



Alexandre Andrade Brandão Soares

**Vibrações livres não lineares de cascas
cilíndricas com gradação funcional**

Dissertação de Mestrado

Dissertação apresentada como requisito parcial para
obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós-
Graduação em Engenharia Civil do Departamento de
Engenharia Civil da PUC-Rio

Orientador: Prof. Paulo Batista Gonçalves

Rio de Janeiro
Julho de 2013



Alexandre Andrade Brandão Soares

**Vibrações livres não lineares de cascas
cilíndricas com gradação funcional**

Dissertação de Mestrado

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil do Departamento de Engenharia Civil do Centro Técnico Científico da PUC-Rio. Aprovada pela Comissão Examinadora abaixo assinada.

Prof. Paulo Batista Gonçalves
Orientador

Departamento em Engenharia Civil – PUC-Rio

Prof. Frederico Matins Alves da Silva
Universidade Federal de Goiás

Prof^a. Deane Mesquita Roehl
Departamento em Engenharia Civil – PUC-Rio

Prof. José Eugenio Leal
Coordenador Setorial do Centro Técnico Científico - PUC-Rio

Rio de Janeiro, 05 de Julho de 2013

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, do autor e do orientador.

Alexandre Andrade Brandão Soares

Graduou-se em Engenharia Civil na Universidade da Amazônia, UNAMA (Belém do Pará), em Janeiro de 2011. Ingressou em Março de 2011 no curso de Mestrado em Engenharia Civil da Pontifícia Universidade Católica de Rio de Janeiro (PUC-Rio), na área de Estruturas. Já desenvolveu trabalhos na área de barragens, métodos das diferenças finitas e mais atualmente na área de dinâmica das estruturas, abrangendo nesta última os temas cascas cilíndricas e materiais com gradação funcional.

Ficha Catalográfica

Soares, Alexandre Andrade Brandão

Vibrações livres não lineares de cascas cilíndricas com gradação funcional / Alexandre Andrade Brandão Soares; Orientador: Paulo Batista Gonçalves. – Rio de Janeiro: PUC, Departamento de Engenharia Civil, 2013.

v., 121 f.: il. (color); 29,7 cm

1.Dissertação (Mestrado) – Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Engenharia Civil, 2013.

Inclui referências bibliográficas.

1. Engenharia Civil – Dissertações. 2. Cascas cilíndricas. 3. Vibrações não lineares. 4. Material com gradação funcional. 5. Dinâmica I. Soares, Alexandre Andrade Brandão. II. Gonçalves, Paulo Batista. III. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Engenharia Civil. IV. Título.

CDD: 624

Dedico com amor a:
Arthur, Celeste, Izaura, Regina, Verena, Erida e Alice.

Agradecimentos

As pessoas mais queridas de minha vida que são: Arthur, Celeste, Izaura, Regina, Verena, Erida e Alice. Agradeço-lhes pela paciência, compreensão e esperança que depositaram em mim.

Ao orientador Professor Paulo Batista Gonçalves que muito me ajudou nesta dissertação. Além de seus conhecimentos vastos e precisos, seu caráter muito me engrandeceu no período que realizei o Mestrado.

A instituição PUC-Rio, que é uma instituição de excelência.

Aos professores e funcionários do Departamento de Engenharia Civil da PUC-Rio que me repassaram parte de seus conhecimentos e muito me auxiliaram nesta jornada. Em especial a funcionária Rita de Cassia.

Aos amigos(as) que fiz na PUC-Rio: Camyla Oliveira, Eliot Pezo, Eulher Carvalho, Fabio Anderson, Julio Rueda, Lorena Chamorro, Nicolas Papadopoulos, Martin Purizaga, Rafael Abreu, Ricardo Amado e Tathiana Caram.

Ao CNPq e CAPES;

Aos professores que participaram da comissão examinadora desta dissertação que com suas competências elevaram meus conhecimentos.

Resumo

Soares, Alexandre Andrade Brandão; Gonçalves, Paulo Batista. **Vibrações livres não lineares de cascas cilíndricas com gradação funcional**. Rio de Janeiro, 2013. 121p. Dissertação de Mestrado – Departamento de Engenharia Civil, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Cascas cilíndricas são usadas em muitas aplicações de engenharia e, devido a sua forma e capacidade de transporte de carga, são bastante usadas na indústria aeroespacial e em estruturas civis. Elas minimizam a quantidade de material do qual são fabricadas, tornando-se assim estruturas muito leves e esbeltas. Em décadas recentes tem se procurado criar novos materiais que conjuguem múltiplas propriedades como maior resistência, melhor proteção térmica, proteção contra corrosão e adequado nível de amortecimento, dentre outras. Uma classe de materiais que podem atender simultaneamente várias destas exigências é o chamado material com gradação funcional, onde as propriedades do material variam de forma contínua em uma ou mais direções. Materiais com gradação funcional são particularmente indicados para a construção de cascas. Como a maioria destas estruturas estão sujeitas a cargas dinâmicas, torna-se importante o estudo do comportamento dinâmico de cascas fabricadas com materiais com gradação funcional. O objetivo deste trabalho é estudar as vibrações não lineares de cascas cilíndricas esbeltas com gradação funcional. Para isto utiliza-se a teoria não linear de cascas de *Sanders*, considerada uma das teorias mais precisas para a análise de cascas esbeltas. Inicialmente, derivam-se as equações de movimento considerando um estado de tensões iniciais. Usando as equações linearizadas, obtêm-se às frequências naturais e as cargas críticas, sendo estes resultados comparados favoravelmente com resultados encontrados na literatura para materiais homogêneos e com gradação funcional. A seguir, usando uma expansão modal que atende as condições de contorno e continuidade, além de expressar os acoplamentos modais característicos de cascas cilíndricas no regime não linear,

as equações de movimento são discretizadas usando-se o método de *Galerkin*. As equações algébricas resultantes são resolvidas pelo método de *Newton-Raphson*, sendo assim obtida a relação não linear frequência-amplitude. Finalmente, realiza-se uma análise paramétrica para estudar a influência da geometria da casca, da gradação do material funcional e dos modos de vibração no grau e tipo de não linearidade da casca cilíndrica, sendo esta a principal contribuição deste trabalho de pesquisa.

Palavras-chave

Cascas cilíndricas; Vibrações não lineares; Material com gradação funcional; Dinâmica.

Abstract

Soares, Alexandre Andrade Brandão; Gonçalves, Paulo Batista (Advisor). **Nonlinear free vibrations of functionally graded cylindrical shells**. Rio de Janeiro, 2013. 121p. MSc. Dissertation – Departamento de Engenharia Civil, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Cylindrical shells are used in many engineering applications and, due to its shape and load carrying capacity, are frequently used in aerospace and civil structures. They minimize the amount of material from which they are manufactured, thus making it a very lightweight and slender structure. In recent decades, there has been a search for new materials that combine multiple properties such as increased strength, better thermal protection, corrosion protection and appropriate damping level, among others. A material that can meet several of these requirements simultaneously is the so called functionally graded material, where the material properties vary continuously in one or more directions. Functionally graded materials are particularly suitable for the construction of shells. As most of these structures are subjected to dynamic loads, it is important to study the dynamic behavior of shells made of functionally graded materials. The objective of this work is to study the nonlinear vibrations of slender functionally graded cylindrical shells. For this, the *Sanders* non-linear shell theory, which is considered one of the most precise theories for the analysis of slender shells, is adopted. Initially, the equations of motion are derived considering an initial stress state. Using the linearized equations of motion, the natural frequencies and critical loads are obtained. These results compare favorably with results reported in the literature for homogeneous and functionally graded shells. Then, using a modal expansion that satisfies the boundary and continuity conditions and expresses the modal couplings characteristic of cylindrical shells in the nonlinear regime, the equations of motion are discretized using the *Galerkin* method. The resulting algebraic equations are solved by the

Newton-Raphson method, thus obtaining the nonlinear frequency-amplitude relation. Finally, a parametric analysis is conducted to study the influence of the geometry of the shell, the gradient of the functional material and vibration modes on the degree and type of nonlinearity of the cylindrical shell, which is the main contribution of this research work.

Keywords

Cylindrical shells; Nonlinear vibrations; Functionally graded material; Dynamics.

Sumário

1 Introdução	23
1.1 Generalidades	23
1.2 Breve histórico bibliográfico	24
1.3 Objetivos específicos e metodologia	26
1.4 Descrição dos capítulos da dissertação	27
2 Casca cilíndrica delgada	29
2.1 Introdução	29
2.2 Formulação de casca	31
2.3 Esforços de membrana	33
2.4 Funcionais de energia	35
2.4.1 Energia interna de deformação elástica	36
2.4.2 Energia cinética	38
2.4.3 Energia potencial das cargas externas	38
2.4.4 Trabalho das forças de dissipação	39
2.5 Equações de equilíbrio	40
2.6 Estado de tensão inicial	41
2.7 Condições de contorno	43
3 Material com gradação funcional	44
3.1 Introdução aos materiais compósitos	44
3.2 Introdução aos materiais com gradação funcional	45
3.3 Propriedades do MGF	48
3.4 Formulação do problema	50
4 Análise linear	53
4.1 Introdução	53

4.2 Frequência natural	60
4.2.1 Material homogêneo isotrópico	60
4.2.2 Material com gradação funcional	62
4.3 Carga crítica	65
4.3.1 Material isotrópico	66
4.3.2 Material com gradação funcional	67
5 Análise não linear	70
5.1 Introdução	70
5.2 Utilização do método de <i>Galerkin</i>	72
5.3 Implementação do método de <i>Newton-Raphson</i>	73
5.4 Análise das vibrações livres não lineares e não amortecidas	75
5.4.1 Material com gradação funcional para o caso não linear	80
5.5 Análise paramétrica	88
6 Conclusões e Sugestões	105
7 Referências bibliográficas	107
A1 Apêndice	113

Lista de figuras

Figura 2.1 Estruturas cilíndricas aeroespaciais.	30
Figura 2.2 Exemplos de grandes estruturas cilíndricas civis.	30
Figura 2.3 Geometria da casca cilíndrica e seu sistema de coordenada.	31
Figura 2.4 Elemento de casca cilíndrica na configuração deformada.	32
Figura 2.5 Representação do carregamento aplicado à casca.	36
Figura 3.1 Variação gradual dos materiais constituintes.	46
Figura 3.2 Esquerda: Mostra a geração de um composto metal/carboneto feito com feixe de <i>laser</i> . Direita: Mostra um tubo com gradação funcional não na direção da espessura da casca e sim na direção longitudinal.	47
Figura 3.3 Micrografia de um gradiente de liga de WC/Cu/Mn e a distribuição espacial da correspondente concentração de partículas WC.	47
Figura 3.4 Variação do volume de cerâmica ao longo da espessura da casca cilíndrica. O sentido horizontal representa a coordenada z , e o sentido vertical a espessura h .	49
Figura 3.5 Representação esquemática da distribuição dos materiais ao longo da espessura da casca cilíndrica.	51
Figura 4.1 Gráfico variando m em função de n .	67
Figura 4.2 Variação da carga axial crítica, P_{cr} , e da carga lateral crítica, q_{cr} , em função do parâmetro de gradação k	69

Figura 5.1 Variação das amplitudes modais em função da frequência de vibração - $m = 1, n = 8, L = 0,41m, h = 0,001m$ e $R = 0,3015m$.	77
Figura 5.2 Frequência natural em função das amplitudes modais. $R = 0,2m, L = 0,4m, h = 0,002m, E = 2,1 \times 10^{11} N/m^2, \nu = 0,3, \rho = 7850 kg/m^3, m = 1$ e $n = 5$.	80
Figura 5.3 Frequência natural em função das amplitudes modais e $k = 0,5$. Gometria: $R = 0,2m, L = 0,4m$ e $h = 0,002m$ Modelo Prof Paulo com $MGF_k = 0,5$.	83
Figura 5.4 Frequência natural em função das amplitudes modais sendo $k = 1$. Gometria: $R = 0,2m, L = 0,4m$ e $h = 0,002m$	85
Figura 5.5 Frequência natural em função das amplitudes modais sendo $k = 5$. Gometria: $R = 0,2m, L = 0,4m$ e $h = 0,002m$.	87
Figura 5.6 (a)Variação do volume dos materiais aço e níquel ao longo da espessura da casca cilíndrica com MFG. (b) Variação da frequência natural para os valores de k considerados nas Figuras 5.3, 5.4 e 5.5.	88
Figura 5.7 Amostra genérica de um pedaço de casca cilíndrica com MFG. O vermelho (■) representa o níquel e o verde (■) representa o aço.	89
Figura 5.8 Cilindros estudados com suas respectivas variações de ω e n .	91
Figura 5.9 Frequências naturais para o $k = 0,5$.	94
Figura 5.10 Amplitudes modais para ω/ω_0 e $k = 0,5$.	94
Figura 5.11 Frequências naturais para o $k = 1$.	96
Figura 5.12 Frequências naturais para o $k = 1$.	96
Figura 5.13 Frequências naturais para o $k = 5$.	98
Figura 5.14 Frequências naturais para o $k = 5$.	98
Figura 5.15 Variação do n para as frequências lineares com diferentes tipos de k do modelo III.	99

Figura 5.16 Frequências não lineares do Modelo III para o $k = 0,5$.	100
Figura 5.17 Frequências não lineares do Modelo III para o $k = 1$.	100
Figura 5.18 Frequências não lineares do Modelo III para o $k = 5$.	101
Figura 5.19 Variação da frequência natural mínima em função da carga axial para o Modelo III e três valores de k (0,5, 1 e 5) (carga em Newtons – N).	102
Figura 5.20 Influência do carregamento na relação não linear frequência-amplitude. (a, d, g) Carregamento axial compressivo. (b, e, h) pressão lateral interna (tração). (c, f, i) pressão lateral externa (compressão).	103



Lista de tabelas

Tabela 4.1 Comparação das frequências naturais ($m = 1, L = 0,41\text{m}, h = 0,001\text{m}$ e $R = 0,3015\text{m}$).	60
Tabela 4.2 Comparação das frequências naturais para $\omega = 0$ nas duas primeiras equações ($m = 1, L = 0,41\text{m}, h = 0,001\text{m}$ e $R = 0,3015\text{m}$).	61
Tabela 4.3 Comparação das frequências naturais com diversos trabalhos.	62
Tabela 4.4 Comparação das frequências naturais para MGF com $k = 0,5$ ($m = 1, h/R = 0,002, L/R = 20$).	63
Tabela 4.5 Comparação das frequências naturais para MGF com $k = 5$ ($m = 1, h/R = 0,002, L/R = 20$).	63
Tabela 4.6 Frequências para aço inoxidável na parte externa e níquel na parte interna ($m = 1, h/R = 0,002, L/R = 20$).	64
Tabela 4.7 Frequências para material níquel na parte externa e aço inoxidável na parte interna ($m = 1, h/R = 0,002, L/R = 20$).	64
Tabela 4.8 Comparação das frequências naturais com MGF ($m = 1, h/R = 0,002, L/R = 20$).	65
Tabela 4.9 Carga crítica lateral q ($\times 10^{-4}\text{MPa}$) para casca cilíndrica homogênea.	66
Tabela 4.10 Cargas críticas (MPa) da casca cilíndrica com MGF ($R/h = 500, L/R = 2$).	68
Tabela 5.1 Propriedades dos materiais aço e níquel para uma casca com MGF.	80
Tabela 5.2 Dimensões de cascas cilíndricas variando apenas o L e o R , e $h = 1$.	89

Tabela 5.3 Frequências naturais mínimas para os modelos de I a VII, com seus respectivos valores de n .	90
Tabela A.1 Seis equações não lineares relativas ao deslocamento axial, u .	113
Tabela A.2 Quatro equações não lineares relativas ao deslocamento circunferencial, v .	116
Tabela A.3 Duas equações não lineares relativas ao deslocamento radial, w .	120

Lista de símbolos

$\&$	-denominado <i>ampersand</i> (ou “e” comercial)
\bar{L}	-Função de <i>Lagrange</i>
P_H	-Pressão hidrostática
P_{cr}	-Carga crítica axial
R_E	-Força de dissipação
U_F	-Energia interna de flexão
U_M	-Energia interna de membrana
U_{mn}	-Amplitude modal de vibração linear na direção u
V_E	-Trabalho das forças externas
V_{mn}	-Amplitude modal de vibração linear na direção v
W_{mn}	-Amplitude modal de vibração linear na direção w
q_{cr}	-Carga crítica lateral
\bar{z}	-Coordenada adimensional em z
\bar{q}	-Vetor das forças equivalentes
β_1	-Coeficiente de amortecimento 1
β_2	-Coeficiente de amortecimento 2
$\bar{\gamma}$	-Deformação cisalhante
$\bar{\epsilon}$	-Deformação específica
ϵ_R	-Erro relativo
η_1	-Coeficiente de amortecimento viscoso
η_2	-Coeficiente de amortecimento do material
κ	-Mudança de curvatura
$\bar{\tau}$	-Tensão cisalhante
ω_0	-Frequência natural
$\bar{\epsilon}$	-Matriz de deformação
$\bar{\sigma}$	-Matriz de tensão
\uparrow	-Seta crescente

\downarrow	-Seta decrescente
	-Indicação de cor vermelha
	-Indicação de cor verde
\ll	-Muito menor que
Δ	-Operador harmônico
\leq	-Menor ou igual a
Cu	-Símbolo do elemento químico Cobre
h	-Espessura da casca cilíndrica
Mn	-Símbolo do elemento químico Magnésio
Ψ	-Energia potencial
A	-Amplitude modal na direção u . Varia de 1 a 6
B	-Amplitude modal na direção v . Varia de 1 a 4
C	-Símbolo do elemento químico Carbono
C	-Rigidez de membrana
D	-Rigidez a flexão
E	-Módulo de elasticidade
F	-Amplitude modal na direção w . Varia de 1 a 2
Fe	-Símbolo do elemento químico Ferro
G	-Matriz geométrica
H	-Matriz hessiana ou matriz <i>Jacobiana</i>
I	-Matriz identidade
K	-Matriz de rigidez
L	-Comprimento longitudinal da casca cilíndrica
M	-Momento
N	-Esforço de membrana
Ni	-Símbolo do elemento químico Níquel
P	-Carga axial
R	-Raio médio do cilindro
T	-Energia cinética
U	-Energia interna de deformação
V	-Volume
X	-Autovetor
c	-Cerâmica

f	-Volume da variação do material
g	-Gradiente
i	-Número imaginário
k	-Constante da lei de variação
m	-Metal
m	-Número de semi-ondas longitudinais
n	-Número de ondas circunferenciais
p	-Pressão lateral
t	-Tempo
u	-Campo de deslocamentos na direção x
v	-Campo de deslocamentos na direção θ
w	-Campo de deslocamentos na direção z
x	-Coordenada longitudinal
z	-Coordenada transversal
z_i	-Coordenada transversal gráfica
C	-Matriz constitutiva do material
\mathbf{U}	-Campo de deslocamentos
cr	-Carga crítica
β	-Rotação nas coordenadas x e θ
γ	-Deformação cisalhante
δ	-Função peso
ε	-Deformação linear em x e θ
θ	-Coordenada angular
ν	-Coeficiente de <i>Poisson</i>
ρ	-Densidade do material
σ	-Tensão normal em x e θ
τ	-Tensão transversal cisalhante
ω	-Frequência natural

Lista de abreviaturas

CC	-Condição de contorno
CP	- Condição de periodicidade
F	- Equilíbrio fundamental
I	- Equilíbrio incremental
MGF	- Material com gradação funcional
NASA	- Administração Nacional do Espaço e da Aeronáutica
NR	- Newton-Raphson
PT	- Presente trabalho
T	- Trabalho comparado
var	- Vetor das variáveis

“A sabedoria é baseada no conhecimento. Mas o conhecimento nem sempre é sabedoria. Não é um paradoxo. Existe um conhecimento intuitivo, que é fonte da sabedoria. E há o conhecimento objetivo, que é uma coleção de fatos irrelevantes. O homem sábio custa a dar sua opinião, pois tem de descobrir os intangíveis. O homem que só tem o conhecimento é muito rápido em seus conceitos, pois não reconhece nem vê as vastas forças imponderáveis que operam no mundo. É perigoso”.

Marco Túlio Cícero