

3. FORMULAÇÃO MATEMÁTICA PARA ANÁLISE NÃO LINEAR.

Neste capítulo é apresentada a formulação utilizada para a obtenção do funcional de energia e das equações de movimento não lineares para vigas/colunas de seção transversal aberta de paredes delgadas, com base no trabalho de Mohri, Azrar e Potier-Ferry (2003).

3.1. Elementos de seção transversal aberta de paredes delgadas.

A Teoria de Vlasov aplicada aos elementos de seção transversal aberta e paredes delgadas, baseia-se nas seguintes hipóteses principais (Vlasov, 1961):

- O contorno da seção transversal permanece rígido em seu próprio plano durante a deformação.
- As deformações por cisalhamento na superfície média da barra podem ser desprezadas.

A Figura 3.1 mostra um elemento de uma barra reta de seção transversal aberta. Para a formulação do problema se adota um sistema retangular de coordenadas globais (X, Y, Z) , como mostra a Figura 3.1, onde X representa o eixo da barra na configuração inicial indeformada e Y e Z definem a seção transversal, coincidindo com os eixos principais de inércia.

Adota-se como origem do sistema de eixos o centro de gravidade da seção, denotado por (G) . Em seções com um único eixo de simetria (monosimétricas) ou assimétricas, o centro de cisalhamento, (C) , não coincide com o centro de gravidade, sendo suas coordenadas no sistema de referências aqui adotado dadas por (y_c, z_c) . Considere-se um ponto ao longo do contorno da seção com coordenadas (y, z, ω_s) , onde ω_s é a área setorial do ponto usado no modelo de Vlasov para torção não uniforme (Vlasov, 1961).

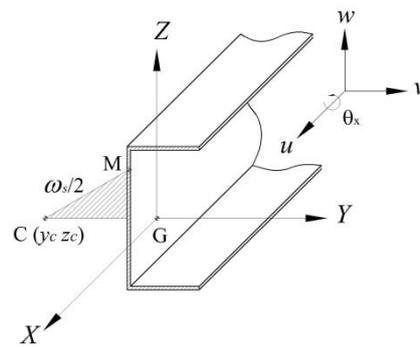


Figura 3.1: Elemento de seção transversal aberta. Sistema de referência e notação.

3.2. Campo de deslocamentos.

A partir das hipóteses iniciais, o campo de deslocamentos do ponto M pode ser escrito em função das coordenadas do centro de cisalhamento. A primeira hipótese de Vlasov implica em que as componentes do deslocamento no plano da seção correspondem a uma rotação de corpo rígido, como mostra a Figura 3.2.

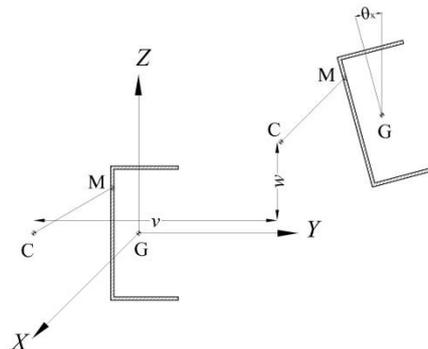


Figura 3.2 : Componentes do deslocamento do centro de cisalhamento.

Assim os deslocamentos transversais do ponto M, v_M e w_M , são dados por:

$$v_M = v - (z - z_c) \sin \theta_x - (y - y_c)(1 - \cos \theta_x) \quad (3.1)$$

$$w_M = w + (y - y_c) \sin \theta_x - (z - z_c)(1 - \cos \theta_x) \quad (3.2)$$

Nas Equações (3.1) e (3.2), v e w são as componentes do deslocamento do centro de cisalhamento e θ_x é o ângulo de torção.

O deslocamento longitudinal u_M é obtido a partir da segunda hipótese de Vlasov que considera que as deformações por cisalhamento na superfície média da seção são nulas. Introduzindo no ponto M da seção um sistema de coordenadas curvilíneo s (Figura 3.3), tem-se as componentes de deslocamento v_t e w_t do ponto M na direção tangencial e transversal à parede do elemento. Assim, a componente X do tensor de deformações de Green, devido ao cisalhamento ao longo do contorno, deve ser nula, ou seja:

$$\varepsilon_{xs} = \frac{\partial u_M}{\partial s} + \frac{\partial v_t}{\partial x} + \frac{\partial v_t}{\partial x} \frac{\partial v_t}{\partial s} + \frac{\partial w_t}{\partial x} \frac{\partial w_t}{\partial s} = 0 \quad (3.3)$$

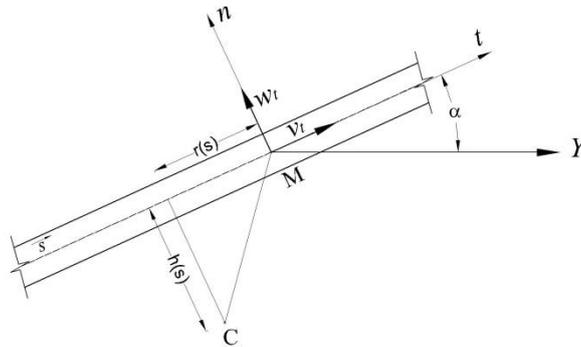


Figura 3.3: Eixo normal e tangencial ao contorno da seção.

A partir das Equações (3.1), (3.2) e (3.3) são obtidos os deslocamento v_t e w_t , a saber:

$$v_t = v \cos \alpha + w \sin \alpha + h(s) \sin \theta_x + r(s)(\cos \theta_x - 1) \quad (3.4)$$

$$w_t = -v \sin \alpha + w \cos \alpha + r(s) \sin \theta_x - h(s) (\cos \theta_x - 1) \quad (3.5)$$

onde α é o ângulo entre o eixo Y e a tangente t e $h(s)$ e $r(s)$, as coordenadas do centro de cisalhamento no sistema de coordenadas curvilíneo, como mostra a Figura 3.3

Partindo da Equação (3.3), usando as seguintes relações:

$$\frac{\partial h(s)}{\partial s} = 0 \quad (3.6)$$

$$\frac{\partial r(s)}{\partial s} = 1 \quad (3.7)$$

$$dy = ds \cos \alpha \quad (3.8)$$

$$dz = ds \sin \alpha \quad (3.9)$$

$$\omega_s = \int_s h(s) ds \quad (3.10)$$

e fazendo a integração com respeito à variável s , obtém-se o deslocamento axial do ponto M dado por:

$$u_M = u - y(v' \cos \theta_x + w' \sin \theta_x) - z(w' \cos \theta_x - v' \sin \theta_x) - \omega \theta_x' \quad (3.11)$$

onde (') representa a derivada com respeito a X .

3.3. Campo de deformações.

A teoria de vigas considera que os deslocamentos axiais u_M , Equação (3.11), são muito menores que os deslocamentos w_M , Equação (3.2), e v_M , Equação (3.1). Com base nesta hipótese o tensor de deformação de Green para grandes deslocamentos é dado por:

$$\varepsilon_{xx} = u_M' + \frac{1}{2} \left((u_M')^2 + (v_M')^2 + (w_M')^2 \right) \approx u_M' + \frac{1}{2} \left((v_M')^2 + (w_M')^2 \right) \quad (3.12)$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_M}{\partial y} + \frac{\partial v_M}{\partial x} + \frac{\partial v_M}{\partial x} \frac{\partial v_M}{\partial y} + \frac{\partial w_M}{\partial x} \frac{\partial w_M}{\partial y} \right) \quad (3.13)$$

$$\varepsilon_{xz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_M}{\partial z} + \frac{\partial w_M}{\partial x} + \frac{\partial v_M}{\partial x} \frac{\partial v_M}{\partial z} + \frac{\partial w_M}{\partial x} \frac{\partial w_M}{\partial z} \right) \quad (3.14)$$

Substituindo as Equações (3.1), (3.2) e (3.11) nas Equações (3.12) a (3.14), chega-se às seguintes expressões para as deformações.

$$\varepsilon_{xx} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \quad (3.15)$$

$$\varepsilon_1 = u' - y(v'' \cos \theta_x + w'' \sin \theta_x) - z(w'' \cos \theta_x - v'' \sin \theta_x) - \omega \theta_x'' \quad (3.16)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_2 = & \frac{1}{2} (v'^2 + w'^2 + R^2 \theta_x'^2) - y_c \theta_x' (w' \cos \theta_x - v' \sin \theta_x) \\ & + z_c \theta_x' (v' \cos \theta_x - w' \sin \theta_x) \end{aligned} \quad (3.17)$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left(z - z_c + \frac{\partial \omega}{\partial y} \right) \theta_x' \quad (3.18)$$

$$\varepsilon_{xz} = \frac{1}{2} \left(y - y_c + \frac{\partial \omega}{\partial z} \right) \theta_x' \quad (3.19)$$

onde R é a distância entre o centro de cisalhamento e o ponto M , dada pela seguinte relação:

$$R^2 = (y - y_c)^2 + (z - z_c)^2 \quad (3.20)$$

3.4. Formulação variacional.

Tendo em conta as hipóteses anteriores, as equações não lineares de movimento podem ser obtidas a partir do princípio variacional de Hamilton, considerando a função de Lagrange $L_a = U - T + W$, onde U é a energia interna de deformação, T a energia cinética e W o trabalho das cargas externas. A seguir mostra-se a variação das parcelas de energia para vigas de paredes delgadas e seção aberta.

3.4.1. Variação da energia interna de deformação.

A variação da energia interna de deformação de um corpo elasticamente deformado, U , é dada por:

$$\delta U = \iint_{L A} (\sigma_{xx} \delta \varepsilon_{xx} + 2\sigma_{xy} \delta \varepsilon_{xy} + 2\sigma_{xz} \delta \varepsilon_{xz}) dA dx \quad (3.21)$$

onde σ_{ij} é o tensor de tensões de Piola–Kirchhoff.

Utilizando as Equações (3.16) a (3.19), obtém-se a variação das componentes do tensor de deformação:

$$\begin{aligned}
\delta\varepsilon_{xx} = & \delta u' - y(\delta v'' \cos \theta_x + \delta w'' \sin \theta_x) - y(w' \cos \theta_x + v' \sin \theta_x) \delta \theta_x \\
& - z(\delta w'' \cos \theta_x + \delta v'' \sin \theta_x) + z(w' \sin \theta_x + v' \cos \theta_x) \delta \theta_x - \omega \delta \theta_x'' \\
& + \delta v'(v' + y_c \theta_x' \sin \theta_x + z_c \theta_x' \cos \theta_x) + \delta w'(w' + y_c \theta_x' \cos \theta_x + z_c \theta_x' \sin \theta_x) \\
& + \delta \theta_x'(R^2 \theta_x' + y_c(-w' \cos \theta_x + v' \sin \theta_x) + z_c(v' \cos \theta_x + w' \sin \theta_x)) \\
& + \delta \theta_x(y_c(w' \theta_x' \sin \theta_x + v' \theta_x' \cos \theta_x) + z_c(w' \theta_x' \cos \theta_x + v' \theta_x' \sin \theta_x))
\end{aligned} \tag{3.22}$$

$$\delta\varepsilon_{xy} = -\frac{1}{2} \left(z - z_c + \frac{\partial \omega_s}{\partial y} \right) \partial \theta_x' \tag{3.23}$$

$$\delta\varepsilon_{xz} = \frac{1}{2} \left(y - y_c - \frac{\partial \omega_s}{\partial z} \right) \partial \theta_x' \tag{3.24}$$

Finalmente, a variação da energia interna de deformação pode ser expressa em função das resultantes das tensões que agem em um elemento da seção transversal da viga em seu estado deformado, as quais são definidas por:

$$N = \int_A \sigma_{xx} dA \tag{3.25}$$

$$M_y = \int_A \sigma_{xx} z dA \tag{3.26}$$

$$M_z = \int_A \sigma_{xx} y dA \tag{3.27}$$

$$B_\omega = -\int_A \sigma_{xx} \omega dA \tag{3.28}$$

$$M_{sv} = \int_A \left(\sigma_{xz} \left(y - y_c - \frac{\partial \omega}{\partial z} \right) - \sigma_{xy} \left(z - z_c + \frac{\partial \omega}{\partial y} \right) \right) dA \tag{3.29}$$

$$M_R = \int_A \sigma_{xx} R^2 dA \tag{3.30}$$

onde N é a força axial, M_y e M_z são os momentos fletores, B_ω é o bi momento, M_{sv} momento de torção de Saint Venant e M_R é uma resultante de ordem superior. Estes esforços generalizados são ilustrados na Figura 3.4.

Substituindo as equações (3.22) a (3.30) na equação (3.21), chega-se à seguinte equação:

$$\begin{aligned}
\delta U = & \int_L N \left(\delta u' + \delta v' (v' + y_c \theta'_x \sin \theta_x + z_c \theta'_x \cos \theta_x) \right. \\
& \left. + \delta w' (w' - y_c \theta'_x \cos \theta_x + z_c \theta'_x \sin \theta_x) \right) dx \\
& + \int_L N \partial \theta'_x \left(y_c (w' \theta'_x \sin \theta_x + v' \theta'_x \cos \theta_x) + z_c (w' \theta'_x \cos \theta_x - v' \theta'_x \sin \theta_x) \right) dx \\
& + \int_L N \partial \theta'_x \left(y_c (-w' \cos \theta_x + v' \sin \theta_x) + z_c (v' \cos \theta_x + w' \sin \theta_x) \right) dx - \int_L M_y (\partial w'' \cos \theta_x \\
& - \partial v'' \sin \theta_x) dx + \int_L M_y (w'' \sin \theta_x + v'' \cos \theta_x) \partial \theta'_x dx + \int_L M_z (\partial v'' \cos \theta_x \\
& + \partial w'' \sin \theta_x) dx + \int_L M_z (w'' \cos \theta_x - v'' \sin \theta_x) \partial \theta'_x dx + \int_L B_\omega \partial \theta'_x dx + \int_L M_R \theta'_x \partial \theta'_x dx \\
& + \int_L M_{sv} \partial \theta'_x dx
\end{aligned} \tag{3.31}$$

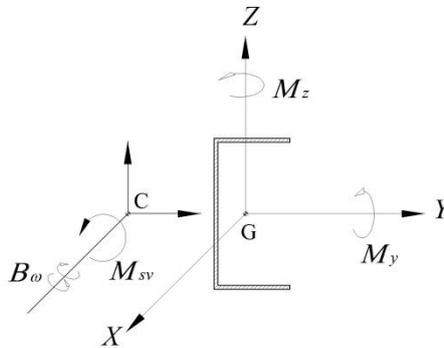


Figura 3.4: Forças resultantes na seção.

Fazendo a integração por partes da Equação (3.31), e coletando os termos em função dos deslocamentos virtuais δu , δv , δw e $\delta \theta_x$ chega-se às seguintes expressões:

$$\int_L (-N' \delta u) dx \tag{3.32}$$

$$\int_L \left(\left((M_z \cos \theta_x)'' + (M_y \sin \theta_x)'' - N (v' + (y_c \sin \theta_x + z_c \cos \theta_x) \theta'_x) \right) \delta v \right) dx \tag{3.33}$$

$$\int_L \left(\left(-(M_y \cos \theta_x)'' + (M_z \sin \theta_x)'' - N (w' - (y_c \cos \theta_x - z_c \sin \theta_x) \theta'_x) \right) \delta w \right) dx \tag{3.34}$$

$$\int_L \left((B_\omega'' - (M_{sv})' - (M_R \theta_x)') + M_y (w'' \sin \theta_x + v'' \cos \theta_x) + M_z (w'' \cos \theta_x - v'' \sin \theta_x) + N (y_c \theta_x' (w' \sin \theta_x + v' \cos \theta_x) + z_c \theta_x' (w' \cos \theta_x - v' \sin \theta_x)) - N y_c (-w' \cos \theta_x + v' \sin \theta_x) - N z_c (v' \cos \theta_x + w' \sin \theta_x) \right) \partial \theta_x dx \quad (3.35)$$

3.4.2.

Variação do trabalho das cargas externas.

As cargas aplicadas ao elemento podem ser reduzidas às componentes q_x , q_y , q_z e a um momento torsor adicional m_x , resultante da excentricidade das cargas com relação ao centro de cisalhamento, como ilustra a Figura 3.5.

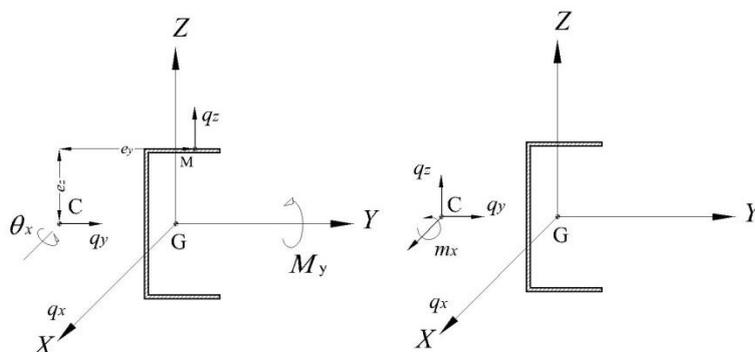


Figura 3.5: Componentes de carga aplicada à barra.

A variação do trabalho das cargas externas é dada por:

$$\delta W = \int_L (q_x \partial u + q_y \partial v + q_z \partial w + m_x \partial \theta_x) dx \quad (3.36)$$

onde m_x está em função da carga q_z e das excentricidades com relação ao centro de cisalhamento e_y e e_z .

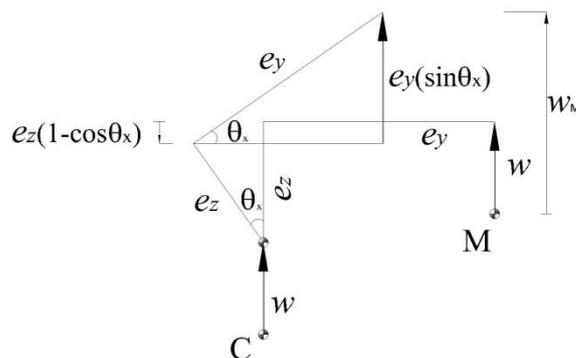


Figura 3.6: Deslocamento vertical do ponto M gerado por Q_z .

Da Figura 3.6 tem-se que:

$$w_M = w + e_y \sin \theta_x - e_z (1 - \cos \theta_x) \quad (3.37)$$

onde w_M , como enunciado anteriormente, é o deslocamento vertical do ponto M .

Fazendo a variação da Equação (3.37) encontra-se que:

$$\delta w_M = \delta w + (e_y \cos \theta_x - e_z \sin \theta_x) \delta \theta_x \quad (3.38)$$

Tem-se assim que a Equação (3.36) toma a seguinte forma:

$$\delta W = \int_L (q_x \delta u + q_y \delta v + q_z \delta w + q_z (e_y \cos \theta_x - e_z \sin \theta_x) \delta \theta_x) dx \quad (3.39)$$

3.4.3. Variação da energia cinética.

Utilizando as Equações (3.1), (3.2) e (3.11), a energia cinética de um elemento de paredes delgadas, com massa específica constante ρ , é dada por:

$$T = \frac{1}{2} \int_L \int_A \rho \left(\left(\frac{\partial u_M}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_M}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial w_M}{\partial t} \right)^2 \right) dA dx \quad (3.40)$$

Fazendo-se a integração da área da Equação (3.40) e desprezando os termos de inércia a rotação, chega-se à seguinte equação:

$$T = \frac{1}{2} \int_L m \left(\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 + I_o \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial t} \right)^2 + z_c \frac{\partial v}{\partial t} \frac{\partial \theta_x}{\partial t} - y_c \frac{\partial w}{\partial t} \frac{\partial \theta_x}{\partial t} \right) dx \quad (3.41)$$

onde m é a massa do elemento por unidade de comprimento e I_o é o momento polar de inércia.

A variação da energia cinética é dada por:

$$\begin{aligned} \delta T = \int_L m \left(\frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial}{\partial t} \delta u + \left(\frac{\partial v}{\partial t} + z_c \frac{\partial \theta_x}{\partial t} \right) \frac{\partial}{\partial t} \delta v + \left(\frac{\partial w}{\partial t} - y_c \frac{\partial \theta_x}{\partial t} \right) \frac{\partial}{\partial t} \delta w \right. \\ \left. + \left(I_o \frac{\partial \theta_x}{\partial t} + z_c \frac{\partial v}{\partial t} - y_c \frac{\partial w}{\partial t} \right) \frac{\partial}{\partial t} \delta \theta_x \right) dx \end{aligned} \quad (3.42)$$

Fazendo a integração por partes da Equação (3.42) e coletando-se os termos em função dos deslocamentos virtuais δu , δv , δw e $\delta \theta_x$, chega-se às seguintes expressões:

$$\int_L -m \left(\frac{d^2 u}{dt^2} \right) \delta u \, dx \quad (3.43)$$

$$\int_L -m \left(\frac{d^2 v}{dt^2} + z_c \frac{d^2 \theta_x}{dt^2} \right) \delta v \, dx \quad (3.44)$$

$$\int_L -m \left(\frac{d^2 w}{dt^2} - y_c \frac{d^2 \theta_x}{dt^2} \right) \delta w \, dx \quad (3.45)$$

$$\int_L -m \left(I_o \frac{d^2 \theta_x}{dt^2} + z_c \frac{d^2 v}{dt^2} - y_c \frac{d^2 w}{dt^2} \right) \delta \theta_x \, dx \quad (3.46)$$

3.5. Relações constitutivas.

Todas as equações anteriores foram obtidas sem referência ao comportamento do material do elemento e à sua relação tensão–deformação. Entretanto, neste trabalho, considera-se um material com comportamento elástico

linear com módulo de Young E , e módulo de elasticidade transversal G , com $G=E/2(1+\nu)$, sendo ν o coeficiente de Poisson do material. Assim sendo, as resultantes das tensões são dadas por:

$$N = EA \left(u' + \frac{1}{2} (v'^2 + w'^2 + I_o \theta_x'^2) + z_c v' \theta_x' - y_c w' \theta_x' \right) \quad (3.47)$$

$$M_y = -EI_y (k_y \cos \theta_x - k_z \sin \theta_x - \beta_z \sin \theta_x'^2) \quad (3.48)$$

$$M_z = EI_z (k_z \cos \theta_x + k_y \sin \theta_x - \beta_y \sin \theta_x'^2) \quad (3.49)$$

$$B_\omega = EI_\omega (\theta_x'' - \beta_\omega \theta_x'^2) \quad (3.50)$$

$$M_{sv} = GJ \theta_x' \quad (3.51)$$

$$M_R = NI_o - 2EI_z \beta_y (v'' \cos \theta_x + w'' \sin \theta_x) - 2EI_y \beta_z (w'' \cos \theta_x + v'' \sin \theta_x) - 2EI_\omega \beta_\omega \theta_x'' + \frac{1}{2} E (I_R - AI_o^2) \theta_x'^2 \quad (3.52)$$

onde k_y e k_z são as curvaturas do elemento, I_y e I_z são os momentos de inércia com relação aos eixos Y e Z , respectivamente, J é constante de torção de Saint Venant, I_ω é a constante de empenamento e β_y , β_z e β_ω são os coeficientes de Wagner (Mohri, Brouki e Roth, 2003).

Estes parâmetros geométricos são obtidos através das seguintes integrais:

$$I_y = \int_A z^2 dA \quad (3.53)$$

$$I_z = \int_A y^2 dA \quad (3.54)$$

$$I_\omega = \int_A \omega^2 dA \quad (3.55)$$

$$\beta_y = \frac{1}{2I_z} \int_A y (y^2 + z^2) dA - y_c \quad (3.56)$$

$$\beta_z = \frac{1}{2I_y} \int_A z (y^2 + z^2) dA - z_c \quad (3.57)$$

$$\beta_\omega = \frac{1}{2I_\omega} \int_A \omega (y^2 + z^2) dA \quad (3.58)$$

onde, novamente, I_o é o momento polar de inércia e I_R é o quarto momento de inércia, ambos calculados com respeito ao centro de cisalhamento e são dados por:

$$I_o = \frac{I_y + I_z}{A} + y_c^2 + z_c^2 \quad (3.59)$$

$$I_R = \int_A \left((y - y_c)^2 + (z - z_c)^2 \right)^2 dA \quad (3.60)$$

Partindo da teoria clássica da flexão, as seguintes aproximações de segunda ordem são adotadas para as curvaturas:

$$k_y = \frac{w''}{\sqrt{1 - w'^2}} \approx w'' \left(1 + \frac{w'^2}{2} \right) \quad (3.61)$$

$$k_z = \frac{v''}{\sqrt{1 - v'^2}} \approx v'' \left(1 + \frac{v'^2}{2} \right) \quad (3.62)$$

Lembrando que, para pequenos deslocamentos, que não é o caso deste trabalho, adotam-se usualmente as conhecidas aproximações lineares $k_y = w''$ e $k_z = v''$. Finalmente, as funções $\cos \theta_x$ e $\sin \theta_x$ são aproximadas pelos dois primeiros termos de sua expansão em séries de Taylor, ou seja:

$$\cos \theta_x = 1 - \frac{\theta_x^2}{2} \quad (3.63)$$

$$\sin \theta_x = \theta_x - \frac{\theta_x^3}{6} \quad (3.64)$$

3.6. Equações de movimento.

Após determinar os funcionais de energia nas seções anteriores, para a obtenção das equações de movimento, tem-se que:

$$\delta(U - T + W) = 0 \quad (3.65)$$

A partir da Equação (3.65) e considerando os termos não lineares até a terceira ordem, chegamos às seguintes equações de movimento:

$$-\frac{dN}{dx} = q_x \quad (3.66)$$

$$m \left(\frac{d^2 v}{dt^2} + z_c \frac{d^2 \theta_x}{dt^2} \right) + EI_z \left(v^{(4)} + 3v'v''v''' + v''^3 + \frac{v^{(4)}v'^2}{2} \right) - N \left(v'' + z_c \theta_x'' + y_c (\theta_x' \theta_x'' + \theta_x'^2) \right) + (EI_z - EI_y) \left(w^{(4)} \theta_x + 2w''' \theta_x' + w'' \theta_x'' - v^{(4)} \theta_x^2 - 4v''' \theta_x \theta_x' - 2v'' \theta_x \theta_x'' - 2v' \theta_x'^2 \right) = q_y \quad (3.67)$$

$$m \left(\frac{d^2 w}{dt^2} - y_c \frac{d^2 \theta_x}{dt^2} \right) + EI_y \left(w^{(4)} + 3w'w''w''' + w''^3 + \frac{w^{(4)}w'^2}{2} \right) - N \left(w'' - y_c \theta_x'' + z_c (\theta_x' \theta_x'' + \theta_x'^2) \right) + (EI_z - EI_y) \quad (3.68)$$

$$\left(v^{(4)} \theta_x + 2v''' \theta_x' + v'' \theta_x'' + w^{(4)} \theta_x^2 + 4w''' \theta_x \theta_x' + 2w'' \theta_x \theta_x'' + 2w' \theta_x'^2 \right) = q_z$$

$$m \left(I_o \frac{d^2 \theta_x}{dt^2} + z_c \frac{d^2 v}{dt^2} - y_c \frac{d^2 w}{dt^2} \right) + EI_o \theta_x^{(4)} - GJ \theta_x'' - \frac{3}{2} EI_t \theta_x'^2 \theta_x'' - N (I_o \theta_x'' - y_c (w'' - v'' \theta_x) + z_c (v'' - w'' \theta_x)) + (EI_z - EI_y) (v'' w'' - v''^2 \theta_x + w''^2 \theta_x) = m_x \quad (3.69)$$

onde $(.)^{(4)}$ é a derivada de quarta ordem em função de X e o termo I_t é um parâmetro geométrico que denota uma constante de torção de ordem mais elevada, dada pela seguinte equação:

$$I_t = I_R - AI_o^2 \quad (3.70)$$