



Renzo Cayo Mancilla

**Vibrações Não Lineares e Estabilidade de
Barras Esbeltas de Seção Aberta**

Dissertação de Mestrado

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil do Departamento de Engenharia Civil da PUC-Rio.

Orientador: Prof. Paulo Batista Gonçalves
Co-orientador: Prof. Eulher Chaves Carvalho

Rio de Janeiro
Junho de 2014



Renzo Cayo Mancilla

Vibrações Não Lineares e Estabilidade de Barras Esbeltas de Seção Aberta

Dissertação de Mestrado

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil do Departamento de Engenharia Civil do Centro Técnico Científico da PUC-Rio. Aprovada pela Comissão Examinadora abaixo assinada.

Prof. Paulo Batista Gonçalves

Orientador
Departamento em Engenharia Civil – PUC-Rio

Prof. Euler Chaves Carvalho

Co-orientador
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás

Prof^a. Deane Mesquita Roehl

Departamento em Engenharia Civil – PUC-Rio

Prof. Raul Rosas e Silva

Departamento em Engenharia Civil – PUC-Rio

Prof. Ney Roitman

Universidade Federal do Rio de Janeiro

Prof. José Eugenio Leal

Coordenador Setorial do Centro
Técnico Científico – PUC-Rio

Rio de Janeiro, 27 Junho de 2014

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, do autor e do orientador.

Renzo Cayo Mancilla

Graduou-se em Engenharia Civil na Universidade Nacional San Antonio Abad del Cusco, UNSAAC (Cusco - Peru), em Janeiro de 2007. Ingressou em março de 2012 no curso de Mestrado em Engenharia Civil da Pontifícia Universidade Católica de Rio de Janeiro (PUC-Rio), na área de Estruturas. Já desenvolveu trabalhos na área de projetos de estruturas e, mais recentemente, na área de dinâmica das estruturas, abrangendo nesta última os temas de estabilidade e dinâmica de colunas e vigas com seções não simétricas.

Ficha Catalográfica

Renzo Cayo Mancilla.

Vibrações Não Lineares e Estabilidade de Barras Esbeltas de Seção Aberta/ Renzo Cayo Mancilla; orientadores: Paulo Batista Gonçalves, Eulher Chaves Carvalho. – 2014.

135 f. il. (color.); 30 cm

Dissertação (Mestrado) – Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Engenharia Civil, 2014.

Inclui bibliografia

1. Engenharia Civil – Teses. 2. Acoplamento flexo-torção. 3. Perfis de seção aberta. 4. Vibrações não lineares. 5. Instabilidade I. Gonçalves, Paulo Batista. II. Carvalho, Eulher Chaves. III. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Engenharia Civil. IV. Título.

CDD: 624

Dedico a:
Meus Pais Mateo e Asunta

Agradecimentos

A Deus pelas oportunidades que colocou na minha vida, ao minha família pelo amor, educação e exemplo que me oferecem todos os dias.

Ao professor Paulo Batista Gonçalves, quem soube transmitir com paciência e dedicação cada passo da orientação e tornou-se um símbolo como profissional e amigo.

Ao meu Co-orientador, Professor Eulher Chaves Carvalho, pela orientação e esclarecimento de muitas dúvidas que ajudaram no desenvolvimento da dissertação.

Aos professores que participaram da comissão examinadora.

A instituição PUC-Rio.

Aos professores e funcionários do Departamento de Engenharia Civil.

Aos amigos (as) que fiz na PUC-Rio.

Ao CNPq e CAPES.

Resumo

Renzo Cayo Mancilla; Gonçalves, Paulo Batista (Orientador); Carvalho, Eulher Chaves (Co-orientador), **Vibrações Não Lineares e Estabilidade de Barras Esbeltas de Seção Aberta**. Rio de Janeiro, 2014. 135p. Dissertação de Mestrado – Departamento de Engenharia Civil, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Em virtude de sua eficiência, elementos estruturais de paredes finas com seções abertas são comuns em estruturas de aço, sendo secção em I, L, C e T usuais na prática de engenharia. A maior parte das vigas de parede fina tem uma boa resistência à flexão em relação ao eixo principal de inércia, mas uma baixa rigidez à flexão em relação ao eixo de menor inércia e uma baixa rigidez em torção. É por isso que estes elementos apresentam em geral uma instabilidade que leva a um acoplamento de flexo-torção. Muitas destas estruturas trabalham em um regime não linear e uma formulação não linear que leve em conta grandes deslocamentos e os acoplamentos inerentes é necessária. Neste trabalho um modelo não linear para vigas de seção aberta e paredes finas, considerando grandes deslocamentos, os efeitos de encurtamento e acoplamentos em flexão e torção é adotado. Inicialmente um estudo das frequências naturais, das cargas críticas e da relação frequência-carga axial é apresentado para diversos perfis. Com base nestes resultados, faz-se um estudo detalhado do comportamento dinâmico não linear destes perfis destacando o efeito do acoplamento não linear na região de ressonância e sua influência na estabilidade dinâmica da estrutura. Para isto são usadas diversas ferramentas de dinâmica não linear, tais como diagramas de bifurcação, respostas no tempo e plano de fase e bacias de atração. Os resultados mostram que a consideração dos acoplamentos não lineares é essencial para se avaliar o nível de segurança destas estruturas.

Palavras-chave

Acoplamento flexo-torção; perfis de seção aberta; vibrações não lineares; instabilidade.

Abstrac

Renzo Cayo Mancilla; Gonçalves, Paulo Batista (Advisor); Carvalho, Eulher Chaves (Co-advisor), **Nonlinear Vibrations and Stability of Slender Bars with Open Cross-Section**. Rio de Janeiro, 2014. 135p. M.Sc. Dissertation – Departamento de Engenharia Civil, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Due to its efficiency, thin-walled structural elements with open sections, such as I, L, C and Z profiles, are common in steel structures, being usual in engineering applications. Most thin-walled beams have a good flexural strength around of the principal axis of inertia, but a low one around the axis of lower inertia as well as low torsional stiffness. That is why these elements, generally, show instabilities that lead to flexural torsional coupling. Many of these structures do not work in a linear range and a non-linear formulation that takes into account large displacements and associated couplings is required. This dissertation presents a nonlinear model for extensional beams with thin-walled open section, considering large displacements, and flexural-torsional couplings. Initially a study of the natural frequencies, critical load and axial load vs. frequency relation is presented for different profile kinds. Based on these results, a detailed study of the dynamic behavior of non-linear profiles is made, highlighting the effect of non-linear coupling in the resonance region and its influence on the dynamic stability of the structure. For this, various tools of nonlinear dynamics are used, such as bifurcation diagrams, time histories and phase-space portraits and basins of attraction. The results show that the consideration of non-linear couplings is essential to availed the safety level of these structures.

Keywords

Flexural-torsional coupling; bars with open cross-sections; nonlinear vibrations; instabilities.

Sumário

1. INTRODUÇÃO	20
1.1. Considerações gerais.	20
1.2. Breve histórico bibliográfico.	24
1.3. Objetivos.	26
1.4. Escopo.	27
2. FLEXO-TORÇÃO EM PERFIS DE SEÇÃO ABERTA E PAREDE DELGADA	28
2.1. Perfis de seção aberta e paredes delgadas.	28
2.2. Centro de Cisalhamento de uma seção transversal.	29
2.2.1. Centro de cisalhamento para seções com dois eixos de simetria.	30
2.2.2. Centro de cisalhamento para seções com um eixo de simetria.	31
2.2.3. Centro de cisalhamento para seções transversais assimétricas.	33
2.3. Área Setorial.	38
2.4. Torção de perfis de seção aberta e paredes delgadas.	40
3. FORMULAÇÃO MATEMÁTICA PARA ANÁLISE NÃO LINEAR	42
3.1. Elementos de seção transversal aberta de parede delgada.	42
3.2. Campo de deslocamentos.	43
3.3. Campo de deformações.	45
3.4. Formulação variacional.	46
3.4.1. Variação da energia interna de deformação.	46
3.4.2. Variação do trabalho das cargas externas.	49
3.4.3. Variação da energia cinética.	50
3.5. Relações constitutivas.	51
3.6. Equações de movimento.	53
4. FREQUÊNCIAS NATURAIS E CARGAS CRÍTICAS	55
4.1. Aplicação do método de Galerkin.	55
4.2. Linearização das equações de movimento.	57
4.3. Frequências naturais e cargas críticas axiais da viga.	57

4.4. Análise numérica de vários tipos de perfis.	59
4.4.1. Seção duplamente simétrica - perfil "I".	60
4.4.2. Seção monossimétrica - perfil "T".	64
4.4.3. Seção monossimétrica - perfil "C".	67
4.4.4. Seção monossimétrica - perfil "L".	70
4.4.5. Seção assimétrica - perfil "L".	73
5. ANÁLISE NÃO LINEAR	77
5.1. Equações de movimento para o perfil monossimétrico "C".	77
5.2. Vibração livre.	79
5.3. Vibração Forçada: carregamento Q_y .	80
5.4. Vibração forçada: carregamento Q_z aplicado no centro de cisalhamento.	87
5.5. Vibração forçada: carregamento Q_z aplicado no centro de gravidade.	101
5.6. Vibração forçada: carregamento Q_z aplicado na mesa superior do perfil.	109
6. CONCLUSÕES E SUGESTÕES	130
6.1. Conclusões.	130
6.2. Sugestões.	131
7. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	133

Lista de figuras

Figura 1.1: Aplicação dos perfis de seção aberta e paredes delgadas na engenharia estrutural.	21
Figura 1.2: Exemplos da aplicação dos perfis na engenharia estrutural.	23
Figura 2.1: Perfil de seção aberta e parede delgada.	28
Figura 2.2: Representação do esforço solicitante cortante (V) na barra.	30
Figura 2.3: Resultante das tensões de cisalhamento perfil bissimétrico.	30
Figura 2.4: Resultante das tensões de cisalhamento perfil monossimétrico T.	31
Figura 2.5: Resultante das tensões de cisalhamento perfil monossimétrico “C”.	33
Figura 2.6: Distribuição de tensões de cisalhamento em seção de parede delgada.	34
Figura 2.7: Seção transversal aberta assimétrica genérica de parede delgada.	34
Figura 2.8: Representação esquemática do raio vetor r .	36
Figura 2.9: Planos de carregamento fictícios paralelos as direções z e y .	38
Figura 2.10: Representação da área setorial.	39
Figura 2.11: Relação da área setorial com a geométrica.	39
Figura 2.12: Torção de perfis de seção aberta e parede delgada.	40
Figura 3.1: Elemento de seção transversal aberta. Sistema de referência e notação.	43
Figura 3.2 : Componentes do deslocamento do centro de cisalhamento.	43
Figura 3.3: Eixo normal e tangencial do contorno da seção.	44
Figura 3.4: Forças resultantes na seção.	48
Figura 3.5: Componentes de carga aplicada à barra.	49
Figura 3.6: Deslocamento vertical do ponto M gerado por Q_z .	50
Figura 4.1: Perfil simétrico “I” e suas dimensões características.	60
Figura 4.2: Relação carga – frequência de vibração da Seção “I”.	63
Figura 4.3: Relação carga – comprimento (a) e Relação frequência natural – comprimento (b) da viga de Seção “I”.	63
Figura 4.4: Perfil monossimétrico “T” e suas dimensões características.	64

Figura 4.5: Relação carga – frequência de vibração da Seção “T”.	66
Figura 4.6: Relação carga – comprimento (a) e Relação frequência natural – comprimento (b) da viga de Seção “T”.	67
Figura 4.7: Perfil monossimétrico “C” e suas dimensões características.	67
Figura 4.8: Relação carga – frequência de vibração da Seção “C”.	69
Figura 4.9: Relação carga – comprimento (a) e Relação frequência natural – comprimento (b) da viga de Seção “C”.	69
Figura 4.10: Perfil monossimétrico “L” e suas dimensões características.	70
Figura 4.11: Relação carga – frequência de vibração da Seção monossimétrica “L”.	72
Figura 4.12: Relação carga – comprimento (a) e Relação frequência natural – comprimento (b) da viga de Seção monossimétrica “L”.	73
Figura 4.13: Perfil assimétrico “L” e suas dimensões características.	73
Figura 5.1: Resposta no tempo e espectro de frequência para o sistema autônomo não amortecido.	79
Figura 5.2: Variação da frequência devido a não linearidade geométrica.	80
Figura 5.3: Perfil monossimétrico “C” e aplicação da força excitadora Q_y no centro de cisalhamento.	80
Figura 5.4: Diagramas de bifurcação considerando o sistema de 3GDL com frequência de excitação Ω_y variando entre 92 e 112 rad/s, para um $Q_y = 1 \text{ kN/m}$.	82
Figura 5.5: Diagrama de bifurcação, resposta no tempo, plano fase e bacia de atração e espectro de frequência, para o sistema de 3GDL com $\xi = 0.32\%$ e $Q_y = 1 \text{ kN/m}$.	83
Figura 5.6: Diagrama de bifurcação para a direção v_0 com $Q_y = 1 \text{ kN/m}$ e uma frequência de excitação Ω_y variando entre 92 e 112 rad/s, para o sistema com 1GDL.	84
Figura 5.7: Diagramas de bifurcação para a direção v_0 com $\Omega_y = 90, 100.08$ e 104 rad/s , $\xi = 1,22\%$ e $Q_y = 1$ e 50 kN/m .	85
Figura 5.8: Diagrama de bifurcação para o modelo com 3 GDL e respostas no tempo, planos fase, bacia de tração e espectros de frequência para $\Omega_y = 100.08 \text{ rad/s}$, $\xi = 0.32\%$ e $Q_y = 1,035 \text{ kN/m}$.	87
Figura 5.9: Diagrama de bifurcação para a direção v_0 com $\Omega_y = 100.08 \text{ rad/s}$, $\xi = 0.32\%$ e magnitude da excitação Q_y variando entre 940 e 1060 N/m.	87

Figura 5.10: Perfil monossimétrico “C” e aplicação da força excitadora.	88
Figura 5.11 : Diagramas de bifurcação variando a frequência Ω_z e a magnitude de excitação Q_z com $\xi = 1.22\%$ para a direção v_o , w_o e θ_o .	91
Figura 5.12: Fronteira de estabilidade no espaço de controle da carga. Excitação aplicada na direção Z com frequência, variando entre $\Omega_z = 15$ e 300 rad/s. e $\xi=1.22\%$.	92
Figura 5.13: Resposta no tempo do sistema, resposta na fase permanente, espaço fase e seção de Poincare para as direções v_o , w_o , θ_o com $\Omega_z=100.0$ rad/s e $\xi=1.22\%$ e uma magnitude de excitação $Q_z=6$ kN/m.	93
Figura 5.14: Espectros de frequência na direção v_o , w_o e θ_o .	93
Figura 5.15 : Diagrama de bifurcação com as três seções analisadas.	94
Figura 5.16: Resposta no tempo, plano fase e seção de Poincaré para a seção 1, com $\Omega_z=105$ rad/s, $Q_z = 20,053$ kN/m e $\xi=1.22\%$.	94
Figura 5.17: Resposta no tempo, plano fase e seção de Poincaré para a seção 2, com $\Omega_z=105$ rad/s, $Q_z = 30$ kN/m e $\xi=1.22\%$.	95
Figura 5.18: Diagrama de bifurcação, resposta no tempo, plano fase e bacia de atração para o sistema, com $\Omega_z = 105$ rad/s, $Q_z = 34,5$ kN/m e $\xi = 1.22\%$ na direção v_o .	96
Figura 5.19: Diagrama de bifurcação, resposta no tempo e plano fase para o sistema, com $\Omega_z = 105$ rad/s, $Q_z = 34,5$ kN/m e $\xi = 1.22\%$ na direção w_o .	97
Figura 5.20: Diagrama de bifurcação, resposta no tempo e plano fase para o sistema, com $\Omega_z = 105$ rad/s, $Q_z = 34,5$ kN/m e $\xi = 1.22\%$ na direção θ_o .	97
Figura 5.21: Detalhes do diagrama de bifurcações apresentado na Figura 5.14 (y) para a direção v_o .	98
Figura 5.22: Diagrama de bifurcação com as duas seções.	99
Figura 5.23: Resposta no tempo, plano fase e seção de Poincaré para a seção 1, com $\Omega_z=110$ rad/s, $Q_z = 21,45$ kN/m e $\xi=1.22\%$.	99
Figura 5.24: Diagrama de bifurcação, resposta no tempo, plano fase e bacia de atração para o sistema, com $\Omega_z=110$ rad/s, $Q_z = 21,5$ kN/m e $\xi=1.22\%$.	100
Figura 5.25: Diagramas de bifurcação variando a frequência de excitação Ω_z , para diferentes magnitudes de excitação Q_z nas direções v_o , w_o e θ_o com $\xi=1.22\%$.	102

Figura 5.26: Perfil monossimétrico “C” e aplicação da força excitadora no centro de gravidade.	102
Figura 5.27: Diagramas de bifurcação variando a frequência Ω_z e a magnitude de excitação Q_z com $\xi = 1.22\%$ para a direção v_o , w_o e θ_o .	104
Figura 5.28: Resposta no tempo do sistema, resposta na fase permanente, espaço fase, seção de Poincaré e espectros de frequência para as componentes v_o , w_o , θ_o com $\Omega_z = 100.0$ rad/s e $\xi = 1.22\%$ e uma magnitude de excitação $Q_z = 21,750$ kN/m.	106
Figura 5.29: Resposta no tempo, plano de fase e seção de Poincare para a direção v_o , com $\Omega_z = 105$ rad/s, $Q_z = 20,024$ kN/m e $\xi=1.22\%$.	107
Figura 5.30: Resposta no tempo, plano de fase e seção de Poincare para a direção v_o , com $\Omega_z=110$ rad/s, $Q_z = 21,503$ kN/m e $\xi=1.22\%$.	107
Figura 5.31: Fronteira de estabilidade no espaço de controle da carga. Excitação aplicada na direção Z com frequência variando entre $\Omega_z = 15$ e 300 rad/s. e $\xi = 1.22\%$.	108
Figura 5.32: influência da excentricidade na direção Y na fronteira de estabilidade.	109
Figura 5.33: Perfil monossimétrico “C” e aplicação da força excitadora no espaço.	109
Figura 5.34: Diagrama de bifurcações, para a direção v_o com frequência variando entre 15 e 160 rad/s e $\xi = 1,22\%$.	111
Figura 5.35: Diagrama de bifurcações para a direção v_o , com amplitude $Q_z = 20$.kN e frequências variável.	112
Figura 5.36: Diagrama de bifurcações, para a direção v_o , com amplitude $Q_z = 7.5$ kN e frequências variável.	113
Figura 5.37: Seção v_o versus w_o da bacia de atração.	113
Figura 5.38: Solução estável não planar do sistema para $Q_z = 7,5$ kN e $\Omega_z = 50$ rad/s.	114
Figura 5.39: Diagrama de bifurcações, para a direção v_o com $Q_z = 10$ kN.	114
Figura 5.40: Soluções estáveis identificadas quando $\Omega_z = 100.31$ rad/s.	115
Figura 5.41: Seção da bacia de atração quando $\Omega_z = 100,318$ rad/s.	115
Figura 5.42: Diagrama de bifurcações, para a direção v_o com $Q_z = 15$ kN.	116
Figura 5.43: Soluções estáveis identificadas para $Q_z = 15$ kN.	117

Figura 5.44: Seção da bacia de atração para $\Omega_z = 100,234$ rad/s e $Q_z = 15$ kN.	118
Figura 5.45: Diagrama de bifurcações, para a direção v_o com $Q_z = 12,5$ kN.	118
Figura 5.46: Seção da bacia de atração quando $\Omega_z = 95$ rad/s e $Q_z = 10$ kN.	119
Figura 5.47: Detalhes do diagrama de bifurcações apresentado na Figura 5.41(a).	120
Figura 5.48: Detalhes do diagrama de bifurcações apresentado na Figura 5.30(n)	120
Figura 5.49: Projeções da resposta no tempo, plano de fase e mapa de Poincaré, considerando $Q_z = 16,89$ kN.	121
Figura 5.50: Projeções da resposta no tempo, plano de fase e mapa de Poincaré, considerando $Q_z = 17$ kN.	122
Figura 5.51: Projeções da resposta no tempo, plano de fase e mapa de Poincaré, considerando $Q_z = 17,08$ kN.	123
Figura 5.52: Projeções da resposta no tempo, plano de fase e mapa de Poincaré, considerando $Q_z = 17,225$ kN.	124
Figura 5.53: Projeções da resposta no tempo, plano de fase e mapa de Poincaré, considerando $Q_z = 17,23$ kN.	124
Figura 5.54: Projeções da resposta no tempo, plano de fase e mapa de Poincaré, considerando $Q_z = 17,235$ kN.	125
Figura 5.55: Projeções da resposta no tempo, plano de fase e mapa de Poincaré, considerando $Q_z = 17,244$ kN.	126
Figura 5.56: Projeções da resposta no tempo, plano de fase e mapa de Poincaré, considerando $\Omega_z = 137,80$ rad/s.	127
Figura 5.57: Projeções da resposta no tempo, plano de fase e mapa de Poincaré, considerando $\Omega_z = 139,80$ rad/s.	128
Figura 5.58: Projeções da resposta no tempo, plano de fase e mapa de Poincaré, considerando $\Omega_z = 142,03$ rad/s.	129

Lista de tabelas

Tabela 4.1: Propriedades geométricas da seção “I”.	60
Tabela 4.2: Frequências naturais (rad/s) e modos de vibração da seção “I”.	61
Tabela 4.3: Cargas de modos de bifurcação da seção “I”.	62
Tabela 4.4: Propriedades geométricas da Seção “T”.	64
Tabela 4.5: Modos de vibração da seção “T”.	65
Tabela 4.6: Modos de Flambagem da seção “T”.	66
Tabela 4.7: Propriedades geométricas da Seção “C”.	68
Tabela 4.8: Frequências naturais e modos de vibração da seção “C”.	68
Tabela 4.9: Cargas e modos de bifurcação da seção “C”.	69
Tabela 4.10: Propriedades geométricas da Seção monossimétrica “L”.	70
Tabela 4.11: Propriedades geométricas principais da Seção monossimétrica “L”.	71
Tabela 4.12: Frequências naturais e modos de vibração da seção monossimétrica “L”.	72
Tabela 4.13: Cargas e modos de bifurcação da seção monossimétrica “L”.	72
Tabela 4.14: Propriedades geométricas da Seção assimétrica “L”.	74
Tabela 4.15: Propriedades geométricas principais da seção assimétrica “L”.	74
Tabela 4.16: Modos de vibração da seção assimétrica “L”.	75
Tabela 4.17: Modos de Flambagem da seção assimétrica L.	75

Lista de símbolos

X, Y, Z	-Eixos principais
L	-Comprimento do elemento.
S_t	-Perímetro da seção.
t	-Espessura da seção.
V, V_y, V_z	-Esforços cortantes.
T	-Momento de torção
τ, τ_1, τ_2	-Tensão de cisalhamento.
A	-Área da seção transversal.
F, F_v	-Resultante da força externa.
G	-Centro de gravidade.
C	-Centro de cisalhamento.
“I”, “T”, “C”, “L”	-Seções do perfil.
o	-Ponto acima da linha média da seção.
M_o	-Momento com respeito ao ponto o .
M_s	-Momento estático.
I	-Momento de inércia.
s_1, s_2	-Pontos da coordenada curvilínea.
d	-Distância de C ao ponto o .
XY, XZ	-Planos paralelos.
M_c	-Momento no centro de cisalhamento.
r	-Raio vetor.
ds	-Diferencial de comprimento.
T_t	-Momento torsor devido à torção.
T_e	-Momento torsor devido ao empenamento.
B_ω	-Bi momento.
E	-Módulo de Young.
G	-Módulo de distorção.
ν	-Coeficiente de Poisson.

$h(s)$	-Distância perpendicular desde o centro de cisalhamento até o contorno da seção.
$r(s)$	-Componente curvilíneo do centro de cisalhamento nas coordenadas de referência.
I_o	-Momento polar de inércia com relação ao centro de cisalhamento.
I_R	-Quarto momento de inércia com relação ao centro de cisalhamento.
I_t	-Constante de torção de maior ordem.
I_y	-Momento principal de inércia com relação ao eixo Y.
I_z	-Momento principal de inércia com relação ao eixo Z.
I_ω	-Constante de empenamento.
J	-Constante de torção de St Venant.
K_y	-Curvatura com relação ao eixo Y.
K_z	-Curvatura com relação ao eixo Z.
M_x	-Momento.
m_x	-Momento de torção distribuído.
M_y	-Momento de torção com relação ao eixo Y.
M_z	-Momento de torção com relação ao eixo Z.
M_R	-Tensão resultante de ordem superior.
M_{sv}	-Momento de torção de St. Venant.
N	-Carga axial.
q_x, q_y, q_z	-Componentes da carga distribuída nos eixos X, Y e Z.
R	-Distância de um ponto M ao centro de cisalhamento.
s	-Coordenada curvilínea.
L_a	-Função de Lagrange.
U	-Energia de deformação interna e total.
W	-Energia do trabalho das cargas externas.
T	-Energia cinética.
u, v, w	-Componentes do deslocamento do centro de cisalhamento nos eixos X, Y e Z.
u_M, v_M, w_M	-Componentes do deslocamento do ponto M nos eixos X, Y e Z.

v_t	-Componente do deslocamento do ponto M na coordenada curvilínea no eixo Y.
w_t	-Componente do deslocamento do ponto M na coordenada curvilínea no eixo Z.
x, y, z	-Coordenadas principais do ponto M nos eixos X, Y e Z.
y_c, z_c	-Coordenadas principais do ponto de cisalhamento C nos eixos Y e Z.
α	-Ângulo entre o eixo Y e a tangente à coordenada curvilínea.
β_y, β_z	-Coeficientes de Wagner nos eixos Y e Z.
β_ω	-Coeficiente de Wagner.
ε_{xx}	-Deformação axial.
$\varepsilon_1, \varepsilon_2$	-Componentes da deformação axial.
ε_{xy}	-Deformação de cisalhamento no plano XY.
ε_{xz}	-Deformação de cisalhamento no plano XZ.
ω_s	-Coordenada setorial ou área setorial principal.
θ_x	-Ângulo de rotação no eixo X.
v_o, w_o, θ_o	-Amplitudes dos deslocamentos dependentes do tempo.
P	-Carga axial compressiva.
e_z, e_y	-Excentricidade do carregamento Q_z .
P_y, P_z, P_θ	-Cargas de Flambagem em flexão e torção.
M_{oy}, M_{oz}	-Máximos momentos de flexão.
m	-Massa do elemento por unidade de comprimento.
$[M]$	-Matriz de massa.
$[K_e]$	-Matriz de rigidez linear.
$[K_G]$	-Matriz de rigidez geométrica.
$\{F\}$	-Vetor de forças externas.
λ	-Autovalores.
b, h	- Dimensões da seção transversal.
t_f, t_w	-Espessuras da seção transversal.
ω_o	-Frequência natural.
P_e	-Carga crítica de Euler.

$\bar{v}, \bar{w}, \bar{\theta}$

-Amplitudes modais.

ρ

-Densidade do material.

I_{max}

-Momento de inércia máximo.

I_{min}

-Momento de inercia mínimo.

γ

-Ângulo das coordenadas principais.

I_{yz}

-Produto de inércia.

Q_z, Q_y

-Forças laterais de excitação.

Ω_z, Ω_y

-Frequências das forças de excitação.

y_0, y_2, y_4

- Amplitudes dos deslocamentos v_o, w_o, θ_o .

y_1, y_3, y_5

-Velocidades dos deslocamentos v_o, w_o, θ_o .

ξ

-Amortecimento viscoso.

M_{ocr}

-Momento crítico estático.

δ

-Fator que representa o efeito de flexão.

Q_{zcr}

-Carregamento lateral crítico estático.