



ALAN DE OLIVEIRA PINTO NEVES

Análise do eixo traseiro de um kart
Analysis of Go-kart Rear Axle

Projeto de Graduação

Projeto de Graduação apresentado ao Departamento de Engenharia
Mecânica da PUC-Rio

Orientador: Mauro Speranza Neto

Rio de Janeiro

Julho de 2018

Área de Concentração: Mecânica Aplicada



ALAN DE OLIVEIRA PINTO NEVES

Análise do eixo traseiro de um kart

Projeto de Graduação em Engenharia Mecânica

Trabalho apresentado ao Departamento de Engenharia Mecânica da PUC-Rio como requisito parcial para obtenção do diploma de Graduação em Engenharia Mecânica.

Orientador: Mauro Speranza Neto

Rio de Janeiro

Julho de 2018

Agradecimentos

Primeiramente, a Deus por ter me dado saúde e força para superar as dificuldades.

A minha mãe, Rosangela, que sempre me deu apoio, incentivo nas horas difíceis, de desânimo e cansaço.

Ao meu Pai, Marlon, pelo conselhos e apoio.

Ao professor Mauro Speranza Neto por ter me orientado neste presente trabalho.

Ao professor Carlos Alberto de Almeida, pela sua disposição de esclarecer as minhas dúvidas para realização desse trabalho.

Ao Cristiano Sandroni por ter contribuído para realização desse trabalho.

A todos que direta ou indiretamente fizeram parte da minha formação, o meu obrigado.

Resumo

Neves, Alan. **Análise do Eixo Traseiro de um Kart**. Rio de Janeiro, 2017. 82p. Trabalho de Conclusão de Curso - Departamento de Engenharia Mecânica, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Este trabalho tem como objetivo obter as deflexões de um eixo traseiro de kart. Inicialmente será desenvolvido o tratamento analítico, utilizando o modelo de Euler-Bernoulli, para análise de deflexão em um eixo traseiro de kart em condições estáticas, com carregamentos provenientes de situações dinâmicas do veículo (aceleração, frenagem e curvas estacionárias). Paralelamente, tais resultados serão comparados com simulações em programas de Elementos Finitos de modo a validá-los e adquirir a confiabilidade necessária no uso dessas ferramentas computacionais, visando o seu emprego em situações de carregamentos (combinação de esforços) e/ou geometria (posicionamento e tipos de apoios) mais complexos. Finalmente, será avaliada, a partir dos resultados encontrados nas simulações, qual a situação de carregamento é a mais crítica, assim como a melhor intervenção a ser realizada no eixo de modo a melhorar seu desempenho nos principais aspectos analisados.

Palavras-chave: Deflexão, modelo Euler-Bernoulli, eixo traseiro

Abstract

Neves, Alan. **Analysis of Go-kart Rear Axle**. Rio de Janeiro, 2017. 82p.
Trabalho de Conclusão de Curso - Departamento de Engenharia Mecânica,
Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

The objective of this work is to obtain the deflections of a kart rear axle. Initially the analytical treatment will be developed, using the Euler-Bernoulli model, for analysis of deflection on a kart rear axle in static conditions, with loading from situations vehicle dynamics (acceleration, braking and stationary curves). Simultaneously, these results will be compared with simulations in Finite Element programs in order to validate them and acquire the necessary reliability in the use of these computational tools, in order to use them in load situations (combination of efforts) and / or geometry (positioning and support types). Finally, it will be evaluated, from the results found in the simulations, which load situation is the most critical, as well as the best intervention to be performed in the axis in order to improve its performance in the main analyzed aspects

Keywords Deflection, Euler-Bernoulli model, rear axle

Sumário

1	Introdução	11
1.1	Metodologia	12
2	Fundamentos teóricos.....	13
2.1	O Kart.....	13
2.2	Deflexão estática de Vigas.....	15
2.2.1	Modelo Euler-Bernoulli.....	15
2.2.2	Modelo Timoshenko.....	16
2.2.3	Princípio da Superposição	17
2.3	Formulação do Método de Elementos Finitos	18
2.4	O eixo em estudo.....	19
2.4.1	Dimensões	19
2.4.2	Material	19
3	Análise da deflexão devido aos esforços provenientes da Estática do veículo	21
3.1	Análise da deflexão em retas.....	22
3.1.1	Caso Analítico.....	22
3.1.1.1	Reações de Apoios.....	22
3.1.1.2	Diagramas de esforços solicitantes	25
3.1.1.3	Curva de deflexão do eixo	27
3.1.2	Solução através do Ansys.....	31
3.1.3	Solução através do Ftool	32
3.1.4	Comparação dos métodos.....	34
4	Análise da deflexão devido aos esforços provenientes da dinâmica do veículo.....	35
4.1	Análise de deflexão de curvas estacionárias	35
4.1.1	Caso analítico	35
4.1.1.1	Deflexão devido a distribuição de peso	37
4.1.1.1.1	Reações de apoios	37
4.1.1.1.2	Diagramas de esforços solicitantes	40
4.1.1.1.3	Deflexão do eixo	41
4.1.1.2	Deflexão devido a força centrípeta	43
4.1.1.2.1	Reações de apoios	43
4.1.1.2.2	Diagramas de esforços solicitantes	45
4.1.1.2.3	Deflexão do eixo	46
4.1.1.3	Superposição dos efeitos para a curva	49
4.1.2	Solução através do Ansys.....	51
4.1.3	Solução através do Ftool	52
4.1.4	Comparação entre as soluções	53
4.2	Análise em retas	54
4.2.1	Caso analítico	54
4.2.1.1	Deflexão devido a tração do veículo	54
4.2.1.2	Deflexão devido a frenagem do veículo.....	56

4.2.1.3	Solução Ansys	59
4.2.1.3.1	Tração.....	59
4.2.1.3.2	Frenagem.....	60
4.2.1.4	Solução da deflexão total através do Ansys	61
4.2.1.4.1	Tração.....	61
4.2.1.4.2	Frenagem.....	63
5	Proposta de Intervenção no Sistema	65
5.1	Caso Analítico	65
5.1.1	Distribuição de Peso	70
5.1.2	Frenagem.....	73
5.2	Solução Ansys	76
5.2.1	Deflexão total	76
5.3	Comparação dos resultados	77
6	Considerações Finais e Conclusão.....	78
7	Referências Bibliográficas.....	80

Lista de Figuras

Figura 1 - Deflexão de um elemento.	11
Figura 2- Modelo de Kart.....	13
Figura 3 - Chassi.	14
Figura 4 - Roda interna à curva girando em falso.	14
Figura 5 -Fluxograma das etapas em programas de elementos finitos....	18
Figura 6 -Desenho do eixo no Solidworks 2015 (Vista isométrica).	19
Figura 7 - Parte traseira do Kart.	21
Figura 8 - Vista isométrica do eixo com dos seus elementos montados.	21
Figura 9 - Diagrama de Corpo Livre	22
Figura 10 - Remoção do segundo apoio	23
Figura 11 - Aplicação das reações nas rodas na estrutura liberada.....	23
Figura 12 - Deflexão no ponto 2 devido as reações nas rodas.	23
Figura 13 - Aplicação da redundante na estrutura liberada.....	24
Figura 14 - Deflexão no ponto 2 devido a força redundante.....	24
Figura 15 - Diagrama de corpo livre.	26
Figura 16 - Diagrama de esforços cortantes.	26
Figura 17 - Diagrama de momento fletor.....	27
Figura 18 - Deflexão modelo analítico.....	30
Figura 19 - Modelo Ansys.....	31
Figura 20 - Condições de Contorno.	31
Figura 21 - Resultado gerado pelo Ansys.	32
Figura 22 - Resultado para deflexão do modelo Ansys.....	32
Figura 23 - Modelo Ftool	33
Figura 24 - Resultado Ftool.....	33
Figura 25 Resultado da deflexão modelo Ftool.....	33
Figura 26 - comparação das soluções	34
Figura 27 - Curva analisada.	36
Figura 28 - Forças atuando na curva estudada.....	37
Figura 29 - Diagrama de corpo livre para curva	37
Figura 30 - Representação das Reações devido ao peso.....	37
Figura 31 - Remoção do segundo apoio.	38
Figura 32 Deflexão no ponto 2 devido a força F.....	38

Figura 33 -Deflexão devido a força redundante.	38
Figura 34 - Diagrama de esforços cortantes.	40
Figura 35 - Diagrama de momento Fletor.	40
Figura 36 - Modelo para cálculo de deflexão devido a força centrípeta. ..	43
Figura 37 - Deflexão devido ao momento no ponto 2.....	44
Figura 38 - Deflexão devido ao redundante.	44
Figura 39 - Diagrama de esforços cortantes.	45
Figura 40 - Diagrama de momento fletor.....	46
Figura 41 - Superposição dos efeitos.....	49
Figura 42 - Diagrama de esforços cortantes.	49
Figura 43 - Diagrama de momento fletor.....	50
Figura 44 - Deflexão para curvas.	51
Figura 45 - Modelo Ansys.....	51
Figura 46 - Resultados do modelo Ansys de curvas.	52
Figura 47 -Resultado da deflexão para curvas Ansys.	52
Figura 48 Modelo Ftool.	53
Figura 49 - Resultado da deflexão do modelo Ftool.....	53
Figura 50- Resultado da deflexão para curvas do modelo Ftool.	53
Figura 51 comparação entre as soluções.	54
Figura 52 - Modelo do eixo.....	55
Figura 53 - Resultado da deflexão para o modelo analítico.	56
Figura 54 - Modelo para frenagem.	57
Figura 55 - Resultado para o modelo analítico.....	58
Figura 56 - Modelo Ansys.....	59
Figura 57 - Resultado do modelo Ansys.	59
Figura 58 - Comparações entre as soluções.....	60
Figura 59 - Modelo Ansys para frenagem.	60
Figura 60 - Resultado do modelo Ansys.	61
Figura 61 - Comparação entre os modelos.	61
Figura 62 - Modelo Ansys para combinações de esforços.....	62
Figura 63 - Resultados do modelo Ansys.....	62
Figura 64 - Modelo Ansys para frenagem.	63
Figura 65 - Resultados do modelo Ansys para frenagem.	63

Figura 66 - Modelo de eixo com 4 rolamentos.	65
Figura 67 - Modelo do eixo com 4 rolamentos.	65
Figura 68 - Remoção dos apoios 2 e 3.	66
Figura 69 - Sentidos das reações nos apoios.	67
Figura 70 - Reações devido a distribuição de peso.....	70
Figura 71 - Diagrama de esforços cortantes.	70
Figura 72 - Diagrama de momento fletor.....	71
Figura 73 - Resultado da deflexão do modelo analítico.	72
Figura 74 - Reações devido a frenagem.	73
Figura 75 - Diagrama de esforços cortantes.	73
Figura 76 - Diagrama de momento fletor.....	74
Figura 77 - Resultado para deflexão devido frenagem do veículo.	75
Figura 78 - Modelo Ansys para 4 rolamentos.....	76
Figura 79 - Condições de contorno aplicadas no modelo.	76
Figura 80 - Resultado para a combinação dos esforços.	77

Lista de Tabelas

Tabela 1 - Propriedades do aço SAE 4130.....	20
Tabela 2- Dimensões do eixo.....	25
Tabela 3 - Valores das Reações no eixo.....	25
Tabela 4 - Condições de contorno.	28
Tabela 5 - Expressões das constantes de integração.....	29
Tabela 6 - Dimensões da Curva.....	36
Tabela 7 - Valores das reações no eixo.	39
Tabela 8- Condições de contorno	42
Tabela 9 - Expressões das constantes de integração.....	42
Tabela 10 - Dados da curva.	45
Tabela 11 - Valores das Reações.	45
Tabela 12 - Condições de contorno.	47
Tabela 13 - Expressões das constantes de integrações.	48
Tabela 14 - Valores das Reações.	49
Tabela 15 Reações nos apoios.....	55
Tabela 16 Reações nos apoios.....	57
Tabela 17 - Condições de contorno.	68
Tabela 18 - Valores das reações.....	70
Tabela 19 - Valores das reações.....	73

1 INTRODUÇÃO

“O eixo é um membro rotativo, usualmente de seção transversal circular, usado para transmitir potência ou movimento.” (BUDYNAS; NISBET, 2011, p. 374). Os karts são veículos automotores simples, possuindo quatro rodas, um chassi tubular, que confere um peso relativamente baixo, e uma fonte motora. Tais veículos possuem um eixo, conectando as rodas traseiras. Quando o eixo traseiro é excitado pelo torque do motor, aparecem reações estáticas, reações dinâmicas, vibrações e outros fatores advindos do peso, condições de pista, clima e estilo de condução do piloto. Ao ser solicitado ocorrem, no eixo, torções e deflexões que, dependendo da sua intensidade, podem levar à falha do elemento. Tal fato deve ser evitado pelo projetista através de um dimensionamento correto.

A deflexão ou flecha de um elemento é definida como a alteração da posição inicial para alguma outra posição, conforme mostra a Figura 1. Nos elementos de máquinas, tem-se que “quando uma viga com eixo longitudinal reto é carregada por forças laterais, o eixo é deformado em uma curva chamada de curva de deflexão da viga” (GOODNO; GERE, 2010). Dessa maneira, dado um carregamento atuando sobre uma superfície de uma viga, o resultado será uma deformação. A deflexão é a amplitude dos deslocamentos que o material sofre e o diagrama que mostra esses deslocamentos é chamado de flecha ou linha elástica (Hibbeler, 2010).

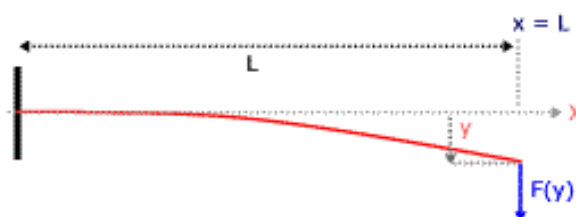


Figura 1 - Deflexão de um elemento.
Fonte: www.mspc.eng.br/matr/resmat0580.shtml

Dessa maneira, além da análise de tensões, o projetista deve-se atentar a amplitude das deflexões que o material sofre. Qualquer flexão causará deflexão, pois os materiais os quais são feitos os eixos são elásticos. Se um elemento mecânico ou estrutural é dimensionado para evitar o escoamento do material, nenhuma deformação plástica ou fratura irá ocorrer, por mais que haja deflexão.

A análise por deflexão consiste em verificar a sua amplitude e os ângulos de inclinação do eixo, para que não provoque danos a sua integridade estrutural ou dos elementos que estão contidos nele, como por exemplo os mancais, engrenagens e sistemas de freios. Tal análise pode ser longa e complexa para ser executada de maneira analítica, por isso ela pode ser realizada através de métodos numéricos associados a softwares adequados, combinados com princípios de resistência dos materiais. Um desses métodos é a análise por elementos finitos, que pode fornecer resultados confiáveis e conclusões satisfatórias de maneira rápida.

Sendo assim, com base no que foi apresentado, este trabalho consiste na análise de deflexões do eixo de um kart com motor Yamaha rd 135cc, levando em conta a situação de esforços que ocorrem com o veículo em velocidade constante, em trechos de curvas e retilíneos. Além disso, tem-se como objetivo secundário propor modificações de projeto que possam diminuir a deflexão do eixo, dada a análise posterior, seja mediante modificações geométricas, disposição de acessórios ou trocas de materiais. Esses parâmetros serão definidos após a avaliação de todos esforços e amplitudes das deflexões críticas.

1.1 Metodologia

Inicialmente as deflexões serão calculadas pelo método analítico, utilizando o modelo de Euler-Bernoulli, para a análise estática no eixo traseiro do veículo em questão. Será feita uma análise devido aos esforços provenientes da estática do veículo, ou seja, quando o veículo estiver em movimento retilíneo uniforme. Depois, será feita uma outra análise considerando os esforços provenientes da dinâmica do veículo (tração, frenagem e curvas estacionárias), porém tratados de maneira estática no eixo. Como o eixo estudado está em condições de hiperestaticidade será utilizado o princípio da superposição.

Paralelamente, tais resultados obtidos do modelo analítico serão comparados com simulações feitas no Ansys de modo a validá-los e adquirir a confiabilidade necessária no uso dessas ferramentas computacionais visando o seu emprego em situações mais complexas.

Por fim, será avaliada, a partir dos resultados encontrados nos modelos desenvolvidos, qual a situação mais crítica a qual o eixo está submetido, assim como a melhor intervenção a ser realizada no eixo de modo a melhorar seu desempenho nos principais aspectos analisados, que nesse caso, corresponde a diminuir a deflexão máxima, pois, uma vez que diminuída a deflexão da condição de solicitação máxima, as demais condições também terão seu efeito reduzido.

2 FUNDAMENTOS TEÓRICOS

2.1 O Kart

Um kart (Figura 2) é um veículo terrestre, geralmente conduzido por um piloto, sem suspensão, possui quatro rodas, sendo que as duas rodas traseiras recebem a tração do motor e as rodas dianteiras auxiliam a direção do veículo.



Figura 2- Modelo de Kart

Fonte: <http://www.carrosinfoco.com.br/carros/2014/07/o-kart-explicado-funcionamento-do-chassi/>

Um veículo comum possui um sistema de suspensão, formado por amortecedores, molas e outros elementos que tem a finalidade reduzir oscilações geradas devido a irregularidades da pista aumentando o desempenho e proporcionando um melhor conforto para o condutor.

Além disso, o seu eixo traseiro é formado por semieixos que são conectados pelo diferencial. A função do diferencial é igualar o número de voltas da roda interna e externa da curva permitindo o veículo realize sua trajetória correta.

Todavia, no kart, não há molas nem amortecedores. Porém, ao longo do chassi (Figura 3), encontram-se barras de torção, parafusos de regulagem, etc. Esses elementos possibilitam que o chassi funcione como uma suspensão permitindo-o torcer e flexionar mantendo suas rodas em contato com o solo. (carrosinfoco.com.br, acessado em 2018).

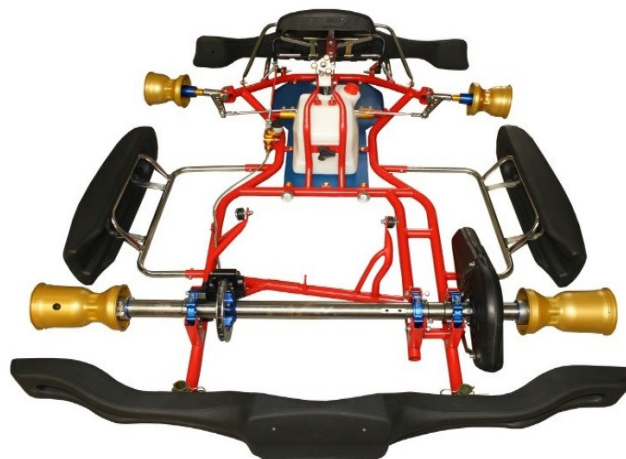


Figura 3 - Chassi.

Fonte: <http://www.carrosinfoco.com.br/carros/2014/07/o-kart-explicado-funcionamento-do-chassi/>

Além disso, o eixo traseiro do kart é um tubo que conecta as duas rodas. Todavia, o efeito diferencial é gerado devido a capacidade de torção do chassi que provoca a redução da carga vertical da roda traseira interna da curva. Observa-se na Figura 4, a roda girando em falso por ser levemente levantada permitindo que o veículo faça a curva de maneira correta. (carrosinfoco.com.br, acessado em 2018).



Figura 4 - Roda interna à curva girando em falso.

Fonte: <https://somosdokart.wordpress.com/2015/06/22/dirigibilidade-a-arte-de-fazer-curvas-no-kartismo-2/>

O centro de gravidade é ponto do sistema (chassi, motor e piloto) onde pode considerar todo o peso concentrado. O CG é fundamental para dinâmica do kart, pois irá afetar a distribuição de carga entre os eixos e transferência de peso

nas rodas durante a curva. No kart, esse ponto encontra-se na região do assento, uma vez que o piloto é a maior contribuição do peso total.

Por outro lado, se o peso não estiver distribuído de maneira correta, o chassi não terá um bom desempenho. Para um ponto de partida, segundo a fabricante de chassi Tonykart, recomenda os seguintes valores: na parte dianteira, 43% peso total e 57% na parte traseira, e esses pesos divididos 50% para esquerda e 50% para direita do veículo. (carrosinfoco.com.br, acessado em 2018).

O motor do kart em análise é um RD 135 cc, que é um motor de combustão interna, alternativo com 1 cilindro, refrigerado a ar e 2 tempos. A ignição é por faísca, através de uma fonte eletrônica. A potência produzida pelo motor em questão é de 16 cv a 8000 rpm. Tal fato mostra a importância desses motores em competições, uma vez que conferem grande desempenho ao kart. O torque máximo é 1,74 kgf.m a 8500 rpm a lubrificação é automática e a taxa de compressão 6,82:1.

2.2 Deflexão estática de Vigas

2.2.1 Modelo Euler-Bernoulli

As hipóteses para teoria clássica de Euler-Bernoulli ou de flexão pura apresentadas por Gere (2010) são:

1. A viga é prismática;
2. O material segue a lei de Hooke;
3. As inclinações da curva de deflexão são muito pequenas;
4. As deformações cortantes são desprezíveis, ou seja, só são consideradas as deformações devida à flexão pura;

Com essas hipóteses, pode-se chegar à equação apresentada por Gere (2010):

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{M(x)}{EI} \quad (1)$$

onde:

$v(x)$ é o deslocamento;

$M(x)$ é o momento fletor;

E é o módulo de Elasticidade;

I é o momento de Inércia;

2.2.2 Modelo Timoshenko

Segundo (Thomson), a teoria de Timoshenko para vigas considera os efeitos de inércia à rotação como à deformação de cisalhamento da viga.

Para o caso estático, (Thomson) apresenta as seguintes equações:

$$\phi - \frac{dv}{dx} = \frac{V}{KAG} \quad (2)$$

$$\frac{d\phi}{dx} = \frac{M}{EI} \quad (3)$$

onde:

$v(x)$ é a deflexão da reta central da viga;

$\frac{dv}{dx}$ é a inclinação da reta central da viga;

ϕ é a inclinação devido à flexão;

$\phi - \frac{dv}{dx}$ é a perda de inclinação;

V é o esforço cortante;

$M(x)$ é o momento fletor;

E é o módulo de Elasticidade;

I é o momento de Inércia;

G é o módulo de cisalhamento;

K é o fator de forma da seção transversal;

A é a área da seção transversal;

2.2.3 Princípio da Superposição

Segundo Gere (2010), o método da superposição para encontrar deflexões de vigas é um exemplo de um conceito mais geral conhecido em mecânica geral como princípio da superposição. Esse princípio é válido sempre que a quantidade a ser determinada for uma função linear dos carregamentos aplicados. Quando esse é o caso, a quantidade desejada pode ser encontrada devido a cada carregamento atuando separadamente e, então, esses resultados podem ser superpostos para obter a quantidade desejada devido a todos os carregamentos atuando simultaneamente. Em estruturas comuns, o princípio da superposição é usualmente válido para tensões, deformações, momento fletores e outras quantidades além das deflexões.

Segundo Gere (2010) no caso particular das deflexões de vigas, o princípio da superposição é válido sob as seguintes condições: (1) A lei de Hooke é válida para o material, (2) as deflexões e rotações são pequenas e (3) a presença de deflexões não altera as ações dos carregamentos aplicados. Estas exigências asseguram que as equações diferenciais da curva de deflexão sejam lineares.

2.3 Formulação do Método de Elementos Finitos

Segundo Bathe (1996), as etapas da formulação do métodos de elementos finitos são:

1. Idealização da estrutura por elementos;
2. Identificação dos deslocamentos nos pontos nodais;
3. Formular as equações de equilíbrio e resolvê-las;
4. Obter a distribuição dos deslocamentos pelos elementos;
5. Interpretar os resultados;

As etapas para a solução nos programas via elementos finitos são apresentadas pelo seguinte fluxograma conforme ilustra a figura 5.

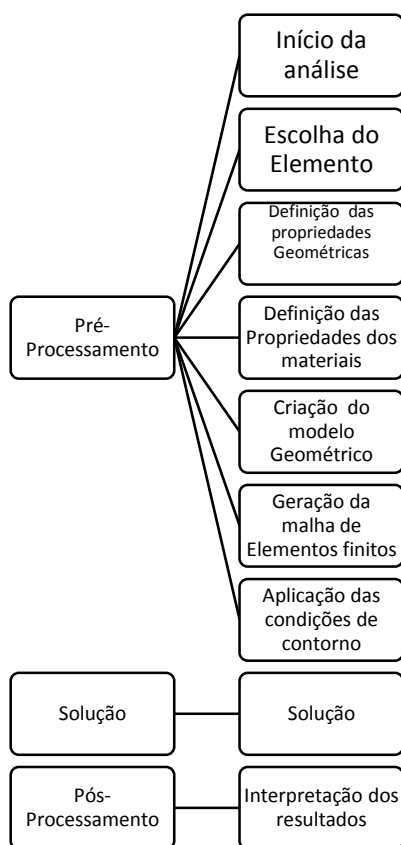


Figura 5 -Fluxograma das etapas em programas de elementos finitos.

2.4 O eixo em estudo

2.4.1 Dimensões

O eixo em análise tem 32 mm de diâmetro externo, 2 mm de espessura e comprimento de 1040 mm. A seção transversal é vazada, garantindo menor peso e maior rigidez, ao comparar com um elemento de mesma geometria com seção transversal não vazada de mesmo peso. A Figura 6 ilustra o eixo em questão.

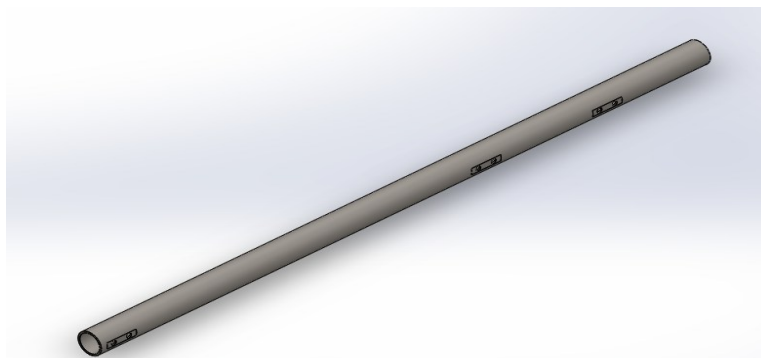


Figura 6 -Desenho do eixo no Solidworks 2015 (Vista isométrica).
Fonte: Próprio Autor.

Conforme pode ser visto, além da seção transversal vazada, existem rasgos de chaveta, que possuem profundidade de 1 mm e furo de 8 mm de diâmetro. Os rasgos de chaveta são necessários para acoplamento de elementos e peças essenciais, seja para transmitir potência e movimento ou mesmo elementos de segurança, como o freio.

2.4.2 Material

O eixo é fabricado pelo processo de extrusão e o material do elemento é o aço SAE 4130, cujas propriedades mecânicas atendem satisfatoriamente as solicitações do eixo. O aço SAE 4130 tem baixa temperabilidade, devido ter pouco carbono, sendo aplicado em peças médias e pequenas, temperado em água e óleo, respectivamente. Exemplos de aplicações são: bielas, braço de direção, eixos, parafusos, rebites e outras peças que precisam de boa tenacidade e que tenha propriedades ideais após tratamentos térmicos.(acosporte.com.br acessado 2018).

As propriedades mecânicas do aço (Tabela 1), que fazem com que ele seja satisfatório em tal aplicação são provenientes de sua composição química. Esse material é composto por cerca de 0,3% de carbono, sendo considerado de baixo carbono. A adição de elementos de liga provoca elevação das propriedades de resistência mecânica, no caso do aço 4130 tem-se por volta de 1% de cromo e

0,2% de molibdênio. Além desses últimos existem impurezas presentes, bem como outros elementos não considerados impurezas. Enxofre e fósforo devem ser mantidos com concentração abaixo de 0.04% para não afetar o material.

Tabela 1 - Propriedades do aço SAE 4130.

SAE 4130				
Composição química: C = 0,30%, Mn = 0,5%, Mo = 0,20%, Cr = 1,0%				
Propriedade	Valor na unidade métrica		Valor na unidade dos EUA	
Densidade	7.872 * 10 ³	kg / m ³	491.4	lb / ft ³
Módulos de elasticidade	205	GPa	29700	ksi
Expansão térmica (20 °C)	11,2 * 10 ⁻⁶	°C ⁻¹	6.20 * 10 ⁻⁶	em / (em * °F)
Capacidade de calor específico	477	J / (kg * K)	0.114	BTU / (lb * °F)
Condutividade térmica	42.7	W / (m * K)	296	BTU * em / (hr * ft ² * °F)
Resistividade elétrica	2,23 * 10 ⁻⁷	Ohm * m	2.23 * 10 ⁻⁵	Ohm * cm
Resistência à tração (recozido)	561	MPa	81300	psi
Força de rendimento (recozido)	361	MPa	52300	psi
Elongação (recozido)	28	%	28	%
Dureza (recozido)	82	RB	82	RB
Resistência à tração (normalizada)	669	MPa	97000	psi
Força de rendimento (normalizada)	436	MPa	63300	psi
Elongação (normalizada)	25	%	25	%
Dureza (normalizada)	93	RB	93	RB

Fonte: http://www.substech.com/dokuwiki/doku.php?id=alloy_steel_sae_4130

3 ANÁLISE DA DEFLEXÃO DEVIDO AOS ESFORÇOS PROVENIENTES DA ESTÁTICA DO VEÍCULO

O primeiro passo será fazer uma análise dos esforços provenientes da estática do veículo. A Figura 7 mostra a parte traseira de um kart, explicitando o eixo, na cor preta, já a Figura 8 mostra o elemento desenhado, com seus acessórios, no SolidWorks.



Figura 7 - Parte traseira do Kart.

Fonte: <http://www.carrosinfoco.com.br/carros/2014/09/o-kart-explicado-os-tipos-de-eixo/>

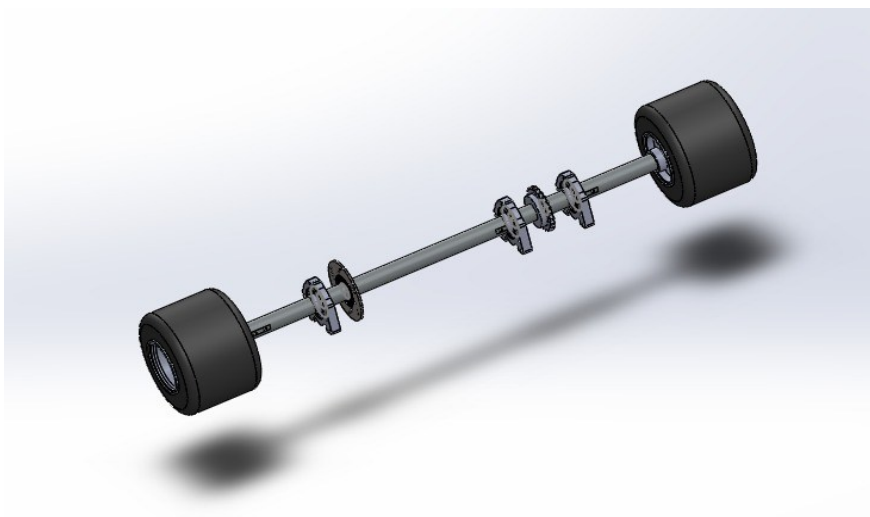


Figura 8 - Vista isométrica do eixo com dos seus elementos montados.

Fonte: Próprio Autor

3.1 Análise da deflexão em retas.

3.1.1 Caso Analítico

3.1.1.1 Reações de Apoios

Como hipóteses para formulação do digrama de forças mostrado na Figura 9, pode-se citar:

1. O veículo está movendo com velocidade constante, logo a aceleração é nula e trata-se de um caso onde a soma de todas as forças é nula, ou seja, um caso estático;
2. Serão considerados esforços planos, ou seja, a natureza espacial das forças pode ser desprezada, por convenção e simplificação dos cálculos, uma vez que todas são verticais e aproximadamente coplanares, para o caso estático as forças atuam no plano xy;
3. A parte traseira suporta 57% do peso total do veículo, que é uma distribuição de peso usado por fabricantes e equipes de Kart, segundo a fabricante de chassi Tonykart;
4. Cada roda recebe 50% do peso total da parte traseira, sendo tal valor adotado como uma convenção da simetria de carga em cada roda.
5. Será considerada massa do sistema (Piloto + Kart) de 223,18 kg.



Figura 9 - Diagrama de Corpo Livre

Para determinar as reações do eixo da Figura 9, seleciona-se a reação R_2 no suporte fixo 2 como redundante. Então, aplicando as equações de equilíbrio e deixando as reações 1 e 3 em função de R_2 :

$$R_3 = \frac{R_2 a + F(L_2 + L_3 - L_1)}{L_2} \quad (4)$$

$$R_1 = \frac{F(L_1 + L_2 - L_3) + R_2(L_2 - a)}{L_2} \quad (5)$$

A próxima etapa é remover a restrição correspondente à redundante (neste caso, remove-se o suporte 2). A estrutura liberada que permanece é uma viga biapoiada, conforme ilustra a Figura 10. A força F e a força redundante R_2 são agora aplicadas como carregamentos na estrutura liberada (Figuras 11 e 13).

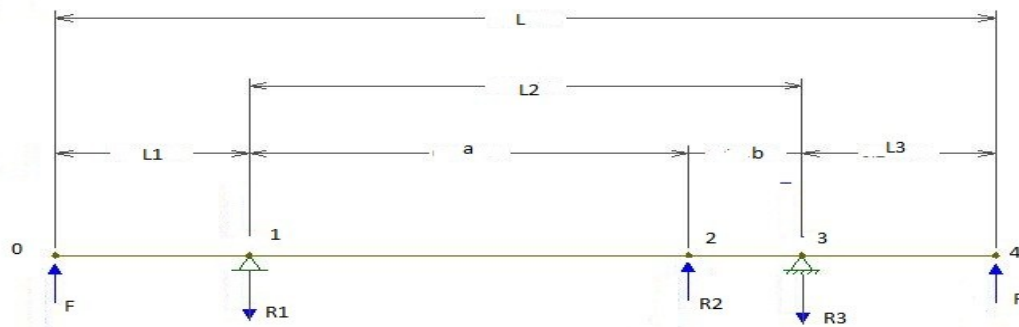


Figura 10 - Remoção do segundo apoio



Figura 11 - Aplicação das reações nas rodas na estrutura liberada.

A deflexão devido à força F no ponto 2 é $(\delta_1)_{estático}$, mostrada na Figura 12.

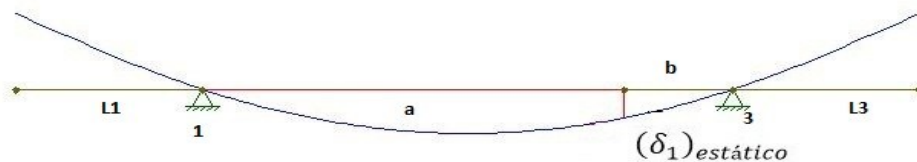


Figura 12 - Deflexão no ponto 2 devido as reações nas rodas.



Figura 13 - Aplicação da redundante na estrutura liberada.

A deflexão devido à redundante R_2 no ponto 2 é $(\delta_2)_{estático}$, mostrada na Figura 14.

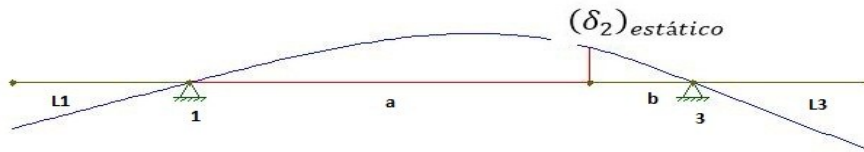


Figura 14 - Deflexão no ponto 2 devido a força redundante.

Uma vez que a deflexão na viga original é igual a zero no ponto 2, pois se trata de um rolamento, cuja deflexão é nula, obtém-se a seguinte equação de compatibilidade geométrica.

$$(\delta)_{estático} = (\delta_1)_{estático} - (\delta_2)_{estático} = 0 \quad (6)$$

As equações de força-deslocamento que resultam nas deflexões $(\delta_1)_{estático}$ e $(\delta_2)_{estático}$ em termos da força F e a redundante R_2 , são encontradas com auxílio da Tabela G.2 do apêndice G página 818 do Gere 2010.

$(\delta_1)_{estático}$ é caso 10 da Tabela G.2 do Gere 2010:

$$(\delta_1)_{estático} = \frac{FL_1a(L_2 - a)}{2EI} \quad (7)$$

$(\delta_2)_{estático}$ é caso 5 da Tabela G.2 do Gere 2010:

$$(\delta_2)_{estático} = \frac{R_2ba(L_2^2 - b^2 - a^2)}{6L_2EI} \quad (8)$$

Substituindo essas relações de força-deslocamento na equação de compatibilidade geométrica, resulta em:

$$(\delta)_{estático} = \frac{FL_1a(L_2 - a)}{2EI} - \frac{R_2ba(L_2^2 - b^2 - a^2)}{6L_2EI} = 0 \quad (9)$$

que pode ser resolvida para reação redundante

$$R_2 = \frac{3FL_1L_2(L_2 - a)}{b(L_2^2 - b^2 - a^2)} \quad (10)$$

A Tabela 2 mostra os valores das dimensões do eixo e a Tabela 3 os valores das forças nas rodas e as reações nos rolamentos.

Tabela 2- Dimensões do eixo.

<i>Dimensão</i>	<i>Valores (m)</i>
<i>a</i>	0,485
<i>b</i>	0,125
<i>L₁</i>	0,215
<i>L₂ = a + b</i>	0,610
<i>L₃</i>	0,215
<i>L</i>	1,040

Tabela 3 - Valores das Reações no eixo.

<i>Força</i>	<i>Magnitude(N)</i>
<i>F</i>	624,00
<i>R₁</i>	1038,93
<i>R₂</i>	2024,85
<i>R₃</i>	2233,92

Para o cálculo do momento de inércia, será utilizado a expressão apresentado por (Gere 2010) para uma seção circular vazada, dado por

$$I = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{64} = 2,3 \cdot 10^{-8} m^4 \quad (11)$$

e o módulo de elasticidade do material é $E = 205GPa$ conforme a Tabela 1.

3.1.1.2 Diagramas de esforços solicitantes

Conhecendo as reações nos pontos 1, 2 e 3, região onde estão os rolamentos, pode-se encontrar as forças de cisalhamento e os momentos fletores no

eixo. Estas quantidades podem ser obtidas pelas técnicas usuais envolvendo diagrama de corpo livre e equações de equilíbrio. A Figura 15 ilustra o diagrama de corpo livre para o trecho $L_1 \leq x \leq L_1 + a$.

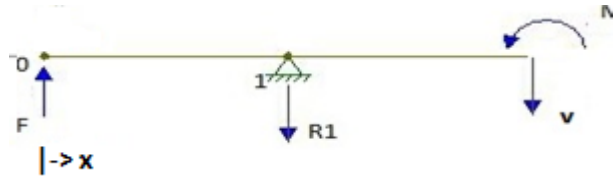


Figura 15 - Diagrama de corpo livre.

A força cisalhante atuando no eixo é:

$$V_1(x) = \begin{cases} F, & 0 \leq x \leq L_1 \\ F - R_1, & L_1 \leq x \leq L_1 + a \\ F - R_1 + R_2, & L_1 + a \leq x \leq L_1 + L_2 \\ F - R_1 + R_2 - R_3, & L_1 + L_2 \leq x \leq L \end{cases} \quad (12)$$

O diagrama de esforços cortantes do eixo é ilustrado na Figura 16.

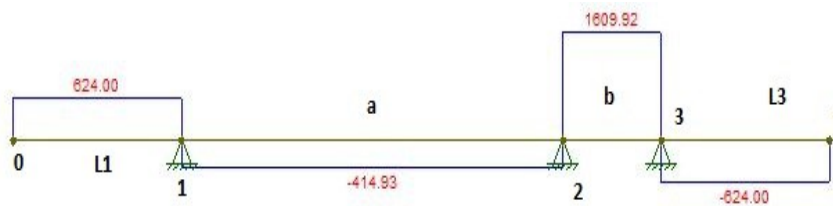


Figura 16 - Diagrama de esforços cortantes.

O momento fletor atuando no eixo é :

$$M_1(x) = \begin{cases} Fx, & 0 \leq x \leq L_1 \\ Fx - R_1(x - L_1), & L_1 \leq x \leq L_1 + a \\ Fx - R_1(x - L_1) + R_2(x - (L_1 + a)), & L_1 + a \leq x \leq L_1 + L_2 \\ Fx - R_1(x - L_1) + R_2(x - (L_1 + a)) - R_3(x - (L_1 + L_2)), & L_1 + L_2 \leq x \leq L \end{cases} \quad (13)$$

O diagrama de momento fletor do eixo é ilustrado na Figura 17.

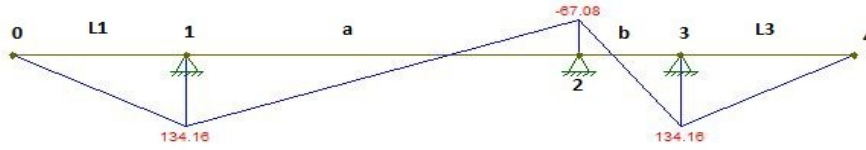


Figura 17 - Diagrama de momento fletor.

3.1.1.3 Curva de deflexão do eixo

A equação diferencial da curva de deflexão é

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{M_1(x)}{EI} \quad (14)$$

A primeira integração da equação diferencial produz as seguintes expressões para inclinação:

$$\theta_1(x) = \frac{1}{EI} \left(\frac{Fx^2}{2} + k_1 \right), \quad 0 \leq x \leq L_1 \quad (15)$$

$$\theta_2(x) = \frac{1}{EI} \left(\frac{Fx^2}{2} - R_1 \left(\frac{1}{2}x^2 - L_1 \right) + k_3 \right), \quad L_1 \leq x \leq L_1 + a \quad (16)$$

$$\theta_3(x) = \frac{1}{EI} \left(\frac{Fx^2}{2} - R_1 \left(\frac{1}{2}x^2 - L_1 \right) + R_2 \left(\frac{1}{2}x^2 - (L_1 + a)x \right) + k_5 \right), \quad L_1 + a \leq x \leq L_1 + L_2 \quad (17)$$

$$\theta_4(x) = \frac{1}{EI} \left(\frac{Fx^2}{2} - R_1 \left(\frac{1}{2}x^2 - L_1 \right) + R_2 \left(\frac{1}{2}x^2 - (L_1 + a)x \right) - R_3 \left(\frac{x^2}{2} - (L_1 + L_2)x \right) + k_7 \right), \quad L_1 + L_2 \leq x \leq L \quad (18)$$

A segunda integração da equação diferencial fornece as seguintes expressões para deflexão

$$v_1(x) = \frac{1}{EI} \left(\frac{Fx^3}{6} + k_1x + k_2 \right), \quad 0 \leq x \leq L_1 \quad (19)$$

$$v_2(x) = \frac{1}{EI} \left(\frac{Fx^3}{6} - R_1 \left(\frac{1}{6}x^3 - L_1x \right) + k_3x + k_4 \right), \quad L_1 \leq x \leq L_1 + a \quad (20)$$

$$v_3(x) = \frac{1}{EI} \left(\frac{Fx^3}{6} - R_1 \left(\frac{1}{6}x^2 - L_1 \right) x + R_2 \left(\frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}(L_1 + a)x^2 \right) + k_5x + k_6 \right), \quad L_1 + a \leq x \leq L_1 + L_2 \quad (21)$$

$$v_4(x) = \frac{1}{EI} \left(\frac{Fx^3}{6} - R_1 \left(\frac{1}{6}x^2 - L_1 \right) x + R_2 \left(\frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}(L_1 + a)x^2 \right) - R_3 \left(\frac{x^3}{6} - \frac{1}{2}(L_1 + L_2)x^2 \right) + k_7x + k_8 \right), \quad L_1 + L_2 \leq x \leq L \quad (22)$$

Essas equações contêm duas constantes de integração adicionais, totalizando oito incógnitas a serem determinadas. Todas as constantes devido à integração podem ser encontradas a partir das seguintes condições de contorno conforme mostra a Tabela 4.

Tabela 4 - Condições de contorno.

$x \text{ (m)}$	<i>condição de contorno</i>
L_1	$\theta_1(L_1) = \theta_2(L_1)$
L_1	$v_1(L_1) = 0$
L_1	$v_2(L_1) = 0$
$L_1 + a$	$v_2(L_1 + a) = 0$
$L_1 + a$	$v_3(L_1 + a) = 0$
$L_1 + L_2$	$v_3(L_1 + L_2) = 0$
$L_1 + L_2$	$\theta_3(L_1 + L_2) = \theta_4(L_1 + L_2)$
$L_1 + L_2$	$v_4(L_1 + L_2) = 0$

Aplicando as condições de contorno, encontram-se as seguintes expressões para as constantes conforme mostra a Tabela 5.

Tabela 5 - Expressões das constantes de integração.

<i>Constante</i>	<i>Expressão</i>
k_1	$\frac{1}{6}(-3L_1^2 - 3L_1a - a^2)F + \frac{1}{6}R_1a^2$
k_2	$\frac{1}{6}L_1(2FL_1^2 + 3FL_1a + a^2(F - R_1))$
k_3	$-\frac{1}{2}L_1((F + R_1)L_1 + Fa) - \frac{1}{6}a^2(F - R_1)$
k_4	$\frac{1}{6}L_1((2F + R_1)L_1 + (F - R_1)a)(L_1 + a)$
k_5	$\frac{1}{6}(((-F + R_1 + 2R_2)a - 3L_1(F - 2R_2))a + ((-F + R_1 + 2R_2) + (-F + R_1 - R_2)L_2)L_2) - \frac{1}{2}L_1(F_1L_2 + L_1(F + R_1 - R_2))$
k_6	$\frac{1}{6}(L_1 + L_2)(L_1 + a)((2F + R_1 - R_2)L_1 + (F - R_1 + R_2)L_2 + (F - R_1 - 2R_2a)a)$
k_7	$\frac{1}{6}(((-F + R_1 - R_2 + 3R_3)L_2((-3F - 6R_3)L_1 - (F - R_1 - 2R_2)a))L_2 + L_1(3L_1(R_2 - (F + R_1 + R_3)) - 3(F - 2R_2)a) - (F - R_1 - 2R_2)^2)$
k_8	$\frac{1}{6}((2F + R_1 - R_2 + R_3)L_1^2 + ((F - R_1 + R_2 + 2R_3)L_2 + 3a(F - R_2))L_1 + R_3L_2^2 + a(F - R_1 + R_2)L_2 + (F - R_1 - 2R_2)a^2)(L_1 + L_2)$

Substituindo as constantes pelos seus valores das Tabelas 1 e 2, tem as seguintes expressões para a inclinação

$$\theta_1(x) = \frac{1}{EI} \left(312x^2 - \frac{302563}{9859} \right), \quad 0 \leq x \leq 0,215 \quad (23)$$

$$\theta_2(x) = \frac{1}{EI} \left(-\frac{41493}{200}x^2 + \frac{492084}{2203}x - \frac{1017608}{18603} \right), \quad 0,215 \leq x \leq 0,700 \quad (24)$$

$$\theta_3(x) = \frac{1}{EI} \left(\frac{20124}{25}x^2 - \frac{1191637}{998}x + \frac{275867}{625} \right), \quad 0,700 \leq x \leq 0,825 \quad (25)$$

$$\theta_4(x) = \frac{1}{EI} \left(-312x^2 + \frac{964353}{1486}x - \frac{199915}{627} \right), \quad 0,825 \leq x \leq 1,040 \quad (26)$$

Substituindo as constantes pelos seus valores das Tabelas 1 e 2, tem as seguintes expressões para a curva de deflexão

$$v_1(x) = \frac{1}{EI} \left(104x^3 - \frac{81019}{2640}x + \frac{227807}{40939} \right), \quad 0 \leq x \leq 0,215 \quad (27)$$

$$v_2(x) = \frac{1}{EI} \left(-\frac{13831}{200}x^3 + \frac{246042}{2203}x^2 - \frac{1017608}{18603}x + \frac{90434}{12413} \right), \quad 0,215 \leq x \leq 0,700 \quad (28)$$

$$v_3(x) = \frac{1}{EI} \left(\frac{6708}{25}x^3 - \frac{905668}{1517}x^2 + \frac{275867}{625}x - \frac{271714}{2505} \right), \quad 0,700 \leq x \leq 0,825 \quad (29)$$

$$v_4(x) = \frac{1}{EI} \left(-104x^3 + \frac{1161961}{3581}x^2 - \frac{199915}{627}x + \frac{237605}{2362} \right), \quad 0,825 \leq x \leq 1,040 \quad (30)$$

Sintetizando todas curvas e traçando o gráfico, tem-se a ilustração da Figura 18.



Figura 18 - Deflexão modelo analítico.

3.1.2 Solução através do Ansys

As hipóteses utilizadas para simulação no Ansys são as mesmas utilizadas para a solução analítica. Criou-se um modelo do eixo no Ansys conforme ilustra a Figura 19.

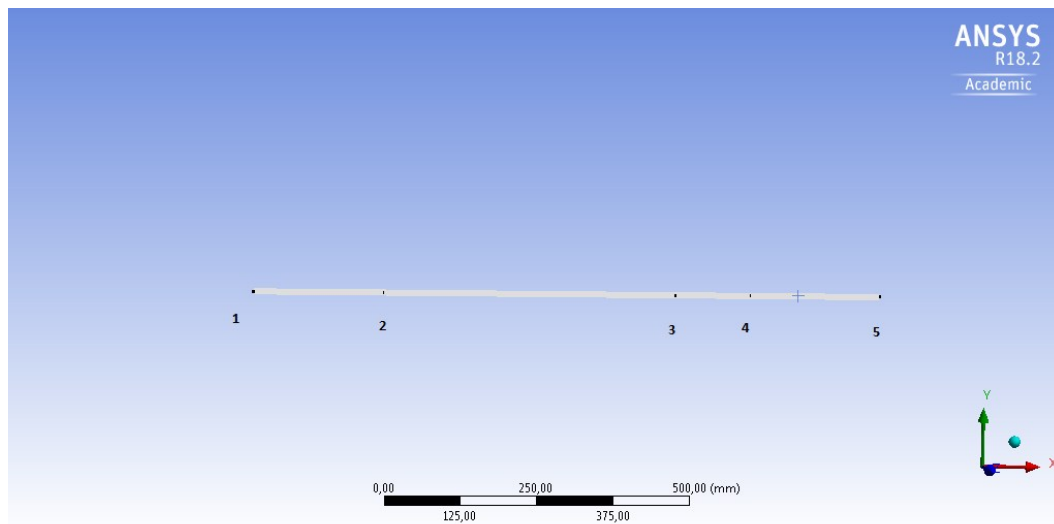


Figura 19 - Modelo Ansys.

Nesse modelo será utilizado o elemento tipo viga de dois nós e seis graus de liberdade por nó para representar o eixo. Visto que esses elementos são utilizados para peças cujo comprimento é muito maior que sua profundidade e altura. Nos nós 1 e 5 serão aplicados os carregamentos concentrados das reações das rodas ($F_{1y} = F_{5y} = 624N$). Nos nós 2, 3 e 4 serão aplicadas as condições de contornos essenciais, ou seja, os deslocamentos em cada direção será igual a zero ($u_x = u_y = u_z = 0$) e a rotação na direção do eixo x foi fixada, pois neste trabalho a torção do eixo não irá ser considerada. A Figura 20 ilustra os carregamentos e as condições de contornos aplicados em cada nós.

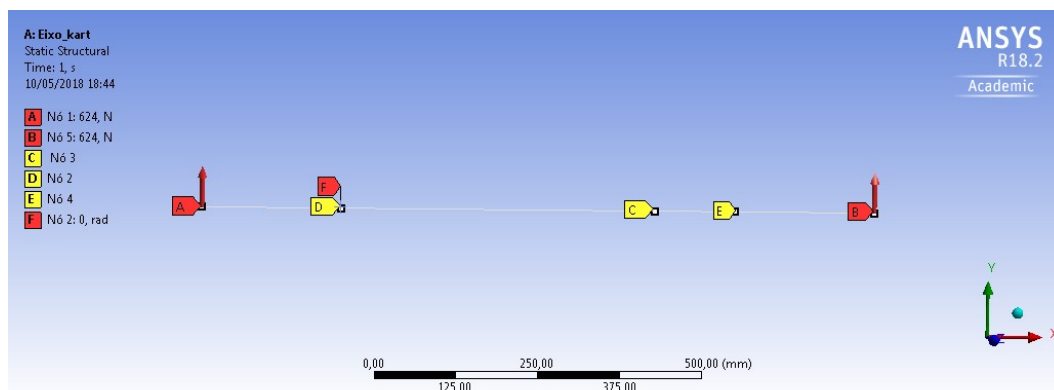


Figura 20 - Condições de Contorno.

O resultado da deflexão do eixo é ilustrado nas Figuras 21 e 22.

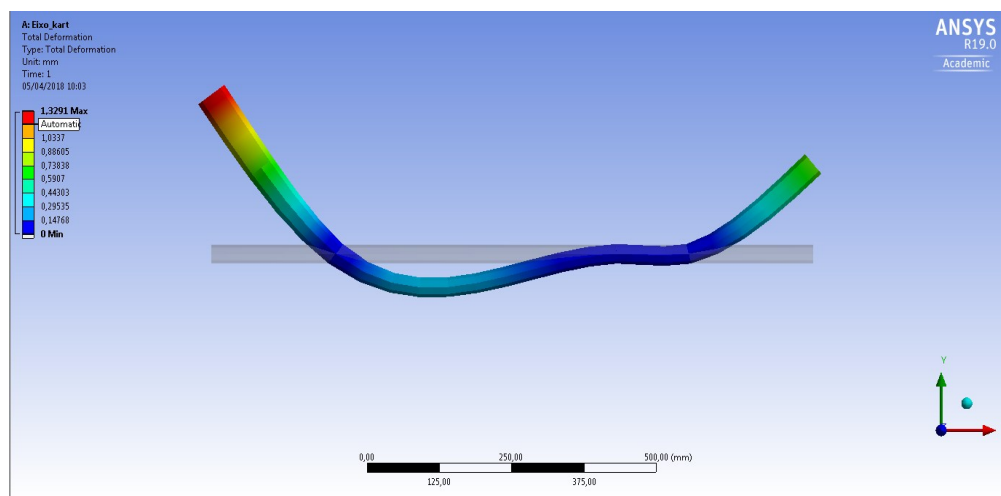


Figura 21 - Resultado gerado pelo Ansys.

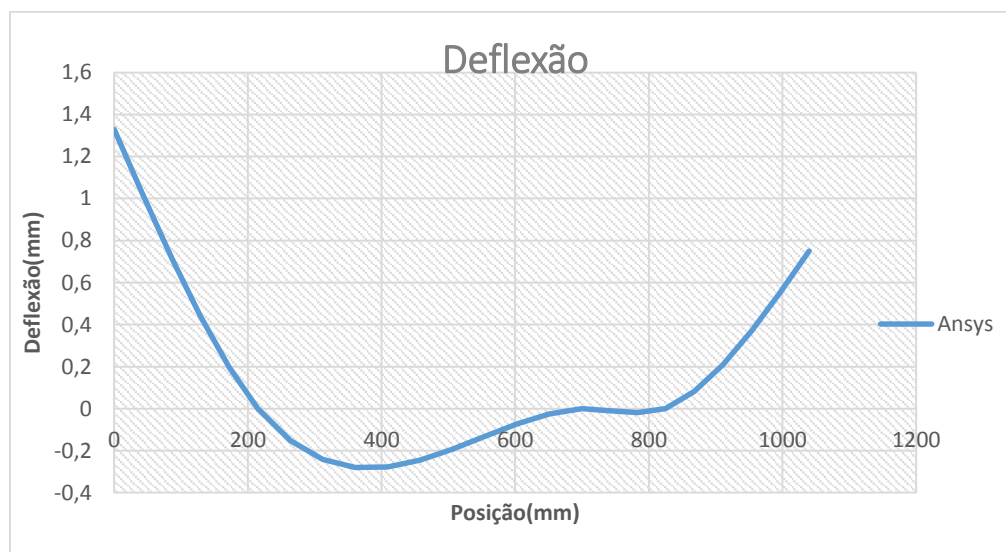


Figura 22 - Resultado para deflexão do modelo Ansys.

3.1.3 Solução através do Ftool

As hipóteses utilizadas para simulação no Ftool, são as mesmas utilizadas para a solução analítica. Criou-se um modelo do eixo no Ftool conforme ilustrado na Figura 23, no qual nos nós 2, 3 e 4 são aplicadas as condições de contorno ($u_x = u_y = 0$) e a rotação na direção z é livre. As Figuras 24 e 25 ilustram o resultado gerado pelo Ftool.

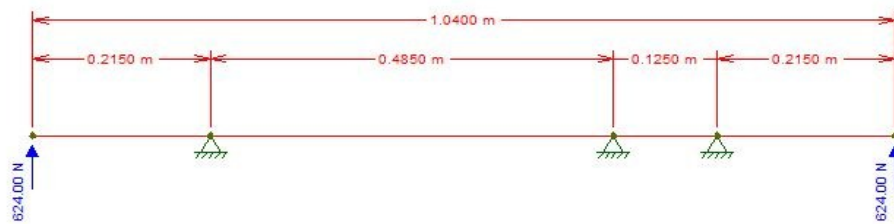


Figura 23 - Modelo Ftool

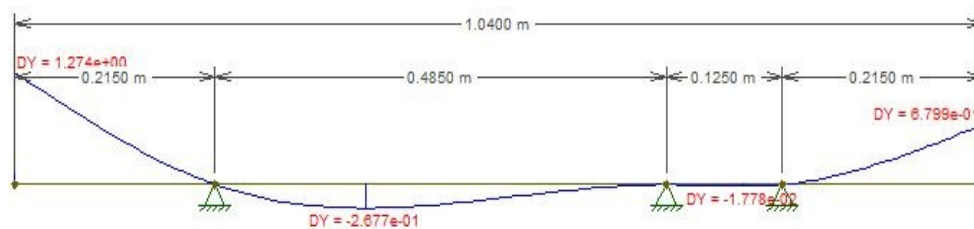


Figura 24 - Resultado Ftool



Figura 25 Resultado da deflexão modelo Ftool.

3.1.4 Comparação dos métodos

O erro percentual foi calculado utilizando a seguinte relação

$$Erro(\%) = \frac{|valor\ aproximado - valor\ exato|}{|valor\ exato|} \quad (31)$$

O maior deslocamento foi $v_1(0) = 1,27\ mm$ na posição $x = 0,00$ para o modelo analítico e o modelo ftool, foi encontrado o mesmo valor. No entanto, para o modelo Ansys foi encontrado um valor de $v_{ansys} = 1,329\ mm$. Que representa um erro de 5,6%. A Figura 26 mostra a comparação das três soluções.

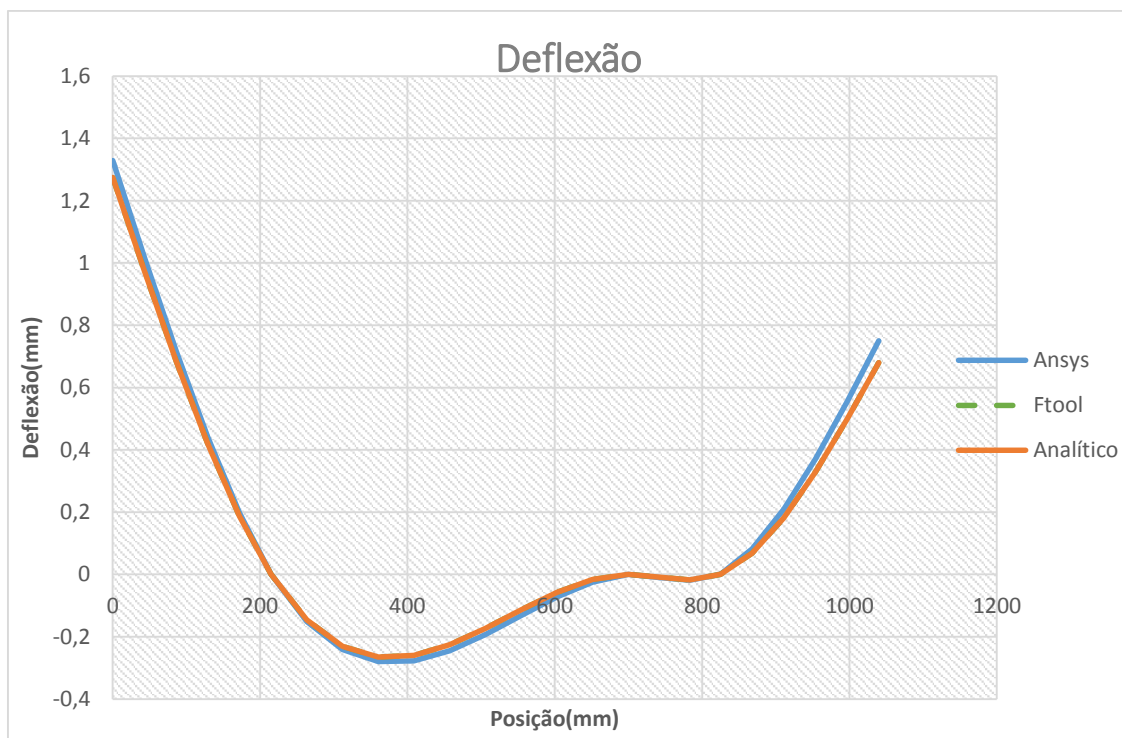


Figura 26 - comparação das soluções

4 ANÁLISE DA DEFLEXÃO DEVIDO AOS ESFORÇOS PROVENIENTES DA DINÂMICA DO VEÍCULO

Nas seções a seguir serão estudados os esforços provenientes da dinâmica do veículo, isto é, curva estacionária, tração e frenagem. No entanto, as deflexões do eixo serão analisadas de maneira estática.

4.1 Análise de deflexão de curvas estacionárias

4.1.1 Caso analítico

As hipóteses utilizadas nesse caso são:

1. O veículo está movendo com velocidade constante.
2. Serão considerados esforços planos, ou seja, a natureza espacial das forças pode ser desprezada, por convenção e simplificação dos cálculos, uma vez que todas são verticais e aproximadamente coplanares, para este caso as forças estão atuando no plano xy;
3. A parte traseira suporta 57% do peso total do veículo, que é uma distribuição de peso usado por fabricantes e equipes de Kart, segundo a fabricante de chassi Tonykart
4. A roda interna a curva irá perder contato com a pista, isto é, força normal tende a zero e a roda externa a pista irá reagir 100% o peso traseiro do veículo;
5. A distribuição da força centrípeta na parte traseira será de 60% da força centrípeta total e a curva realizada é de 90°, realizada em alta velocidade.

A Figura 27 e Tabela 6 mostram os parâmetros geométricos da curva.

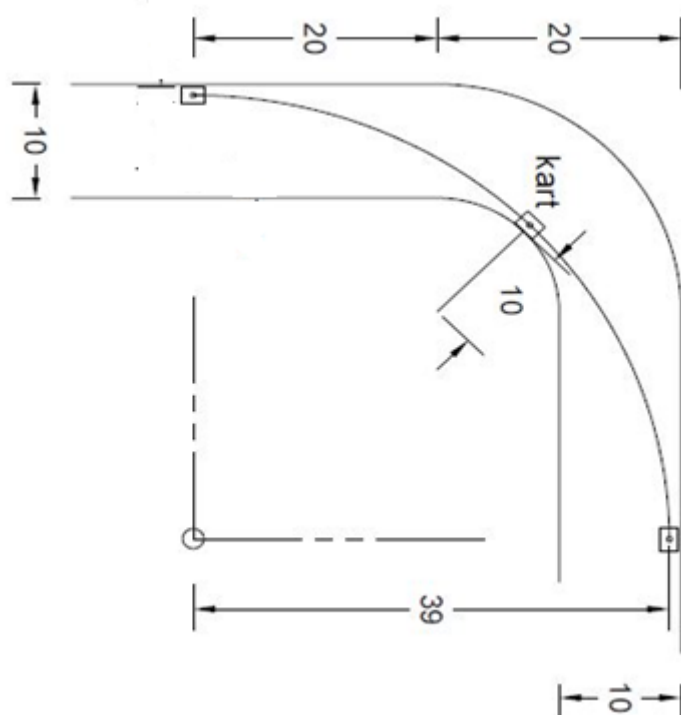


Figura 27 - Curva analisada.

Autor: Cristiano Sandroni.

Tabela 6 - Dimensões da Curva.

<i>Dimensões</i>	<i>valores</i>
<i>Largura da pista</i>	10 m
<i>arco</i>	90 graus
<i>Raio interno</i>	10 m
<i>Raio externo</i>	20 m
<i>Raio do arco percorrido pelo kart</i>	39 m

Para perda de contato da força normal na roda esquerda tem a seguinte representação conforme a Figura 28, na qual F é a reação da roda devido ao peso total do kart na parte traseira e F_c é a força centrípeta. Deslocando-se a força F_c do contato com o solo para o centro do eixo tem-se a seguinte representação, adicionando o momento M_c devido deslocamento da força centrípeta para centro do eixo, conforme ilustrado a Figura 29.



Figura 28 - Forças atuando na curva estudada.



Figura 29 - Diagrama de corpo livre para curva

Nas duas próximas seções serão calculadas separadamente a deflexão devido a distribuição de peso e a deflexão devido a contribuição da força centrípeta na parte traseira. Logo, através do princípio da superposição, a deflexão total no eixo será a soma da deflexão desses dois casos.

4.1.1.1 Deflexão devido a distribuição de peso

4.1.1.1.1 Reações de apoios

Para o caso de curvas com a perda da normal na roda esquerda, tem a seguinte representação para a distribuição de peso conforme ilustra Figura 30.

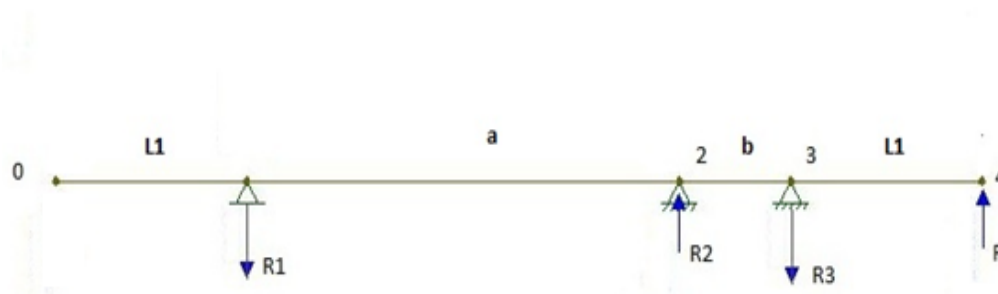


Figura 30 - Representação das Reações devido ao peso.

Para determinar as reações do eixo da Figura 30, seleciona-se a reação R_2 como redundante. Então, tem-se as outras reações em termos de R_2

$$R_1 = F + R_2 - \frac{(L_2 + L_1)F + aR_2}{L_2} \quad (32)$$

$$R_3 = \frac{(L_2 + L_1)F + aR_2}{L_2} \quad (33)$$

Removendo a restrição correspondente à redundante, a estrutura liberada que permanece é uma viga biapoiada conforme ilustra a Figura 31.



Figura 31 - Remoção do segundo apoio.

A força F e a redundante R_2 são agora aplicadas como carregamentos na estrutura liberada (Figuras 32 e 33).

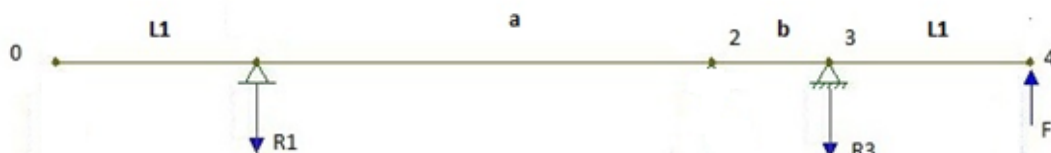


Figura 32 Deflexão no ponto 2 devido a força F .



Figura 33 -Deflexão devido a força redundante.

A deflexão devido a força F no ponto 2 é $(\delta_1)_{curva}$ e a deflexão no mesmo ponto devido a redundante é $(\delta_2)_{curva}$. Uma vez que a deflexão na viga original é igual a zero, obtém-se a seguinte equação de compatibilidade geométrica.

$$(\delta)_{curva} = (\delta_1)_{curva} - (\delta_2)_{curva} \quad (34)$$

Onde $(\delta_1)_{curva}$ e $(\delta_2)_{curva}$ são os casos 7 e 5 da tabela G.2 do Gere 2010

$$(\delta_1)_{curva} = \frac{FL_1b}{6LEI}(2L_2^2 - 3L_2b + b^2) \quad (35)$$

$$(\delta_2)_{curva} = \frac{R_2ba(L_2^2 - b^2 - a^2)}{6LEI} \quad (36)$$

Substituindo essas equações na equação de compatibilidade geométrica, resulta em

$$(\delta)_{curva} = \frac{FL_1b}{6L_2EI}(2L_2^2 - 3L_2b + b^2) - \frac{R_2ba(L_2^2 - b^2 - a^2)}{6L_2EI} \quad (37)$$

que pode ser resolvida para o termo redundante

$$R_2 = \frac{FL_1(2L_2 - 3L_2b + b^2)}{a(L_2^2 - a^2 - b^2)} \quad (38)$$

As dimensões são as mesmas utilizadas na Tabela 2. A Tabela 7 mostra os valores da força F e as reações nos rolamentos.

Tabela 7 - Valores das reações no eixo.

<i>Força</i>	<i>Amplitude (N)</i>
F	1248,00
R_1	56,67
R_2	2423,16
R_3	3614,49

4.1.1.1.2 Diagramas de esforços solicitantes

Logo, a força cisalhante atuando no eixo é

$$V_2(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq L_1 \\ -R_1, & L_1 \leq x \leq L_1 + a \\ -R_1 + R_2, & L_1 + a \leq x \leq L_1 + L_2 \\ -R_1 + R_2 - R_3, & L_1 + L_2 \leq x \leq L \end{cases} \quad (39)$$

O diagrama de esforços cortantes do eixo é ilustrado conforme a Figura 34.

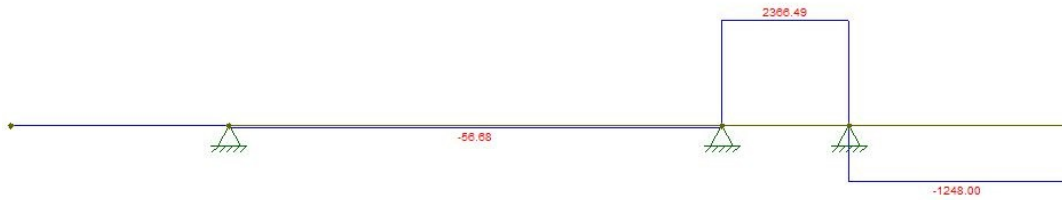


Figura 34 - Diagrama de esforços cortantes.

O momento fletor atuando no eixo é

$$M_2(x) =$$

$$\begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq L_1 \\ -R_1(x - L_1), & L_1 \leq x \leq L_1 + a \\ -R_1(x - L_1) + R_2(x - (L_1 + a)), & L_1 + a \leq x \leq L_1 + L_2 \\ -R_1(x - L_1) + R_2(x - (L_1 + a)) - R_3(x - (L_1 + L_2)), & L_1 + L_2 \leq x \leq L \end{cases} \quad (40)$$

O momento fletor atuando no eixo é ilustrado conforme a Figura 35.



Figura 35 - Diagrama de momento Fletor.

4.1.1.1.3 Deflexão do eixo

A equação diferencial da curva de deflexão é:

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{M_2(x)}{EI} \quad (41)$$

A primeira integração da equação diferencial produz as seguintes expressões para inclinação

$$\theta_5(x) = k_9, 0 \leq x \leq L_1 \quad (42)$$

$$\theta_6(x) = \frac{1}{EI} \left(-R_1 \left(\frac{1}{2} x^2 - L_1 \right) + k_{11} \right), L_1 \leq x \leq L_1 + a \quad (43)$$

$$\theta_8(x) = \frac{1}{EI} \left(-R_1 \left(\frac{1}{2} x^2 - L_1 \right) + R_2 \left(\frac{1}{2} x^2 - (L_1 + a)x \right) + k_{13} \right), L_1 + a \leq x \leq L_1 + L_2 \quad (44)$$

$$\theta_9(x) = \frac{1}{EI} \left(-R_1 \left(\frac{1}{2} x^2 - L_1 \right) + R_2 \left(\frac{1}{2} x^2 - (L_1 + a)x \right) - R_3 \left(\frac{1}{2} x^2 - (L_1 + L_2)x \right) + k_{15} \right), L_1 + L_2 \leq x \leq L \quad (45)$$

A segunda integração da equação diferencial fornece as seguintes expressões para deflexão

$$v_5(x) = k_9 + k_{10}, 0 \leq x \leq L_1 \quad (46)$$

$$v_6(x) = \frac{1}{EI} \left(-R_1 \left(\frac{1}{6} x^3 - L_1 x \right) + k_{11} x + k_{12} \right), L_1 \leq x \leq L_1 + a \quad (47)$$

$$v_7(x) = \frac{1}{EI} \left(-R_1 \left(\frac{1}{6} x^3 - L_1 x \right) + R_2 \left(\frac{1}{6} x^3 - \frac{1}{2} (L_1 + a)x^2 \right) + k_{13} x + k_{14} \right), L_1 + a \leq x \leq L_1 + L_2 \quad (48)$$

$$v_8(x) = \frac{1}{EI} \left(-R_1 \left(\frac{1}{6} x^3 - L_1 x \right) + R_2 \left(\frac{1}{6} x^3 - \frac{1}{2} (L_1 + a)x^2 \right) - R_3 \left(\frac{1}{6} x^3 - \frac{(L_1 + L_2)x^2}{2} \right) + k_{15} x + k_{16} \right), L_1 + L_2 \leq x \leq L \quad (49)$$

Essas equações contêm duas constantes de integração adicionais, totalizando oito constantes, que podem ser encontradas a partir das condições de contorno apresentadas na Tabela 8. Aplicando as condições de contorno, encontram-se as seguintes expressões para as constantes conforme mostra a Tabela 9.

Tabela 8- Condições de contorno

$x \text{ (m)}$	<i>condição de contorno</i>
L_1	$\theta_5(L_1) = \theta_6(L_1)$
L_1	$v_5(L_1) = 0$
L_1	$v_6(L_1) = 0$
$L_1 + a$	$v_6(L_1 + a) = 0$
$L_1 + a$	$v_7(L_1 + a) = 0$
$L_1 + L_2$	$v_7(L_1 + L_2) = 0$
$L_1 + L_2$	$\theta_7(L_1 + L_2) = \theta_8(L_1 + L_2)$
$L_1 + L_2$	$v_8(L_1 + L_2) = 0$

Tabela 9 - Expressões das constantes de integração.

<i>Constante</i>	<i>Expressão</i>
k_9	$\frac{1}{6EI} R_1 a^2$
k_{10}	$\frac{1}{6EI} R_1 a^2 L_1$
k_{11}	$\frac{1}{6} R_1 (a^2 - 3L_1^2)$
k_{12}	$\frac{1}{6} L_1 R_1 (L_1^2 - a^2)$
k_{13}	$\frac{1}{6} ((2a^2 + (6L_1 + 2L_2)a + 3L_1^2 - L_2^2)R_2 + (-3L_1^2 + L_2^2 + L_2a + a^2)R_1)$
k_{14}	$-\frac{1}{6} (L_1 + a)(L_1 + L_2)((-R_1 + R_2)L_1 + (R_1 + 2R_2)a + (R_1 - R_2)L_2)$
k_{15}	$\frac{1}{6} ((R_1 - 2R_2 - 3R_3)L_2^2 + (-6R_3L_1 + (R_1 + 2R_2)a)L_2 + (-3R_1 + 3R_2 - 3R_3)L_1^2 + 6L_1aR_2 + (R_1 + 2R_2)a^2)$
k_{16}	$-\frac{1}{6} (L_1 + L_2) \left((-R_1 + R_2 - R_3)L_1^2 + ((R_1 - R_2 - 2R_3)L_2 + 3aR_2)L_1 - R_3L_2^2 + a(R_1 - R_2)L_2 + (R_1 + 2R_2)a^2 \right)$

Substituindo as constantes pelos seus valores das Tabelas 1 e 9, tem-se as seguintes expressões para a inclinação

$$\theta_5(x) = \frac{1}{EI} \left(\frac{296928}{133649} \right), \quad 0 \leq x \leq 0,215 \quad (50)$$

$$\theta_6(x) = \frac{1}{EI} \left(-\frac{5667}{200}x^2 + \frac{81889}{6721}x - \frac{70429}{77232} \right), \quad 0,215 \leq x \leq 0,700 \quad (51)$$

$$\theta_7(x) = \frac{1}{EI} \left(\frac{236649}{200}x^2 - \frac{5422577}{322}x + \frac{1103549}{1856} \right), \quad 0,700 \leq x \leq 0,825 \quad (52)$$

$$\theta_8(x) = \frac{1}{EI} \left(-624x^2 + \frac{898165}{692}x - \frac{669787}{1054} \right), \quad 0,825 \leq x \leq 1,040 \quad (53)$$

Substituindo as constantes pelos seus valores das Tabelas 1 e 9, tem-se as seguintes expressões para a curva de deflexão

$$v_5(x) = \frac{1}{EI} \left(\frac{296928}{133649}x - \frac{25012}{52363} \right), \quad 0 \leq x \leq 0,215 \quad (45)$$

$$v_6(x) = \frac{1}{EI} \left(-\frac{1889}{200}x^3 + \frac{80896}{13279}x^2 + \frac{70429}{77232}x - \frac{80178}{208907} \right), \quad 0,215 \leq x \leq 0,700 \quad (54)$$

$$v_7(x) = \frac{1}{EI} \left(\frac{78883}{200}x^3 - \frac{542257}{644}x^2 + \frac{1103549}{1856}x - \frac{716203}{5156} \right), \quad 0,700 \leq x \leq 0,825 \quad (55)$$

$$v_8(x) = \frac{1}{EI} \left(-208x^3 + \frac{898165}{1384}x^2 - \frac{669787}{1054}x + \frac{225076}{1129} \right), \quad 0,825 \leq x \leq 1,040 \quad (56)$$

4.1.1.2 Deflexão devido a força centrípeta

4.1.1.2.1 Reações de apoios

Para o caso da deflexão devido a força centrípeta, tem a seguinte representação conforme ilustra a Figura 36.



Figura 36 - Modelo para cálculo de deflexão devido a força centrípeta.

Para determinar as reações do eixo da Figura 36, seleciona-se a reação R_7 no rolamento 2 como redundante. Então, as equações de equilíbrio que expressam as outras reações desconhecidas em termos da redundante são como seguem:

$$R_6 = R_7 - \frac{aR_7 + M_c}{L_2} \quad (57)$$

$$R_8 = \frac{aR_7 + M_c}{L_2} \quad (58)$$

Removendo a restrição correspondente à redundante, a estrutura liberada que permanece é uma viga biapoiada. O momento M_c e a redundante R_7 são agora aplicados como carregamentos na estrutura liberada Figuras 37 e 38.



Figura 37 - Deflexão devido ao momento no ponto 2.



Figura 38 - Deflexão devido ao redundante.

A equação de força deslocamento para o ponto 2 devido ao momento é o caso 7 da Tabela G.2 do Gere 2010:

$$(\delta)_{cd1} = \frac{M_c b}{6L_2 EI} (2L_2^2 - 3L_2 b + b^2) \quad (59)$$

A equação de força deslocamento para o ponto 2 devido à redundante é o caso 5 da Tabela G.2 do Gere 2010:

$$(\delta)_{cd2} = \frac{R_7 ba}{6L_2 EI} (L_2^2 - b^2 - a^2) \quad (60)$$

A equação de compatibilidade geométrica é:

$$(\delta)_{cd} = \frac{M_c a}{6L_2 EI} (2L_2^2 - 3L_2 a + a^2) - \frac{R_7 ba}{6L_2 EI} (L_2^2 - b^2 - a^2) = 0 \quad (61)$$

Logo, a reação no rolamento 2 é:

$$R_7 = \frac{M_c (2L_2^2 - 3L_2 a + a^2)}{b(L_2^2 - a^2 - b^2)} \quad (62)$$

A Tabela 10 fornece os valores das grandezas na realização da curva.

Tabela 10 - Dados da curva.

<i>Dados</i>	<i>Valores</i>
<i>velocidade</i>	25 m/s
<i>aceleração centrípeta</i>	16,03 m/s ²
<i>Massa do sistema</i>	223,18 kg
<i>Força centrípeta atuando na parte traseira (F_c)</i>	2145,96 N
<i>Raio do pneu</i>	139,70 mm
<i>Momento (M)</i>	299,79 Nm

Substituindo os valores das dimensões do eixo da Tabela 2 e da Tabela 10 tem-se os seguintes valores de reações conforme mostra a Tabela 11.

Tabela 11 - Valores das Reações.

<i>Reações</i>	<i>Valores (N)</i>
<i>R₆</i>	63,33
<i>R₇</i>	2707,38
<i>R₈</i>	2644,05

4.1.1.2.2 Diagramas de esforços solicitantes

A força cisalhante atuando no eixo é

$$V_3(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq L_1 \\ R_6, & L_1 \leq x \leq L_1 + a \\ R_6 - R_7, & L_1 + a \leq x \leq L_1 + L_2 \\ R_6 - R_7 + R_8, & L_1 + L_2 \leq x \leq L \end{cases} \quad (63)$$

O esforço cortante atuando no eixo é ilustrado conforme a Figura 39.



Figura 39 - Diagrama de esforços cortantes.

O momento fletor atuando no eixo é

$$M_3(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq L_1 \\ R_6(x - L_1), & L_1 \leq x \leq L_1 + a \\ R_6(x - L_1) - R_7(x - (L_1 + a)), & L_1 + a \leq x \leq L_1 + L_2 \\ R_6(x - L_1) - R_7(x - (L_1 + a)) + R_8(x - (L_1 + L_2)), & L_1 + L_2 \leq x \leq L \end{cases} \quad (64)$$

O momento fletor atuando no eixo é ilustrado na Figura 40.

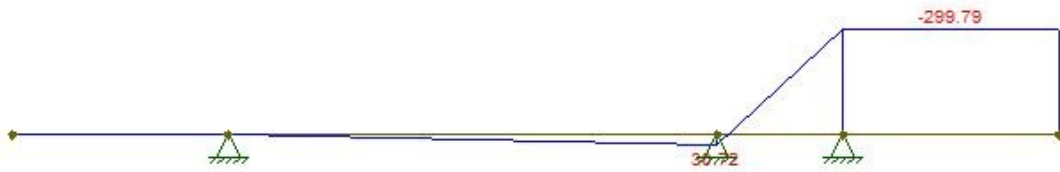


Figura 40 - Diagrama de momento fletor.

4.1.1.2.3 Deflexão do eixo

A equação diferencial da curva de deflexão é

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{M_3(x)}{EI} \quad (65)$$

A primeira integração da equação diferencial produz as seguintes expressões para inclinação

$$\theta_9(x) = k_{17}, 0 \leq x \leq L_1 \quad (66)$$

$$\theta_{10}(x) = \frac{1}{EI} \left(-R_6 \left(\frac{1}{2} x^2 - L_1 \right) + k_{19} \right), L_1 \leq x \leq L_1 + a \quad (67)$$

$$\theta_{11}(x) = \frac{1}{EI} \left(-R_6 \left(\frac{1}{2} x^2 - L_1 \right) + R_7 \left(\frac{1}{2} x^2 - (L_1 + a)x \right) + k_{21} \right), L_1 + a \leq x \leq L_1 + L_2 \quad (68)$$

$$\theta_{12}(x) = \frac{1}{EI} \left(-R_6 \left(\frac{1}{2} x^2 - L_1 \right) + R_7 \left(\frac{1}{2} x^2 - (L_1 + a)x \right) - R_8 \left(\frac{1}{2} x^2 - (L_1 + L_2)x \right) + k_{23} \right), L_1 + L_2 \leq x \leq L \quad (69)$$

A segunda integração da equação diferencial fornece as seguintes expressões para deflexão

$$v_9(x) = k_{17} + k_{18}, \quad 0 \leq x \leq L_1 \quad (70)$$

$$v_{10}(x) = \frac{1}{EI} \left(-R_6 \left(\frac{1}{6} x^2 - L_1 \right) x + k_{19} x + k_{20} \right), \quad L_1 \leq x \leq L_1 + a \quad (71)$$

$$v_{11}(x) = \frac{1}{EI} \left(-R_6 \left(\frac{1}{6} x^2 - L_1 \right) x + R_7 \left(\frac{1}{6} x^3 - \frac{1}{2} (L_1 + a) x^2 \right) + k_{21} x + k_{22} \right), \quad L_1 + a \leq x \leq L_1 + L_2 \quad (72)$$

$$v_{12}(x) = \frac{1}{EI} \left(-R_6 \left(\frac{1}{6} x^2 - L_1 \right) x + R_7 \left(\frac{1}{6} x^3 - \frac{1}{2} (L_1 + a) x^2 \right) - R_8 \left(\frac{1}{6} x^3 - \frac{(L_1 + L_2) x^2}{2} \right) + k_{23} x + k_{24} \right), \quad L_1 + L_2 \leq x \leq L \quad (73)$$

Essas equações contêm duas constantes de integração adicionais, totalizando oito incógnitas a serem determinadas. As 8 constantes de integração podem ser encontradas a partir das condições de contorno mostradas na Tabela 12.

Tabela 12 - Condições de contorno.

$x \text{ (m)}$	<i>condição de contorno</i>
L_1	$\theta_{10}(L_1) = \theta_9(L_1)$
L_1	$v_9(L_1) = 0$
L_1	$v_{10}(L_1) = 0$
$L_1 + a$	$v_{10}(L_1 + a) = 0$
$L_1 + a$	$v_{11}(L_1 + a) = 0$
$L_1 + L_2$	$v_{11}(L_1 + L_2) = 0$
$L_1 + L_2$	$\theta_{11}(L_1 + L_2) = \theta_{12}(L_1 + L_2)$
$L_1 + L_2$	$v_{12}(L_1 + L_2) = 0$

Aplicando as condições de contorno, encontram-se os seguintes expressões para as constantes conforme mostra a Tabela 13.

Tabela 13 - Expressões das constantes de integrações.

Constante	Expressão
k_{17}	$-\frac{1}{6EI}R_6a^2$
k_{18}	$\frac{1}{6EI}R_6a^2L_1$
k_{19}	$-\frac{1}{6}R_6(a^2 - 3L_1^2)$
k_{20}	$-\frac{1}{6}L_1R_6(L_1^2 - a^2)$
k_{21}	$-\frac{1}{6}((2a^2 + (6L_1 + 2L_2)a + 3L_1^2 - L_2^2)R_7 + (-3L_1^2 + L_2^2 + L_2a + a^2)R_6)$
k_{22}	$\frac{1}{6}(L_1 + a)(L_1 + L_2)((-R_6 + R_7)L_1 + (R_6 + 2R_7)a + (R_6 - R_7)L_2)$
k_{23}	$\frac{1}{6}((-R_6 + R_7 + 3R_8)L_2^2 + (6L_1R_8 - R_6 - 2R_7a)L_2 + (-3L_1^2 - 6L_1a - 2a^2)R_7 + (3R_6 + 3R_8)L_1^2 - R_6a^2)$
k_{24}	$\frac{1}{6}(L_1 + L_2)((-R_6 + R_7 - R_8)L_1^2 + ((R_6 - R_7 - 2R_8)L_2 + 3aR_7)L_1 - R_8L_2^2 + a(R_6 - R_7)L_2 + (R_6 + 2R_7)a^2)$

Substituindo as constantes pelos seus valores das Tabelas 2 e 11 tem-se as seguintes expressões para a inclinação

$$\theta_9(x) = \frac{1}{EI} \left(-\frac{168093}{67703} \right), \quad 0 \leq x \leq 0,215 \quad (74)$$

$$\theta_{10}(x) = \frac{1}{EI} \left(\frac{6333}{200}x^2 - \frac{272319}{20000}x - \frac{39460}{38721} \right), \quad 0,215 \leq x \leq 0,700 \quad (75)$$

$$\theta_{11}(x) = \frac{1}{EI} \left(-\frac{52881}{40}x^2 + \frac{1860853}{989}x - \frac{2212873}{3331} \right), \quad 0,700 \leq x \leq 0,825 \quad (76)$$

$$\theta_{12}(x) = \frac{1}{EI} \left(\frac{383120}{1627} - \frac{374739}{1250}x \right), \quad 0,825 \leq x \leq 1,040 \quad (77)$$

Substituindo as constantes pelos seus valores das Tabelas 2 e 11, tem-se as seguintes expressões para a curva de deflexão

$$v_9(x) = \frac{1}{EI} \left(-\frac{168093}{67703}x + \frac{81100}{151929} \right), \quad 0 \leq x \leq 0,215 \quad (78)$$

$$v_{10}(x) = \frac{1}{EI} \left(\frac{2111}{200}x^3 - \frac{117635}{17279}x^2 - \frac{39460}{38721}x + \frac{11477}{26759} \right), \quad 0,215 \leq x \leq 0,700 \quad (79)$$

$$v_{11}(x) = \frac{1}{EI} \left(-\frac{17627}{40}x^3 + \frac{911611}{969}x^2 - \frac{2212873}{3331}x + \frac{455669}{2936} \right), \quad 0,700 \leq x \leq 0,825 \quad (80)$$

$$v_{12}(x) = \frac{1}{EI} \left(-\frac{374739}{2500}x^2 + \frac{383120}{1627}x - \frac{831499}{9014} \right), \quad 0,825 \leq x \leq 1,040 \quad (81)$$

4.1.1.3 Superposição dos efeitos para a curva

Aplicando o princípio da superposição no eixo (Figura 41), pode-se concluir que as reações nos rolamentos são as somas das reações nos rolamentos da distribuição de peso e das reações da força centrípeta. A Tabela 14 mostra os valores das reações no eixo.



Figura 41 - Superposição dos efeitos.

Tabela 14 - Valores das Reações.

<i>Reações</i>	<i>Valores absolutos (N)</i>
$R_A = -R_1 + R_6$	6,65
$R_B = R_2 - R_7$	284,22
$R_C = -R_3 + R_8$	970,44

O esforço cortante total do eixo é a soma do esforço cortante devido a distribuição de peso e ao cortante devido a força centrípeta

$$V_c(x) = V_2(x) + V_3(x) \quad (82)$$

A Figura 42 ilustra o diagrama de esforço cortante ao longo do eixo.



Figura 42 - Diagrama de esforços cortantes.

O momento fletor total do eixo é a soma do momento fletor devido a distribuição de peso e ao fletor devido a força centrípeta

$$M_c(x) = M_2(x) + M_3(x) \quad (83)$$

A Figura 43 ilustra o diagrama de esforço cortante ao longo do eixo.



Figura 43 - Diagrama de momento fletor.

As funções para o ângulo de rotação do eixo são

$$\theta_{c1}(x) = \theta_5(x) + \theta_9(x) = \frac{1}{EI} \left(-\frac{2362544973}{9048438247} \right), \quad 0 \leq x \leq 0,215 \quad (84)$$

$$\theta_{c2}(x) = \theta_6(x) + \theta_{10}(x) = \frac{1}{EI} \left(\frac{333}{100} x^2 - \frac{19245999}{134420000} x - \frac{35610379}{332277808} \right), \quad 0,215 \leq x \leq 0,700 \quad (85)$$

$$\theta_{c3}(x) = \theta_7(x) + \theta_{11}(x) = \frac{1}{EI} \left(-\frac{6939}{50} x^2 + \frac{2734891}{13846} x - \frac{4311707569}{6182336} \right), \quad 0,700 \leq x \leq 0,825 \quad (86)$$

$$\theta_{c4}(x) = \theta_8(x) + \theta_{12}(x) = \frac{1}{EI} \left(-624x^2 + \frac{431693431}{432500} x - \frac{685934969}{1714858} \right), \quad 0,825 \leq x \leq 1,040 \quad (87)$$

As funções para a deflexão do eixo são

$$v_{c1}(x) = v_5(x) + v_9(x) = \frac{1}{EI} \left(-\frac{16472}{63087} x + \frac{10947}{195007} \right), \quad 0 \leq x \leq 0,215 \quad (88)$$

$$v_{c2}(x) = v_6(x) + v_{10}(x) = \frac{1}{EI} \left(\frac{111}{100} x^3 - \frac{164273181}{229447841} x^2 - \frac{35610379}{332277808} x + \frac{252142537}{5590142413} \right), \quad 0,215 \leq x \leq 0,700 \quad (89)$$

$$v_{c3}(x) = v_7(x) + v_{11}(x) = \frac{1}{EI} \left(-\frac{2313}{50} x^3 + \frac{61630451}{624036} x^2 - \frac{431170569}{6182336} x + \frac{61664339}{3784504} \right), \quad 0,700 \leq x \leq 0,825 \quad (90)$$

$$v_{c4} = v_8(x) + v_{12}(x) = \frac{1}{EI} \left(-208x^3 + \frac{431693431}{865000} x^2 - \frac{685934969}{1714858} x + \frac{1090072693}{10176806} \right), \quad 0,825 \leq x \leq 1,040 \quad (91)$$

A curva de deflexão resultante, traçando as funções acima em sequência, é dada pela Figura 44.

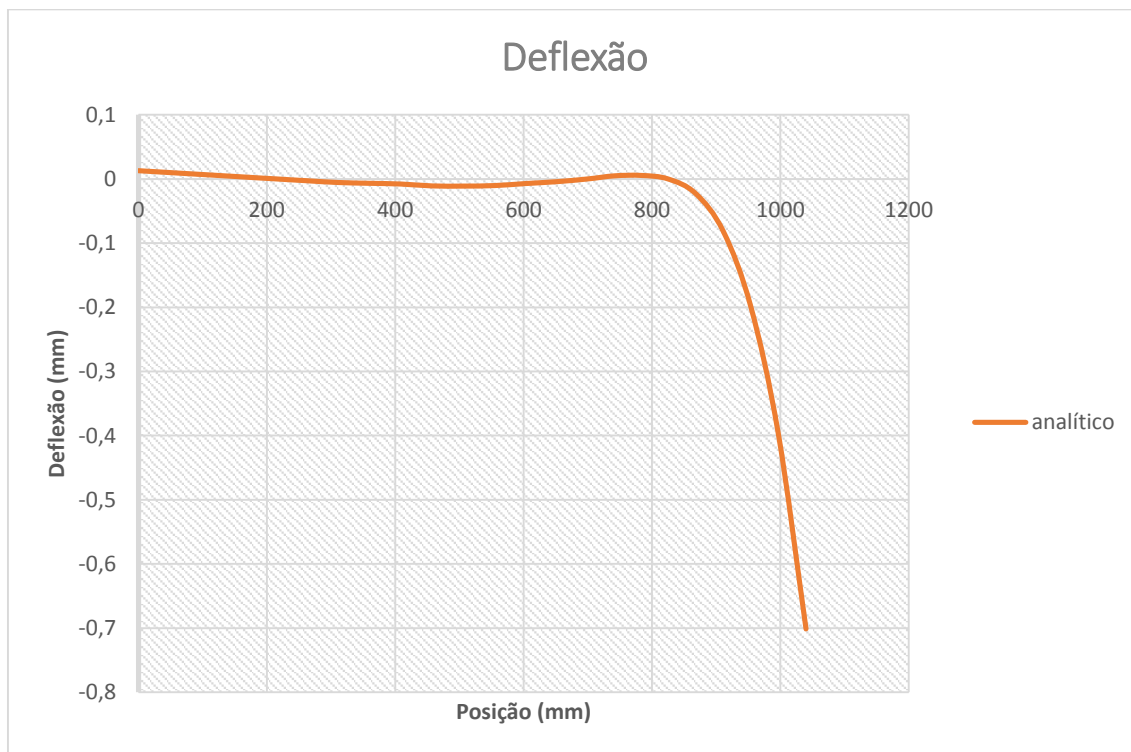


Figura 44 - Deflexão para curvas.

4.1.2 Solução através do Ansys

As hipóteses utilizadas para simulação no Ansys são as mesmas empregadas para a solução analítica. Utilizou-se o mesmo modelo do caso anterior, com as mesmas condições de contorno nos nós 2, 3 e 4. No entanto, será aplicada uma força concentrada no nó 5 de $F_5 = 1248\text{ N}$ na direção y e um momento de $M_5 = -299,79\text{ Nm}$ na direção z, conforme ilustra a Figura 44.

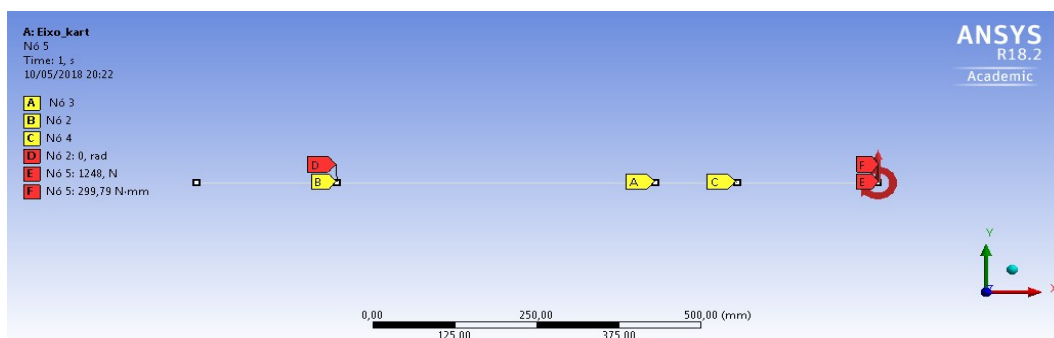


Figura 45 - Modelo Ansys.

O resultado da deflexão do eixo é ilustrando as Figuras 46 e 47.

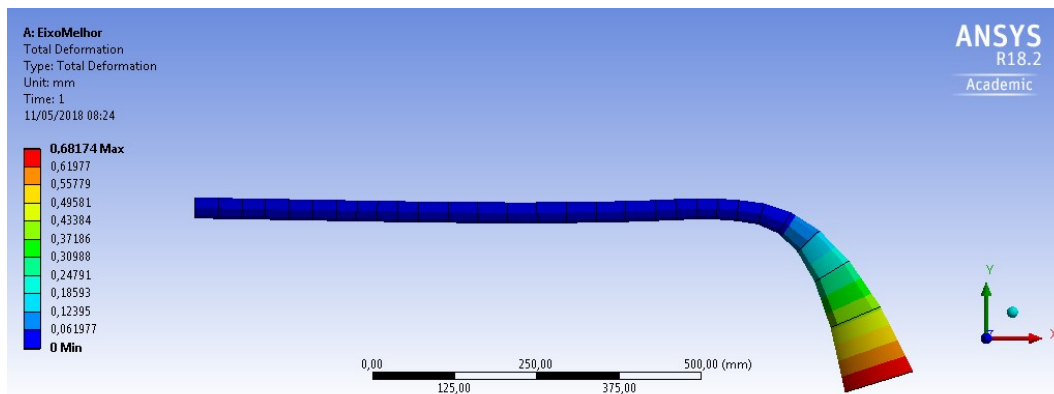


Figura 46 - Resultados do modelo Ansys de curvas.



Figura 47 -Resultado da deflexão para curvas Ansys.

4.1.3 Solução através do Ftool

As hipóteses utilizadas para simulação no Ftool são as mesmas utilizadas para a solução analítica. Criou-se um modelo do eixo no Ftool conforme ilustrado na Figura 48. Considerando que nos nós 2, 3 e 4 são aplicadas as condições de contorno ($u_x = u_y = 0$) e a rotação na direção z é livre. O resultado da deflexão do eixo é ilustrado nas Figuras 49 e 50.



Figura 48 Modelo Ftool.

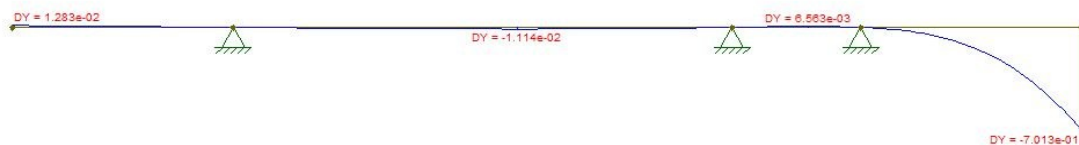


Figura 49 - Resultado da deflexão do modelo Ftool.

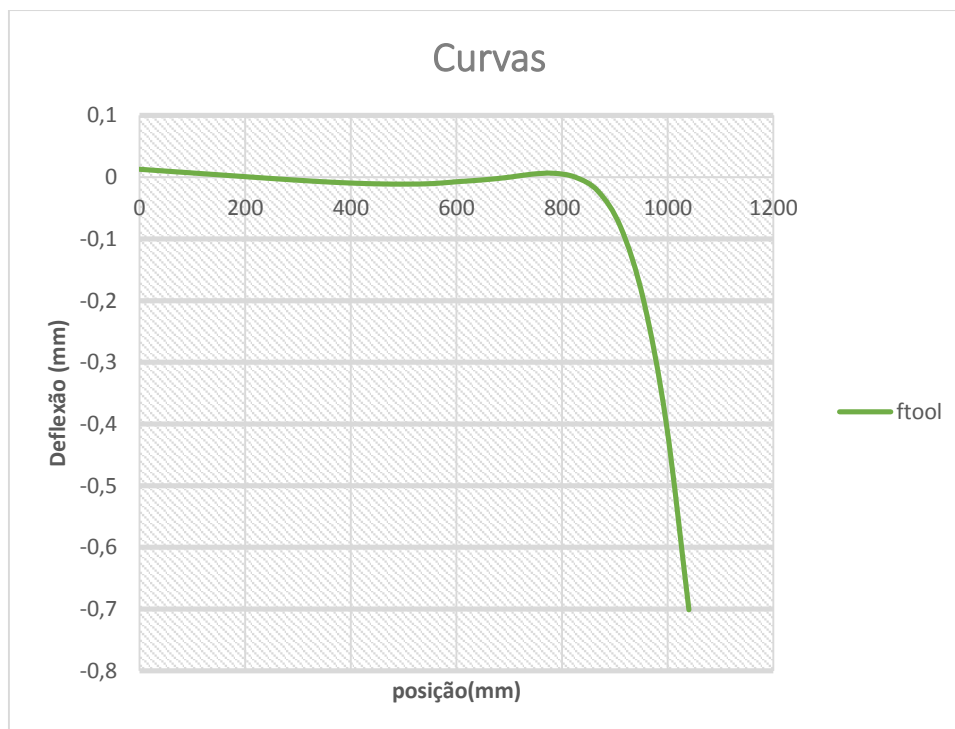


Figura 50- Resultado da deflexão para curvas do modelo Ftool.

4.1.4 Comparação entre as soluções

O maior deslocamento encontrado no modelo analítico foi de $v_{c1}(0) = 0,77013 \text{ mm}$ que foi o mesmo valor encontrado pelo ftool. No entanto, o maior deslocamento encontrando pela solução Ansys foi $v_{ansys} = 0,68174 \text{ mm}$ apresentando um valor de 11,5% de erro.

A Figura 51 mostra a comparação das três soluções.

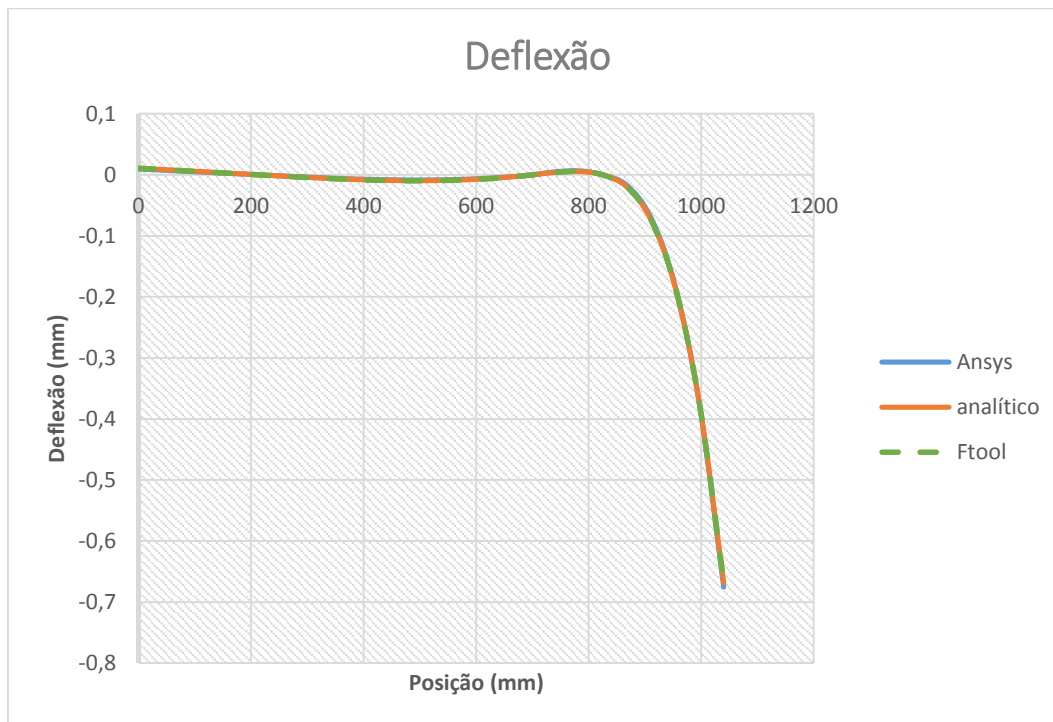


Figura 51 comparação entre as soluções.

4.2 Análise em retas

4.2.1 Caso analítico

4.2.1.1 Deflexão devido a tração do veículo

As hipóteses utilizadas nesse caso são:

1. O veículo está movendo em uma reta com aceleração constante. O veículo varia a sua velocidade de 0 km/h até 90 km/h em 6s ;
2. Serão considerados esforços planos, ou seja, a natureza espacial das forças pode ser desprezada, para simplificação dos cálculos, uma vez que todas são verticais e aproximadamente coplanares, para este caso as forças estão atuando no plano xz;
3. Cada roda irá receber 50% do total da força de tração do veículo;

Como foi adotada a hipótese do veículo se movendo em aceleração constante, então pode-se calcular o módulo da aceleração pela seguinte expressão

$$a_{\text{tração}} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = 4,17 \text{ m/s}^2 \quad (92)$$

Logo, o módulo da força de tração é dada pela seguinte expressão

$$F_{tração} = m \cdot a_{tração} = 223,18 \cdot 4,17 = 930,66 \text{ N} \quad (93)$$

O eixo para este caso é representado pela Figura 52.

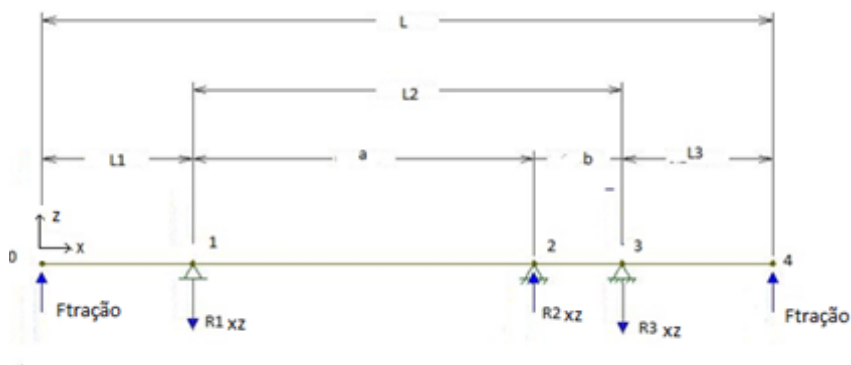


Figura 52 - Modelo do eixo.

As expressões deduzidas no caso estático para retas podem ser utilizadas para encontrar as reações nos mancais e as deflexões devido a tração nas rodas. A Tabela 15 mostra os valores das reações atuando no eixo.

Tabela 15 Reações nos apoios.

Forças	Valores (N)
R_{1xz}	774,75
R_{2xz}	1509,97
R_{3xz}	1665,88
$F_{tração}$	465,33

Para a inclinação, tem-se as seguintes equações

$$\theta_{T1} = \frac{1}{EI} \left(\frac{46533}{200} x^2 - \frac{597175}{26094} \right) \quad 0 \leq x \leq 0,215 \quad (94)$$

$$\theta_{T2} = \frac{1}{EI} \left(-\frac{15471}{100} x^2 + \frac{133257}{800} x - \frac{106263}{2605} \right) \quad 0,215 \leq x \leq 0,700 \quad (95)$$

$$\theta_{T3} = \frac{1}{EI} \left(\frac{24011}{40} x^2 - \frac{1539515}{1729} x + \frac{222835}{677} \right) \quad 0,700 \leq x \leq 0,825 \quad (96)$$

$$\theta_{T4} = \frac{1}{EI} \left(-\frac{46533}{200} x^2 + \frac{562826}{1163} x - \frac{338821}{1425} \right) \quad 0,825 \leq x \leq 1,040 \quad (97)$$

Para deflexão, devido a tração do veículo tem as seguintes equações

$$v_{T1} = \frac{1}{EI} \left(\frac{15511}{200} x^3 - \frac{597175}{26094} x + \frac{30425}{7332} \right) \quad 0 \leq x \leq 0,215 \quad (98)$$

$$v_{T2} = \frac{1}{EI} \left(-\frac{5157}{100} x^3 + \frac{133257}{1600} x^2 - \frac{106263}{2605} x + \frac{22715}{4181} \right) \quad 0,215 \leq x < 0,700 \quad (99)$$

$$v_{T3} = \frac{1}{EI} \left(\frac{24011}{120} x^3 - \frac{528457}{1187} x^2 + \frac{222835}{677} x - \frac{176819}{2186} \right) \quad 0,700 \leq x \leq 0,825 \quad (100)$$

$$v_{T4} = \frac{1}{EI} \left(-\frac{15511}{200} x^3 + \frac{281413}{1163} x^2 - \frac{338821}{1425} x + \frac{98871}{1318} \right) \quad 0,825 \leq x \leq 1,040 \quad (101)$$

A Figura 53 ilustra a deflexão do eixo.

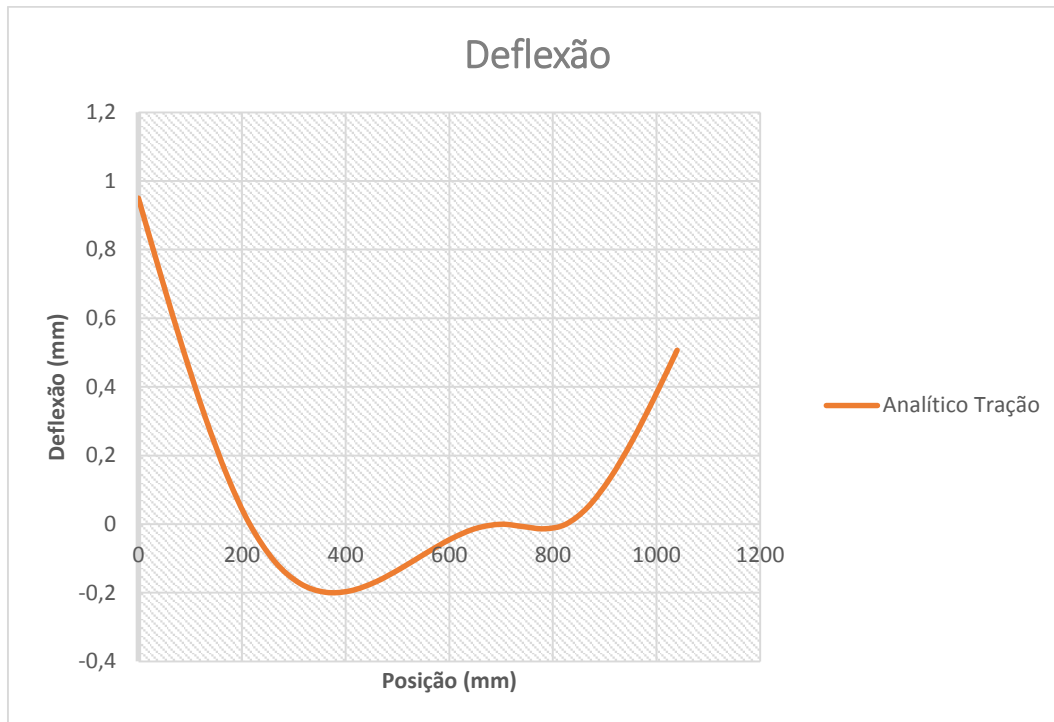


Figura 53 - Resultado da deflexão para o modelo analítico.

4.2.1.2 Deflexão devido a frenagem do veículo

As hipóteses utilizadas nesse caso são:

1. O veículo está movendo em uma reta com desaceleração constante. O veículo tem uma desaceleração 90 km/h até 0 km/h em 15m;
2. Serão considerados esforços planos, ou seja, a natureza espacial das forças pode ser desprezada, para simplificação dos cálculos, uma vez que todas são verticais e aproximadamente coplanares, para este caso as forças estão atuando no plano xz;
3. Cada roda irá receber 50% do total da força de frenagem do veículo;

Como o veículo tem uma desaceleração constante, pode-se aplicar a equação de torricelli para encontrar o módulo da desaceleração

$$a = \frac{v^2 - v_0^2}{2\Delta S} = 20,83 \text{ m/s}^2 \quad (102)$$

O módulo da força de frenagem é

$$F_{frenagem} = m \cdot a_{frenagem} = 223,18 \cdot 20,83 = 4648,84 \text{ N} \quad (103)$$

A figura 54 ilustra modelo do eixo para frenagem.

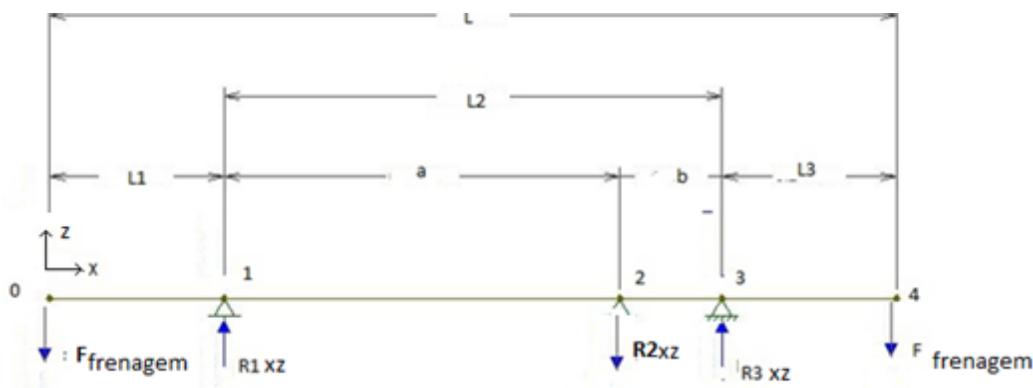


Figura 54 - Modelo para frenagem.

As expressões deduzidas no caso estático para retas podem ser utilizadas para encontrar as reações nos mancais e as deflexões devido a frenagem nas rodas. A Tabela 16 mostra os valores das reações atuando no eixo.

Tabela 16 Reações nos apoios.

Forças	Valores (N)
R_{1xz}	3870,04
R_{2xz}	7542,62
R_{3xz}	8321,42
F_{xz}	2324,42

Para inclinação, tem-se as seguintes equações

$$\theta_{F1} = \frac{1}{EI} \left(-\frac{116221}{100} x^2 + \frac{113289}{991} \right) \quad 0 \leq x \leq 0,215 \quad (104)$$

$$\theta_{F2} = \frac{1}{EI} \left(\frac{77281}{100} x^2 - \frac{1093325}{1314} x + \frac{417309}{2048} \right) \quad 0,215 \leq x \leq 0,700 \quad (105)$$

$$\theta_{F3} = \frac{1}{EI} \left(-\frac{5997}{2} x^2 + \frac{831734}{187} x - \frac{1377821}{838} \right) \quad 0,700 \leq x \leq 0,825 \quad (106)$$

$$\theta_{F4} = \frac{1}{EI} \left(\frac{116221}{100} x^2 - \frac{3966947}{1641} x + \frac{633047}{533} \right) \quad 0,825 \leq x \leq 1,040 \quad (107)$$

Para deflexão, devido a frenagem do veículo tem-se as seguintes equações

$$v_{F1} = \frac{1}{EI} \left(-\frac{116221}{300} x^3 + \frac{647725}{5666} x - \frac{56049}{2704} \right) \quad 0 \leq x \leq 0,215 \quad (109)$$

$$v_{F2} = \frac{1}{EI} \left(\frac{77281}{300} x^3 - \frac{766742}{1843} x^2 + \frac{417309}{2048} x - \frac{67602}{2491} \right) \quad 0,215 \leq x \leq 0,700 \quad (110)$$

$$v_{F3} = \frac{1}{EI} \left(-\frac{1999}{2} x^3 + \frac{415867}{187} x^2 - \frac{1377821}{838} x + \frac{572536}{1417} \right) \quad 0,700 \leq x \leq 0,825 \quad (101)$$

$$v_{F3} = \frac{1}{EI} \left(\frac{11621}{300} x^3 - \frac{1797334}{1487} x^2 + \frac{633047}{533} x - \frac{619412}{1653} \right) \quad 0,825 \leq x \leq 1,040 \quad (112)$$

A Figura 54 ilustra a deflexão do eixo.

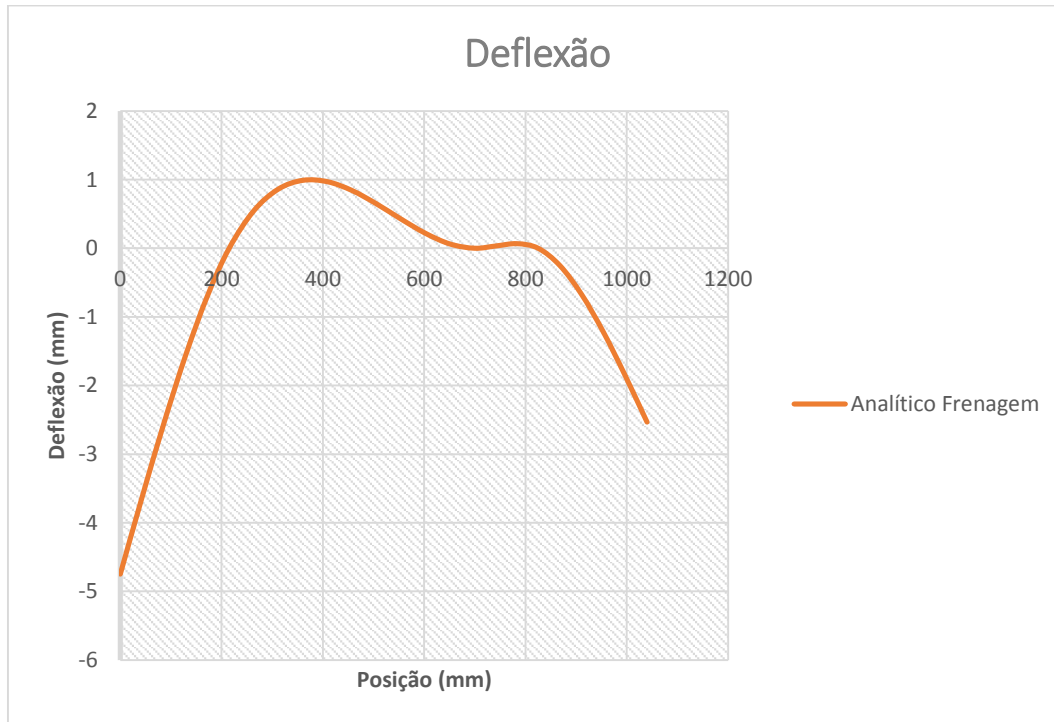


Figura 55 - Resultado para o modelo analítico.

4.2.1.3 Solução Ansys

4.2.1.3.1 Tração

As hipóteses utilizadas para simulação no Ansys são as mesmas utilizadas para a solução analítica. Utilizou-se o mesmo modelo dos caso anteriores, com as mesmas condições de contorno nos nós 2, 3 e 4. No entanto, será aplicada uma força concentra nos nós 1 e 5 de $F_1 = F_5 = 465,33N$ na direção z, conforme ilustra a Figura 56. O resultado da simulação é apresentado na Figura 57. A Figura 58 mostra a comparação da solução analítica e a solução Ansys.

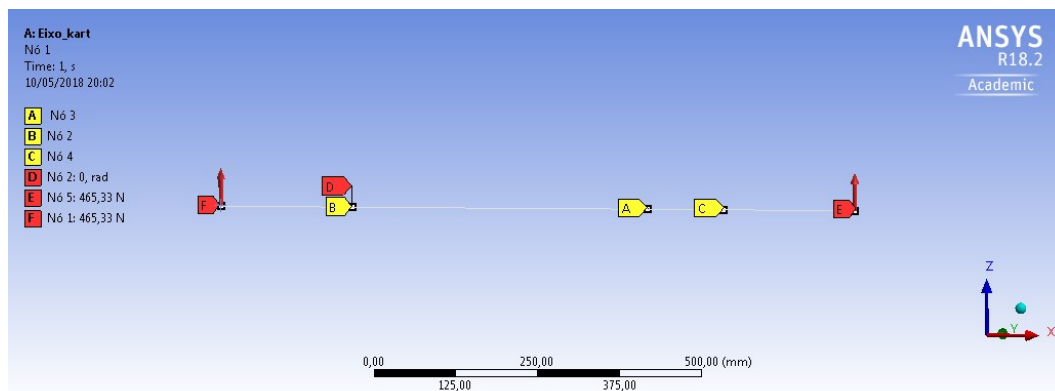


Figura 56 - Modelo Ansys.

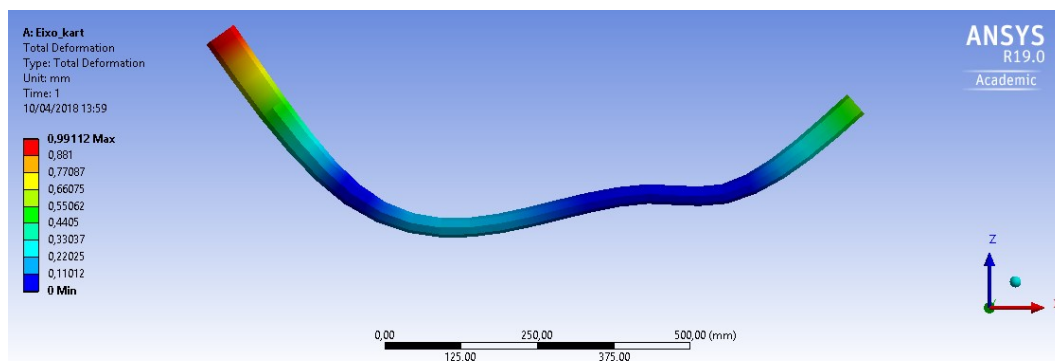


Figura 57 - Resultado do modelo Ansys.

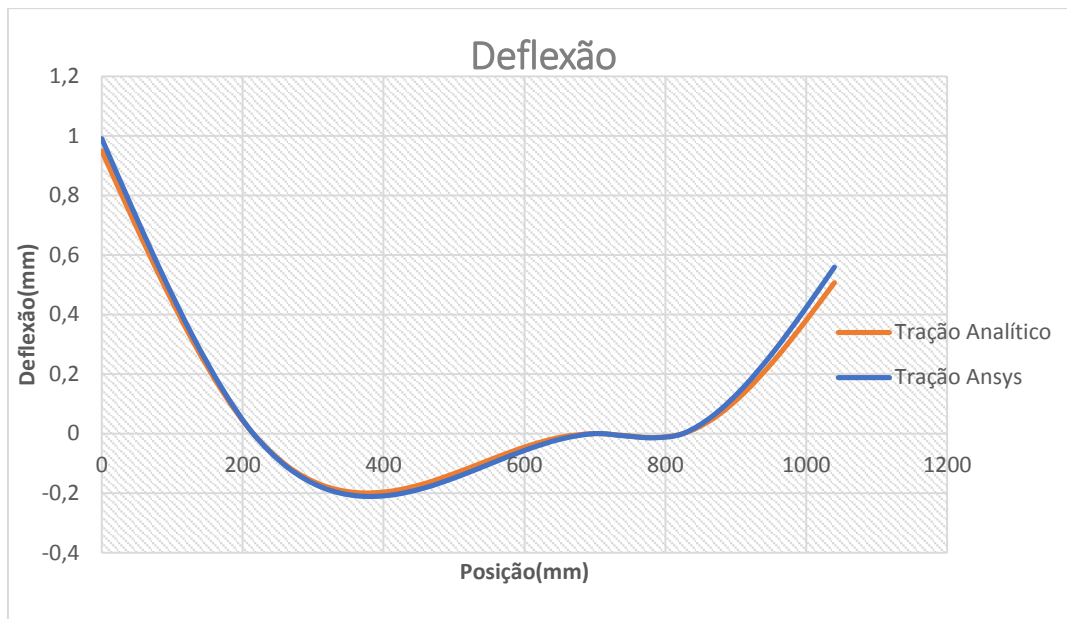


Figura 58 - Comparações entre as soluções.

O maior deslocamento encontrado pelo modelo analítico foi de $v_{T1}(0) = 0,9503 \text{ mm}$. No entanto, para solução Ansys foi encontrado $v_{Ansys} = 0,99112 \text{ mm}$ apresentando um erro de 4,3%.

4.2.1.3.2 Frenagem

As hipóteses utilizadas para simulação no Ansys são as mesmas utilizadas para a solução analítica. Utilizou-se o mesmo modelo dos casos anteriores, com as mesmas condições de contorno nos nós 2, 3 e 4. No entanto, será aplicada uma força concentra nos nós 1 e 5 de $F_1 = F_5 = -2324,42$ na direção z, conforme ilustrado na Figura 59. O resultado da simulação é apresentado na Figura 60. A Figura 61 mostra a comparação da solução analítica e a solução Ansys.

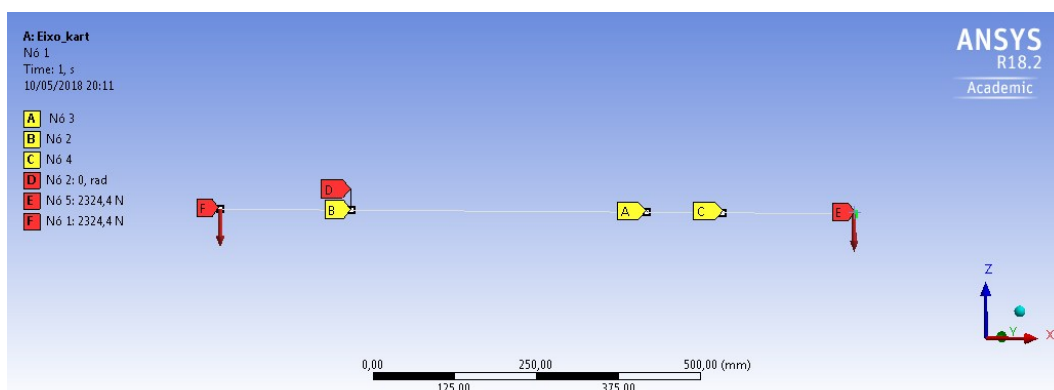


Figura 59 - Modelo Ansys para frenagem.

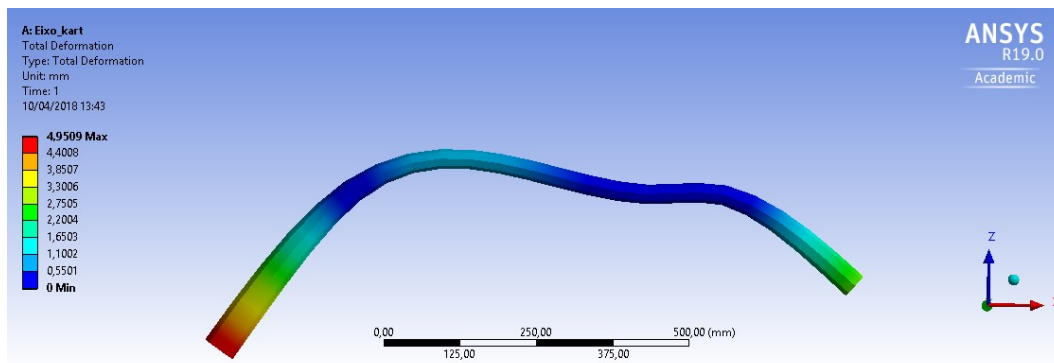


Figura 60 - Resultado do modelo Ansys.

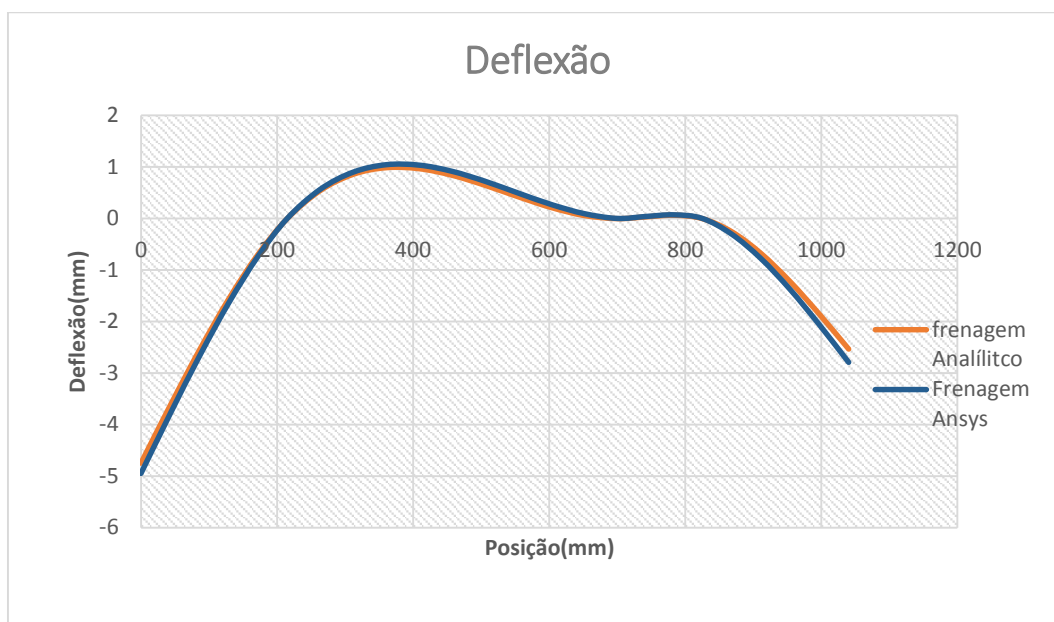


Figura 61 - Comparação entre os modelos.

O maior deslocamento encontrado em módulo pelo modelo analítico foi de $v_{F1}(0) = 4,747 \text{ mm}$. No entanto, para solução Ansys foi encontrado $v_{Ansys} = 4,9509 \text{ mm}$ apresentando um erro de 4,3%.

4.2.1.4 Solução da deflexão total através do Ansys

A seguir serão apresentados os casos críticos combinando os esforços devido a reação do peso nas rodas e aos esforços provenientes da dinâmica do veículo.

4.2.1.4.1 Tração

Caso crítico para tração será quando o veículo estiver acelerando e as reações nas rodas devido ao peso forem a metade do peso total do veículo, isto é, as rodas dianteiras perderam contato com o solo quando o veículo estiver acelerando.

Para tração, foi utilizado o mesmo modelo dos casos anteriores com as mesmas condições de contorno nos nós 2,3 e 4 ($u_x = u_y = u_z = 0$) e a rotação fixa na direção x. Além disso, as forças concentradas aplicadas nos nós 1 e 5 foram $F_{1y} = F_{5y} = 1094,7 \text{ N}$ na direção y que representa as reações nas rodas devido ao peso do veículo e $F_{1z} = F_{5z} = 465,33 \text{ N}$ que representa os esforços proveniente da tração do veículo, conforme ilustra a Figura 62. O resultado da deflexão do é ilustrado na Figura 63.

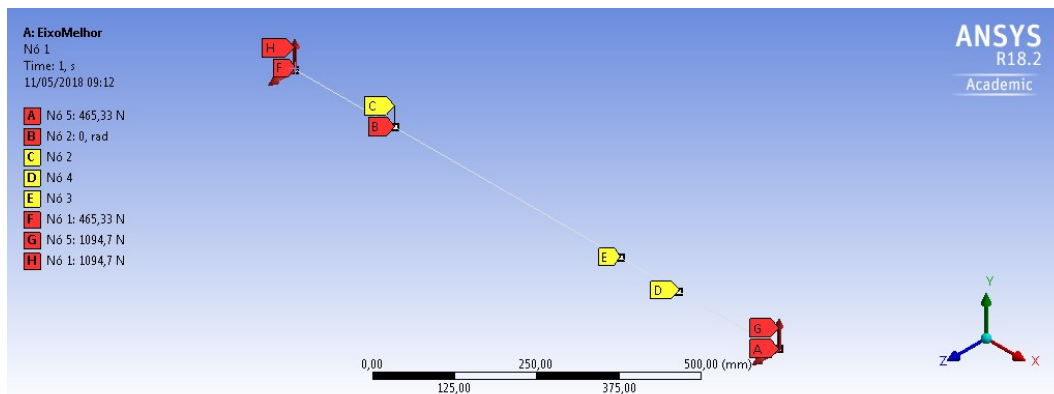


Figura 62 - Modelo Ansys para combinações de esforços.

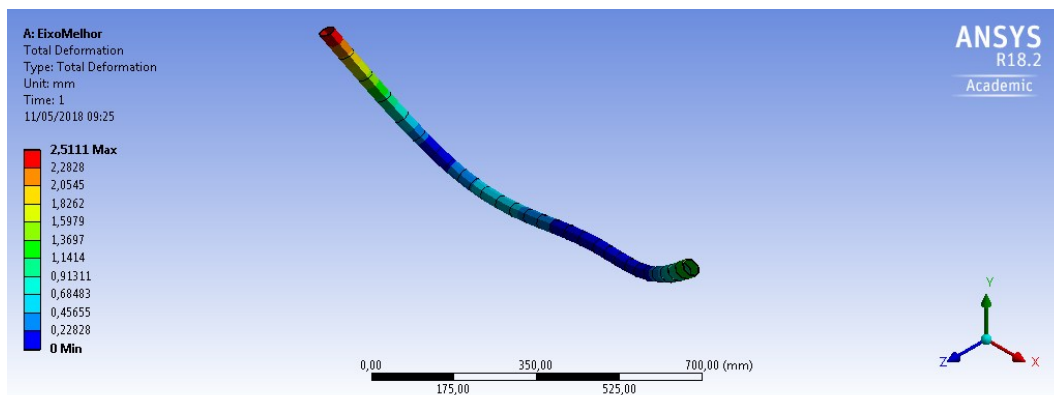


Figura 63 - Resultados do modelo Ansys.

Pelas expressões deduzidas no primeiro caso estudado, encontra-se que a maior deflexão devido as reações da força peso no eixo foi de $\delta_{\text{peso}} = 2,36 \text{ mm}$, o maior deslocamento devido a tração do veículo foi $v_{T1}(0) = 0,9503 \text{ mm}$. Combinando tem-se que o deslocamento total é $\delta_{\text{análítico}_{\text{tração}}} = \sqrt{\delta_{\text{peso}}^2 + v_{T1}^2(0)} = 2,544 \text{ mm}$ e o valor encontrado pelo Ansys foi de $\delta_{\text{Ansys}_{\text{tração}}} = 2,511 \text{ mm}$ apresentando um erro de 1,2% .

4.2.1.4.2 Frenagem

Caso crítico para frenagem será quando o veículo estiver freando e as reações nas rodas devido ao peso forem 57% do peso total do veículo.

Para frenagem, foi utilizado o mesmo modelo dos casos anteriores com as mesmas condições de contorno nos nós 2,3 e 4 ($u_x = u_y = u_z = 0$) e a rotação fixa na direção x. Além disso, as forças concentradas aplicadas nos nós 1 e 5 foram $F_{1y} = F_{5y} = 624 \text{ N}$ na direção y que representa as reações nas rodas devido ao peso do veículo e $F_{1z} = F_{5z} = -2324,42 \text{ N}$ que representa os esforços proveniente da frenagem do veículo, conforme ilustra a Figura 64. O resultado da deflexão do eixo é ilustrado na Figura 65.

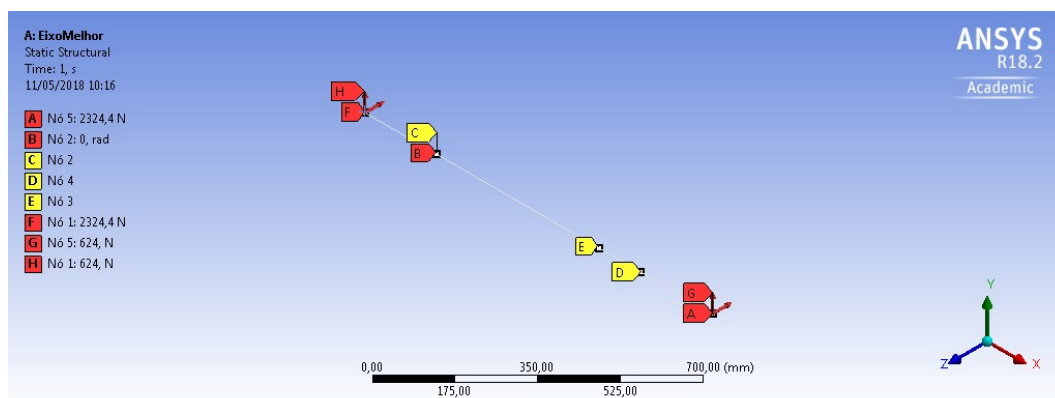


Figura 64 - Modelo Ansys para frenagem.

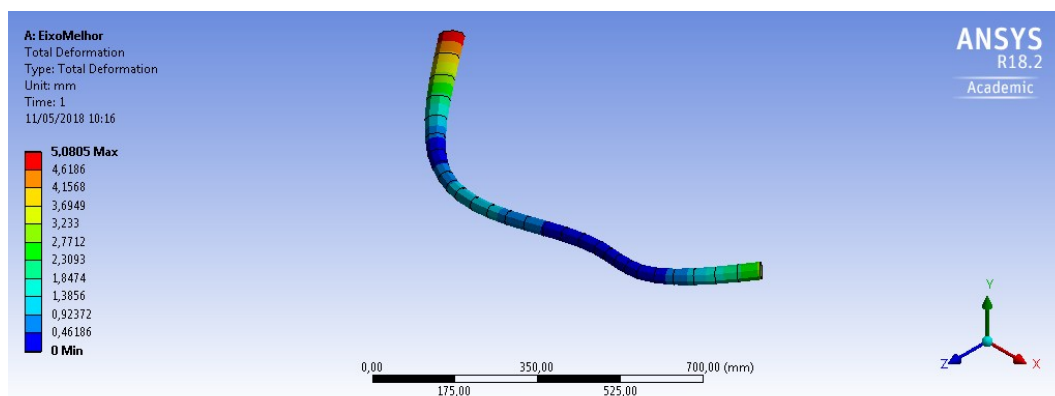


Figura 65 - Resultados do modelo Ansys para frenagem.

Pelas expressões deduzidas no primeiro caso estudado, encontra-se que a maior deflexão devido as reações da força peso no eixo foi de $v_1(0) = 1,27 \text{ mm}$, o maior deslocamento em módulo devido a tração do veículo foi $v_{F1}(0) = 4,747 \text{ mm}$. Combinando tem que o deslocamento total é $\delta_{\text{análítico}_{\text{Frenagem}}} =$

$\sqrt{v_1^2(0) + v_{F1}^2(0)} = 4,914 \text{ mm}$ e o valor encontrado pelo Ansys foi de $\delta_{Ansys\text{tração}} = 5,0805 \text{ mm}$ apresentando um erro de 3,4% .

5 PROPOSTA DE INTERVENÇÃO NO SISTEMA

Visando diminuir as deflexões do eixo, pode-se propor modificações na sua simetria, adicionando um novo mancal, assim as forças serão distribuídas de modo que a deflexão e deformação resultante seja menor. Conforme ilustra a figura 66.

A seguir serão analisados os esforços provenientes da frenagem do veículo, pois como visto anteriormente este é o caso que gera maiores deflexões no eixo.

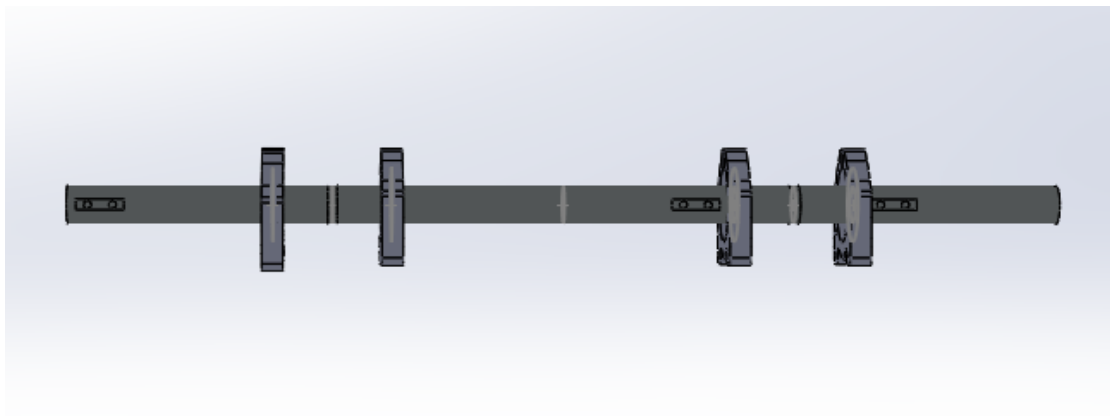


Figura 66 - Modelo de eixo com 4 rolamentos.

Fonte: Próprio autor.

5.1 Caso Analítico

A Figura 67 ilustra o modelo do eixo com quatro rolamentos.

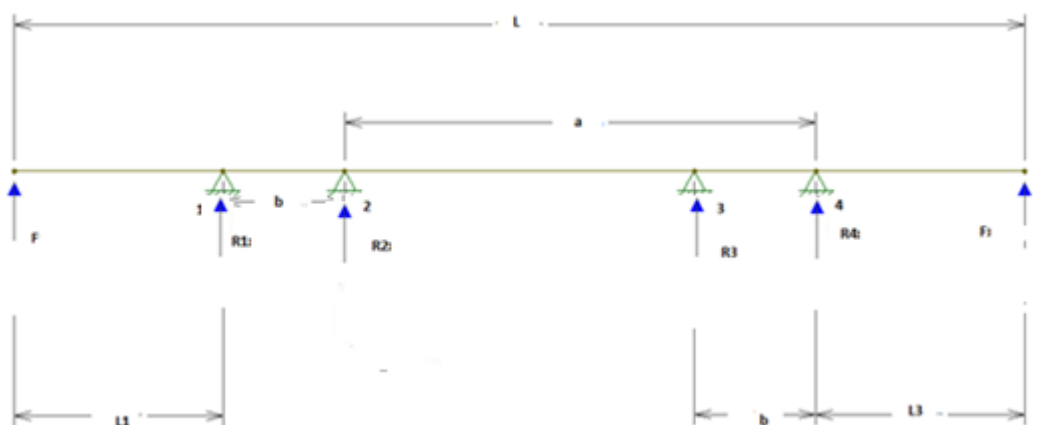


Figura 67 - Modelo do eixo com 4 rolamentos.

Para determinar as reações da Figura 66, seleciona-se as reações R_2 e R_3 como redundantes. Então, as reações R_1 e R_4 em função das forças redundantes são

$$R_1 = -\frac{FL_2 + L_2R_2 + L_2R_3 - R_2b - R_3a}{L_2} \quad (113)$$

$$R_4 = -\frac{FL_2 + R_2b + R_3a}{L_2} \quad (114)$$

A próxima etapa é remover as restrições correspondente às redundantes conforme ilustra a Figura 68.

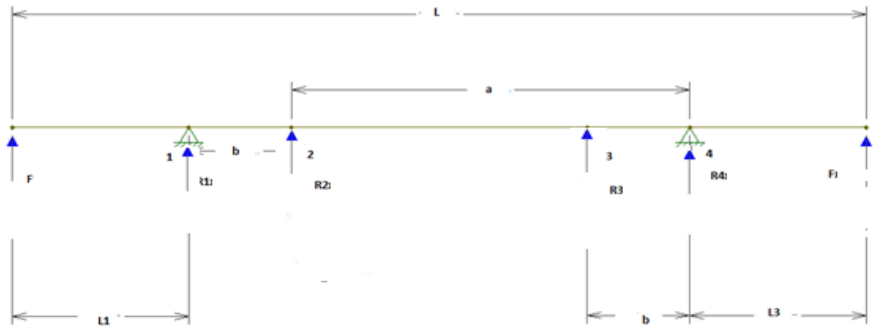


Figura 68 - Remoção dos apoios 2 e 3.

As deflexões nos pontos 2 e 3 devido a força F são dadas pelas seguintes expressões que encontra-se no caso 10 da Tabela G.2 do Gere 2010:

$$\delta_1 = \frac{1}{2EI} FL_1 a (L_2 - a) \quad (115)$$

$$\delta_2 = \frac{1}{2EI} FL_1 b (L_2 - b) \quad (116)$$

As deflexões nos pontos 2 e 3 devido a força R_2 são dadas pelas seguintes expressões que encontra-se no caso 5 da Tabela G.2 do Gere 2010:

$$\delta_3 = \frac{1}{6L_2EI} ba(L_2^2 - b^2 - a^2)R_2 \quad (117)$$

$$\delta_4 = \frac{1}{6L_2EI} b^2(L_2^2 - 2b^2)R_3 \quad (118)$$

As deflexões nos pontos 2 e 3 devido a força R_3 são dadas pelas seguintes expressões que encontra-se no caso 5 da Tabela G.2 do Gere 2010:

$$\delta_5 = \frac{1}{6L_2EI} b^2 (L_2^2 - 2b^2) R_2 \quad (119)$$

$$\delta_6 = \frac{1}{6L_2EI} ba (L_2^2 - b^2 - a^2) R_3 \quad (120)$$

Logo, para determinar os valores de R_2 e R_3 deve-se resolver o seguinte sistema

$$\begin{cases} \delta_3 + \delta_5 = \delta_1 \\ \delta_4 + \delta_6 = \delta_2 \end{cases} \quad (121)$$

Resolvendo o sistema tem-se as seguintes expressões para as redundantes

$$R_2 = \frac{3aFL_1L_2((b-L_2)a-b^2-L_2b+L_2^2)}{(a+b)(-L_2^2+a^2-ab+2b^2)(-L_2^2+a^2+ab+2b^2)} \quad (122)$$

$$R_3 = \frac{3aFL_1L_2((b-L_2)a-b^2-L_2b+L_2^2)}{(a+b)(-L_2^2+a^2-ab+2b^2)(-L_2^2+a^2+ab+2b^2)} \quad (123)$$

A Figura 69 ilustra o sentido correto das forças.

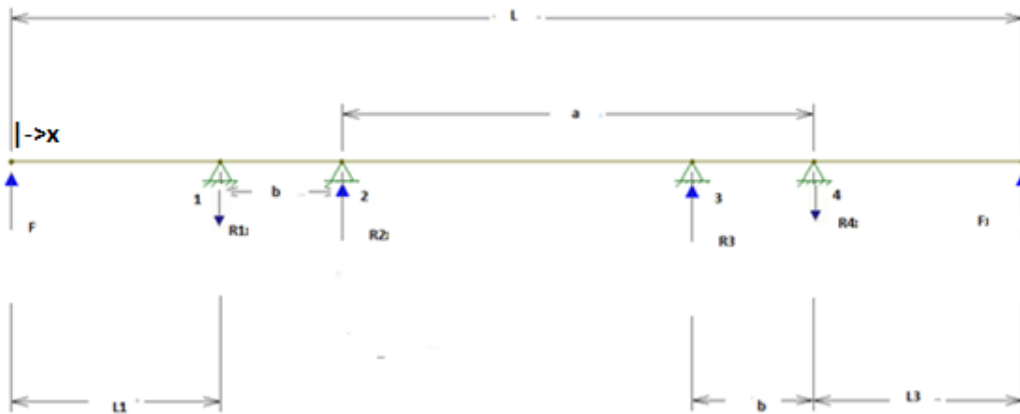


Figura 69 - Sentidos das reações nos apoios.

O momento fletor é dada pela seguinte expressão

$$M_4(x) =$$

$$\begin{cases} Fx & 0 \leq x \leq L_1 \\ Fx - R_1(x - L_1) & L_1 \leq x \leq L_1 + b \\ Fx - R_1(x - L_1) + R_2(x - (L_1 + b)) & L_1 + b \leq x \leq L_1 + a \\ Fx - R_1(x - L_1) + R_2(x - (L_1 + b)) + R_3(x - (L_1 + a)) & L_1 + a \leq x \leq L_1 + L_2 \\ Fx - R_1(x - L_1) + R_2(x - (L_1 + b)) + R_3(x - (L_1 + a)) - R_4(x - (L_1 + L_2)) & L_1 + L_2 \leq x \leq L \end{cases} \quad (124)$$

A Tabela 17 mostra as condições de contorno desse caso.

Tabela 17 - Condições de contorno.

$x(m)$	<i>Condição de contorno</i>
L_1	$\theta_a(L_1) = \theta_b(L_1)$
L_1	$v_a(L_1) = 0$
L_1	$v_b(L_1) = 0$
$L_1 + b$	$v_b(L_1 + b) = 0$
$L_1 + b$	$v_c(L_1 + b) = 0$
$L_1 + a$	$v_c(L_1 + a) = 0$
$L_1 + a$	$v_d(L_1 + a) = 0$
$L_1 + L_2$	$v_d(L_1 + L_2) = 0$
$L_1 + L_2$	$v_e(L_1 + L_2) = 0$
$L_1 + L_2$	$\theta_d(L_1 + L_2) = \theta_e(L_1 + L_2)$

A equação diferencial da curva de deflexão é

$$\frac{d^2 v}{dx^2} = \frac{M_4(x)}{EI} \quad (125)$$

A primeira integração da equação diferencial produz as seguintes expressões para inclinação

$$\theta_a(x) = \frac{1}{6EI} \left((-3L_1^2 - 3L_1b - b^2 + 3x^2)F + R_1b^2 \right) \quad 0 \leq x \leq L_1 \quad (126)$$

$$\theta_b(x) = \frac{1}{6EI} \left((-3(F + R_1))L_1^2 + (-3Fb + 6R_1x)L_1 - (b^2 - 3x^2)(F - R_1) \right) \quad L_1 \leq x \leq L_1 + b \quad (127)$$

$$\theta_c(x) = \frac{1}{6EI} \left((-F + R_1 + 2R_2)b^2((-3F + 6R_2)L_1 + (2a - 6x)R_2 - a(F - R_1))b + (-3F + 3R_1 + 3R_2)L_1^2 + (-3Fa + 6R_1x - 6R_2x)L_1 - (a^2 - 3x^2)(F - R_1 + R_2) \right) \quad L_1 + b \leq x \leq L_1 + a \quad (128)$$

$$\theta_d(x) = \frac{1}{6EI} \left((-F + 2R_3 + R_1 - R_2)a^2 + \left(((-3F + 6R_3)L_1 + (-F + 2R_3 + R_1 - R_2)L_2 - 6R_3x + 3bR_2)a + (-3F + 3R_3 - 3R_1 + 3R_2)L_1^2 + (-3FL_2 + (6b - 6x)R_2 - 6x(R_3 - R_1)) \right) L_1 + (-F - R_3 + R_1 - R_2)L_2^2 + 3L_2R_2b + 3((-2b + x)R_2 + x(F + R_3 - R_1))x \right) \quad L_1 + a \leq x \leq L_1 + L_2 \quad (129)$$

$$\theta_e(x) = \frac{1}{6EI} \left((-3F + 3R_3 - 3R_4 - 3R_1 + 3R_2)L_1^2 + \left((-3F - 6R_4)L_2 + (-3F + 6R_3)a + (6(-R_3 + R_4 + R_1 - R_2))x + 6bR_2 \right) L_1 + (-F - R_3 - 3R_4 + R_1 + R_2)L_2^2 + \left((-F + 2R_3 + R_1 - R_2)a + 6R_4x + 3bR_2 \right) L_2 + (-F + 2R_3 + R_1 - R_2)a^2 + (3R_2b - 6R_3x)a + 3((F + R_3 - R_4 - R_1 + R_2)x - 2bR_2)x \right) \quad L_1 + L_2 \leq x \leq L \quad (130)$$

A segunda integração da equação diferencial produz as seguintes expressões para deflexão

$$v_a(x) = \frac{1}{6EI} (-(x - L_1)((x + 2L_1 + b)(-x + L_1 + b)F - R_1b^2)) \quad 0 \leq x \leq L_1 \quad (131)$$

$$v_b(x) = \frac{1}{6EI} (-(x - L_1)((2F + R_1)L_1 + (b + x)(F - R_1))(-x + L_1 + b)) \quad L_1 \leq x \leq L_1 + b \quad (132)$$

$$v_c(x) = \frac{1}{6EI} ((2F + R_1 - R_2)L_1 + (F - R_1 - 2R_2)b + (a + x)(F - R_1 + R_2))(a - x + L_1)(-x + L_1 + b) \quad L_1 + b \leq x \leq L_1 + a \quad (133)$$

$$v_d(x) = \frac{1}{6EI} \left(-((2F - R_3 + R_1 - R_2)L_1 + (F - R_1 + R_2 - 2R_3)a + (F + R_3 - R_1 + R_2)x + (F + R_3 - R_1 + R_2)L_2 - 3bR_2)(x - L_1 - L_2)(a - x + L_1) \right) \quad L_1 + a \leq x \leq L_1 + L_2 \quad (134)$$

$$v_e(x) = \frac{1}{6EI} \left(-((x - L_1 - L_2) \left((2F - R_3 + R_4 + R_1 - R_2)L_1^2 + ((-F + 2R_3 - 2R_4 - 2R_1 + 2R_2)x + (F + R_3 + 2R_4 - R_1 + R_2)L_2 + (3F - 3R_3)a - 3R_2b)L_1 + (-F - R_3 + R_4 + R_1 - R_2)x^2 + ((-F - R_3 - 2R_4 + R_1 - R_2)L_2 + 3R_3a + 3R_2b)x + R_4L_2^2 + a(F + R_3 - R_1 + R_2)L_2 + a((F - R_1 + R_2 - 2R_3)a - 3bR_2) \right) \right) \right) \quad L_1 + L_2 \leq x \leq L \quad (135)$$

5.1.1 Distribuição de Peso

Para a distribuição de peso, a Figura 70 ilustra o eixo com a adição do rolamento.

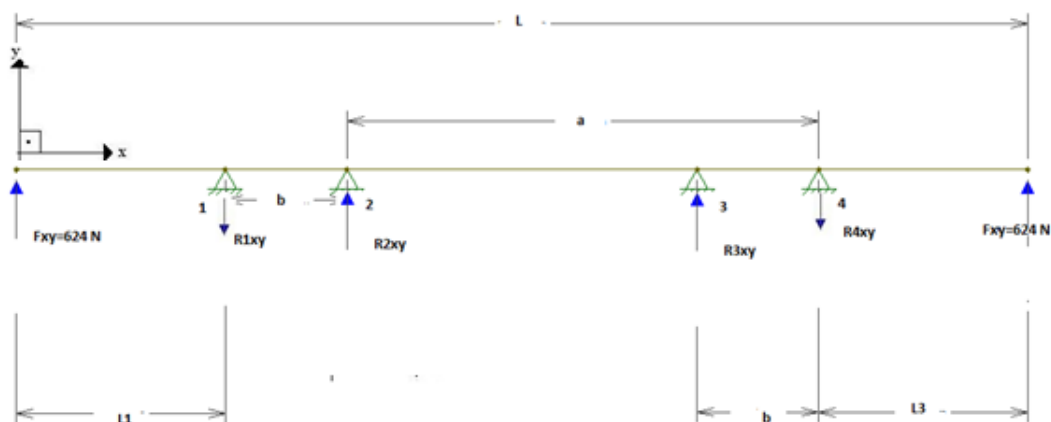


Figura 70 - Reações devido a distribuição de peso.

Utilizando as expressões que foram deduzidas anteriormente, a Tabela 18 fornece os valores das reações no eixo.

Tabela 18 - Valores das reações.

<i>Reações</i>	<i>Valores (N)</i>
R_{1xy}	1798,15
R_{2xy}	1174,11
R_{3xy}	1174,11
R_{4xy}	1798,15

A Figura 71 ilustra o diagrama de esforços cortante.

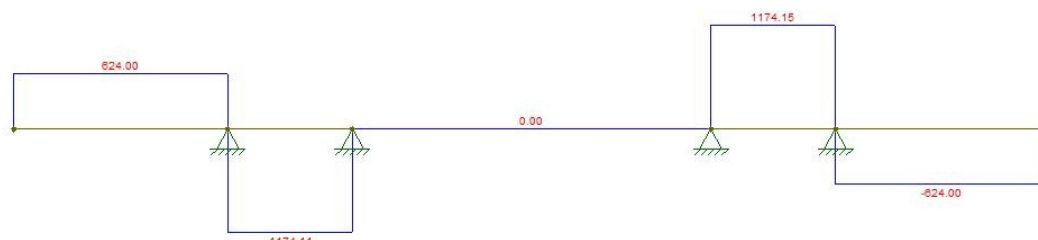


Figura 71 - Diagrama de esforços cortantes.

Logo o esforço cortante no eixo é

$$V_{xy}(x) = \begin{cases} 624,00 & 0 \leq x \leq 0,215 \\ -1174,11 & 0,215 \leq x \leq 0,340 \\ 0 & 0,340 \leq x \leq 0,700 \\ 1174,11 & 0,700 \leq x \leq 0,825 \\ -624 & 0,825 \leq x \leq 1,040 \end{cases} \quad (136)$$

A Figura 72 ilustra o diagrama de momento fletor



Figura 72 - Diagrama de momento fletor.

Logo o momento fletor no eixo é:

$$M_{xy}(x) = \begin{cases} 624x & 0 \leq x \leq 0,215 \\ -\frac{117411}{100}x + \frac{1448953}{3748} & 0,215 \leq x \leq 0,340 \\ -\frac{10083}{800} & 0,340 \leq x \leq 0,700 \\ \frac{23483}{20}x - \frac{667607}{800} & 0,700 \leq x \leq 0,825 \\ -\frac{76127}{122}x + \frac{279701}{431} & 0,825 \leq x \leq 1,040 \end{cases} \quad (137)$$

A primeira integração da equação diferencial produz as seguintes equações para inclinação

$$\theta_{1xy}(x) = \frac{1}{EI} \left(312x^2 - \frac{143639}{7273} \right) \quad 0 \leq x \leq 0,215 \quad (138)$$

$$\theta_{2xy}(x) = \frac{1}{EI} \left(-\frac{117411}{200}x^2 + \frac{1448953}{3748}x - \frac{347251}{5664} \right) \quad 0,215 \leq x \leq 0,340 \quad (139)$$

$$\theta_{3xy}(x) = \frac{1}{EI} \left(\frac{48532}{7405} - \frac{10083}{800}x \right) \quad 0,340 \leq x \leq 0,700 \quad (140)$$

$$\theta_{4xy}(x) = \frac{1}{EI} \left(\frac{23483}{40}x^2 - \frac{667607}{800}x + \frac{421028}{1431} \right) \quad 0,700 \leq x \leq 0,825 \quad (141)$$

$$\theta_{5_{xy}}(x) = \frac{1}{EI} \left(-\frac{76127}{244}x^2 + \frac{279701}{431}x - \frac{459096}{1445} \right) \quad 0,825 \leq x \leq 1,040 \quad (142)$$

A segunda integração da equação diferencial fornece as seguintes equações para deflexão

$$v_{1_{xy}}(x) = \frac{1}{EI} \left(104x^3 - \frac{143639}{7273}x + \frac{70802}{22039} \right) \quad 0 \leq x \leq 0,215 \quad (143)$$

$$v_{2_{xy}}(x) = \frac{1}{EI} \left(-\frac{39137}{200}x^3 + \frac{663588}{3433}x^2 - \frac{347251}{5664}x + \frac{83547}{13495} \right) \quad 0,215 \leq x \leq 0,340 \quad (144)$$

$$v_{3_{xy}}(x) = \frac{1}{EI} \left(-\frac{10083}{1600}x^2 + \frac{48532}{7405}x - \frac{39023}{26018} \right) \quad 0,340 \leq x \leq 0,700 \quad (145)$$

$$v_{4_{xy}}(x) = \frac{1}{EI} \left(\frac{23483}{120}x^3 - \frac{667607}{1600}x^2 + \frac{421028}{1431}x - \frac{205246}{2991} \right) \quad 0,700 \leq x \leq 0,825 \quad (146)$$

$$v_{5_{xy}}(x) = \frac{1}{EI} \left(-\frac{76127}{732}x^3 + \frac{986741}{3041}x^2 - \frac{459096}{1445}x + \frac{363262}{3645} \right) \quad 0,825 \leq x \leq 1,040 \quad (147)$$

A Figura 73 ilustra a deflexão no eixo para a modificação proposta.

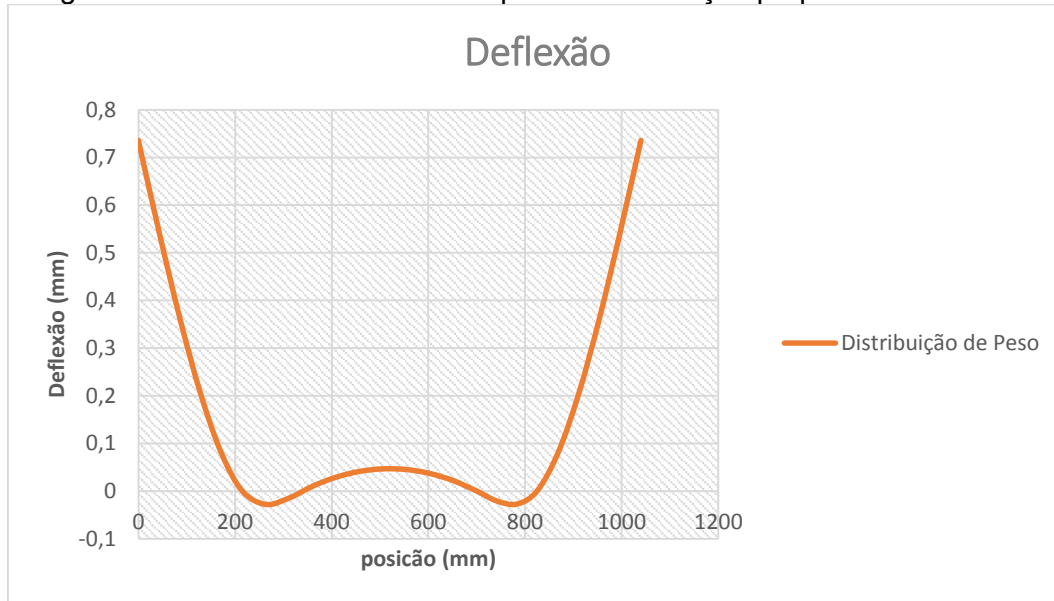


Figura 73 - Resultado da deflexão do modelo analítico.

5.1.2 Frenagem

Para frenagem nas rodas, a Figura 74 ilustra o eixo com a adição do rolamento:

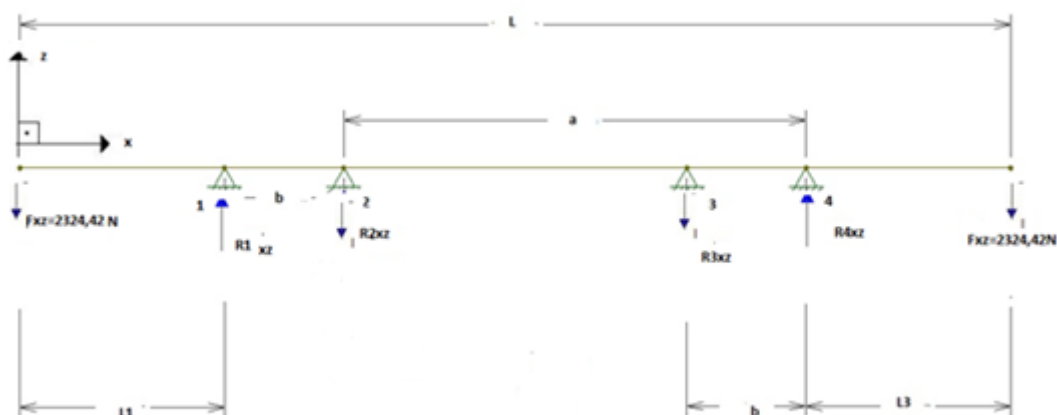


Figura 74 - Reações devido a frenagem.

Utilizando as expressões que foram deduzidas anteriormente, a Tabela 19 fornece os valores das reações no eixo.

Tabela 19 - Valores das reações.

Reações	Valores (N)
R_{1xy}	6698,17
R_{2xz}	4373,75
R_{3xz}	4373,75
R_{4xz}	6698,17

A Figura 74 ilustra o diagrama de esforços cortante.

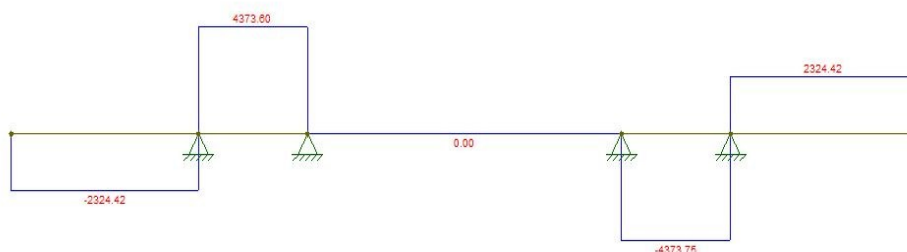


Figura 75 - Diagrama de esforços cortantes.

Logo o esforço cortante no eixo é

$$V_{xz}(x) = \begin{cases} -2324,42 & 0 \leq x \leq 0,215 \\ 4373,75 & 0,215 \leq x \leq 0,340 \\ 0 & 0,340 \leq x \leq 0,700 \\ -4373,75 & 0,700 \leq x \leq 0,825 \\ 2324,42 & 0,825 \leq x \leq 1,040 \end{cases} \quad (146)$$

A Figura 75 ilustra o diagrama de momento fletor.



Figura 76 - Diagrama de momento fletor.

Logo o momento fletor no eixo é:

$$M_{xz}(x) = \begin{cases} -2324,42x & 0 \leq x \leq 0,215 \\ \frac{21868}{5}x - \frac{1182301}{821} & 0,215 \leq x \leq 0,340 \\ \frac{101740}{2167} & 0,340 \leq x \leq 0,700 \\ -\frac{17495}{4}x + \frac{2580117}{830} & 0,700 \leq x \leq 0,825 \\ \frac{116221}{50}x - \frac{901696}{373} & 0,825 \leq x \leq 1,040 \end{cases} \quad (148)$$

A primeira integração da equação diferencial produz as seguintes equações para inclinação

$$\theta_{F1_{xz}}(x) = \frac{1}{EI} \left(-\frac{116221}{100}x^2 + \frac{54661}{743} \right) \quad 0 \leq x \leq 0,215 \quad (149)$$

$$\theta_{F2_{xz}}(x) = \frac{1}{EI} \left(\frac{10934}{5}x^2 - \frac{1182301}{821}x + \frac{687640}{3011} \right) \quad 0,215 \leq x \leq 0,340 \quad (150)$$

$$\theta_{F3_{xz}}(x) = \frac{1}{EI} \left(-\frac{180931}{7411} + \frac{101740}{2167}x \right) \quad 0,340 \leq x \leq 0,700 \quad (151)$$

$$\theta_{F4_{xz}}(x) = \frac{1}{EI} \left(-\frac{17495}{8}x^2 + \frac{2580117}{830}x - \frac{843903}{770} \right) \quad 0,700 \leq x \leq 0,825 \quad (152)$$

$$\theta_{F5_{xz}}(x) = \frac{1}{EI} \left(\frac{116221}{100}x^2 - \frac{901696}{373}x + \frac{170423}{144} \right) \quad 0,825 \leq x \leq 1,040 \quad (153)$$

A segunda integração da equação diferencial fornece as seguintes equações para deflexão

$$v_{F1_{xz}}(x) = \frac{1}{EI} \left(-\frac{116221}{300}x^3 + \frac{54661}{743}x - \frac{87634}{7323} \right) \quad 0 \leq x \leq 0,215 \quad (154)$$

$$v_{F2_{xz}}(x) = \frac{1}{EI} \left(\frac{10934}{15}x^3 - \frac{1182301}{1642}x^2 + \frac{687640}{3011}x - \frac{28112}{1219} \right) \quad 0,215 \leq x \leq 0,340 \quad (155)$$

$$v_{F3_{xz}}(x) = \frac{1}{EI} \left(\frac{50870}{2167}x^2 - \frac{180931}{7411}x + \frac{113327}{20284} \right) \quad 0,340 \leq x \leq 0,700 \quad (156)$$

$$v_{F4_{xz}}(x) = \frac{1}{EI} \left(-\frac{17495}{24}x^3 + \frac{2715340}{1747}x^2 - \frac{843903}{770}x + \frac{239257}{936} \right) \quad 0,700 \leq x \leq 0,825 \quad (157)$$

$$v_{F5_{xz}}(x) = \frac{1}{EI} \left(\frac{1673195}{4319}x^3 - \frac{450848}{373}x^2 + \frac{170423}{144}x - \frac{5988707}{1613} \right) \quad 0,825 \leq x \leq 1,040 \quad (158)$$

A Figura 77 ilustra a deflexão no eixo para a modificação proposta.

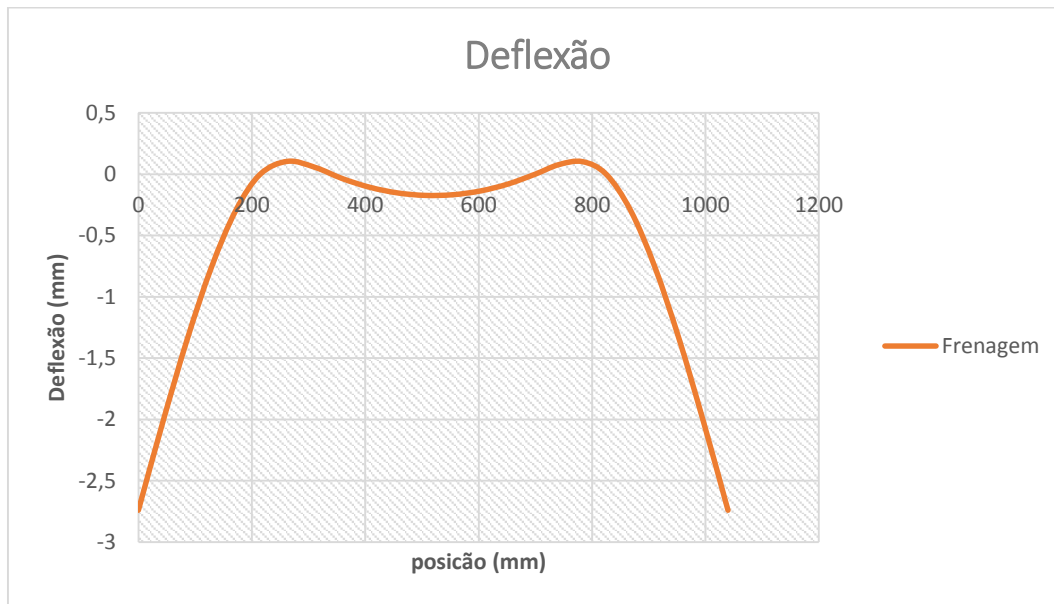


Figura 77 - Resultado para deflexão devido frenagem do veículo.

5.2 Solução Ansys

5.2.1 Deflexão total

Para o cálculo da deflexão causada pela frenagem e a distribuição de peso, com as mesmas hipóteses feitas no caso anterior foi feito o seguinte modelo no Ansys conforme ilustra a Figura 78.

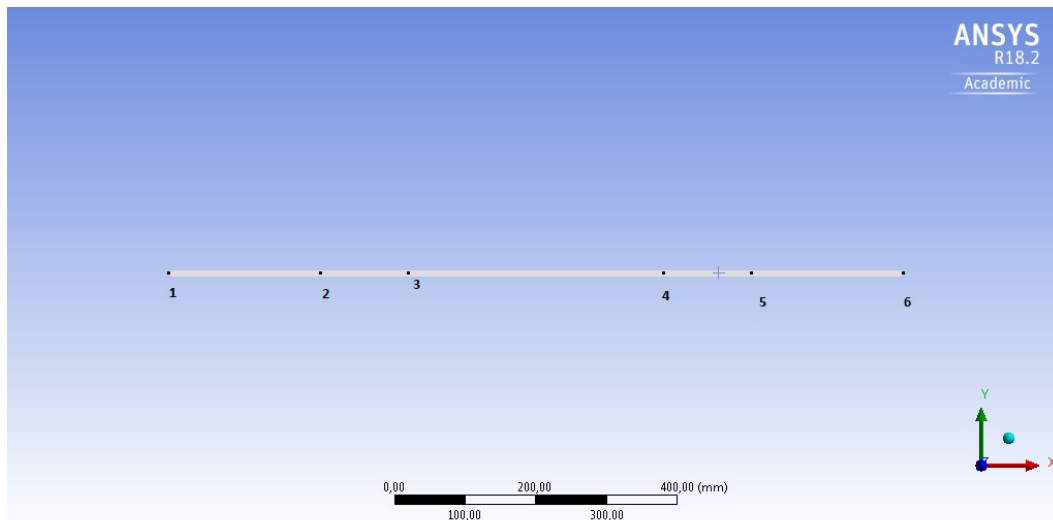


Figura 78 - Modelo Ansys para 4 rolamentos.

As condições de contorno nos nós 2,3, 4 e 5 os deslocamentos em todas as direções são iguais a zero ($u_x = u_y = u_z = 0$) e a rotação fixa na direção x. Além disso, as forças concentradas aplicadas nos nós 1 e 6 foram $F_{1y} = F_{5y} = 624 \text{ N}$ na direção y que representa as reações nas rodas devido ao peso do veículo e $F_{1z} = F_{6z} = -2324,42 \text{ N}$ que representa os esforços proveniente da frenagem do veículo, conforme ilustra a Figura 79.

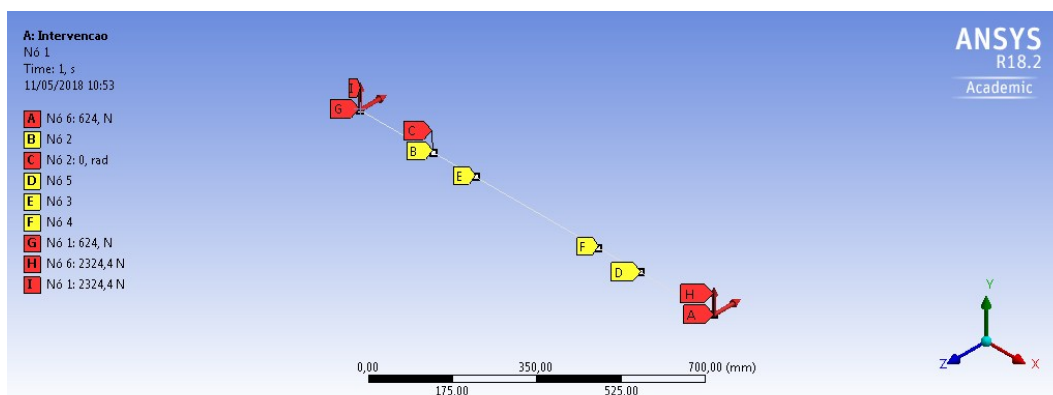


Figura 79 - Condições de contorno aplicadas no modelo.

O resultado da deflexão do eixo conforme ilustra a Figura 80.

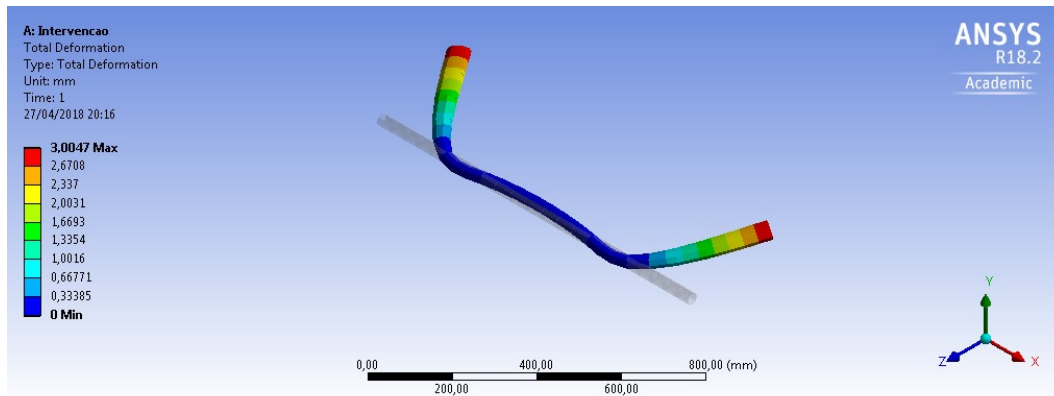


Figura 80 - Resultado para a combinação dos esforços.

A maior deflexão calculada pelo Ansys foi de $\delta_{Max_{anys}} = 3,005 \text{ mm}$, já a solução analítica foi $\delta_{Max_{analitico}} = \sqrt{v_{1xy}^2(0) + v_{F1xz}^2(0)} = 2,839 \text{ mm}$. O erro entre as soluções foi de aproximadamente 6%.

5.3 Comparação dos resultados

Para o eixo com três rolamentos, a deflexão máxima devido aos esforços de frenagem e distribuição de peso foi de $\delta_{Max_{3R}} = 4,915 \text{ mm}$. Por outro lado, a deflexão máxima devido a adição de mais um rolamento foi de $\delta_{Max_{4R}} = 2,839 \text{ mm}$ que representa uma redução de 57%.

Além disso, a inclinação do primeiro rolamento para o caso do eixo apoiado com 3 mancais para a condição crítica seria de $\theta_{3R} = 0,0142 \text{ rad}$ com a adição de mais um rolamento a inclinação para o primeiro rolamento passa ser $\theta_{4R} = 0,0048 \text{ rad}$.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS E CONCLUSÃO

Conforme comentando anteriormente, foi utilizado o elemento BEAM 188 que é um elemento tipo viga com 6 graus de liberdade nó. Esses tipos de elementos são utilizados para peças cujo comprimento é maior que sua altura que é o caso do eixo estudado.

O BEAM 188 é um elemento baseado na teoria de vigas de Timoshenko que leva em consideração o efeito do cisalhamento. Então, os erros encontrados nas simulações é pela diferença do modelo analítico (Euler – Bernoulli) que leva em consideração os efeitos da flexão. No entanto, as soluções foram próximas devido ao pequeno efeito do cisalhamento nos casos estudados. Além disso, para simulações do eixo o Ansys gerou uma malha com 23 elementos que foi suficiente para a solução convergir.

A análise de deflexão, mostrou que a condição crítica é na situação de frenagem, para essa condição e para o eixo com três rolamentos, a deflexão máxima foi de $\delta_{Max_{3R}} = 4,915 \text{ mm}$. No entanto, percebeu-se em solicitações extremas, durante a frenagem do veículo, onde a extremidade que possui um mancal é mais solicitada, que pode-se reduzir a deflexão do eixo adicionando um mancal na extremidade esquerda, tornando as condições de apoio do eixo simétricas. Consequentemente, obteve-se redução das deflexões máximas e dos ângulos de rotação do primeiro rolamento. Visto que, altas deflexões e inclinações poderiam levar a desalinhamentos em engrenagens e rolamentos, consequentemente provocar a falha do sistema e acessórios.

A deflexão máxima que o elemento sofreu devido a mesma condição de frenagem e com a adição de mais um rolamento foi de $\delta_{Max_{4R}} = 2,839 \text{ mm}$, que representa uma redução de 57%. Além disso, a inclinação máxima, que é do primeiro rolamento, para o caso do eixo apoiado com 3 mancais para a condição crítica seria de $\theta_{3R} = 0,0142 \text{ rad}$ com a adição de mais um rolamento a inclinação para o primeiro rolamento passa ser $\theta_{4R} = 0,0048 \text{ rad}$, o que representa uma redução de 66%. Dessa forma os objetivos foram atendidos, ou seja, foi possível reduzir a deflexão do elemento.

Como proposta para trabalhos futuros e para uma análise mais completa, recomenda-se os estudos da dinâmica do eixo, ou seja, obter os modos de vibrações e frequências naturais e análise de tensões utilizando o modelo apresentado no Ansys, visto que os valores encontrados foram próximos do modelo analítico

analisado. Tais análises contribuem para validar a proposta de intervenção de adicionar um mancal para aumentar vida útil do sistema e aumenta a relevância do trabalho, em termos científicos e de engenharia.

7 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

AÇO sae 4130. 1. 2018. Disponível em: <<http://www.acosporte.com.br/aco-sae-4130>>. Acesso em: 10 maio 2018.

AWRUCH, Armando; MORSCH, Inácio; SCHMITZ, Rebeca. **ESTUDO E COMPARAÇÃO ENTRE OS ELEMENTOS BEAM188 E BEAM189 (ANSYS 14.5)** . 2016. 22 f. Método dos Elementos Finitos (Engenharia Civil)- Universidade Federal do Rio Grande do Sul, [S.l.], 1. 1.

AZEVEDO, Domingos. **Análise estrutural com Ansys Workbench** . 1. ed. [S.l.: s.n.], 2016. 180 p. v. 1. Disponível em: <<http://ftp://ftp.aluno.umc.br/Aluno/Domingos/ENGENHARIA%20AUXILIADA%20POR%20COMPUTADORES/PROJETO%20DE%20SISTEMAS%20MEC%C2%82NICOS%20III/An%E1lise%20Estrutural%20com%20ANSYS%20Workbench%202016.pdf>>. Acesso em: 06 jun. 2018.

BARATA, Juliano. **Como funciona um chassi de kart profissional?** . Disponível em: <<https://www.flatout.com.br/como-funciona-um-chassi-de-kart-profissional/>>. Acesso em: 10 maio 2018.

BATHE, Klaus. Finite **Element Procedures** . 2. ed. [S.l.]: Prentice Hall, 1996. 1065 p. v. 1.

BRUNETTI, Franco . **Motores De Combustão Interna** . 1. ed. [S.l.]: Blucher, 1969. 554 p. v. 1.

BUDYNAS, RICHARD; NISBETT, KEITH. **Elementos de Máquinas de Shigley** : Projeto de Engenharia Mecânica. 8. ed. Porto Alegre: AMGH Editora, 2011. 1084 p.

COLLINS, JACK. **Projeto mecânico de elementos de máquinas** : Uma perspectiva de prevenção da falha. 1. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2006. 740 p.

COUTO, BRUNO; LOBO, FELIPE; BRITO, MIGUEL. **Dimensionamento de Eixo rotativo via Critério de tensão, deformação e velocidade crítica** . 1969. 40 p. ELEMENTOS DE MÁQUINAS (ENGENHARIA MECÂNICA)- ESCOLA DE ENGENHARIA ELETRICA, MECÂNICA E DE COMPUTAÇÃO, UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS, Goiás, 2016. 1.

CX Simulations. **Troubleshoot Solver Pivot Error** . 2017. Disponível em: <<https://www.youtube.com/watch?v=fXGYBWxlBKc>>. Acesso em: 06 jun. 2018

DIAS, ANDERSON. **Kart Explicado** : Como funcionam os pneus do kart. Disponível em: <<http://www.carrosinfoco.com.br/carros/2014/09/o-kart-explicado-como-funcionam-os-pneus-do-kart/>>. Acesso em: 21 jul. 2017.

DIAS, ANDERSON. **Kart Explicado** : Distribuição de peso. Disponível em: <<http://www.carrosinfoco.com.br/carros/2014/10/o-kart-explicado-distribuicao-de-peso/>>. Acesso em: 21 jul. 2017.

DIAS, ANDERSON. **Kart Explicado** : Os tipos de eixo. Disponível em: <<http://www.carrosinfoco.com.br/carros/2014/09/o-kart-explicado-os-tipos-de-eixo/>>. Acesso em: 21 jul. 2017.

DIAS, ANDERSON. **Kart Explicado**: Funcionamento do chassi. Disponível em: <<http://www.carrosinfoco.com.br/carros/2014/07/o-kart-explicado-funcionamento-do-chassi/>>. Acesso em: 21 jul. 2017.

GERE, JAMES; GOODNO, BARRY. **Mecânica dos materiais** . 7. ed. Rio de Janeiro: CENGAGE Learning, 2010. 858p.

GUILHERME RIZZO, Guilherme . **AUTOMOBILISMO Curvas II** . Disponível em:

<<https://rizzofisico.wordpress.com/2012/07/17/automobilismo-curvas-ii/>>.

Acesso em: 05 ago. 2017.

HIBBELER, R. C. **Resistência de Materiais**. 7. ed. [S.l.: s.n.], 2010. 640 p. v. 1.

JUVINALL, ROBERT; MARSHEK, KURT. **Fundamentos do projeto de componentes de máquinas**. 5. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2016. 562 p.

MARTHA, Luiz Fernando. **FTOOL** : Um Programa Gráfico-Interativo para Ensino de Comportamento de Estruturas. 1. 2012. Disponível em: <https://webserver2.tecgraf.puc-rio.br/ftp_pub/users/lfm/ftoolman300-pt.pdf>. Acesso em: 06 jun. 2018.

MILDRED B., Hecke. **Método dos Elementos Finitos Aplicados à Engenharia de Estruturas** : Estudo de Uma viga parede com abertura. 1. ed. [S.l.]: Universidade Federal do Paraná, 2010. 25 p. v. 1.

NORTON, ROBERT. **Projeto de máquinas** : Uma abordagem integrada. 4. ed. Porto Alegre: Bookman, 2013. 1028 p.

PAZ, ARIAS. **Manual do automóvel**. 2. ed. São Paulo: Hemus, 2011. 858 p.

TONYKART : Chassis Setup Manual. 1. ed. [S.l.: s.n.], 2008. 5 p. Disponível em: <<http://www.iwt.com.au/private/Kosmic%20manual.pdf>>. Acesso em: 23 jul. 2017.

WILLIAM, Thomson. **Teoria da vibração : com aplicações**. 1. ed. Rio de Janeiro: Interciência, 1978. 462 p. v. 1.