5.
ANÁLISE NÃO LINEAR.

Após a análise linear, apresentada no capítulo anterior, este capítulo investiga a influência da não linearidade geométrica da estrutura no seu comportamento dinâmico sob cargas harmônicas laterais e os possíveis fenômenos de instabilidade dinâmica. Mais especificamente, estuda-se a dinâmica e estabilidade de uma viga biapoiada com seção transversal C, dado que esta geometria de seção permite um estudo detalhado da influência da direção e posição do carregamento no comportamento não linear e, em particular, no acoplamento entre flexão e torção.

Para a resolução numérica do sistema de equações não lineares, o método de Runge-Kutta de quarta ordem é utilizado. Adicionalmente, para uma mais completa compreensão do comportamento da estrutura sob diferentes condições de carregamento, diversas ferramentas para análise dinâmica não linear são empregadas, entre elas, diagramas de bifurcações, planos de fase, seções de Poincaré, bacias de atração e transformadas de Fourier (Del Prado, 2001).

5.1.
Equações de movimento para o perfil monosimétrico "C"

Para estudar o comportamento dinâmico do perfil com seção C, utiliza-se uma viga com L=4m e as propriedades geométricas listadas na Tabela 4.7. Assim, as equações não lineares que governam o movimento forçado da estrutura são:

$$\frac{d^2}{dt^2}v_0 + 8{,}177\xi\frac{d}{dt}v_0 + 10162{,}916v_0 + 783{,}625v_0^3 - 46517{,}378w_0\theta_0 + 41101{,}496v_0\theta_0^2 - 0{,}084Q_y\sin(\Omega_y t) = 0 \tag{5.1}$$

$$\frac{d^2}{dt^2}w_0 + 8{,}177\xi\frac{d}{dt}w_0 + 0{,}061\frac{d^2}{dt^2}\theta_0 + 64964{,}911w_0 + 5009{,}203w_0^3 - 46517{,}378v_0\theta_0 - 41101{,}496w_0\theta_0^2 - 0{,}084Q_z\sin(\Omega_z t) = 0 \tag{5.2}$$

$$\frac{d^2}{dt^2}\theta_0 + 741{,}172\xi\frac{d}{dt}\theta_0 + 5{,}513\frac{d^2}{dt^2}w_0 + 11160{,}002\theta_0 + 20212{,}396\theta_0^3$$
$$-4{,}216\ 10^6 v_0 w_0 + 3{,}726\ 10^6\theta_0 v_0^2 - 3{,}726\ 10^6\theta_0 w_0^2 \tag{5.3}$$
$$-7{,}588 Q_z \sin(\Omega_z t) e_y + 5{,}959 Q_z \sin(\Omega_z t) e_z \theta_0 = 0$$

onde, v_o, w_o, e θ_o são as amplitudes dos deslocamentos dependentes do tempo, associados aos graus de liberdade de flexão em torno dos eixos principais de inércia e torção, respectivamente; Q_y e Ω_y são a magnitude da carga lateral e a frequência da excitação na direção *Y;* e Q_z e Ω_z são a magnitude da carga lateral e a frequência da excitação na direção *Z*, enquanto e_y e e_z são as excentricidades da carga com relação ao centro de cisalhamento e ξ é o amortecimento viscoso. Cabe ressaltar, como mostra a equação (5.3), que as excentricidades podem gerar efeitos de torção de primeira e segunda ordem (termo dependente de θ_0).

Como se pode observar nas Equações (5.1) a (5.3), o modelo dinâmico objeto de estudo neste trabalho é descrito por um sistema de equações diferenciais ordinárias de 2ª ordem. Contudo, para a utilização de um vasto arcabouço teórico, este sistema é transformado em um sistema de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem no espaço de fase, a saber:

$$y_1 = 0 \tag{5.4}$$

$$46517{,}378 y_4 y_2 - 41101{,}496 y_4^2 y_0 - 8{,}177\xi y_1 + 0{,}084 Q_y \sin(\Omega_y t)$$
$$-10162{,}916 y_0 - 783{,}625 y_0^3 = 0 \tag{5.5}$$

$$y_3 = 0 \tag{5.6}$$

$$0{,}126 Q_z \sin(\Omega_z t) + 69979{,}262 y_4 y_0 + 61831{,}782 y_4^2 y_2 - 12{,}301\xi y_3$$
$$-97731{,}143 y_2 - 7535{,}685 y_2^3 - 3{,}858\ 10^5 y_0 y_2 + 3{,}409\ 10^5 y_4 y_0^2$$
$$-3{,}409\ 10^5 y_4 y_2^2 - 0{,}694 Q_z \sin(\Omega_z t) e_y + 67{,}812\xi y_5 + 1021{,}058 y_4 \tag{5.7}$$
$$+1849{,}286 y_4^3 + 0{,}545 Q_z \sin(\Omega_z t) e_z y_4 = 0$$

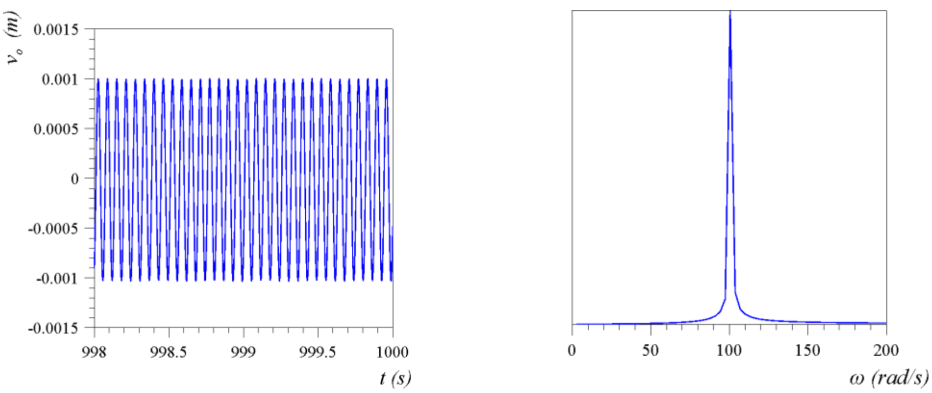
$$y_5 = 0 \tag{5.8}$$

$$41541{,}689 y_2^3 - 8{,}965 Q_z \sin(\Omega_z t) e_z y_4 + 6{,}343\ 10^6 y_0 y_2 + 5{,}388\ 10^5 y_2$$
$$-16788{,}751 y_4 - 30406{,}885 y_4^3 - 0{,}694 Q_z \sin(\Omega_z t) + 67{,}812\xi y_3$$
$$+11{,}415 Q_z \sin(\Omega_z t) e_y + 5{,}604\ 10^6 y_4 y_2^2 - 1114{,}995\xi y_5 - 3{,}409\ 10^5 y_4^2 y_2 \tag{5.9}$$
$$-5{,}605\ 10^6 y_4 y_0^2 - 3{,}858\ 10^5 y_4 y_0 = 0$$

onde: $y_0 = v_0$, $y_1 = \dot{v}_0 = \frac{d}{dt}v_0$, $y_2 = w_0$, $y_3 = \dot{w}_0 = \frac{d}{dt}w_0$, $y_4 = \theta_0$ e $y_5 = \dot{\theta}_0 = \frac{d}{dt}\theta_0$.

5.2. Vibração livre

Apresentadas as equações de movimento, considera-se inicialmente um sistema autônomo não amortecido ($Q_y = \Omega_y = Q_z = \Omega_z = 0,\ \xi = 0$). Para as condições iniciais y_0 = 0,001m, $y_2 = y_3 = y_4 = y_5 = 0$ têm-se a resposta no tempo e o espectro de frequência do sinal dados na Figura 5.1, dos quais se obtém uma frequência de vibração ω_0 = 100,853 rad/s. Cabe destacar que a frequência fundamental de vibração, obtida a partir do sistema de equações linearizado (Capítulo 4) foi de ω_{01} = 100,811 rad/s, correspondente a um modo de flexão em torno de eixo de menor inércia, sendo, portanto, próxima à obtida com o sistema não linear de equações considerando pequenos deslocamentos. Esta frequência, como mostrado no Capítulo 4, é bem próxima da segunda frequência natural correspondente a um modo de flexo-torção no valor de 102,39 rad/s, o pode gerar neste caso uma ressonância interna 1:1 ($\omega_{01}/\omega_{02} \cong 1$).



a) Resposta no tempo b) Espectro de frequência

Figura 5.1: Resposta no tempo e espectro de frequência para o sistema autônomo não amortecido.

Em adição, na Figura 5.2 mostra-se a relação não linear frequência vs. amplitude dos deslocamentos na direção *Y*. Observa-se que a curva, com início no valor da frequência natural de vibração, apresenta, devido à influência da não linearidade geométrica, um comportamento com ganho de rigidez (*hardening*). Comportamento esperado para estruturas unidimensionais tipo viga.

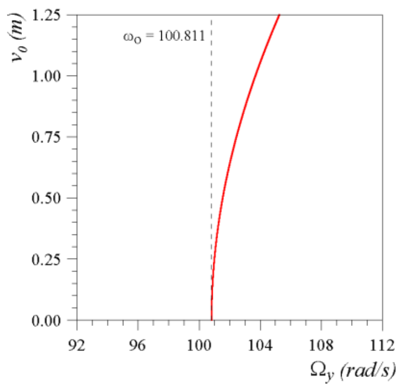


Figura 5.2: Variação da frequência devida a não linearidade geométrica.

5.3. Vibração Forçada: carregamento Q_y

Uma vez identificado um comportamento estrutural com ganho de rigidez, estuda-se agora a vibração forçada da estrutura. Inicialmente considera-se uma solicitação harmônica, uniformemente distribuída, aplicada lateralmente à viga e na direção *Y* (eixo de simetria da seção). A Figura 5.3 mostra a localização da forca excitadora, a qual está aplicada no centro de cisalhamento do perfil. Para esta condição, nas Equações (5.4) a(5.9) faz-se $Q_z = \Omega_z = e_z = e_y = 0$.

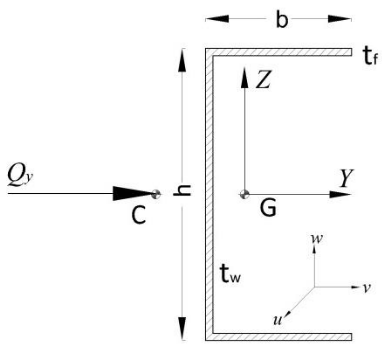
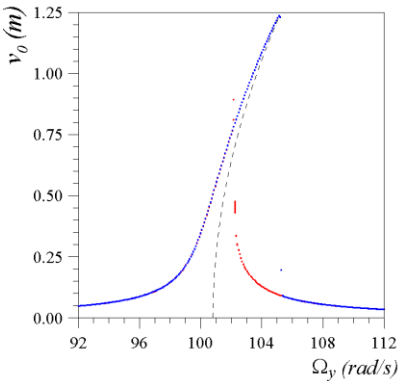


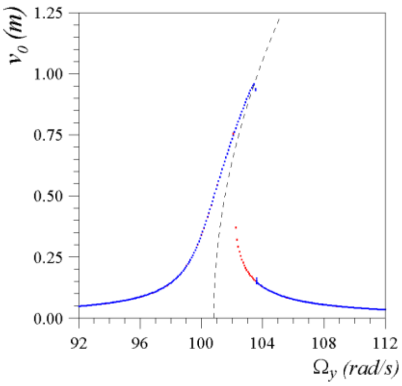
Figura 5.3: Perfil monosimétrico "C" e aplicação da força excitadora Q_y no centro de cisalhamento.

Sabe-se que os sistemas lineares não amortecidos possuem na ressonância soluções que crescem indefinidamente no tempo, mas, em sistemas reais, os quais possuem certo grau de amortecimento, um efeito estabilizante é esperado.

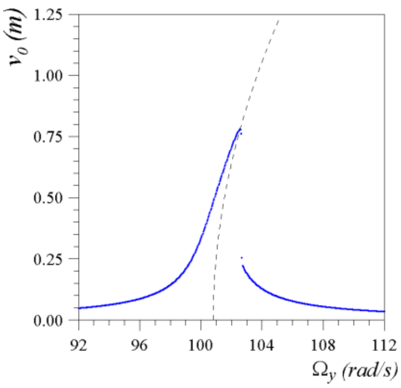
Este comportamento pode ser observado na Figura 5.4, onde se apresentam, para diferentes valores de amortecimento viscoso (ξ), diagramas de bifurcações da estrutura, tomando o deslocamento na direção Y, v_o (isto é, na direção da solicitação) como variável de estado e a frequência da excitação, Ω_y, como parâmetro de controle. Estes diagramas são obtidos aplicando-se o método da força-bruta (Seydel, 1988) e considerando a magnitude da excitação Q_y = 1kN/m.



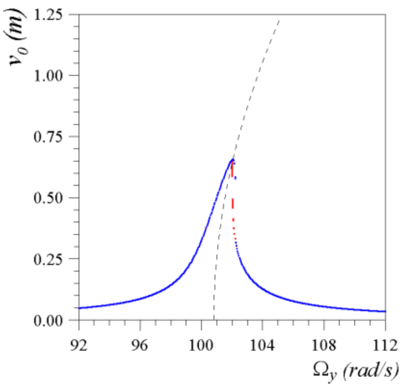
ξ = 0,32%.



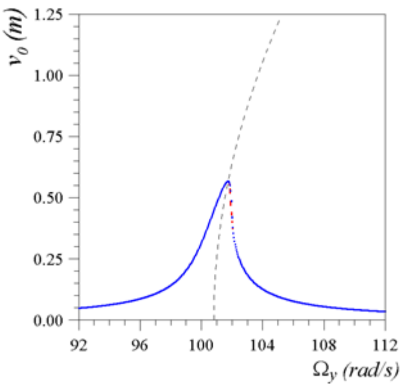
ξ = 0,42%.



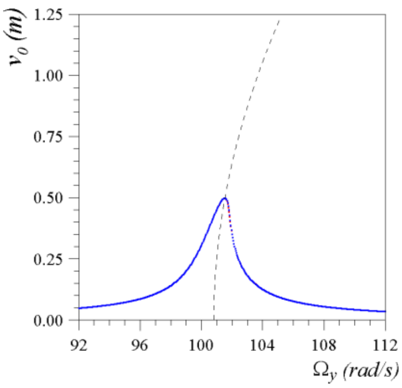
ξ = 0,52%.



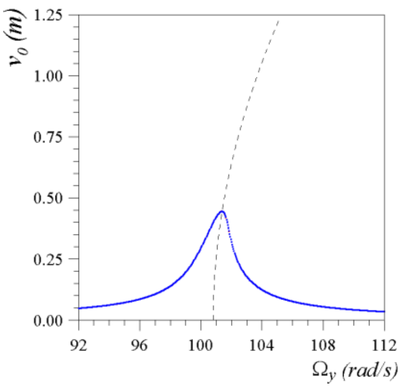
ξ = 0,62%.



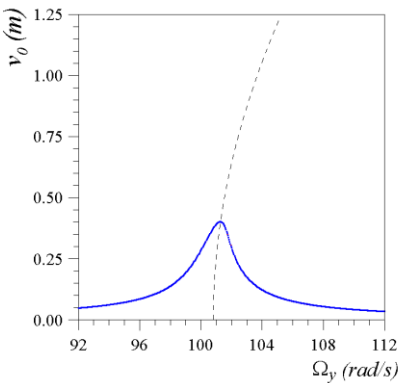
ξ = 0,72%.



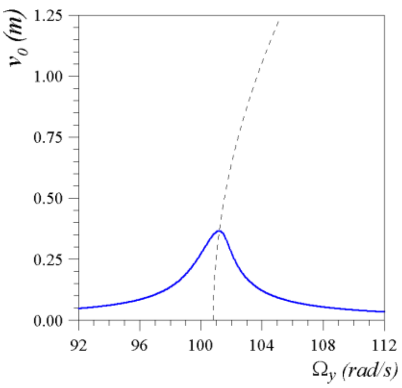
ξ = 0,82%.



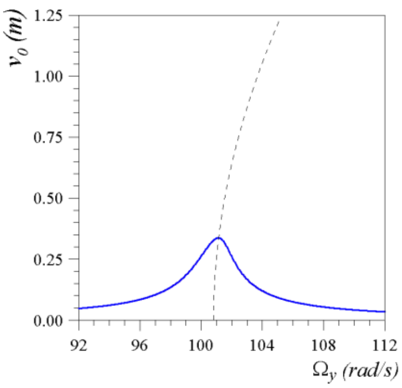
ξ = 0,92%.



ξ = 1,02%.



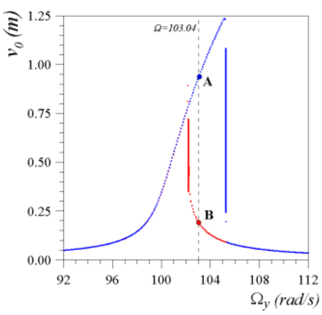
ξ = 1,12%.



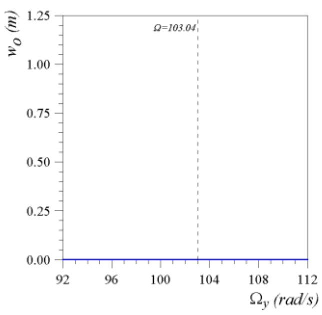
ξ = 1,22%.

Figura 5.4: Diagramas de bifurcação considerando o sistema de 3GDL com frequência de excitação Ω_y variando entre 92 e 112 rad/s, para Q_y= 1kN/m.

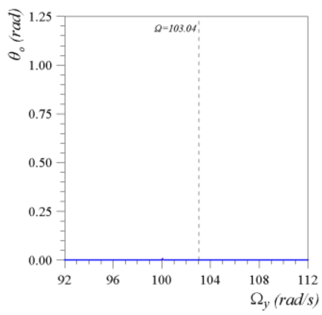
Sabe-se que elementos estruturais construídas com perfis metálicos possuem amortecimento viscoso da ordem de 0,3% a 3%, dependendo do tipo de estrutura e das ligações (Stevenson, 1980). Observa-se na Figura 5.5(a) que, para valores pequenos de amortecimento, por exemplo, ξ = 0,32%, saltos dinâmicos podem ser observados na resposta da estrutura, tanto incrementando (em azul) quanto decrescendo (em vermelho) a frequência da excitação.



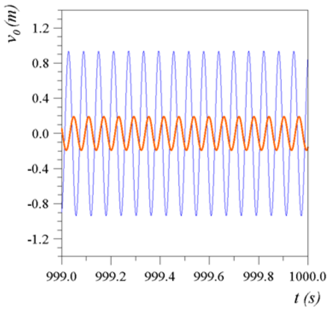
a) Diagrama de bifurcação direção v_o



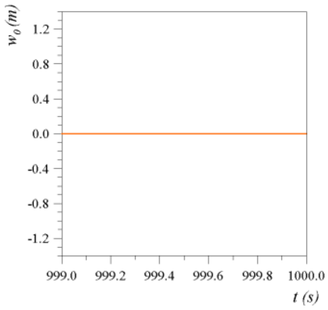
b) Diagrama de bifurcação direção w_o



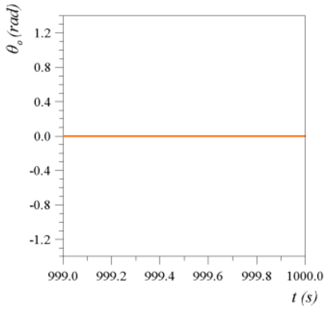
c) Diagrama de bifurcação direção θ_o



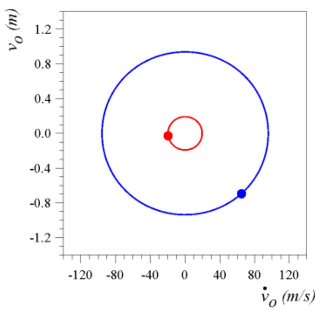
d) Resposta no tempo na direção v_o



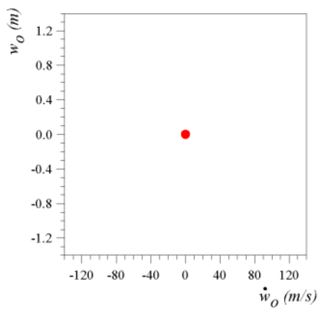
e) Resposta no tempo na direção w_o



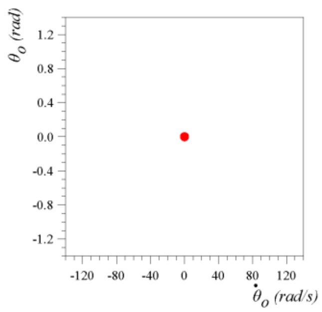
f) Resposta no tempo na direção θ_o



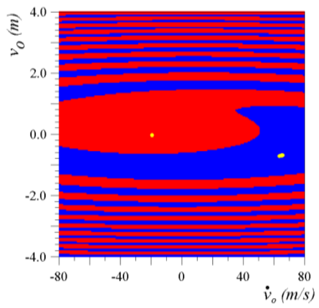
g) Plano de fase na direção v_o



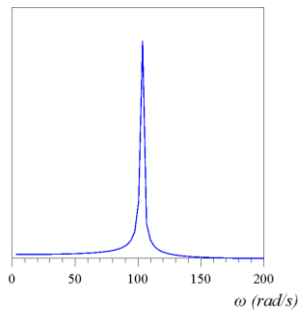
h) Plano de fase na direção w_o



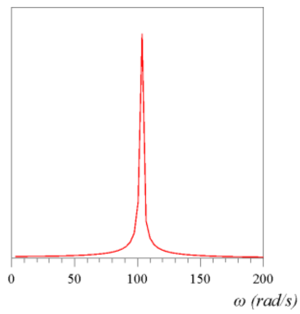
i) Plano de fase na direção θ_o



j) Bacia de atração



k) Espectro de frequência 1



l) Espectro de frequência 2

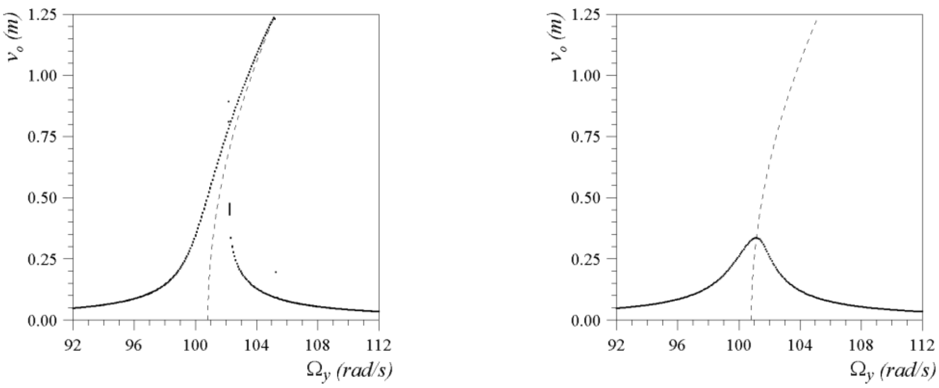
Figura 5.5: Diagrama de bifurcação, resposta no tempo, plano de fase, bacia de atração e espectro de frequência, para o sistema de 3GDL com ξ=0.32%. e Qy = 1kN/m.

Na Figura 5.5(b-c, e-f) pode-se observar que, apesar do sistema possuir 3 GDL, os deslocamentos na direção *Z*, assim como o ângulo de torção θ_o, são nulos. Na Figura 5.5(a), verifica-se a coexistência de duas soluções periódicas estáveis quando Ω_y = 103,04 rad/s, ambas de período um, como observado na Figura 5.5(g, k-l).

A bacia de atração mostrada na Figura 5.5(j), apresenta um conjunto de condições iniciais (na cor vermelha) associado à solução de pequena amplitude de vibração. O atrator desta solução possui coordenadas 0,029; -19,463; 0,0; 0,0; 0,0;0,0. As demais condições iniciais (na cor azul) estão associadas à solução de maior amplitude de vibração. As coordenadas deste atrator são: -0,692; 65,004; 0,0; 0,0; 0,0; 0,0.

Uma vez que os deslocamentos w_o e θ_o são nulos, um sistema com 1 GDL poderia ser utilizado, minimizando assim o esforço computacional. Para tanto, basta considerar apenas as Equações (5.4) a (5.9).

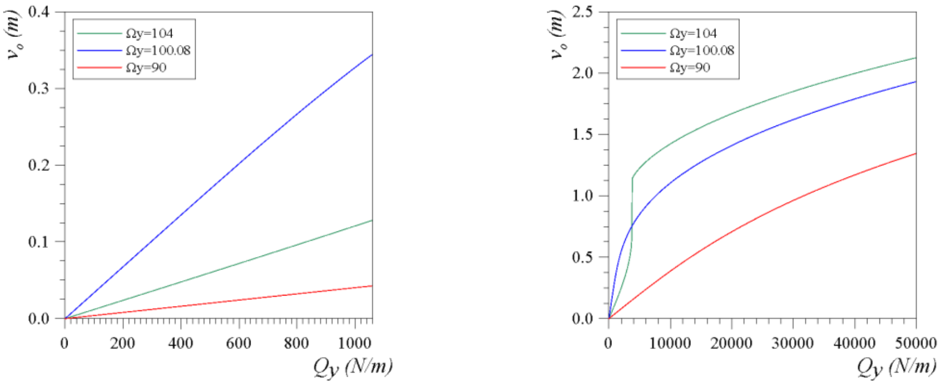
Tomando então um sistema com 1GDL, apresenta-se na Figura 5.6(a) o diagrama de bifurcações da estrutura para coeficiente de amortecimento viscoso ξ = 0,32%. Na Figura 5.6(b) considera-se ξ = 1,22%. Comparando a Figura 5.4(a) com a Figura 5.6(a) e a Figura 5.4(j) com a Figura 5.6(b) verifica-se, devido à coincidência das soluções, a viabilidade de se utilizar o sistema com 1 GDL para pequenos níveis de carregamento. Entretanto este modelo seria incapaz de detectar a perda de estabilidade do movimento planar, como se mostra a seguir.



ξ = 0,32%. ξ = 1,22%.

Figura 5.6: Diagrama de bifurcação para a direção v_0 com Q_y = 1kN/m e uma frequência de excitação Ω_y variando entre 92 e 112 rad/s, para o sistema com 1GDL.

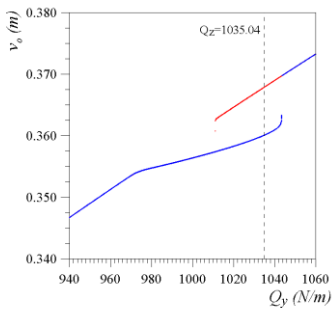
Considerando agora a magnitude da excitação como parâmetro de controle, coeficiente de amortecimento viscoso ξ = 1,22% e frequências de excitação Ω_y = 90; 100,08 e 104 rad/s, obtêm-se os diagramas de bifurcações da Figura 5.7. Nota-se que a amplitude máxima da resposta permanente varia com a magnitude da excitação com uma relação praticamente linear até aproximadamente Q_y = 1 kN/m mas, depois, tem-se um comportamento acentuadamente não linear, sendo esta mudança dependente da frequência de excitação, como se observa na Figura 5.7(b).



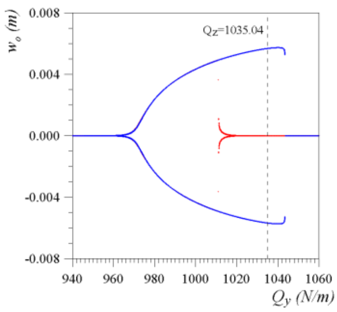
a) $0 \leq Qy \leq 1$ kN/m b) $1 \leq Qy \leq 50$ kN/m

Figura 5.7: Diagramas de bifurcação para a direção v_o com Ω_y = 90, 100.08 e 104 rad/s, ξ = 1,22% e Qy variando de 1 a 50 kN/m.

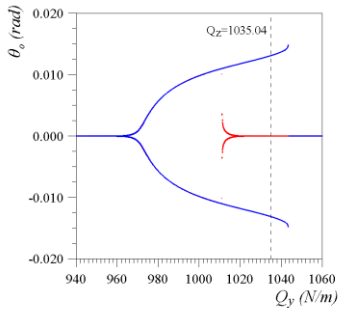
A Figura 5.8 mostra os diagramas de bifurcação considerando o modelo com 3 GDL bem como a resposta no tempo, plano de fase, bacia de tração e espectro de frequência para Ω_y = 100.08 rad/s, ξ = 0.32% e Q_y =1,035 kN/m (valor identificado nos diagramas de bifurcação por uma linha pontilhada). Verifica-se nos diagramas de bifurcação mostrados na Figura 5.8 (a-c) a presença de uma bifurcação por duplicação de período, como comprovam as Figuras 5.8 (h, i) onde se observam nos planos de fase dois pontos fixos correspondentes à seção de Poincaré (pontos em destaque na seção). Neste ponto o movimento planar na direção de Y se torna instável dando origem a soluções não planares com flexão na direção *Z* (transversal à direção de aplicação da excitação) e torção. Utilizando o modelo com 1GDL não se consegue detectar o comportamento mostrado anteriormente para a faixa de carregamento Q_y entre 940 e 1060 N/m, como mostra a Figura 5.9. Observa-se também que para certa faixa de excitação há duas soluções estáveis coexistentes (uma solução planar e uma solução não planar), como ilustra a bacia de atração da Figura 5.8(j), onde a região em vermelho corresponde ao conjunto de condições iniciais que levam à solução planar e a região em azul, ao conjunto de condições iniciais que levam à solução não planar.



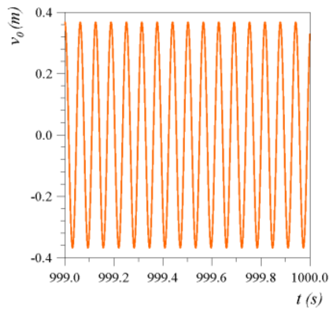
a) Diagrama de bifurcação direção v_o



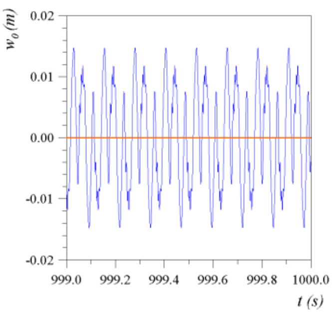
b) Diagrama de bifurcação direção w_o



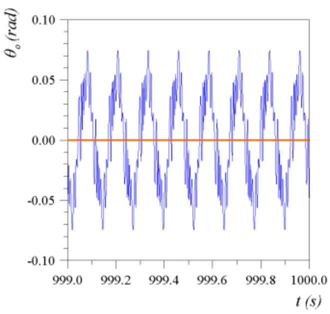
c) Diagrama de bifurcação direção θ_o



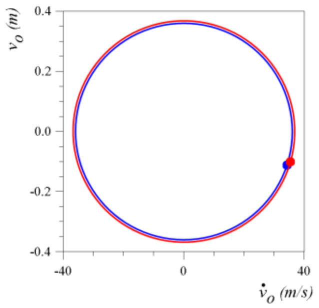
d) Resposta no tempo na direção v_o



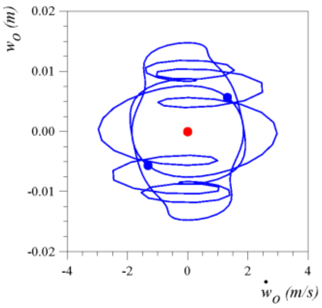
e) Resposta no tempo na direção w_o



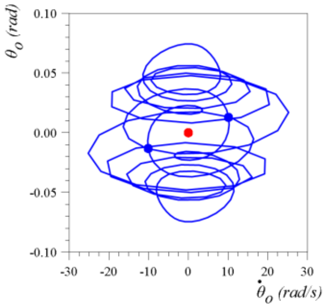
f) Resposta no tempo na direção θ_o



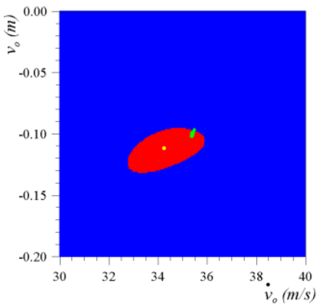
g) Plano de fase na direção v_o



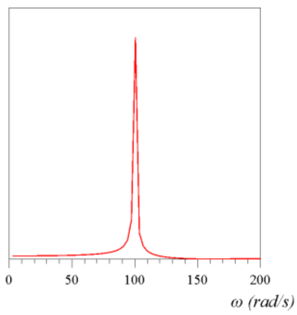
h) Plano de fase na direção w_o



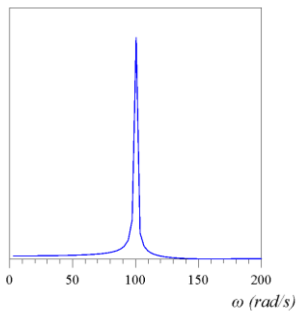
i) Plano de fase na direção θ_o



j) Bacia de atração

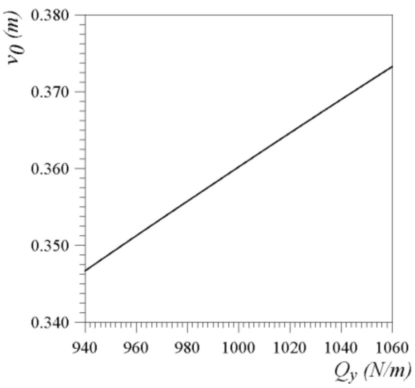


k) Espectro de frequência 1

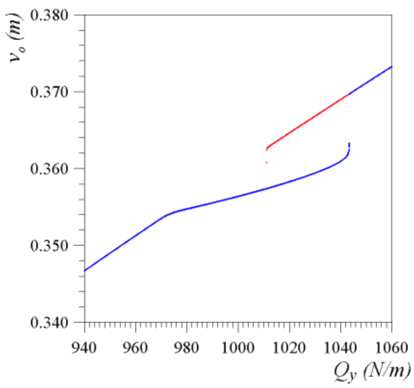


l) Espectro de frequência 2

Figura 5.8: Diagrama de bifurcação para o modelo com 3 GDL e respostas no tempo, planos fase, bacia de tração e espectros de frequência para Ω_y = 100.08 rad/s, ξ = 0.32% e Q_y =1,035 kN/m.



a) 1GDL



b) 3GDL

Figura 5.9: Diagrama de bifurcação para a direção v_0 com Ω_y = 100.08 rad/s, ξ = 0.32% e magnitude da excitação Q_y variando entre 940 e 1060 N/m.

5.4. Vibração forçada: carregamento Q_z aplicado no centro de cisalhamento

Considera-se agora uma solicitação harmônica aplicada na direção Z atuando no centro de cisalhamento do perfil, como mostra a Figura 5.10 Para esta condição, faz-se necessário considerar nas Equações de movimento (5.4) a (5.9), $Q_y = \Omega_y = e_z = e_y = 0$.

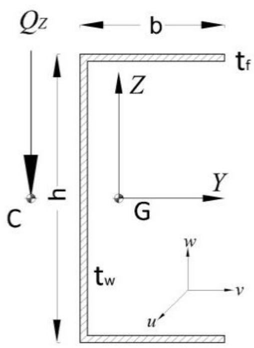


Figura 5.10: Perfil monosimétrico “C” e aplicação da forca excitadora.

Para efeito de comparação, calcula-se a seguir a carga de flambagem lateral para uma viga simplesmente apoiada de seção “C” submetida a uma carga uniformemente distribuída. O momento estático crítico para uma viga com carregamento aplicado no centro de cisalhamento, é dado pela seguinte equação (H. G. Allen, P. S. Bulson (1980)):

$$M_{ocr} = \frac{1.13\pi}{L}\left(\frac{EI_z GJ}{\delta}\right)^{\frac{1}{2}}\left(1+\frac{EI_w \pi^2}{GJL^2}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{5.10}$$

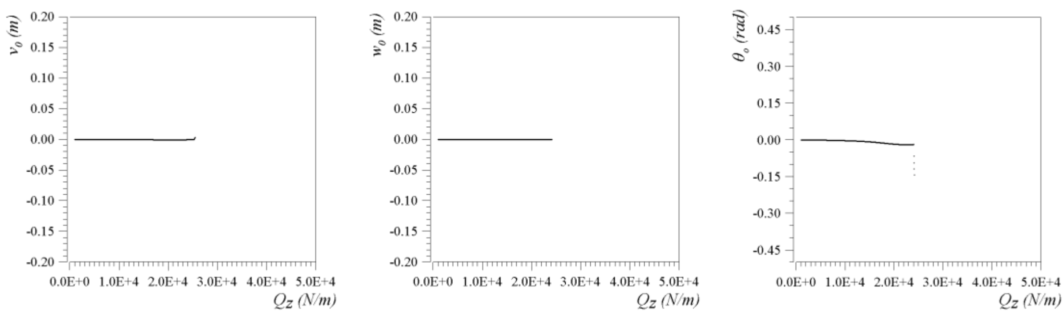
$$\delta = 1-\frac{I_z}{I_y} \quad \text{e} \quad I_z < I_y \tag{5.11}$$

onde: δ é um fator que representa o efeito de flexão no plano vertical da viga. Substituindo na Equação (5.10), os valores apresentados na Tabela 4.7 do Capitulo 4, obtêm-se M_{ocr} = 33934,840 Nm. Sabe-se também que:

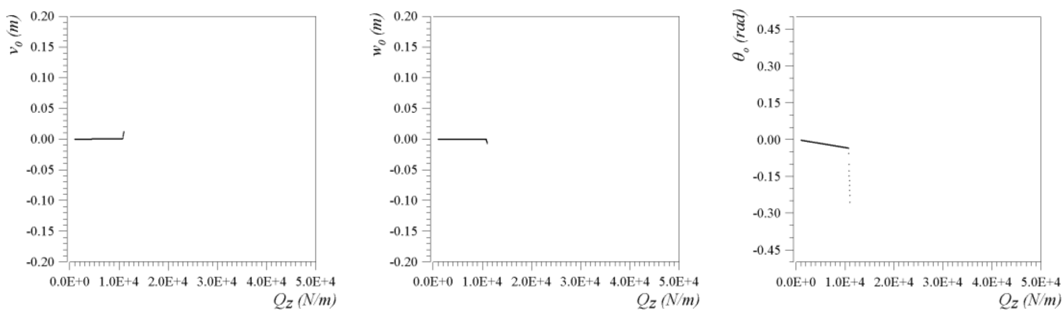
$$M_{ocr} = \frac{Q_{zcr}L^2}{8} \tag{5.12}$$

Da Equação (5.12) tem-se para o carregamento lateral crítico Q_{zcr} = 16,967 kN/m.

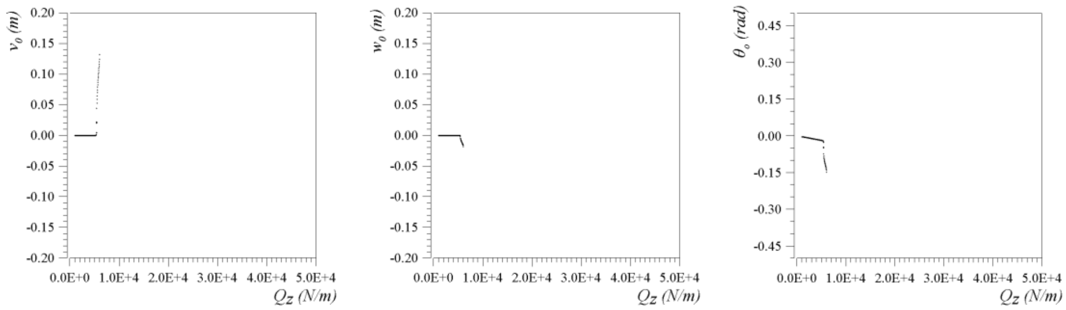
A Figura 5.11 apresenta os diagramas de bifurcações da estrutura para diferentes valores da frequência da excitação, considerando a magnitude da excitação Q_z como parâmetro de controle e amortecimento viscoso ξ = 1,22%.



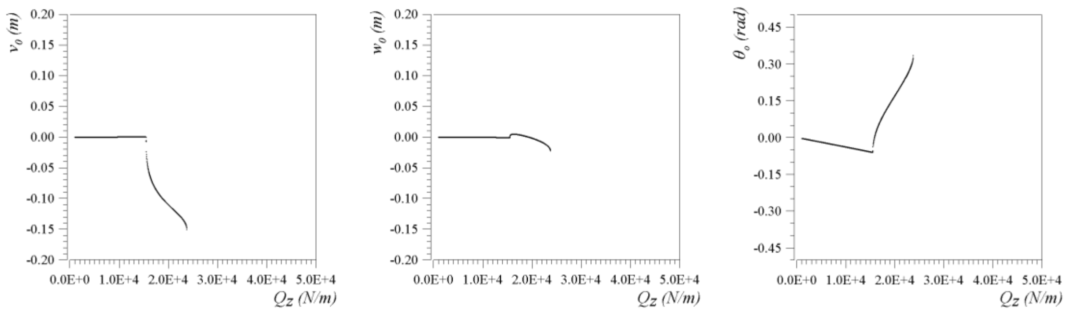
a) Ωz = 30 rad/s



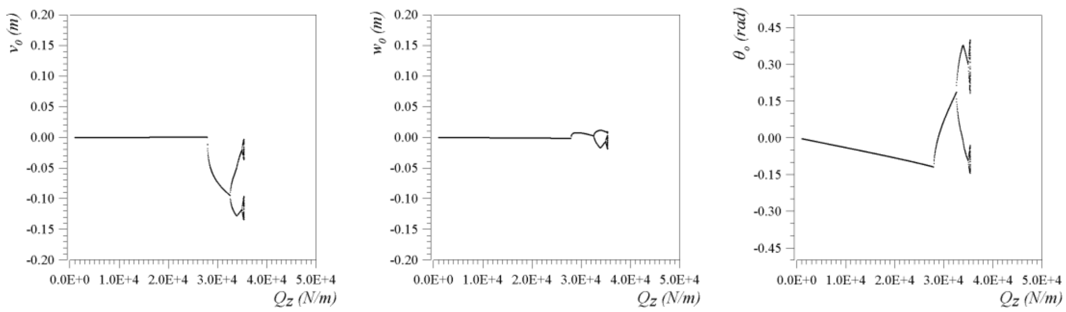
b) Ωz = 90 rad/s



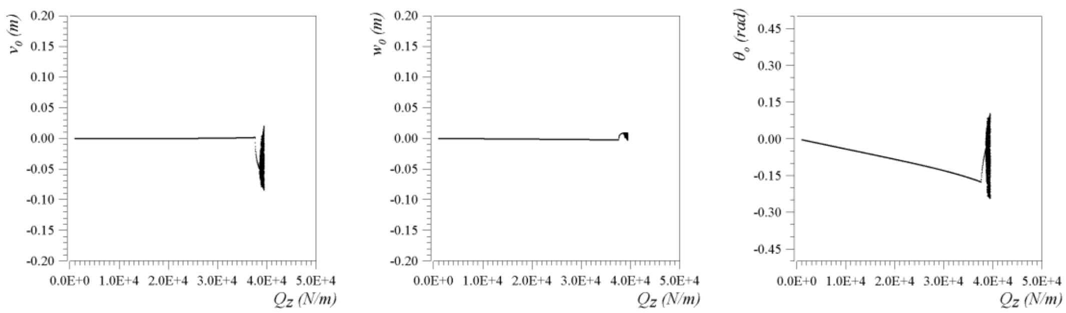
c) Ωz = 100 rad/s



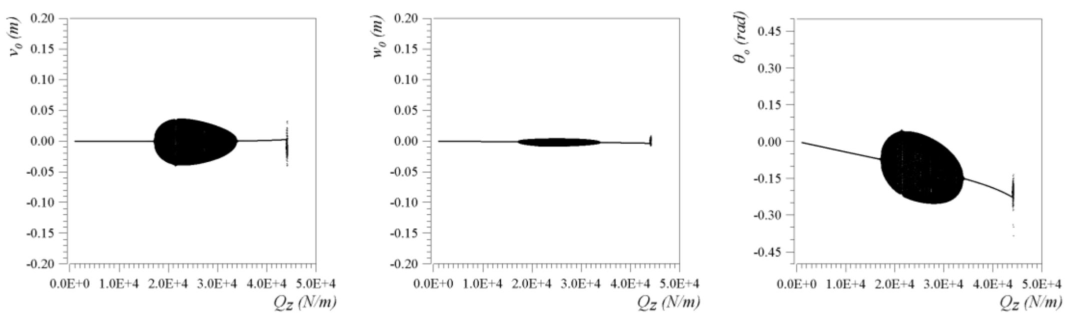
d) Ωz = 102 rad/s



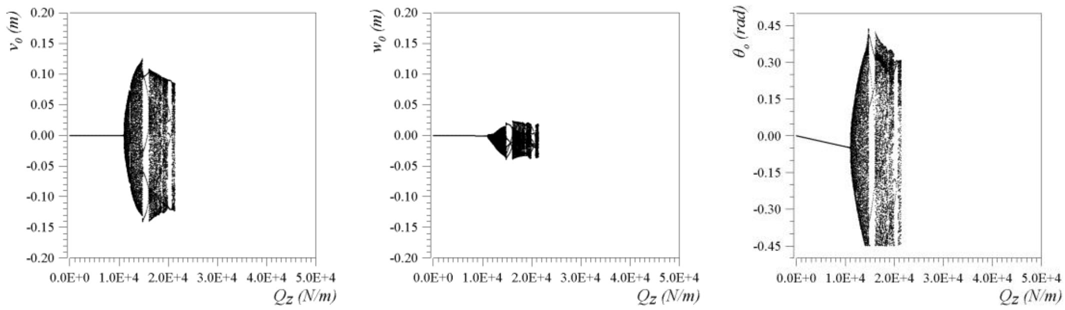
e) Ωz = 105 rad/s



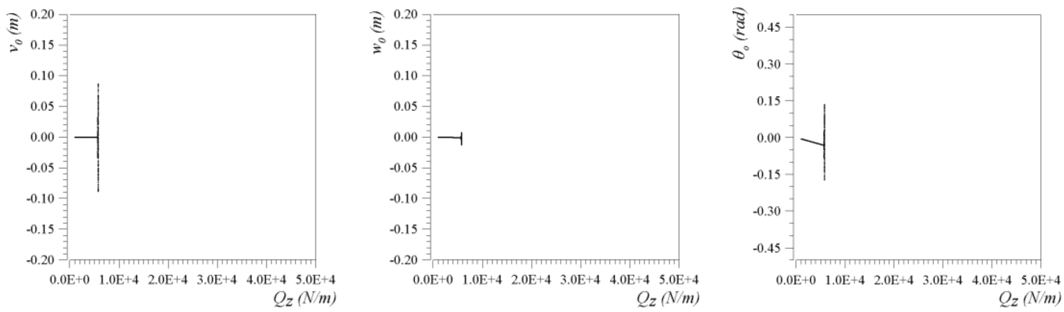
f) Ωz = 108 rad/s



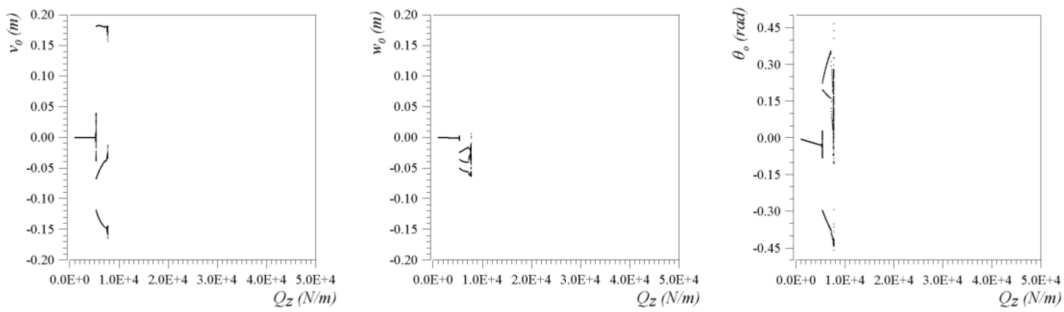
g) Ωz = 110 rad/s



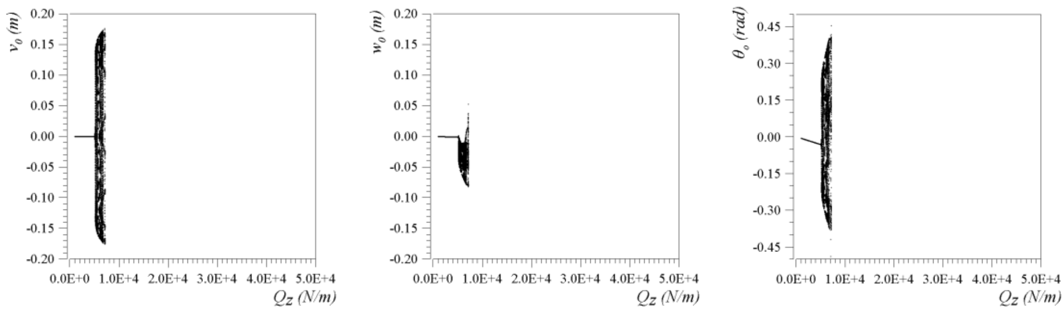
h) Ω*z* = 114 rad/s



i) Ω*z* = 140 rad/s



j) Ω*z* = 150 rad/s



k) Ω*z* = 160 rad/s

Figura 5.11 : Diagramas de bifurcação variando a frequência Ω_z e a magnitude de excitação Q_z com ξ = 1.22% para a direção v_o, w_o e θ_o.

Verifica-se que o comportamento da estrutura é fortemente influenciado tanto pela amplitude quanto pela frequência da excitação. À medida que cresce a frequência de excitação na região de ressonância, diferentes sequências de bifurcações são observadas, gerando diferentes tipos de comportamento dinâmico. Algumas respostas são particularmente interessantes, como, por exemplo, na Figura 5.11(c), Ωz = 100 rad/s, verifica-se o menor valor para a carga crítica dinâmica *Qz*, justamente para uma frequência da excitação próxima à frequência natural de vibração da estrutura (ressonância 1:1); na Figura 5.11(e) , Ωz = 105 rad/s, após a região de ressonância 1:1, verifica-se a presença de uma bifurcação do tipo supercrítica; e nas Figura 5.11(g), Ωz = 110 rad/s, verifica-se uma nuvem de pontos entre Q_z = 17.15 kN/m e Q_z = 34.25 kN/m..

Na Figura 5.12 é mostrada a fronteira de estabilidade no espaço de controle (frequência de excitação Ω_z *versus* magnitude da excitação Q_z) do sistema com excitação harmônica. A região abaixo da fronteira de instabilidade representa os parâmetros para os quais pequenas perturbações levam o sistema a uma ou mais soluções estáveis. A região superior representa os parâmetros para os quais pequenas perturbações levam ao colapso da estrutura (os deslocamentos e/ou rotações aumentam indefinidamente). Verifica-se que a carga crítica varia bastante com o valor da frequência de excitação. Nas regiões de ressonância externa 1:1 e 1:1½, a estrutura apresenta as menores cargas críticas dinâmicas.

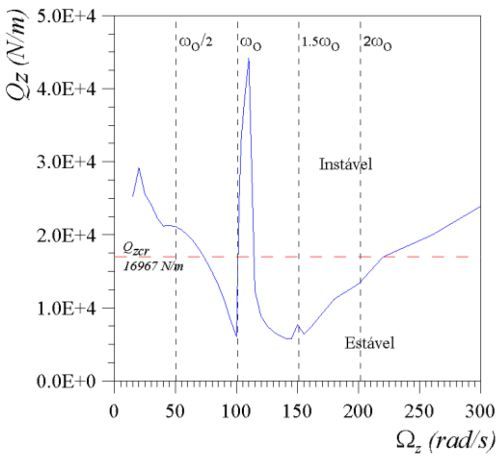
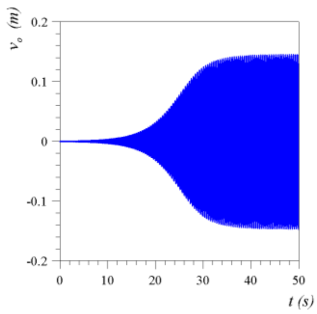
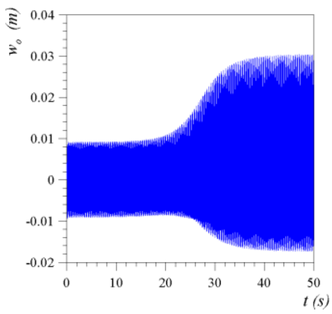


Figura 5.12: Fronteira de estabilidade no espaço de controle da carga. Excitação aplicada na direção Z com frequência, variando entre Ω_z = 15 e 300 rad/s e ξ=1.22%.

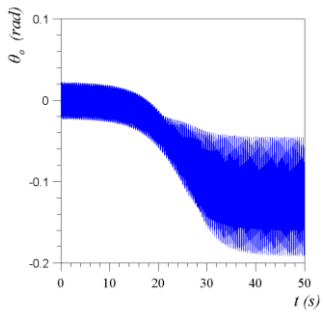
Para Ω_z = 100,0 rad/s, isto e, Figura 5.11(c) e Q_z = 6kN/m, mostra-se na Figura 5.13 a resposta no tempo da estrutura, juntamente com um detalhe da fase permanente da mesma, respectivamente para as direções v_o, w_o, θ_o.



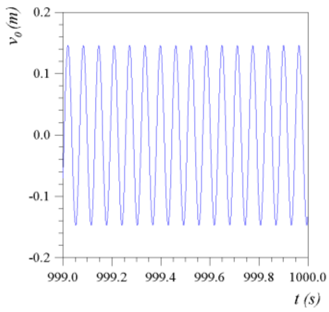
a) Resposta no tempo na direção v_o



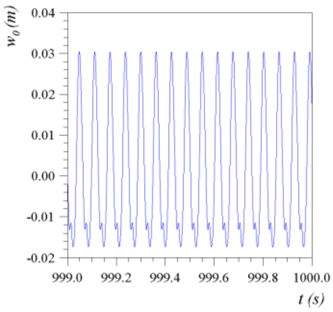
b) Resposta no tempo na direção w_o



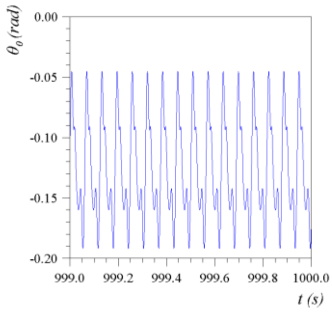
c) Resposta no tempo na direção θ_o



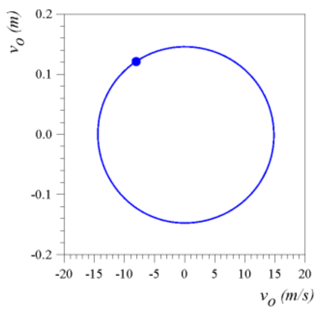
d) Resposta permanente na direção v_o



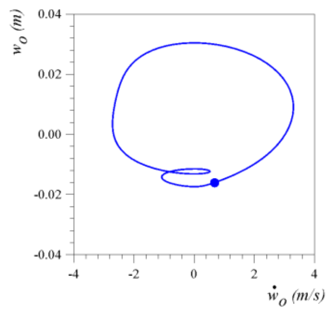
e) Resposta permanente na direção w_o



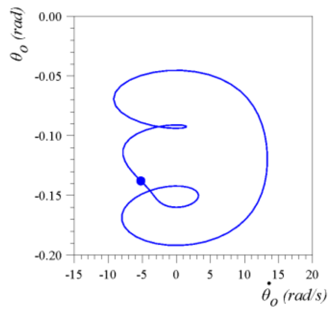
f) Resposta permanente na direção θ_o



g) Plano de fase na direção v_o



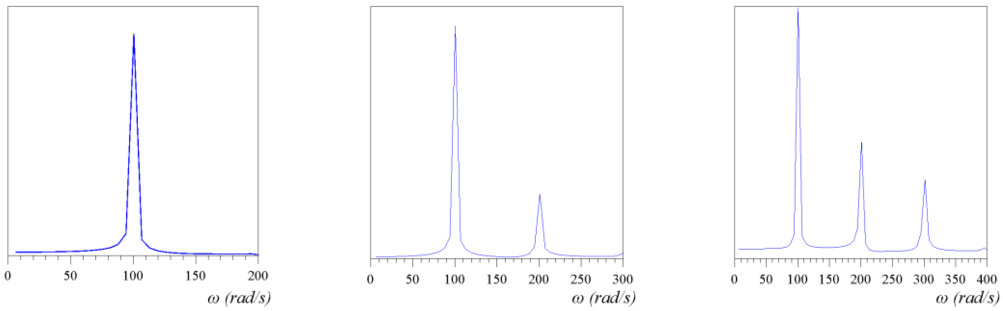
h) Plano de fase na direção w_o



i) Plano de fase na direção θ_o

Figura 5.13: Resposta no tempo do sistema, detalhe da resposta na fase permanente, espaço de fase e seção de Poincaré para as direções v_o, w_o, θ_o com Ωz=100.0 rad/s e ξ=1.22% e uma magnitude de excitação Q_z=6 kN/m.

Verifica-se, como mostra a Figura 5.13, que, após a perturbação inicial, há um crescimento exponencial da amplitude, indicando a perda de estabilidade, mas que, depois de certo tempo, as não linearidades são mobilizadas e a amplitude da resposta para de crescer e fica oscilando em torno de uma configuração de equilíbrio não trivial, tendo período 1T, tal como pode ser observado nas Figura 5.13(g-i). Diz-se que uma solução tem período nT, quando o período da resposta é n vezes o período da força. O conteúdo de frequência dos sinais w_o e θ_o, como se verifica na Figura 5.14, acusa a presença de, respectivamente, dois e três super-harmônicos, o que explica a complexidade da resposta no tempo e plano de fase.



a) Direção v_o b) Direção w_o c) Direção θ_o

Figura 5.14: Espectros de frequência na direção v_o w_o e θ_o.

Dando continuidade ao estudo das vibrações forçadas amortecidas da estrutura, realiza-se agora um estudo mais detalhado da sequência de soluções observadas nos diagramas de bifurcação da Figura 5.11(e), para Ω_z = 105,0 rad/s. Consideram-se, para o estudo, três seções do diagrama de bifurcação, conforme indicado na Figura 5.15.

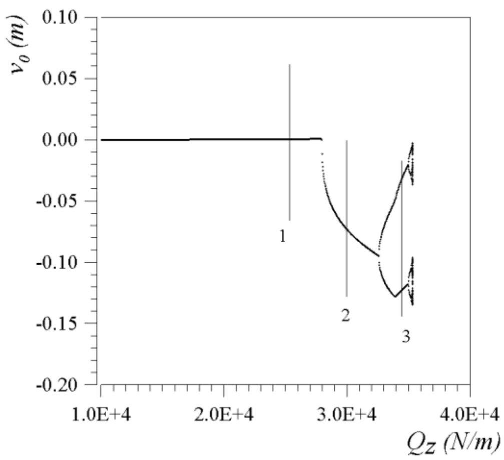
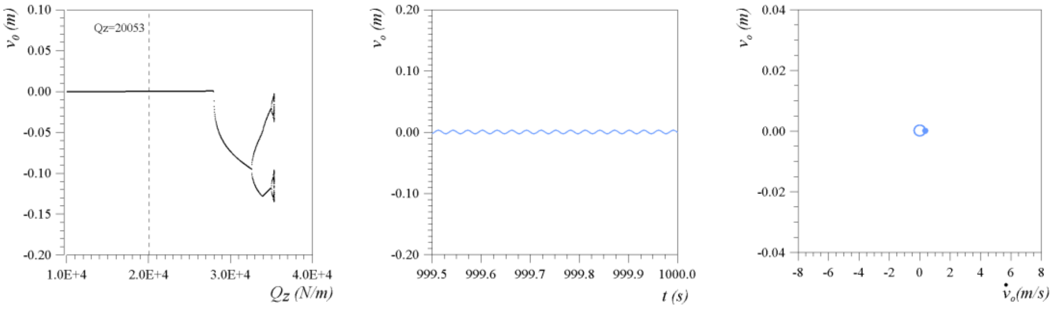


Figura 5.15 : Diagrama de bifurcação com as três seções analisadas.

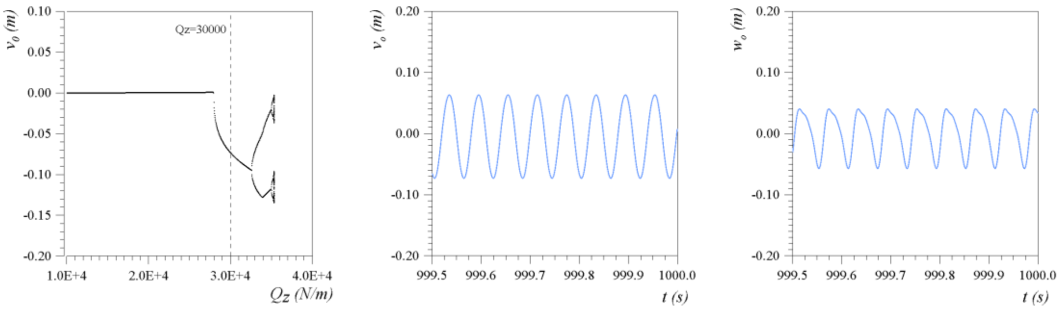
Para a seção 1 da Figura 5.15 (Qz = 20,053 kN/m) tem-se na Figura 5.16 a resposta no tempo e o plano de fase com a respectiva seção de Poincaré da estrutura, na qual verifica-se a presença de uma solução planar estável de período 1T, com pequena amplitude de vibração.



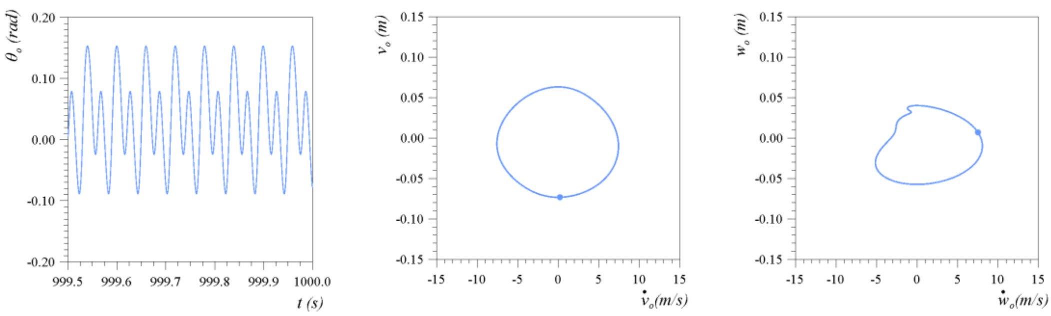
a) Detalhe Seção 1 b) Resposta no tempo c) Plano de fase

Figura 5.16: Resposta no tempo, plano de fase e seção de Poincaré para a seção 1, com Ω_z=105 rad/s, Q_z = 20,053 kN/m e ξ=1.22%.

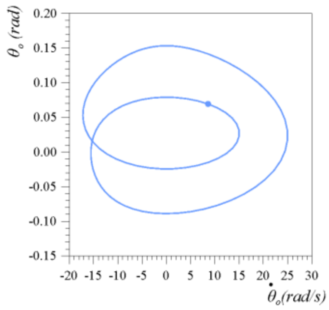
De forma similar, para a seção 2 da Figura 5.15 (Q_z = 30 kN/m), verifica-se também uma única solução estável de período 1, porém com maior amplitude (Figura 5.17).



a) Detalhe Seção 2 b) Resposta no tempo na direção v_o c) Resposta no tempo na direção w_o



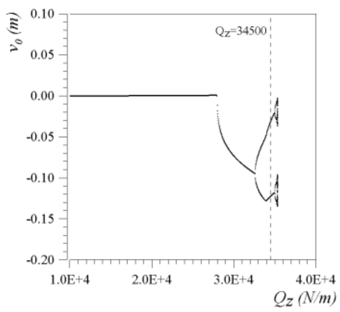
d) Resposta no tempo na direção θ_o e) Plano de fase na direção v_o f) Plano de fase na direção w_o



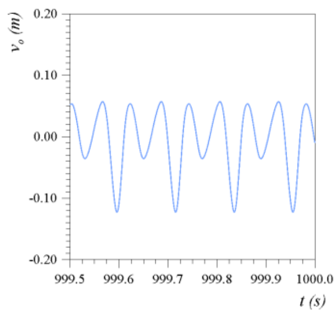
g) Plano de fase na direção θ_o

Figura 5.17: Resposta no tempo, plano de fase e seção de Poincaré para a seção 2, com Ω_z=105 rad/s, Q_z = 30 kN/m e ξ=1.22%.

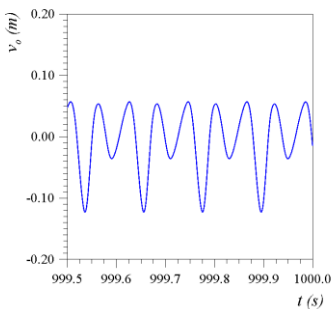
Contudo, para a seção 3 da Figura 5.15 (Q_z = 34,5 kN/m), observa-se a presença de duas soluções periódicas estáveis, ambas de período dois. Na Figura 5.18, Figura 5.19 e Figura 5.20 mostram-se várias projeções da resposta no tempo e plano de fase associadas aos três graus de liberdade onde se podem identificar estas duas soluções de período dois. As condições iniciais associadas com estas duas soluções são mostradas na seção bidimensional da bacia de atração da Figura 5.18(g). As duas regiões em azul correspondem às bacias de uma solução, enquanto as duas regiões em verde correspondem à outra solução. Verifica-se que a maioria das condições iniciais leva a uma resposta instável (região branca).



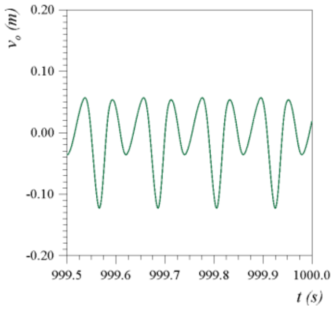
a) Detalhe seção 3



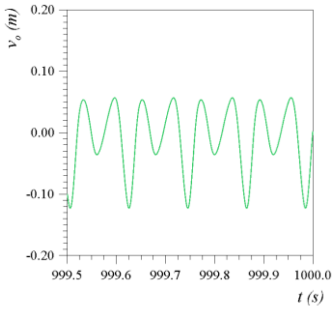
b) Resposta no tempo 1



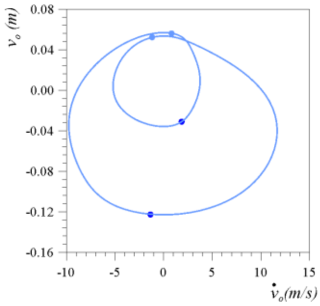
c) Resposta no tempo 2



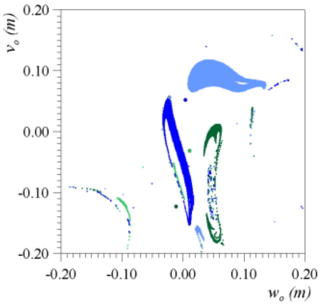
d) Resposta no tempo 3



e) Resposta no tempo 4

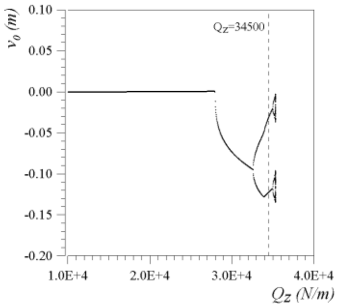


f) Plano de fase

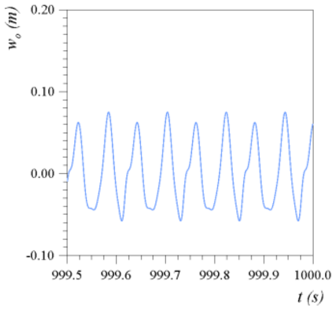


g) Bacia de atração

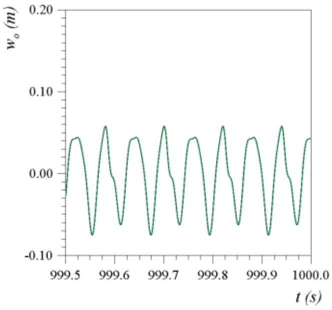
Figura 5.18: Diagrama de bifurcação, resposta no tempo, plano de fase e bacia de atração para o sistema, com Ω_z = 105 rad/s, Q_z = 34,5 kN/m e ξ = 1.22% na direção v_o.



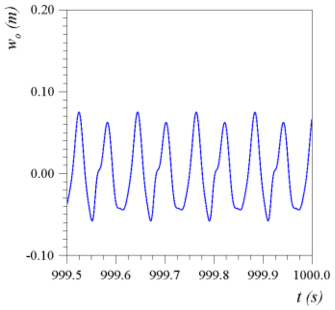
a) Detalhe seção 3



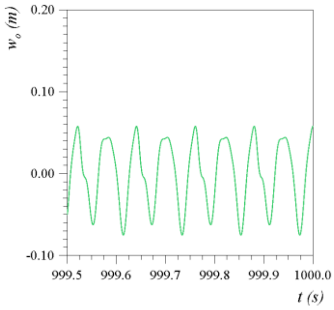
b) Resposta no tempo 1



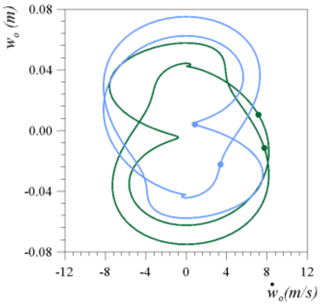
c) Resposta no tempo 2



d) Resposta no tempo 3

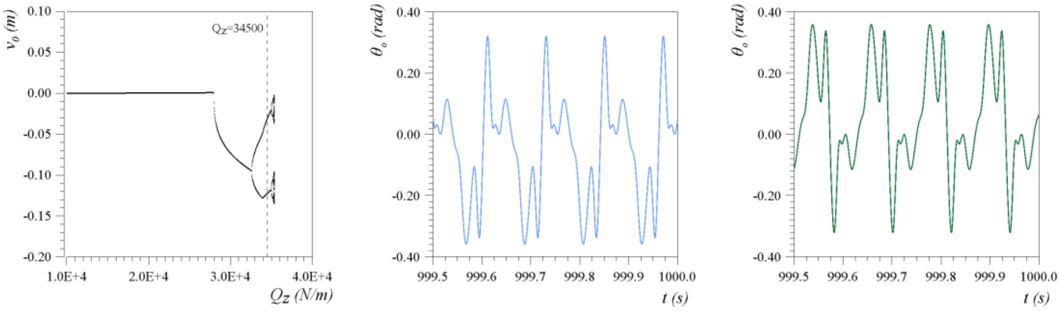


e) Resposta no tempo 4

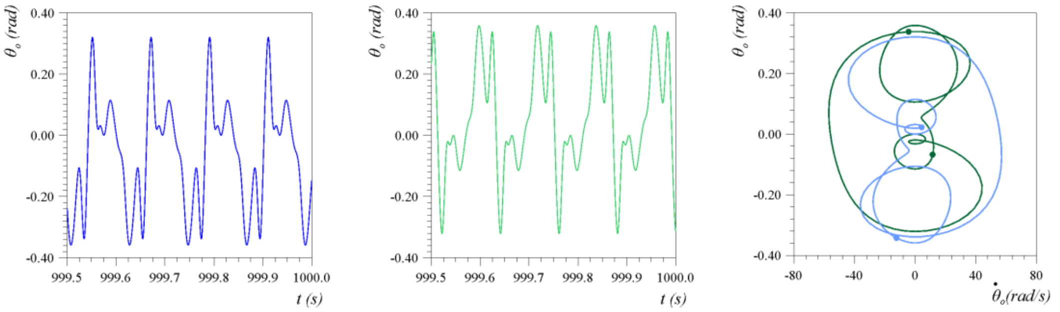


f) Plano de fase

Figura 5.19: Diagrama de bifurcação, resposta no tempo e plano de fase para o sistema, com Ω_z = 105 rad/s, Q_z = 34,5 kN/m e ξ = 1.22% na direção w_o.



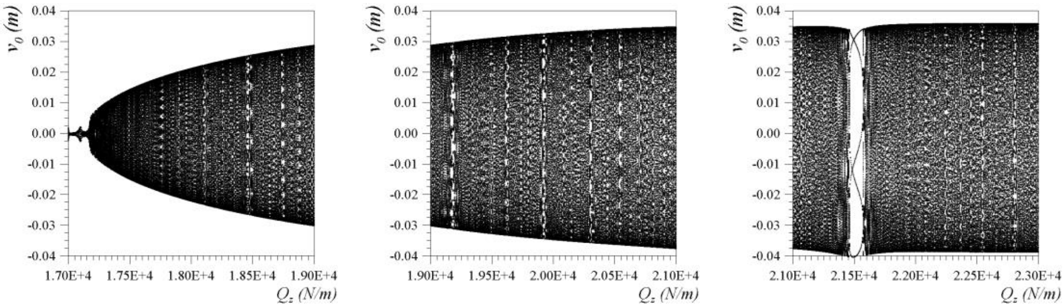
a) Detalhe seção 3 b) Resposta no tempo 1 c) Resposta no tempo 2



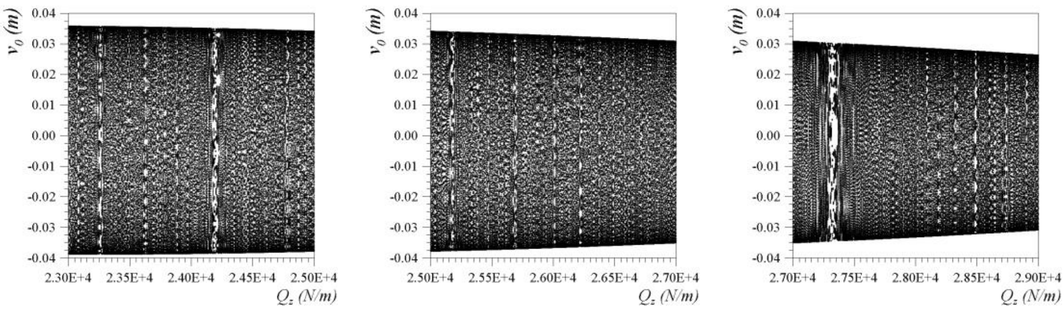
d) Resposta no tempo 3 e) Resposta no tempo 4 e) Plano de fase

Figura 5.20: Diagrama de bifurcação, resposta no tempo e plano de fase para o sistema, com Ω_z = 105 rad/s, Q_z = 34,5 kN/m e ξ = 1.22% na direção θ_o.

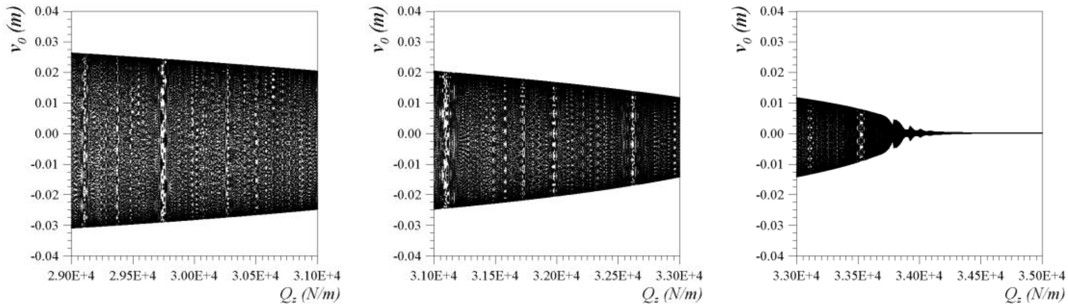
Em adição, na Figura 5.21 apresentam-se alguns detalhes do diagrama apresentado na Figura 5.11(g) para Ωy = 110 rad/s, na região onde uma nuvem de pontos pode ser observada.



$17 \leq Q_z \leq 19$ kN/m $19 \leq Q_z \leq 21$ kN/m $21 \leq Q_z \leq 23$ kN/m



$23 \leq Q_z \leq 25$ kN/m $25 \leq Q_z \leq 27$ kN/m $27 \leq Q_z \leq 29$ kN/m



$29 \leq Q_z \leq 31$ kN/m $31 \leq Q_z \leq 33$ kN/m $33 \leq Q_z \leq 35$ kN/m

Figura 5.21: Detalhes do diagrama de bifurcações apresentado na Figura 5.14 (y) para a direção v_o.

Em geral, verifica-se a presença de uma nuvem de pontos intercalados por pequenas janelas de soluções periódicas. Este comportamento pode ser observado analisando a Figura 5.21(c), considerando nela duas seções, tal como ilustrado na Figura 5.22.

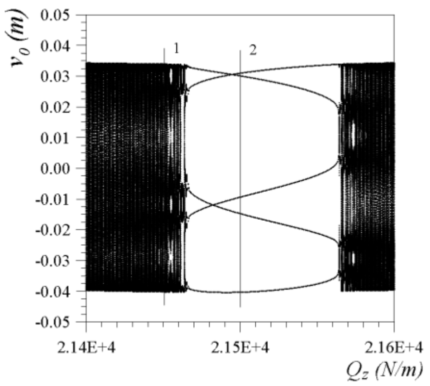
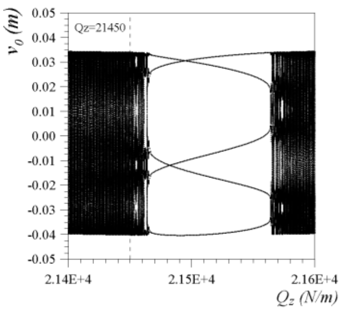
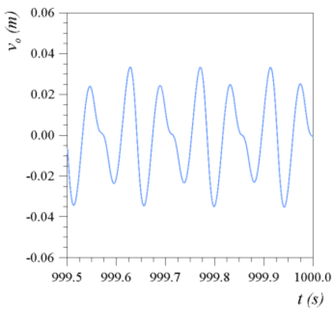


Figura 5.22: Diagrama de bifurcação com as duas seções.

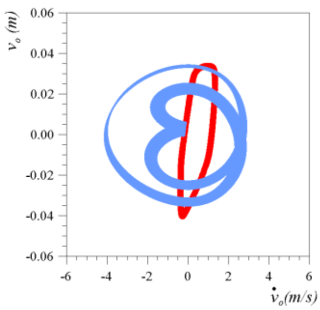
Para a seção 1 da Figura 5.22 (Q_z = 21,45 kN/m), apresentam-se na Figura 5.23 a resposta no tempo (azul) e plano de fase com a respectiva seção de Poincaré (vermelho) na qual se pode observar uma solução quase periódica.



a) Detalhe seção 1



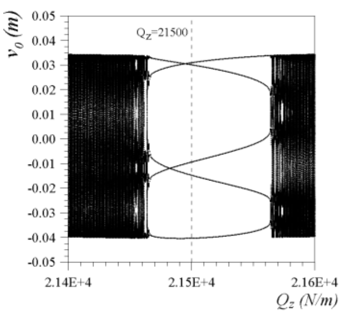
b) Resposta no tempo



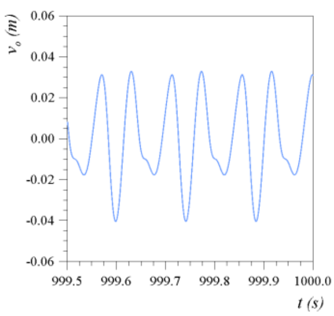
c) Plano de fase

Figura 5.23: Resposta no tempo, plano de fase e seção de Poincaré para a seção 1, com Ω_z=110 rad/s, Q_z = 21,45 kN/m e ξ=1.22%.

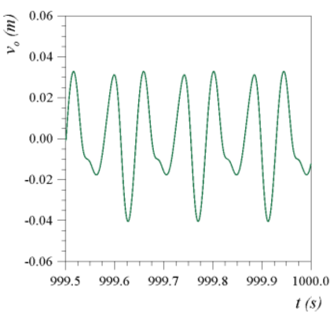
Para a seção 2 da Figura 5.22, (Q_z = 21,5 kN/m), verifica-se a presença de uma única solução estável de período 5 (5 pontos no plano de fase com seção de Poincaré). As condições iniciais associadas a esta solução são mostradas na seção bidimensional da bacia de atração Figura 5.24(h-i), na qual se observam as cinco regiões da bacia correspondentes a estes cinco pontos fixos. Convém salientar que a bacia de atração da solução corresponde à união destas cinco regiões.



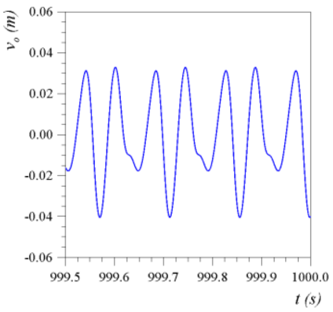
a) Detalhe seção 2



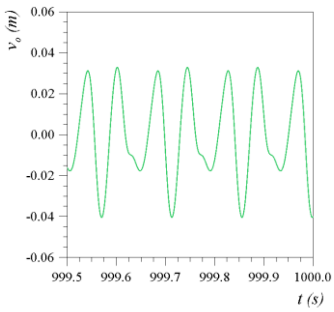
b) Resposta no tempo 1



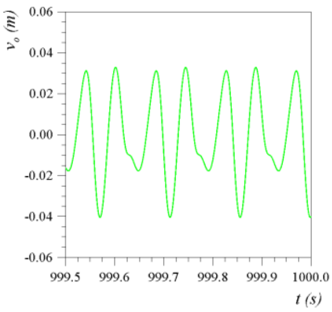
c) Resposta no tempo 2



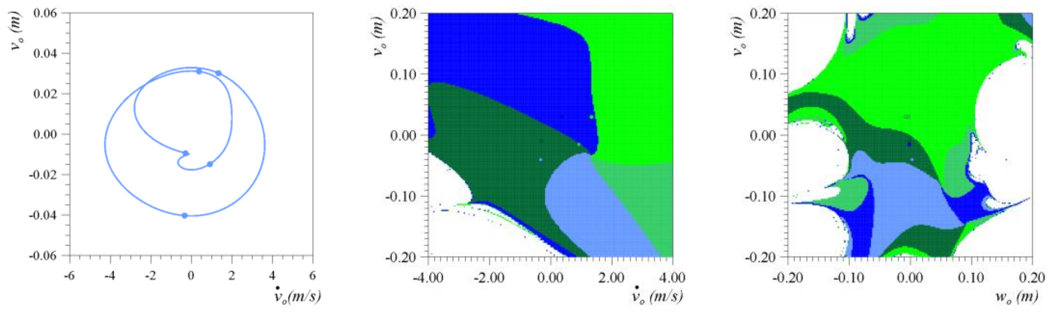
d) Resposta no tempo 3



e) Resposta no tempo 4



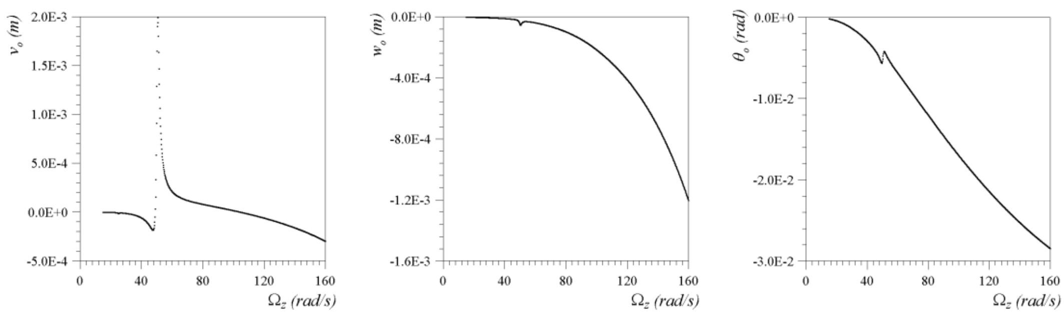
f) Resposta no tempo 5



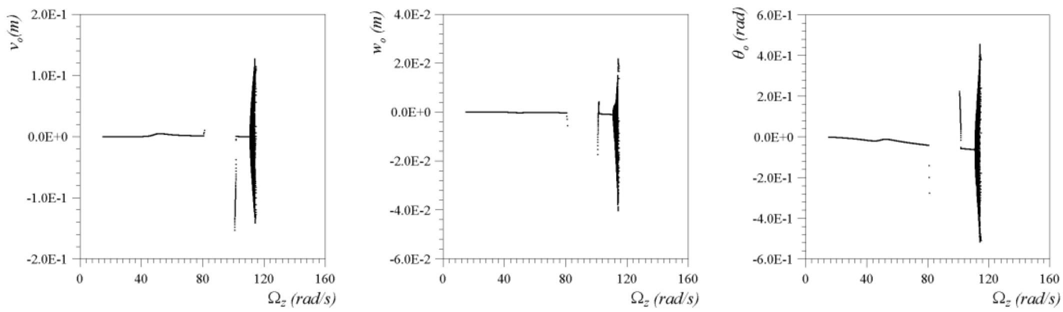
g) Plano de fase   h) Bacia de atração 1   i) Bacia de atração 2

Figura 5.24: Diagrama de bifurcação, resposta no tempo, plano de fase e bacia de atração para o sistema, com Ω_z=110 rad/s, Q_z = 21,5 kN/m e ξ=1.22%.

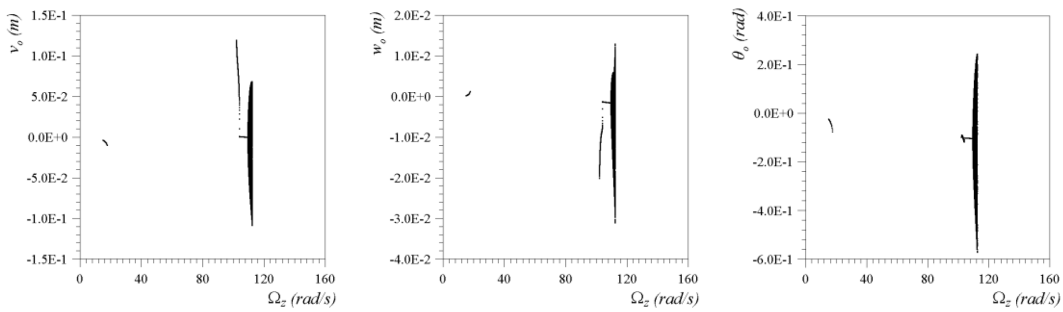
Finalmente, na Figura 5.25 apresentam-se os diagramas de bifurcações, tomando a frequência da excitação, Ω_z, como parâmetro de controle para valores selecionados da magnitude da excitação em termos das componentes v_o, w_o e θ_o. Neles verificam-se regiões onde nenhuma solução estável pode ser identificada, mostrando que certas combinações de magnitude e frequência da excitação podem levar ao colapso estrutural, um risco mais acentuado para magnitude de excitação mais elevada. Para Q_z = 4500 N/m, um valor bem menor que a carga crítica estática (Q_{zcr} = 16,967 kN/m), identifica-se sempre uma resposta estável independente do valor de Ω_z. Para Q_z = 14500 N/m, um valor um pouco inferior à carga crítica estática, já se observa na vizinhança da frequência fundamental uma região sem soluções periódicas estáveis. Quando se tem um nível de carregamento superior à carga crítica estática, observam-se respostas dinâmicas estáveis para apenas alguns valores de frequência de excitação.



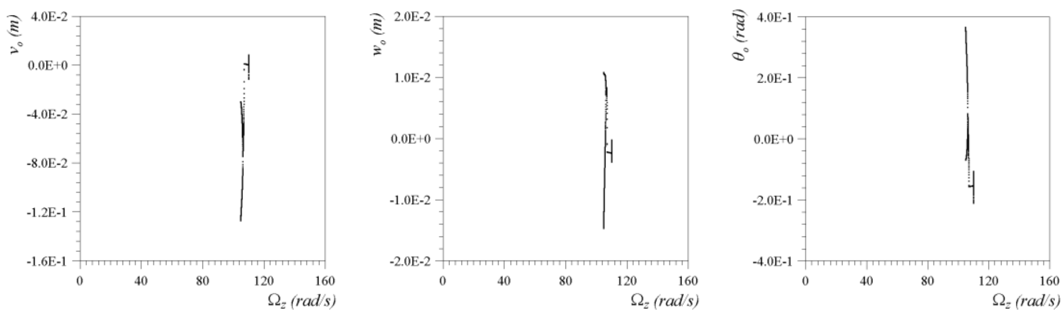
a) Qz = 4500 N/m.



b) Qz = 14500 N/m.



c) Qz = 24500 N/m.



d) Qz = 34500 N/m.

Figura 5.25: Diagramas de bifurcação variando a frequência de excitação Ω_z, para diferentes magnitudes de excitação Q_z nas direções v_o, w_o e θ_o com ξ=1.22%.

5.5. Vibração forçada: carregamento Q_z aplicado no centro de gravidade.

A Figura 5.26 mostra a localização da força excitadora atuando no centro de gravidade do perfil. Para esta condição de carregamento, tem-se uma excentricidade com relação ao centro de cisalhamento, e_y = 0,060818 m e faz-se necessário considerar nas Equações de movimento (5.4) a (5.9), e_z = 0,0 m. Com isto aumenta o efeito da torção no comportamento dinâmico da estrutura.

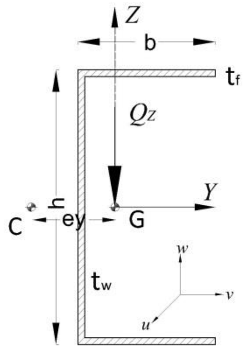
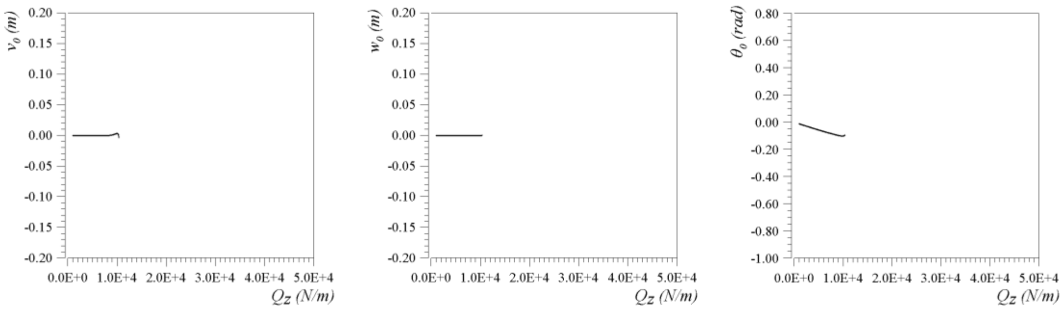
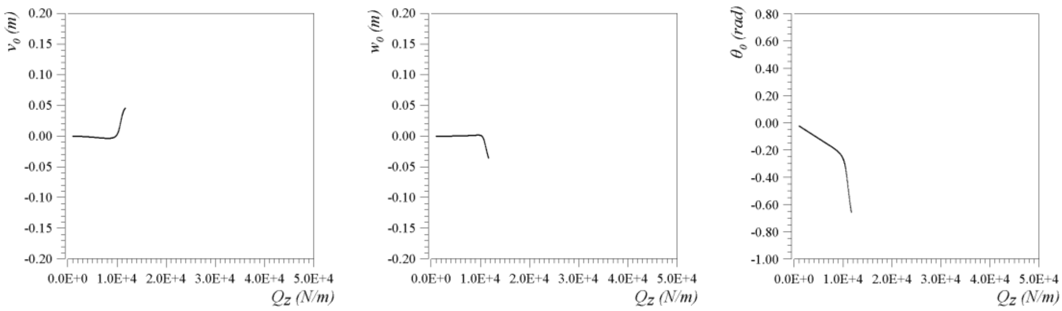


Figura 5.26: Perfil monosimétrico “C” e aplicação da forca excitadora no centro de gravidade.

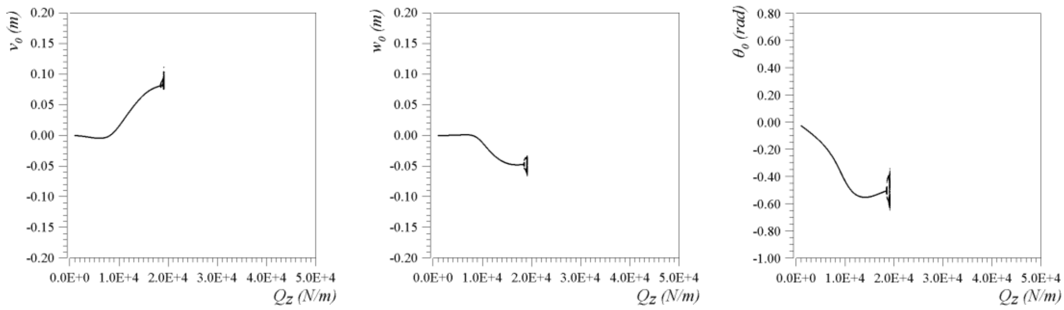
A Figura 5.27 apresenta os diagramas de bifurcações da estrutura para diferentes valores da frequência de excitação, considerando a magnitude da excitação Q_z como parâmetro de controle e amortecimento viscoso ξ = 1,22%.



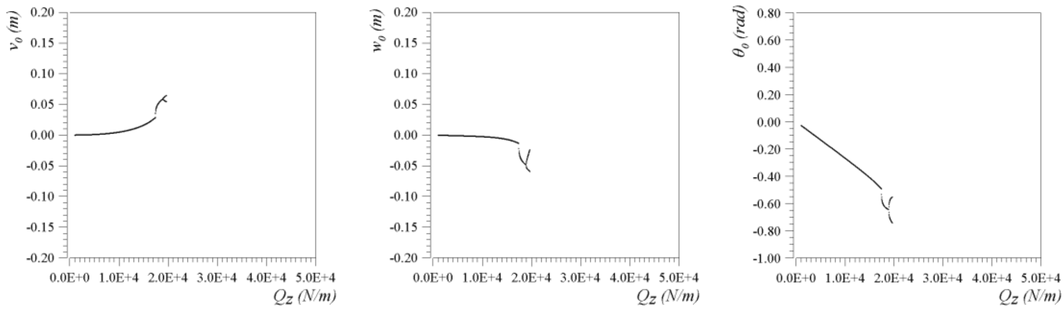
a) Ω_z = 15 rad/s



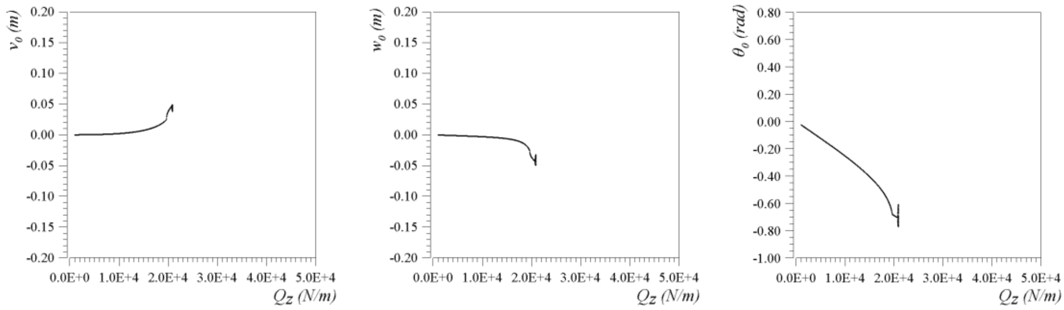
b) Ω_z=35 rad/s



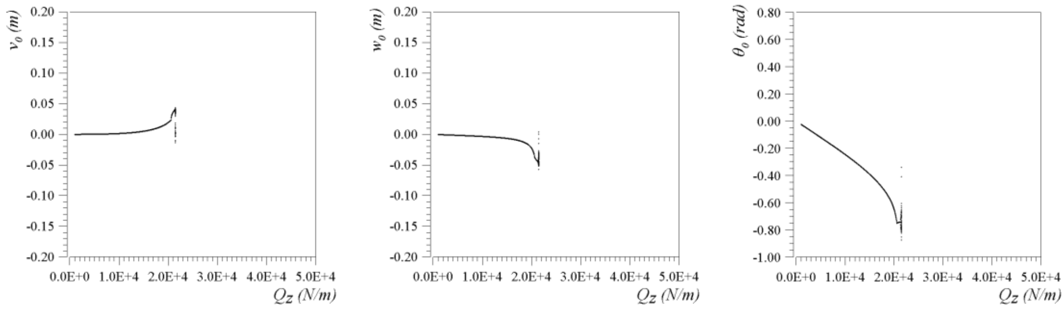
c) Ω_z=45 rad/s



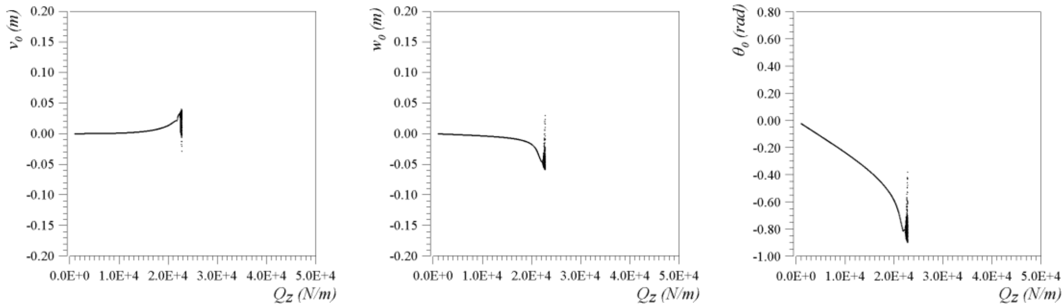
d) Ω_z=85 rad/s



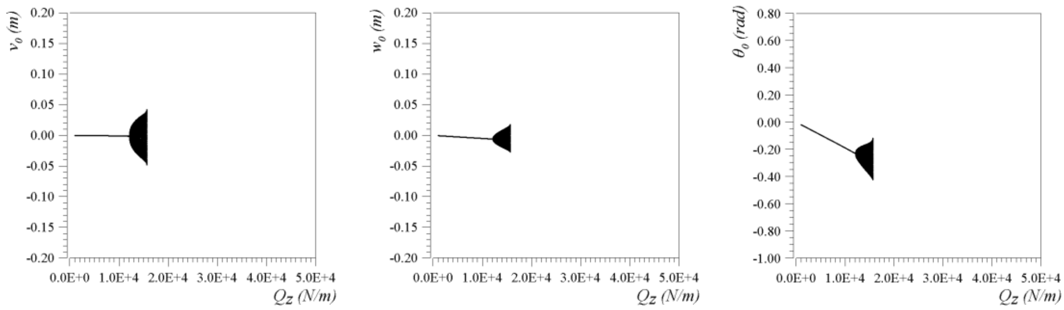
e) Ω_z=100 rad/s



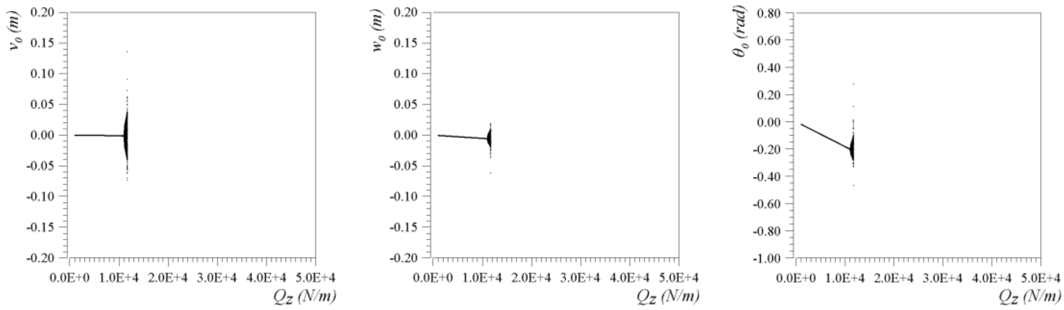
f) Ω_z=105 rad/s



g) Ω_z=110 rad/s



i) Ω_z=140 rad/s

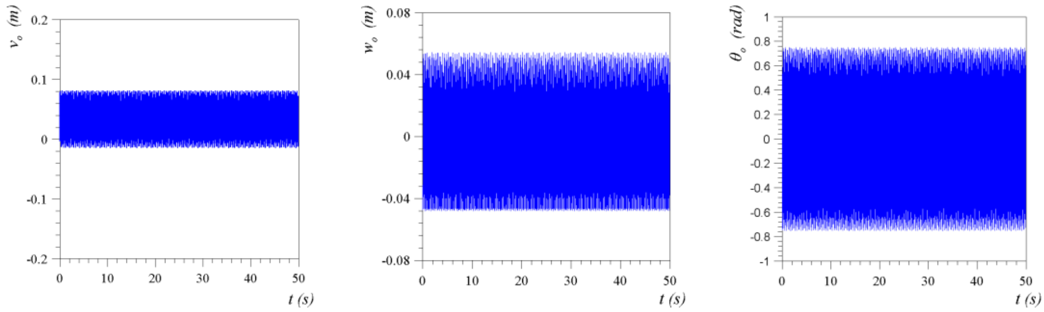


j) Ω_z=145 rad/s

Figura 5.27: Diagramas de bifurcação variando a frequência Ω_z e a magnitude de excitação Q_z com ξ =1.22% para as direções v_o, w_o e θ_o.

A Figura 5.27 mostra que para valores de $0 \leq \Omega_z \leq 40$ rad/s o sistema tem solução estável de pequena amplitude até $Q_z \leq 10$ kN; para valores $\Omega_z > 40$ observa-se aumento em todas as componentes de deslocamentos e aumento da capacidade de carga do perfil. Observa-se que, na maioria dos casos, a instabilidade ocorre de forma abrupta, sem a presença de bifurcações secundárias que indiquem a iminência de perda de estabilidade. Cascatas de bifurcações, quando existem, estão restritas a uma pequena faixa de variação de Q_z.

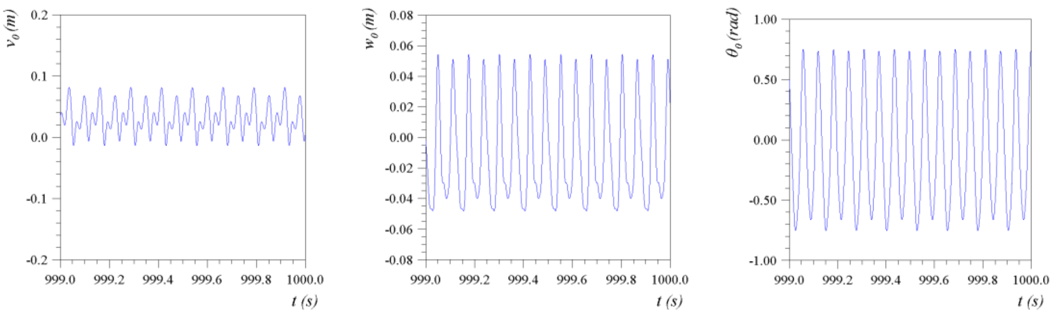
Para Ω_z = 100,0 rad/s, isto é, Figura 5.27(e) e Q_z = 21,750 kN/m, mostra-se na Figura 5.28 a resposta no tempo (Figura 5.28a-c), detalhe da resposta permanente (Figura 5.28d-f), plano de fase (Figura 5.28g-i) e espectros de frequência (Figura 5.28 j-l) para as componentes de deslocamento v_o, w_o e θ_o. Este nível de carga é levemente superior à carga associada à primeira bifurcação. Na Figura 5.28 pode-se observar que o sistema apresenta uma solução com período 2T, indicando ser esta uma bifurcação por duplicação de período. Observa-se que a torção tem grande influência nas oscilações gerando rotações de grande amplitude (aproximadamente ±0.75 rad (±43^0)). Como se pode observar nos espectros de frequência, a resposta do tempo apresenta a influência de várias frequências incluindo super-harmônicos, sub-harmônicos e combinações de frequência.



a) Resposta no tempo na direção v_o

b) Resposta no tempo na direção w_o

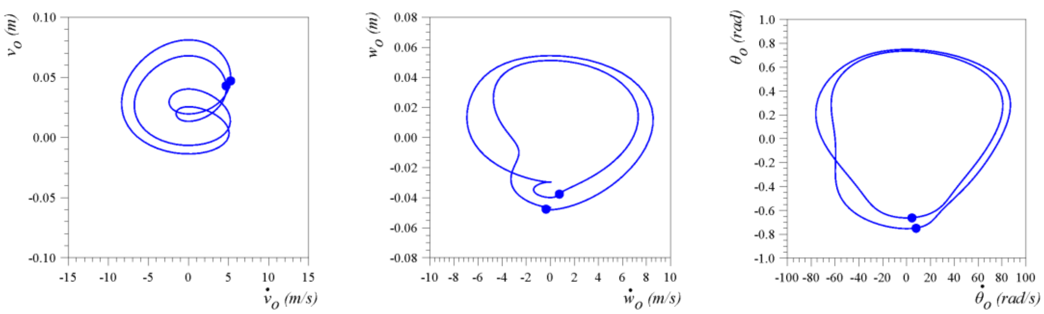
c) Resposta no tempo na direção θ_o



d) Resposta permanente na direção v_o

e) Resposta permanente na direção w_o

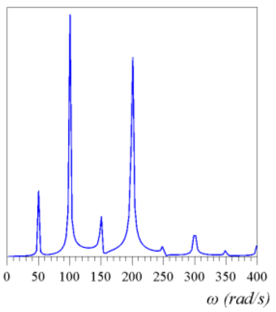
f) Resposta permanente na direção θ_o



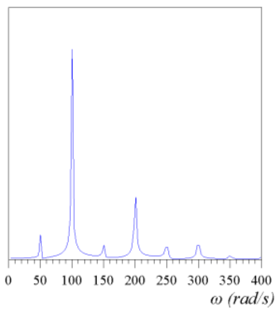
g) Plano de fase na direção v_o

h) Plano de fase na direção w_o

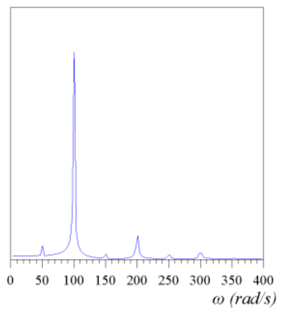
i) Plano de fase na direção θ_o



j) Espectro de frequência na direção v_o



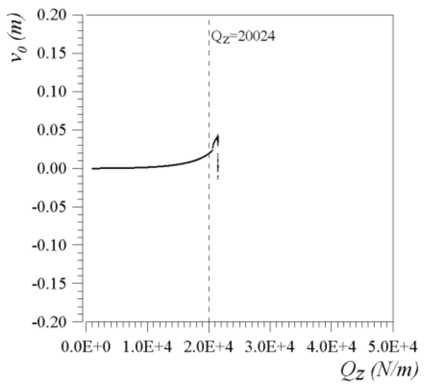
k) Espectro de frequência na direção w_o



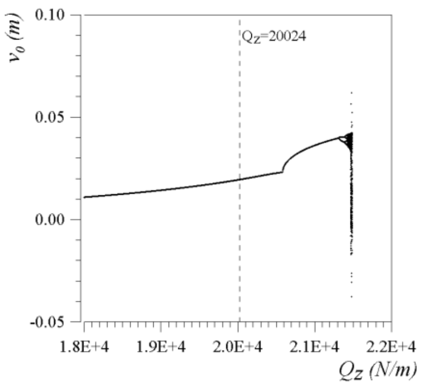
l) Espectro de frequência na direção θ_o

Figura 5.28: Resposta no tempo do sistema, resposta na fase permanente, espaço de fase, seção de Poincaré e espectros de frequência para as componentes v_o, w_o, θ_o com Ωz = 100.0 rad/s e ξ = 1.22% e uma magnitude de excitação Q_z = 21,750 kN/m.

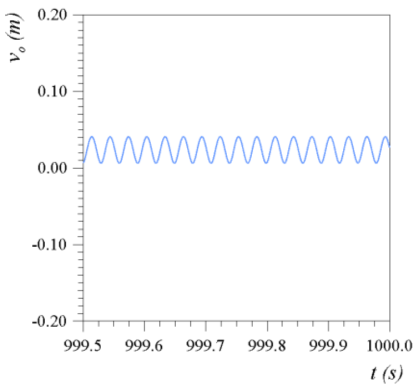
Para Ω_z = 105,0 rad/s e Qz = 20,024 kN/m, ver Figura 5.27(f), mostra-se na Figura 5.29 a resposta no tempo e o plano de fase com a seção de Poincaré da estrutura, na qual verifica-se a presença de uma solução estável de período 1T, com pequena amplitude de vibração.



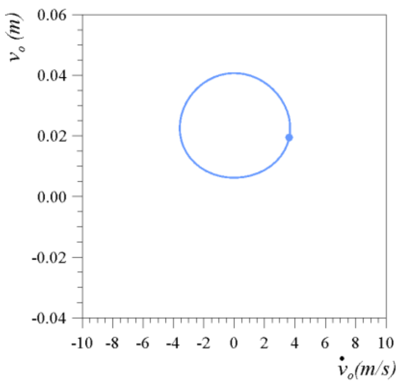
a) Figura 5.23(r)



b) Detalhe da seção



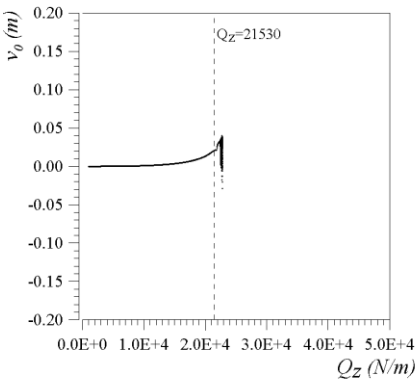
c) Resposta no tempo



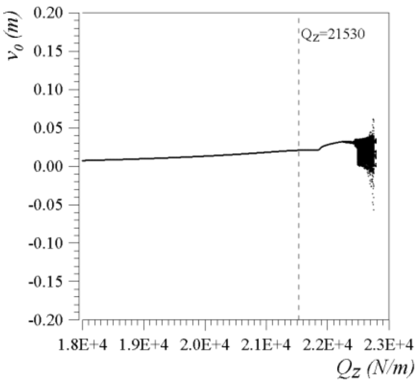
d) Plano de fase

Figura 5.29: Resposta no tempo, plano de fase e seção de Poincaré para a direção v_o, com Ω_z = 105 rad/s, Q_z = 20,024 kN/m e ξ=1.22%.

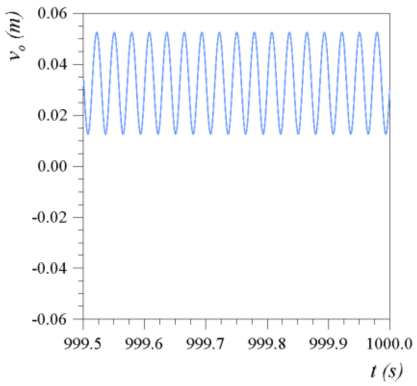
De forma similar, para Ω_z = 110,0 rad/s e Q_z = 21,503 kN/m, ver Figura 5.27(s), verifica-se também uma única solução estável de período 1T. Observa-se que a oscilação ocorre em torno de uma posição de equilíbrio não trivial, (Figura 5.30).



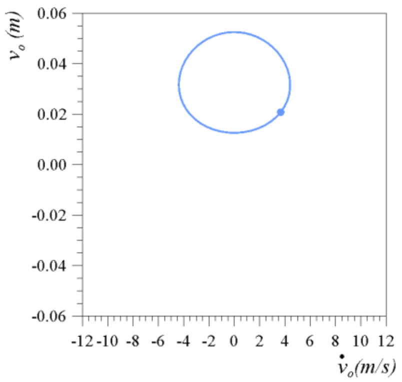
a) Figura 5.23(s)



b) Detalhe da seção



c) Resposta no tempo



d) Plano de fase

Figura 5.30: Resposta no tempo, plano de fase e seção de Poincaré para a direção v_o, com Ω_z=110 rad/s, Q_z = 21,503 kN/m e ξ=1.22%.

Comparando-se a Figura 5.28 com os resultados da Figura 5.16, referente a uma carga aplicada no centro de cisalhamento, pode-se observar que, para uma frequência de excitação e um carregamento de mesma magnitude, os deslocamentos são maiores. Da mesma forma pode-se observar uma grande diferença entre os resultados da Figura 5.29 e os da Figura 5.30.

A Figura 5.31 mostra a fronteira de estabilidade para o carregamento Q_z aplicado no centro de gravidade do perfil. Nota-se, como na Figura 5.12, que a capacidade de carga da estrutura varia bastante com a frequência de excitação, atingindo um valor mínimo para uma frequência um pouco menor que a frequência fundamental da estrutura. Comparando-se com a Figura 5.12, nota-se que a posição do carregamento tem uma grande influência no valor da carga crítica dinâmica neste tipo de estrutura.

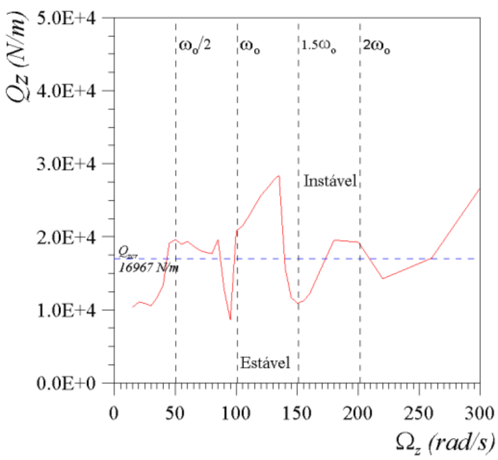


Figura 5.31: Fronteira de estabilidade no espaço de controle da carga. Excitação aplicada na direção *Z* com frequência variando entre Ω_z = 15 e 300 rad/s. e ξ = 1.22%.

A Figura 5.32 mostra a influência da excentricidade na direção *Y* variando a posição da carga Q_z desde o centro de cisalhamento (e_y = 0,0 m) até o centro de gravidade (e_y = 0,060818 m). Observar-se que, para frequência de excitação entre $0 \leq \Omega_z \leq 60$ rad/s, a capacidade de carga da estrutura é maior quando o carregamento está aplicado no centro de cisalhamento. Para $60 \leq \Omega_z \leq 90$ rad/s a capacidade de carga da estrutura praticamente independe da posição de aplicação da carga. Já na região de ressonância, a capacidade de carga é maior quando a carga é aplicada no centro de gravidade. Para $100 \leq \Omega_z \leq 110$ rad/s, verifica-se novamente uma maior capacidade de carga da estrutura quando a solicitação está aplicada no centro de cisalhamento. Para valores $\Omega_z \geq 110$ rad/s têm-se um melhor comportamento quando o carregamento é aplicado no centro de gravidade.

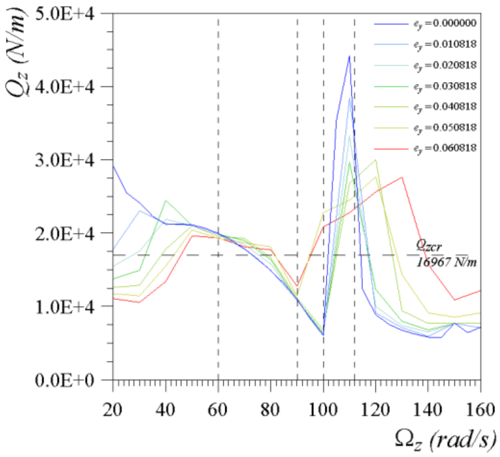


Figura 5.32: influência da excentricidade na direção *Y* na fronteira de estabilidade.

5.6. Vibração forçada: carregamento Q_z aplicado na mesa superior do perfil.

A Figura 5.33 mostra a localização da força excitadora atuando na mesa superior do perfil. Para esta condição de carregamento há duas excentricidades com relação ao centro de cisalhamento e faz-se necessário considerar nas Equações (5.4) a (5.9) as seguintes excentricidades e_z = 0,10 m e e_y = 0,060818 m.

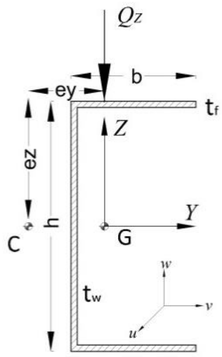
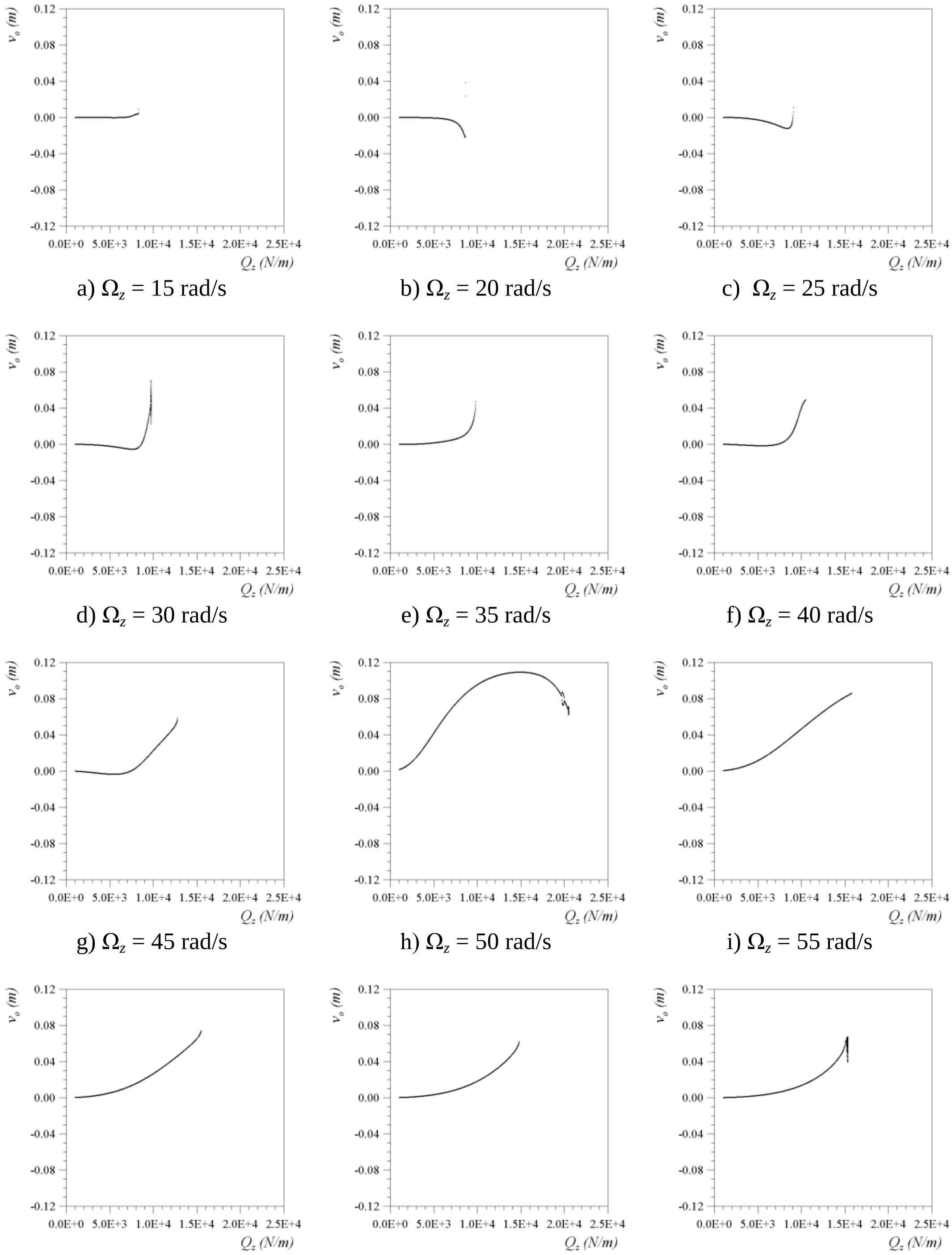


Figura 5.33: Perfil monosimétrico "C" e aplicação da forca excitadora no espaço.

Sabendo-se que a frequência natural de vibração da estrutura é ω_o = 100,8113 rad/s, na Figura 5.34 apresentam-se os diagramas de bifurcações da estrutura para diferentes valores da frequência de excitação, em função da componente v_o, magnitude da excitação Q_z variável e coeficiente de amortecimento viscoso ξ = 1,22%.

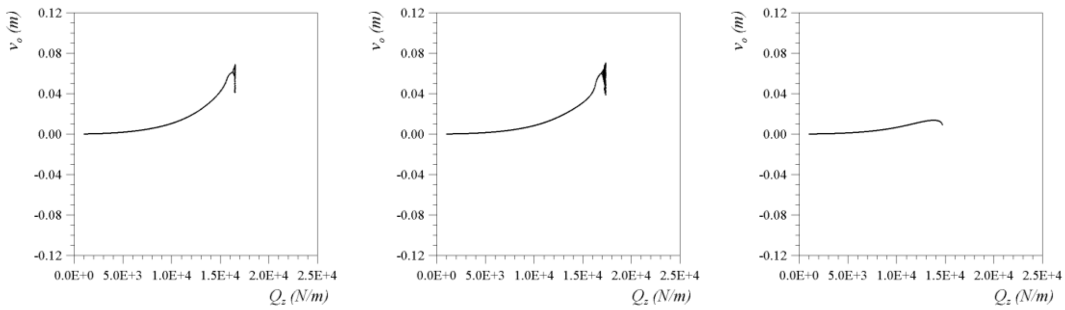


a) Ω_z = 15 rad/s b) Ω_z = 20 rad/s c) Ω_z = 25 rad/s

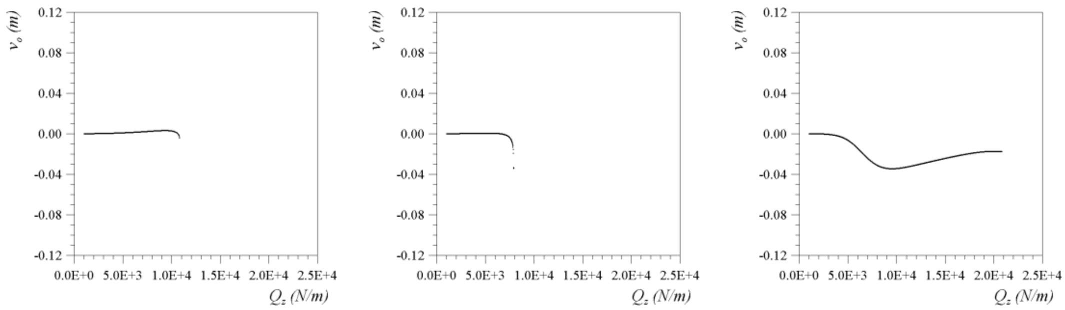
d) Ω_z = 30 rad/s e) Ω_z = 35 rad/s f) Ω_z = 40 rad/s

g) Ω_z = 45 rad/s h) Ω_z = 50 rad/s i) Ω_z = 55 rad/s

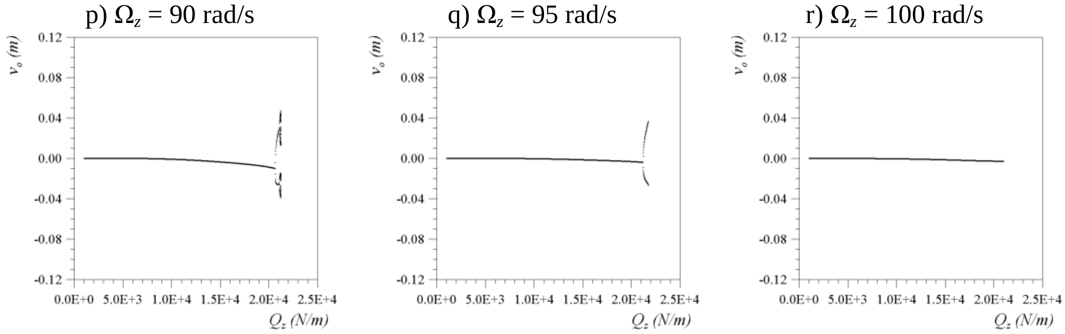
j) Ω_z = 60 rad/s k) Ω_z = 65 rad/s l) Ω_z = 70 rad/s



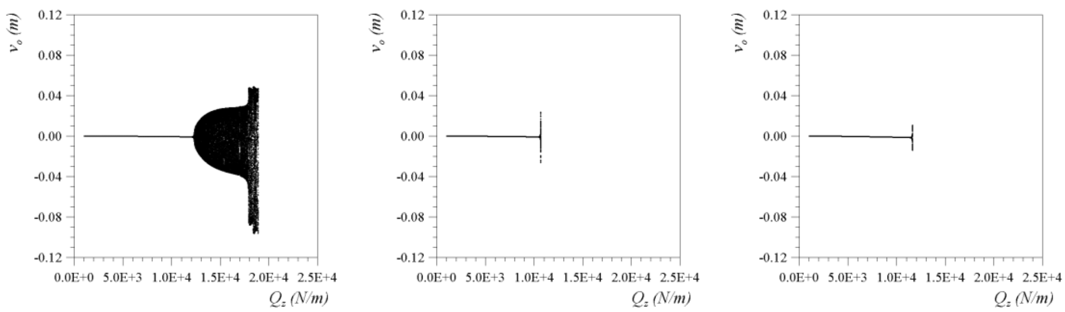
m) Ω_z = 75 rad/s n) Ω_z = 80 rad/s o) Ω_z = 85 rad/s



p) Ω_z = 90 rad/s q) Ω_z = 95 rad/s r) Ω_z = 100 rad/s



s) Ω_z = 110 rad/s t) Ω_z = 120 rad/s u) Ω_z = 130 rad/s



v) Ω_z = 140 rad/s w) Ω_z = 150 rad/s x) Ω_z = 160 rad/s

Figura 5.34: Diagrama de bifurcações, para a direção v_o com frequência variando entre 15 e 160 rad/s e ξ = 1,22%.

Algumas respostas são particularmente interessantes, como, por exemplo: na Figura 5.34(h) verifica-se um amento na amplitude dos deslocamentos para frequência da excitação aproximadamente igual à metade da frequência natural de vibração da estrutura (ressonância 1:½); na Figura 5.34(s) (após a região de ressonância 1:1) verificam-se bifurcações do tipo supercríticas (dobra de período ou de solução); e na Figura 5.34(v) verifica-se uma nuvem de pontos (soluções quase-periódicas ou caóticas).

Para todos os valores de frequência da excitação, a partir de certo nível de carregamento (magnitude da excitação) a solução apresenta divergência. Na Figura 5.35, por exemplo, apresenta-se o diagrama de bifurcações, tomando a frequência da excitação como parâmetro de controle e assumindo Q_z = 20 kN/m. Observa-se a presença de um braço de soluções estáveis apenas entre 48,95 e 51,70 rad/s e 95,60 e 139,90 rad/s, em conformidade com os diagramas apresentados na Figura 5.34.

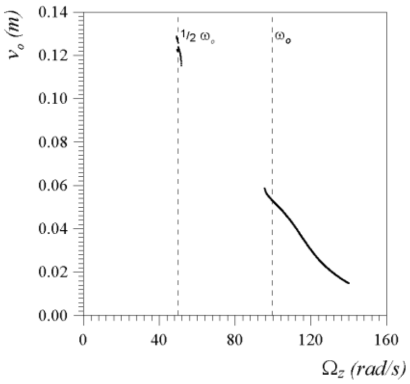


Figura 5.35: Diagrama de bifurcações para a direção v_o, com amplitude Q_z = 20.kN/m e frequências variável.

Um diagrama de bifurcações completo pode ser observado assumindo a magnitude da excitação Q_z = 7,5 kN/m, conforme se observa na Figura 5.36. Fica evidente um pico na amplitude dos deslocamentos na metade da frequência natural de vibração da estrutura, indicando uma ressonância sub-harmônica de ordem 1/2.

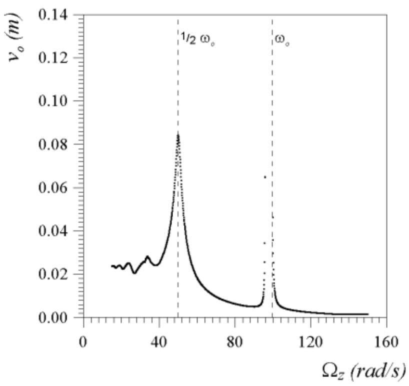


Figura 5.36: Diagrama de bifurcações, para a direção v_o, com amplitude Q_z = 7.5 kN/m e frequências variável.

Na Figura 5.37 apresenta-se a seção v_o versus w_o da bacia de atração hexa-dimensional. Nela verifica-se um conjunto de condições iniciais (na cor preta) associado com uma solução não planar ($v_0 \neq w_0 \neq \theta_0 \neq 0$; Figura 5.38). As demais condições iniciais (na cor branca) correspondem a soluções divergentes.

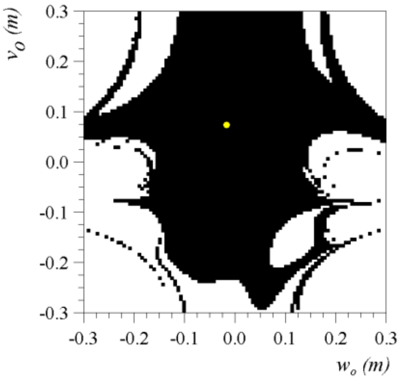
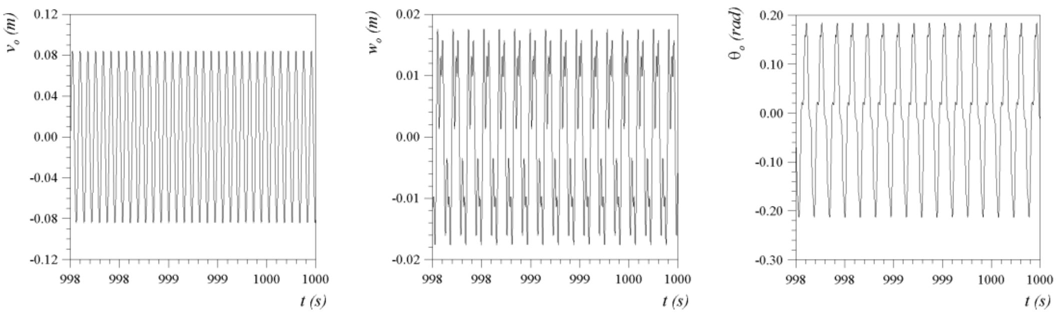


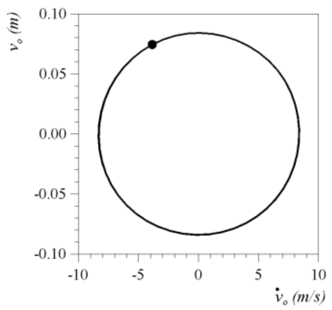
Figura 5.37: Seção v_0 versus w_0 da bacia de atração.



a) Resposta permanente na direção v_o

b) Resposta permanente na direção w_o

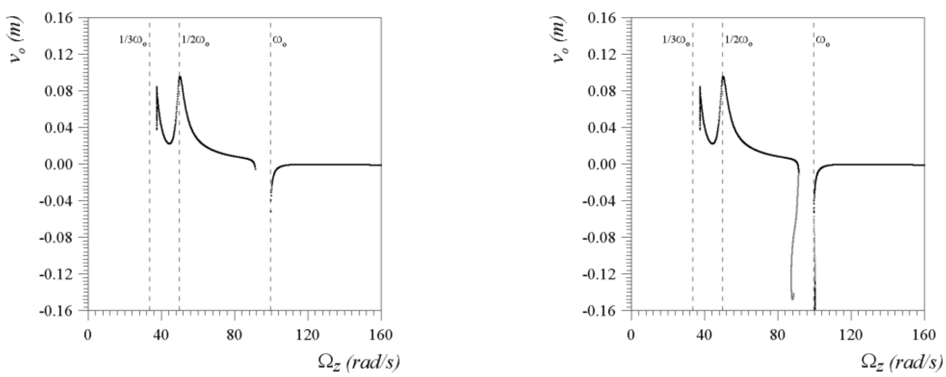
c) Resposta permanente na direção θ_o



d) Plano de fase na direção v_o

Figura 5.38: Solução estável não planar do sistema para Q_z = 7,5 kN/m e Ω_z = 50 rad/s.

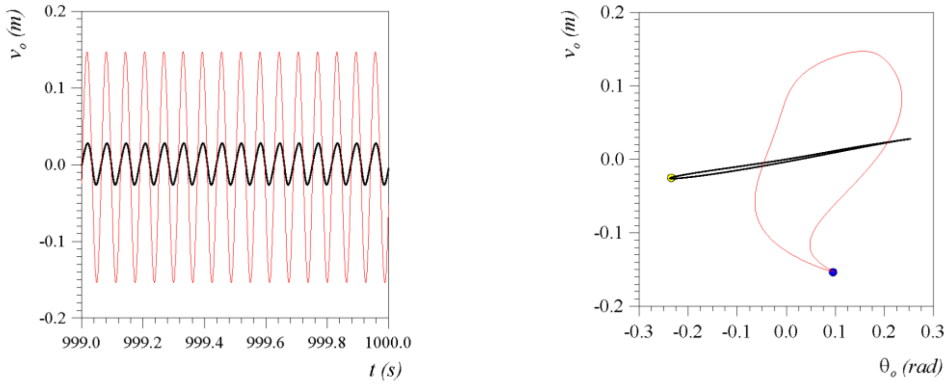
Também na Figura 5.37, não se verifica a coexistência de soluções estáveis para a mesma faixa de frequência da excitação. Na Figura 5.39 apresenta-se o diagrama de bifurcações da estrutura, assumindo $Q_z = 10$ kN/m e tomando a frequência da excitação como parâmetro de controle, sendo que, na Figura 5.39(a) o diagrama foi obtido aplicando-se força bruta e na Figura 5.39(b) aplicando-se continuação. Em ambos os diagramas, os deslocamentos não são os máximos, mas os pontos fixos do mapa de Poincaré. Na Figura 5.39(b), os ramos de soluções em preto e cinza são, respectivamente, soluções estáveis e instáveis. O algoritmo de continuação mostra que a presença de regiões sem respostas estáveis se deve à presença de bifurcações do tipo nó-sela, com a presença de pontos limites.



a) Aplicando-se Força Bruta b) Aplicando-se Continuação

Figura 5.39: Diagrama de bifurcações, para a direção v_o com Q_z = 10 kN/m.

Assim mesmo, verifica-se a coexistência de dois diferentes braços de soluções estáveis na região de ressonância, ambas com período 1T (Figura 5.40). Estas soluções são características do ramo ressonante e não ressonante da curva de ressonância não linear.



a) Resposta no tempo

b) Plano de fase

Figura 5.40: Soluções estáveis identificadas quando Ω_z = 100.318 rad/s.

Na Figura 5.41 apresenta-se uma seção da bacia de atração, na qual se observam as condições iniciais associadas com as soluções apresentadas na Figura Figura 5.40. Nota-se que pequenas perturbações na vizinhança da origem levam a oscilações de pequena amplitude (região em preto). Uma pequena faixa de condições iniciais leva a oscilações de grande amplitude (região em vermelho). Finalmente grandes perturbações levam necessariamente a uma perda de estabilidade (região em branco).

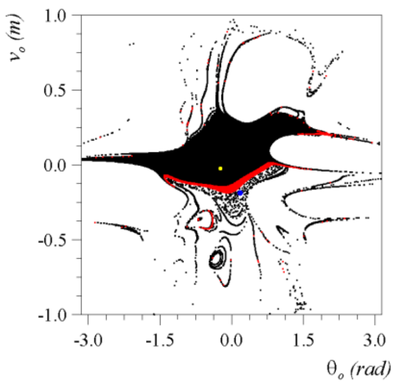
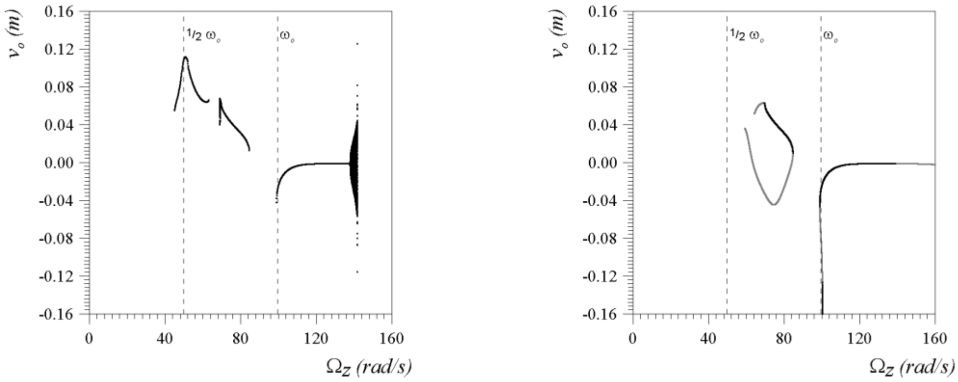


Figura 5.41: Seção da bacia de atração quando Ω_z = 100,318 rad/s.

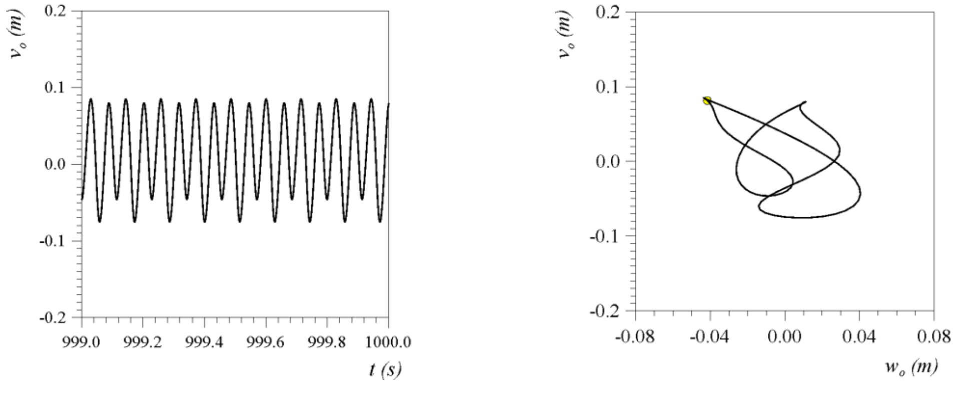
A exemplo do caso anterior (Q_z = 10 kN/m), obtêm-se os diagramas de bifurcações por força bruta e continuação para Q_z = 15 kN/m. O referido diagrama é apresentado na Figura 5.42(b).



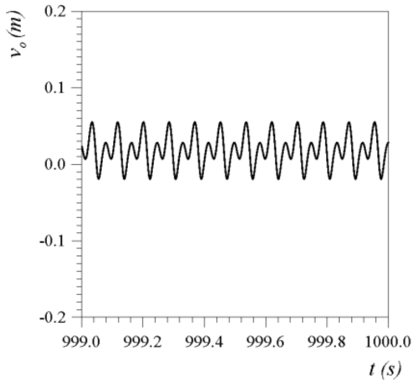
a) Aplicando-se Força Bruta b) Aplicando-se Continuação

Figura 5.42: Diagrama de bifurcações, para a direção v_o com Q_z = 15 kN/m.

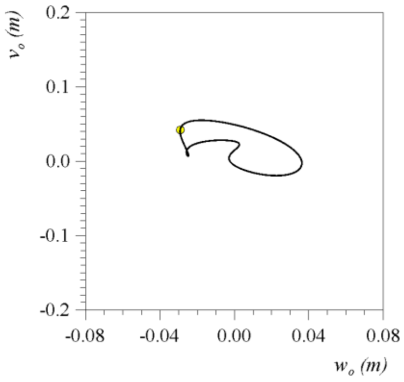
Comparando o diagrama da Figura 5.42(a) com o da Figura 5.42(b), verifica-se que resta identificar neste último o trecho de soluções estáveis na região de ressonância interna 1:½. Adicionalmente, na Figura 5.43 apresenta-se a resposta no tempo e o plano de fase das soluções estáveis para diferentes valores de frequência da excitação Ω_z. Diferente dos demais casos, na Figura 5.43(h), verifica-se uma solução do tipo quase periódica. Na Figura 5.43(e) e Figura 5.43(f) verifica-se novamente a coexistência de duas soluções estáveis para o mesmo valor da frequência da excitação Ω_z correspondentes à resposta ressonante e a resposta não ressonante da estrutura.



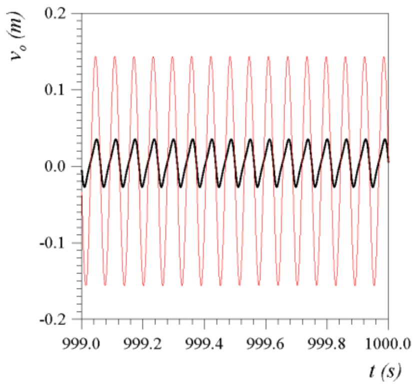
a) Resposta no tempo para Ω_z = 55 rad/s b) Plano de Fase para Ω_z = 55 rad/s



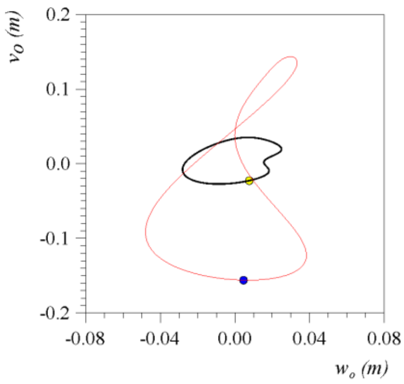
c) Resposta no tempo para Ω_z = 75 rad/s



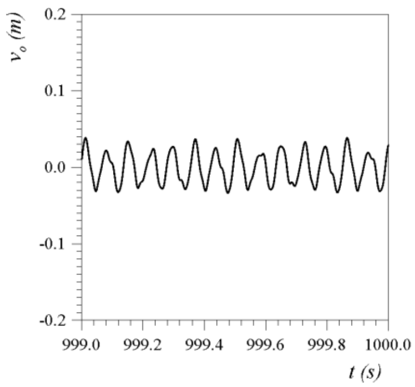
d) Plano de Fase para Ω_z = 75 rad/s



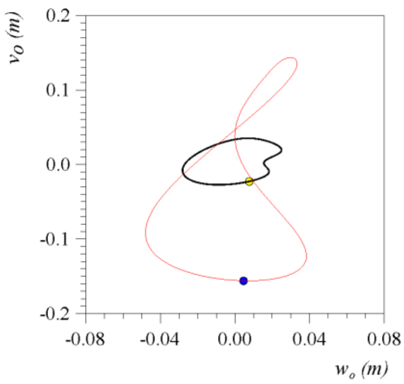
e) Resposta no tempo para Ω_z = 100,234 rad/s



f) Plano de Fase para Ω_z = 100,234 rad/s



g) Resposta no tempo para Ω_z = 140 rad/s



h) Plano de Fase para Ω_z = 140 rad/s

Figura 5.43: Soluções estáveis identificadas para Q_z = 15 kN/m.

Para identificar as condições iniciais que podem levar a um ou outro comportamento (menor ou maior amplitude de vibração), apresenta-se na Figura 5.44 uma seção da bacia de atração para Ω_z = 100,234 rad/s.

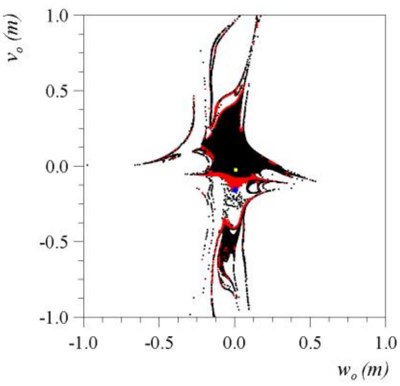
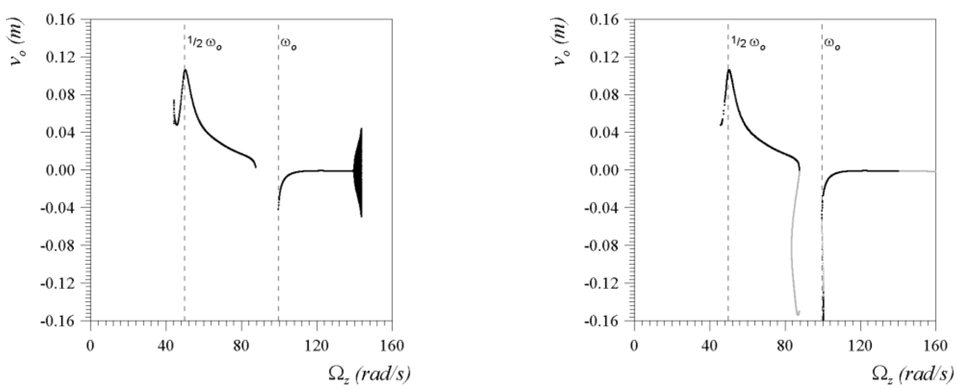


Figura 5.44: Seção da bacia de atração para Ω_z = 100,234 rad/s e Q_z = 15 kN/m.

Na Figura 5.45 apresenta-se o diagrama de bifurcações da estrutura, assumindo Q_z = 12,5 kN/m. O comportamento assemelha-se ao observado para Q_z = 10 kN/m e Q_z = 15 kN/m.



a) Aplicando-se força bruta

b) Aplicando-se continuação

Figura 5.45: Diagrama de bifurcações, para a direção v_o com Q_z = 12,5 kN/m.

Na Figura 5.46 apresenta-se uma projeção da hexa-dimensional bacia de atração na região sem identificações de soluções estáveis ou instáveis, mais especificamente, considerando Q_z = 10 kN/m e Ω_z = 95 rad/s, na qual confirma-se a ausência de soluções estáveis.

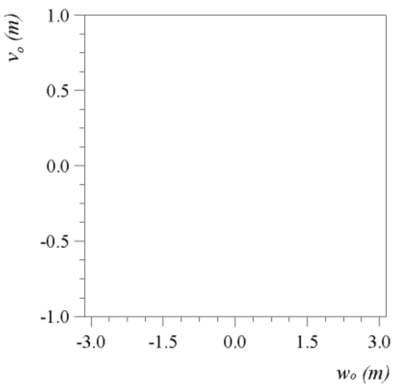
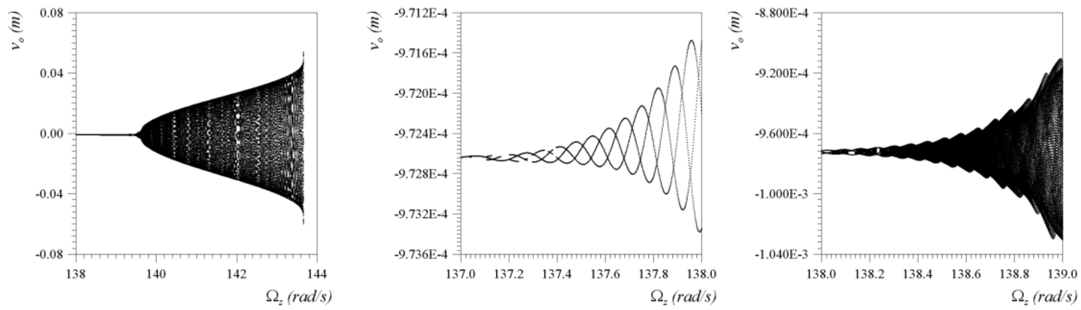
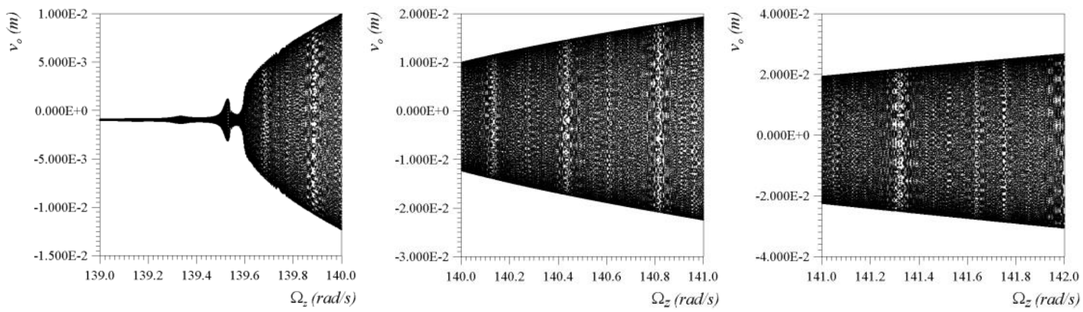


Figura 5.46: Seção da bacia de atração quando Ω_z = 95 rad/s e Q_z = 10 kN/m.

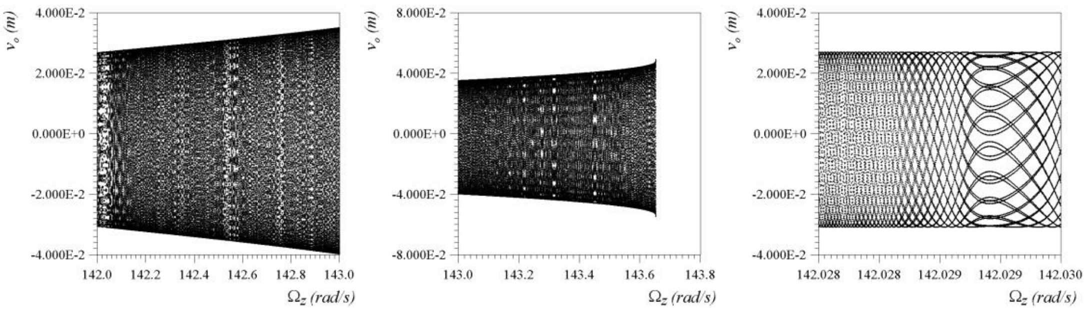
Em adição, na Figura 5.47 apresentam-se alguns detalhes do diagrama apresentado na Figura 5.45(a), na região onde uma nuvem de pontos pode ser observada, ou seja, $137 \leq \Omega_z \leq 144$.



a) Detalhe Figura 5.45(a) b) $137 \leq \Omega_z \leq 138$ rad/s c) $138 \leq \Omega_z \leq 139$ rad/s



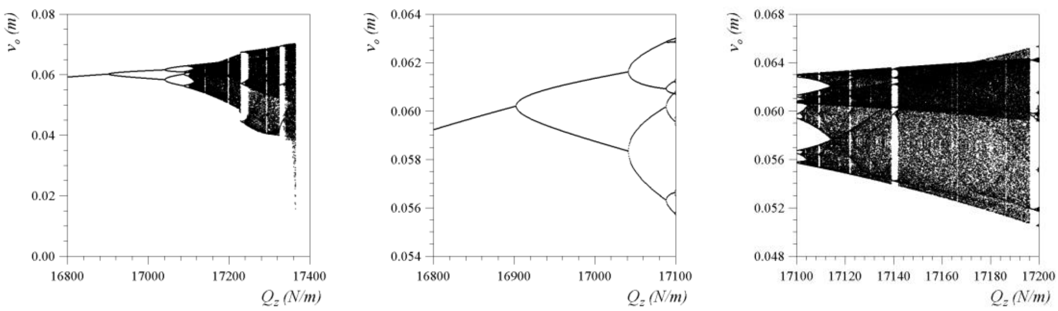
d) $139 \leq \Omega_z \leq 140$ rad/s e) $140 \leq \Omega_z \leq 141$ rad/s f) $141 \leq \Omega_z \leq 142$ rad/s



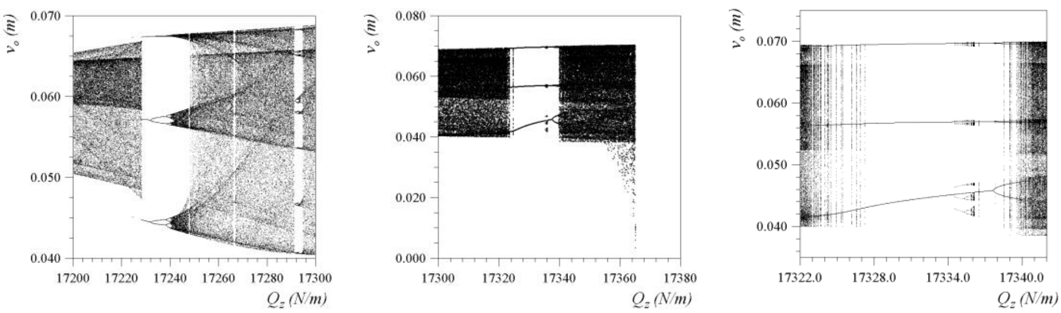
g) $142 \leq \Omega_z \leq 143$ rad/s h) $143 \leq \Omega_z \leq 144$ rad/s i) $142{,}028 \leq \Omega_z \leq 142{,}03$ rad/s

Figura 5.47: Detalhes do diagrama de bifurcações apresentado na Figura 5.41(a).

Na Figura 5.48 apresentam-se alguns detalhes do diagrama apresentado na Figura 5.34(n), na região onde uma nuvem de pontos pode ser observada, ou seja, $16{,}8 \leq Q_z \leq 17{,}4$ kN/m.



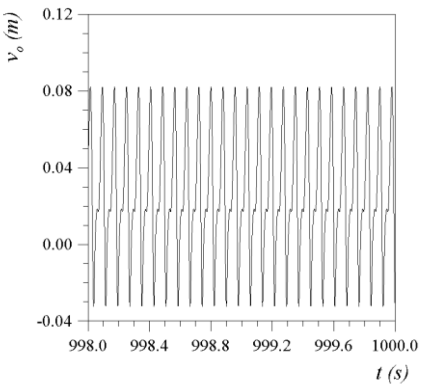
a) Detalhe Figura 5.45(a) b) $16{,}8 \leq Q_z \leq 17{,}1$ kN/m c) $17{,}1 \leq Q_z \leq 17{,}2$ kN/m



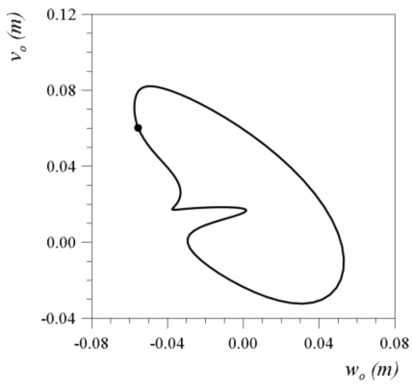
d) $17{,}2 \leq Q_z \leq 17{,}3$ kN/m e) $17{,}3 \leq Q_z \leq 17{,}38$ kN/m f) $17{,}322 \leq Q_z \leq 17{,}34$ kN/m

Figura 5.48: Detalhes do diagrama de bifurcações apresentado na Figura 5.30(n)

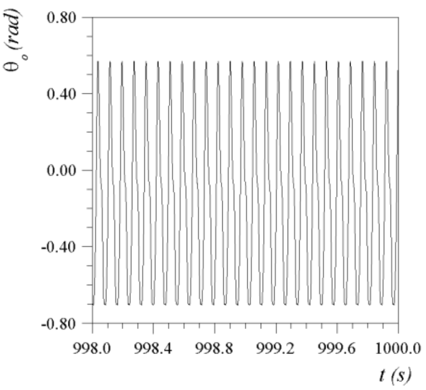
Com base nos resultados anteriormente apresentados, mostram-se desde a Figura 5.49 até a Figura 5.55, algumas projeções da resposta no tempo, plano de fase e mapa de Poincaré, considerando a frequência da excitação Ω = 80 rad/s e diferentes valores para a magnitude da excitação, a saber: Figura 5.49 para Q_z = 16,89 kN/m, na qual se verifica uma solução de período 1T; Figura 5.50 para Q_z = 17 kN/m, com uma solução de período 2T; Figura 5.51 para Q_z = 17,08 kN/m, na qual se verifica uma solução de período 4T; Figura 5.52 para Q_z = 17,225 kN/m, com uma solução caótica (ver atrator na Figura 5.52(e)); Figura 5.53 para Q_z = 17,230 kN/m, na qual se verifica uma solução de período 3T; Figura 5.54 para Q_z = 17,235 kN/m, onde se verifica uma solução de período 6T; e Figura 5.55 para Q_z = 17,244 kN/m, na qual se verifica novamente uma solução caótica.



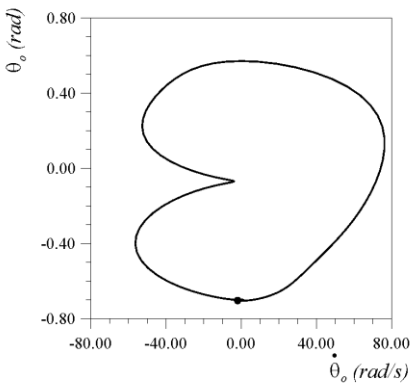
a) Resposta no tempo na direção v_o



b) Plano de fase e seção de Poincaré

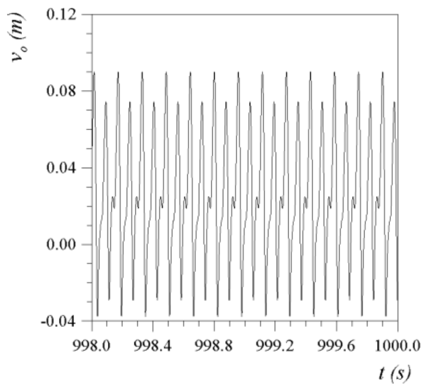


c) Resposta no tempo na direção θ_o

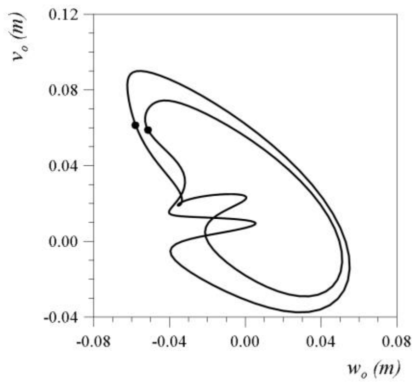


d) Plano de fase e seção de Poincaré

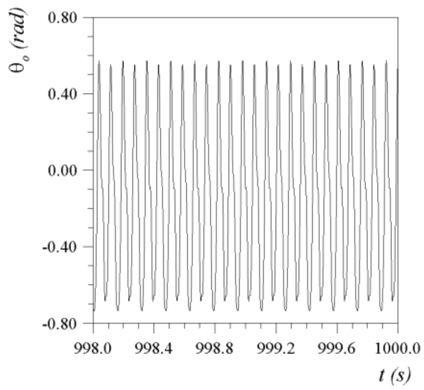
Figura 5.49: Projeções da resposta no tempo, plano de fase e mapa de Poincaré, considerando Q_z = 16,89 kN/m.



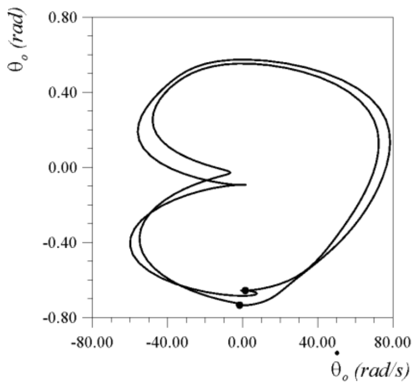
a) Resposta no tempo na direção v_o



b) Plano de fase e seção de Poincaré

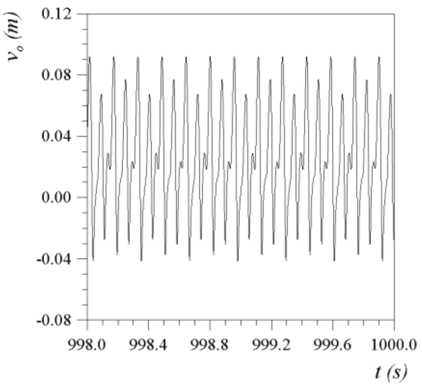


c) Resposta no tempo na direção θ_o

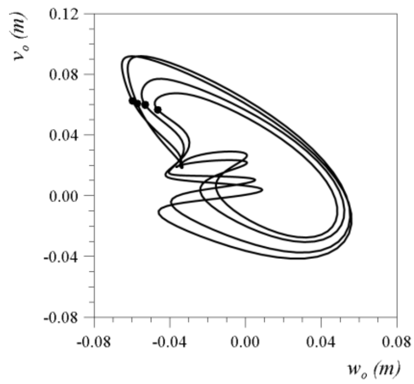


d) Plano de fase e seção de Poincaré

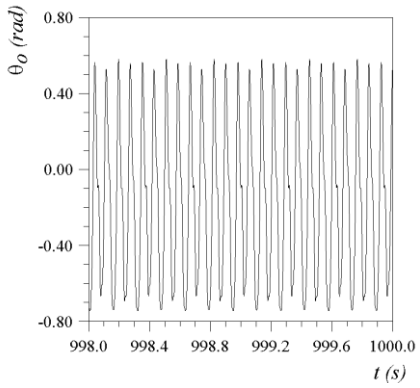
Figura 5.50: Projeções da resposta no tempo, plano de fase e mapa de Poincaré, considerando Q_z = 17 kN/m.



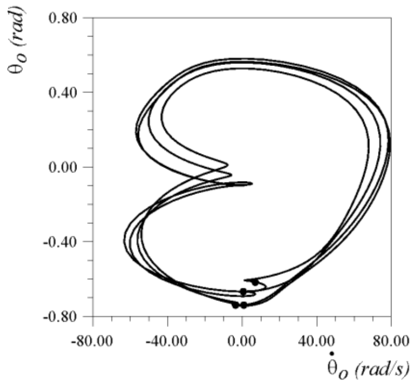
a) Resposta no tempo na direção v_o



b) Plano de fase e seção de Poincaré

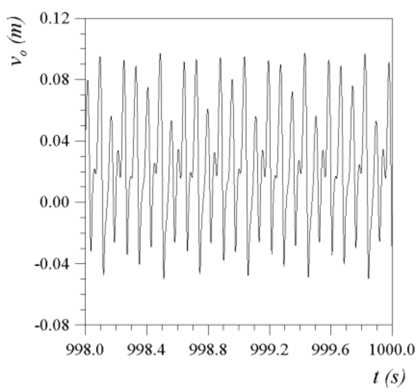


c) Resposta no tempo na direção θ_o

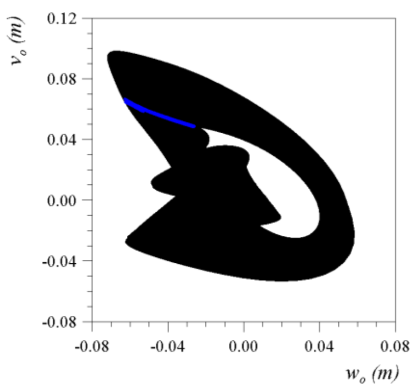


d) Plano de fase e seção de Poincaré

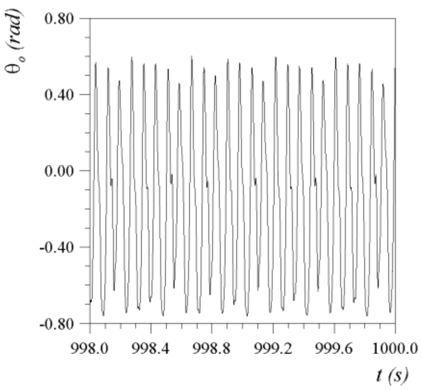
Figura 5.51: Projeções da resposta no tempo, plano de fase e mapa de Poincaré, considerando Q_z = 17,08 kN/m.



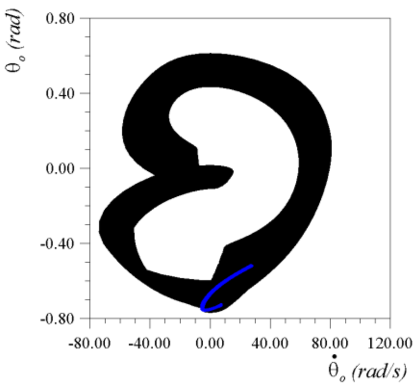
a) Resposta no tempo na direção v_o



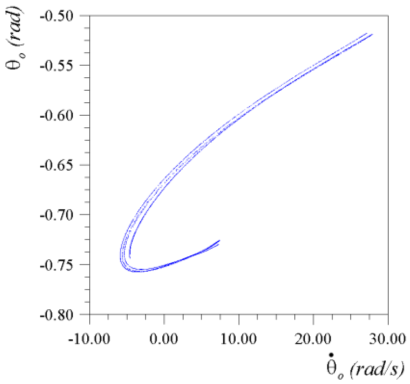
b) Plano de fase e seção de Poincaré



c) Resposta no tempo na direção θ_o

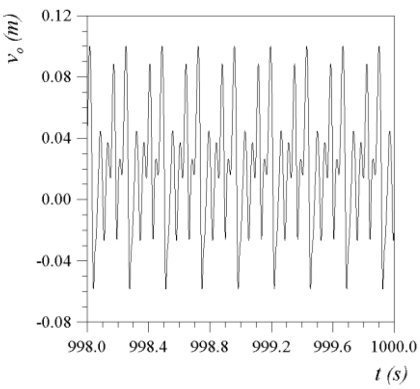


d) Plano de fase e seção de Poincaré

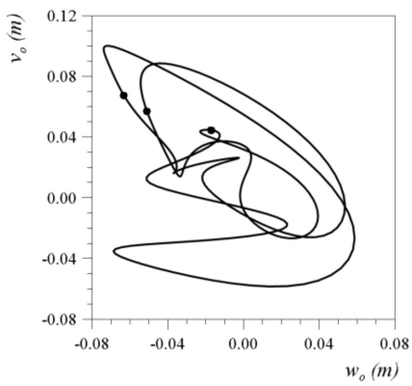


e) Detalhe da Seção de Poincaré

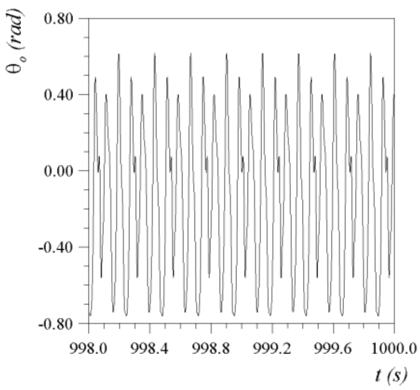
Figura 5.52: Projeções da resposta no tempo, plano de fase e mapa de Poincaré, considerando Q_z = 17,225 kN/m.



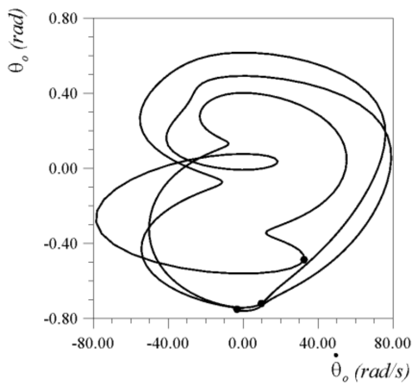
a) Resposta no tempo na direção v_o



b) Plano de fase e seção de Poincaré

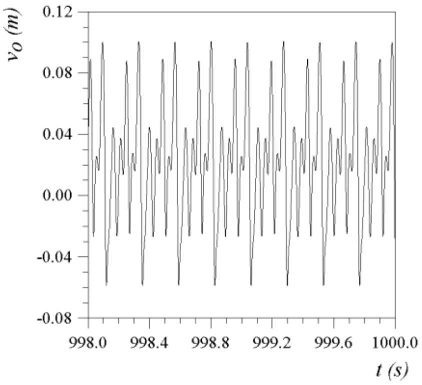


c) Resposta no tempo na direção θ_o

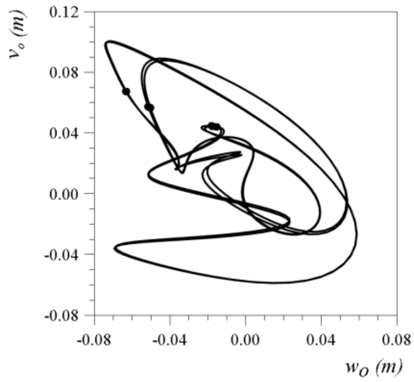


d) Plano de fase e seção de Poincaré

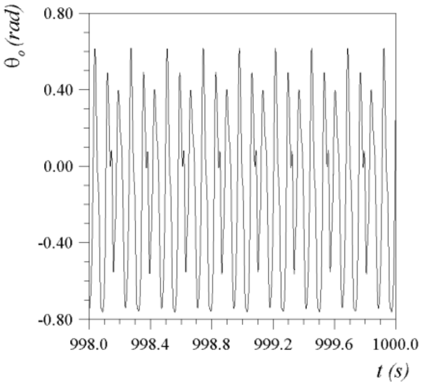
Figura 5.53: Projeções da resposta no tempo, plano de fase e mapa de Poincaré, considerando Q_z = 17,23 kN/m.



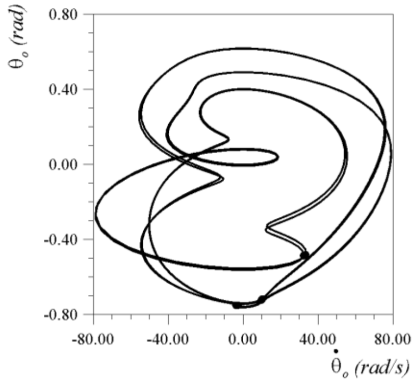
a) Resposta no tempo na direção v_o



b) Plano de fase e seção de Poincaré

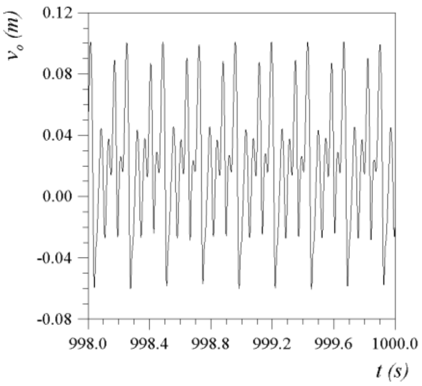


c) Resposta no tempo na direção θ_o

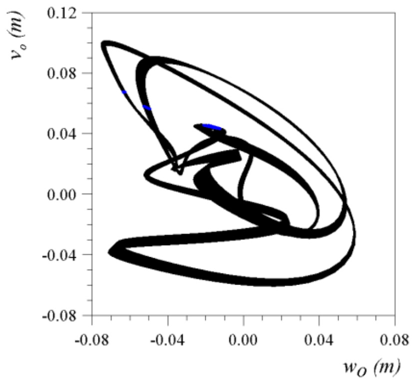


d) Plano de fase e seção de Poincaré

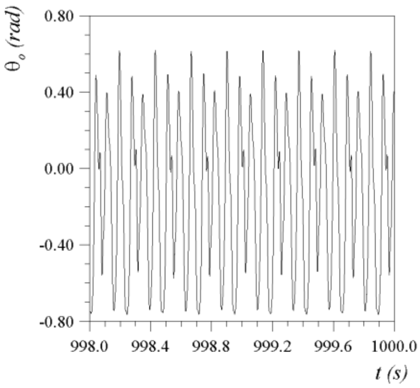
Figura 5.54: Projeções da resposta no tempo, plano de fase e mapa de Poincaré, considerando Q_z = 17,235 kN/m.



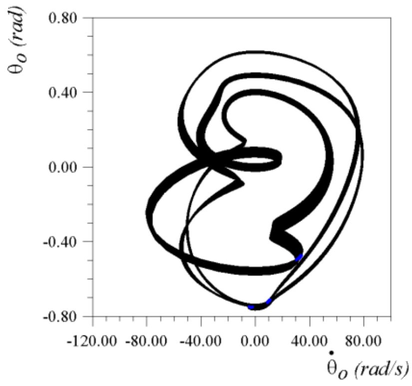
a) Resposta no tempo na direção v_o



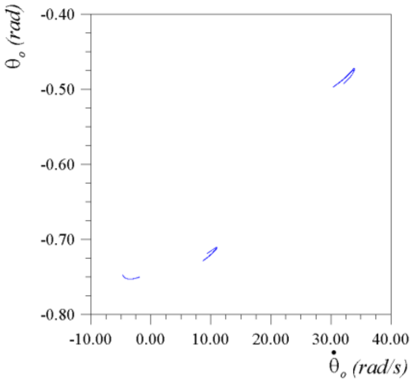
b) Plano de fase e seção de Poincaré



c) Resposta no tempo na direção θ_o



d) Plano de fase e seção de Poincaré



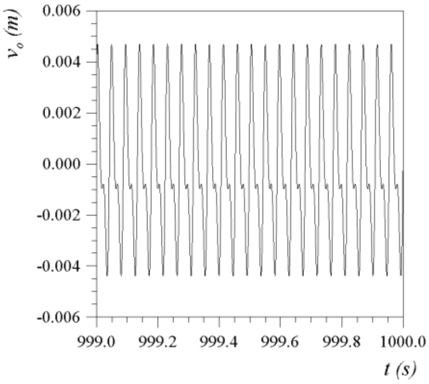
e) Detalhe da Seção de Poincaré

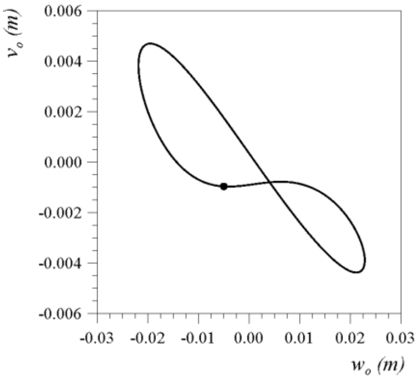
Figura 5.55: Projeções da resposta no tempo, plano de fase e mapa de Poincaré, considerando Q_z = 17,244 kN/m.

Ainda, com base nos resultados, mostram-se a seguir algumas projeções da resposta no tempo, plano de fase e seção de Poincaré para magnitude da excitação Q_z = 12,5 kN/m e três diferentes valores de frequência da excitação, sendo: Figura 5.56 para Ω_z = 137,80 rad/s, quando se verifica uma solução com período 3T, ainda que com amplitudes muito pequenas das vibrações; Figura 5.57 para Ω_z =139.80 rad/s, na qual se verifica uma solução quase periódica; e Figura 5.58 para Ω_z = 142,03 rad/s com, também, uma solução quase periódica.

Em particular, na Figura 5.58 (Ω_z = 139,80 rad /s) e Figura 5.58 (Ω_z = 142,03 rad/s), letras b e d de ambas, busca-se, na cor vermelha, ilustrar a evolução do grau de liberdade nas projeções dos planos de fase. Nelas, os atratores quase periódicos são indicados pelo uso da cor azul.

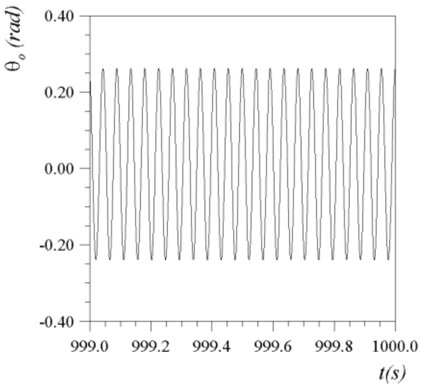
Em especial, na Figura 5.58(b) e Figura 5.58(d), verifica-se uma nuvem de pontos dentro da órbita do atrator quase periódico.

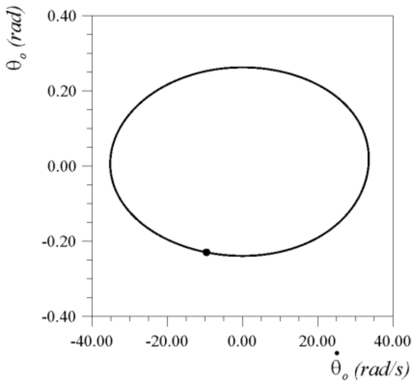




a) Resposta no tempo na direção vo

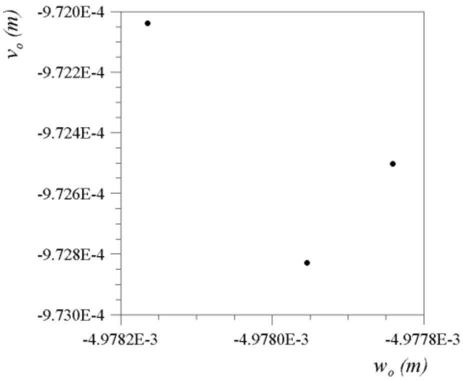
b) Plano de fase e seção de Poincaré





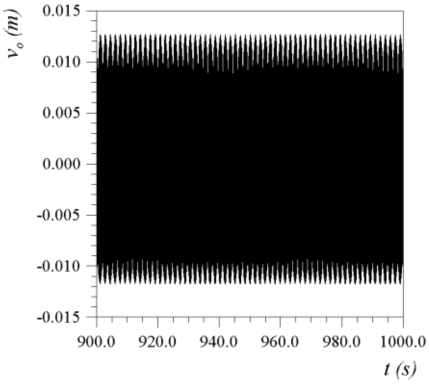
c) Resposta no tempo na direção θo

d) Plano de fase e seção de Poincaré

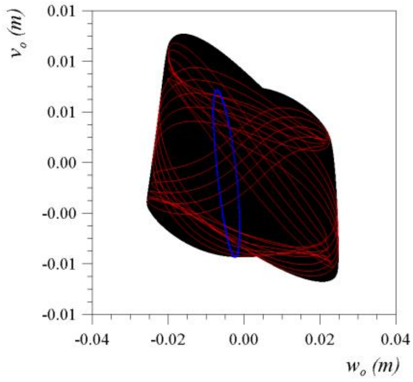


e) Detalhe da Seção de Poincaré

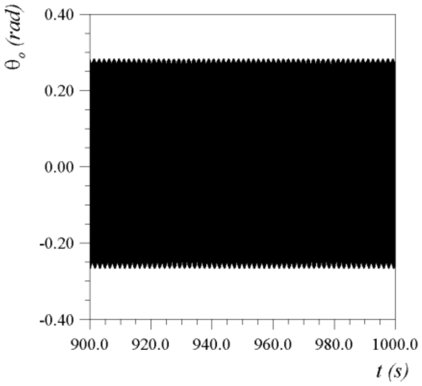
Figura 5.56: Projeções da resposta no tempo, plano de fase e mapa de Poincaré, considerando Ω_z = 137,80 rad/s.



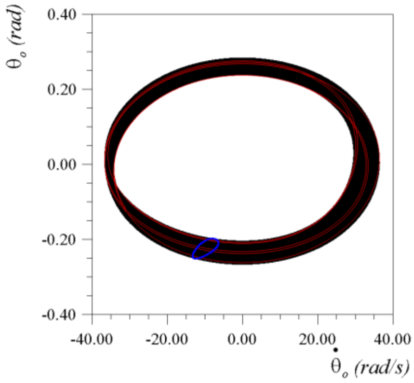
a) Resposta no tempo na direção v_o



b) Plano de fase e seção de Poincaré

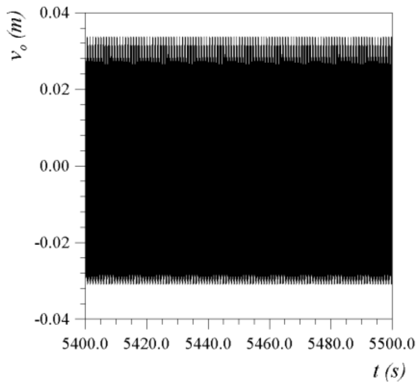


c) Resposta no tempo na direção θ_o

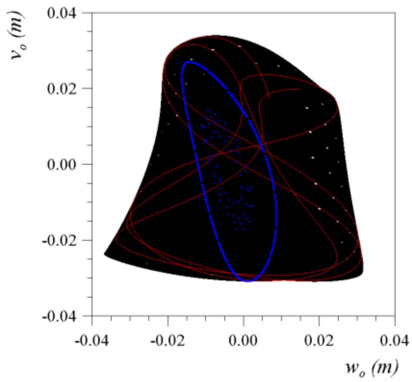


d) Plano de fase e seção de Poincaré

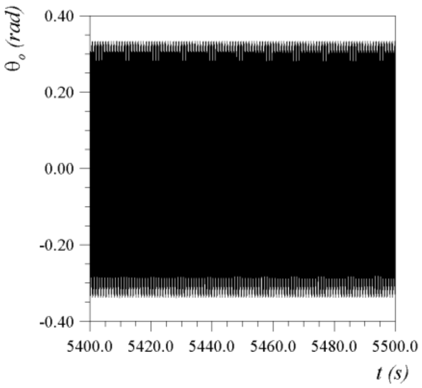
Figura 5.57: Projeções da resposta no tempo, plano de fase e mapa de Poincaré, considerando Ω_z = 139,80 rad/s.



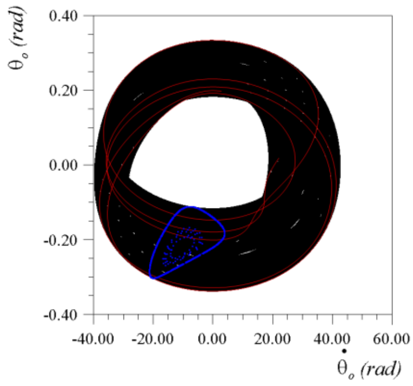
a) Resposta no tempo na direção v_o



b) Plano de fase e seção de Poincaré



c) Resposta no tempo na direção θ_o



d) Plano de fase e seção de Poincaré

Figura 5.58: Projeções da resposta no tempo, plano de fase e mapa de Poincaré, considerando Ω_z = 142,03 rad/s.