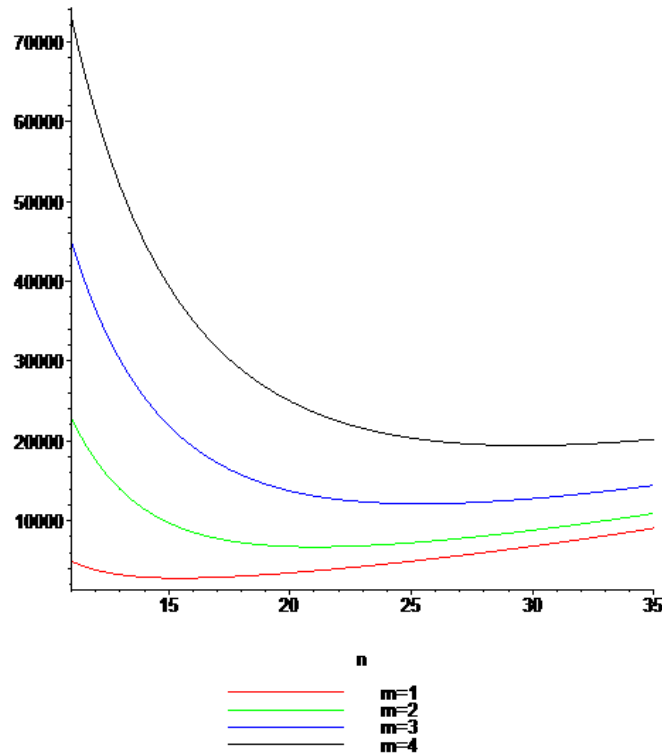


Figura 4.1 – Gráfico variando m em função de n .

Constata-se que quanto maior o número de semi-ondas longitudinais (m), maior será a carga de bifurcação, ocorrendo sempre a carga crítica para $m=1$. O valor de n relacionado à carga crítica lateral depende da geometria da casca cilíndrica.

4.3.2

Material com gradação funcional

Na Tabela 4.10 comparam-se as cargas críticas lateral e axial para uma casca com MGF com os resultados obtidos por Huang *et al.* (2011). As propriedades da casca cilíndrica estão logo abaixo da Tabela 4.10. Mostram-se nesta tabela as cargas críticas para $\alpha = 0$ e para $\alpha = 1$. Importante salientar que

os valores das cargas críticas, tanto para as cargas axial e lateral, são menores quando a teoria de *Sanders* é considerada, ou seja, quando $\alpha = 1$. Quanto maior o valor do k maior a quantidade de aço inoxidável comparada à de nitreto de silício.

Tabela 4.10 – Cargas críticas (MPa) da casca cilíndrica com MGF ($R/h = 500$, $L/R = 2$).

	P_{cr}			q_{cr}		
	Huang et al. (2011)	Presente $\alpha = 0$	Presente $\alpha = 1$	Huang et al. (2011)	Presente $\alpha = 0$	Presente $\alpha = 1$
Nitreto de silício	387,631	388,693 (1,8) ^a	382,248 (1,8)	0,0272	0,0270 (1,9)	0,0265 (1,9)
$k = 0,2$	361,612	362,872 (1,8)	356,895 (1,8)	0,0252	0,0251 (1,9)	0,0247 (1,9)
$k = 0,5$	337,604	339,843 (1,8)	334,248 (1,8)	0,0235	0,0235 (1,9)	0,0231 (1,9)
$k = 1$	316,294	319,654 (1,8)	314,354 (1,8)	0,0221	0,0222 (1,9)	0,0218 (1,9)
$k = 2$	297,745	301,584 (1,8)	296,512 (1,8)	0,0209	0,0211 (1,9)	0,0207 (1,9)
$k = 5$	279,521	282,454 (1,8)	277,644 (1,8)	0,0198	0,0199 (1,9)	0,0195 (1,9)
$k = 10$	268,970	270,945 (1,8)	266,341 (1,8)	0,0191	0,0190 (1,9)	0,0187 (1,9)
$k = 20$	261,163	262,493 (1,8)	258,064 (1,8)	0,0185	0,0184 (1,9)	0,0180 (1,9)
Aço inoxidável	249,933	253,366 (1,8)	249,145 (1,8)	0,0175	0,0176 (1,9)	0,0173 (1,9)
^a Os números entre parênteses denota o modo de flambagem (m,n)						
$E_{\text{nitreto de silício}} = 3,2227 \text{ MPa}$			$E_{\text{aço inoxidável}} = 2,0779 \text{ MPa}$			
$\nu_{\text{nitreto de silício}} = 0,28$			$\nu_{\text{aço inoxidável}} = 0,28$			

Percebe-se que os valores mostrados na tabela acima estão em concordância com os valores obtidos por Huang et al. (2011), tanto para o $\alpha = 0$ como para o $\alpha = 1$.

A Figura 4.2 apresenta a variação da carga crítica axial e lateral com o valor de k . Verifica-se que a carga crítica tende, à medida que k cresce, ao valor da carga crítica de uma casca de aço inoxidável. A variação se deve basicamente à diferença no módulo de elasticidade dos dois materiais ($E_{\text{nitreto de silício}} = 3,2227 \text{ MPa}$, $E_{\text{aço inoxidável}} = 2,0779 \text{ MPa}$).

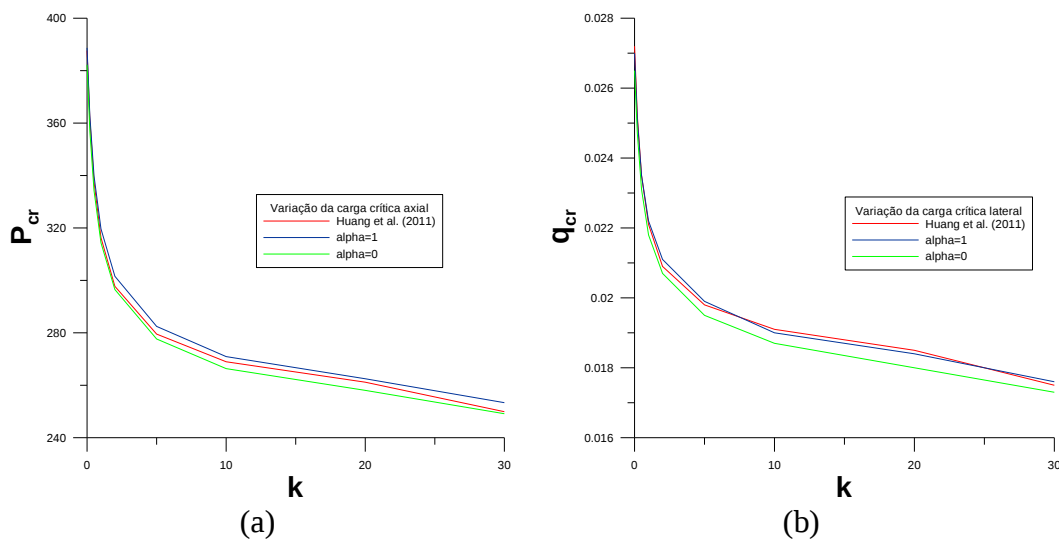


Figura 4.2 – Variação da carga axial crítica, P_{cr} , e da carga lateral crítica, q_{cr} , em função do parâmetro de gradação k .

Nota-se que na Figura 4.2a a teoria de *Sanders* ($\alpha = 1$) apresenta maiores cargas críticas axiais em comparação com as de Huang *et al.* (2011), enquanto a teoria de *Donnell* ($\alpha = 0$) apresentam menores cargas críticas axiais. Já na Figura 4.2b, a teoria de *Donnell* ($\alpha = 0$) distingue-se mais que a de *Sanders* ($\alpha = 1$) dos valores obtidos por Huang *et al.* (2011).