3
Simulador de Plasticidade Incremental

3.1. Introdução

Neste capítulo apresenta-se a formulação de um simulador de modelos de plasticidade incremental, implementando-o no software Matlab. Este simulador permite reproduzir o comportamento de alguns modelos de plasticidade incremental, tais como fluência cíclica uniaxial e multiaxial, encruamento isotrópico e não proporcional. O método de integração utilizado neste trabalho para resolver as equações diferencial é o método de Euler.

3.2. Encruamento isotrópico incremental

O encruamento isotrópico caracteriza-se pela expansão / contração da superfície de escoamento devido ao encruamento ou amolecimento. Este comportamento de transição pode ser modelado através da evolução do raio da superfície de escoamento r_l, a partir da tensão de escoamento monotônico S_Y (medido no ensaio de tração) até seu valor cíclico S_{YC}. A maioria dos modelos de encruamento isotrópico assume que esta transição evolui como uma função dos incrementos de deformação plástica equivalente $\mathbf{d}\wp$.

3.2.1. Encruamento isotrópico baseado em deformação plana

A equação de evolução do raio da superfície de escoamento r_l é descrito por

$$dr_l = \left(S_{YC} - r_l\right).b_C.d\wp \tag{3.1}$$

onde $d\wp = 2/3.\left|d\overline{e}_p'\right| = \sqrt{2/3}.\left|d\overline{e}_p\right| = \sqrt{2/3}.\left|d\overline{\varepsilon}_p\right|$ é o incremento de deformação plástica equivalente e b_c a taxa de encruamento isotrópico. Após sua integração e para a condição inicial $r_l = S_Y$, esta equação resulta em:

$$r_l = S_{YC} + \left(S_Y - S_{YC}\right).e^{-b_C.p} \tag{3.2}$$

onde p é a deformação plástica acumulada, e calculada em sua formulação continua ou discreta como

$$\begin{aligned} p &= \int dp \cong \sum \Delta p = \frac{2}{3} \cdot \sum |\Delta \overline{e}_p '| \\ &= \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \sum |\Delta \overline{e}_p | = \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \sum |\Delta \overline{\varepsilon}_p | \end{aligned} \tag{3.3}$$

O encruamento isotrópico afeta não só a resistência do escoamento, mas também a forma inteira da curva tensão-deformação. Assume-se que as curvas tensão-deformação cíclica e monotônica podem ser modeladas pela equação de Ramberg-Osgood utilizando-se os coeficientes de encruamento H_m e H_c, respectivamente, mas com o mesmo expoente h_c. Portanto, para calcular o efeito do encruamento isotrópico sobre a curva tensão-deformação, basta calcular a evolução do coeficiente encruamento atual de Ramberg-Osgood $H(p)$, a partir do monotônico $H(p = 0) = H_m$, até o estabilizado ciclicamente $H(p \to \infty) = H_c$, mantendo-se h_c constante. Geralmente o número de ciclos envolvidos na transição do encruamento isotrópico é pequeno comparado com a típica vida à fadiga. O uso de h_c (ao vez de h) na descrição da curva monotônica não compromete a precisão das previsões da vida.

Geralmente, a resistência ao escoamento é definida para uma deformação plástica de **0.2%**. Portanto, $S_Y = H_m.0,002^{h_C}$, $S_{YC} = H_c.0,002^{h_C}$ e $r_l = H(p).0,002^{h_C}$, obtém-se $dH(p).0,002^{h_C} = \left[H_c - H(p)\right].0,002^{h_C}.b_c.dp$ e $H(p).0,002^{h_C} = H_m.0,002^{h_C} + \left(H_c - H_m\right).0,002^{h_C}.(1 - e^{-b_c.dp})$. Cancelando o termo $0,002^{h_C}$ obtém-se equação da evolução para $H(p)$ baseado na lei de *Voce*.

$$dH(p) = \left[H_c - H(p)\right].b_c.dp \tag{3.4}$$

$$H(p) = H_m + \left(H_c - H_m\right).(1 - e^{-b_c.dp}) \tag{3.5}$$

3.3. Encruamento Não Proporcional Incremental

3.3.1. Modelo Generalizado de Tanaka

O modelo de encruamento NP de Tanaka [49] faz uso do tensor de polarização C_T que armazena o valor absoluto da deformação plástica acumulada e sua direção para uma história de carregamentos, através dos valores e dos vetores próprios de C_T, respectivamente. Estes vetores e valores próprios influenciam o valor do parâmetro não proporcional A_T ($0 \leq A_T \leq 1$), que é definido como $A_T = \sqrt{1 - \frac{|C_T . \bar{n}'|^2}{tr(C_T{}^T - C_T)}}$, onde $dC_T = (\bar{n}' . \bar{n}'^T - C_T) . b_T . d\wp$. A evolução não proporcional do raio da superfície de escoamento r_l a partir da resistência ao escoamento ciclicamente estabilizado S_{Yc} até ao valor desejado pode ser descrita por uma equação muito semelhante à adotada pela evolução isotrópica,

$$S_{Yt} = S_{YC} . [1 + \alpha_{NP} . (F_{NPt} + F_{NPm})] \tag{3.6}$$

$$dr_l = (S_{Yt} - r_l) . b_{NP} . d\wp \tag{3.7}$$

onde b_{NP} é a taxa de encruamento NP, F_{NPt} é o valor final do fator de NP (que pode variar a cada ciclo, em especial para as histórias não-periódicas), e F_{NPm} é um fator de memória que armazena o encruamento permanente causado pela história plástica anterior.

Assumindo que a solução da equação de evolução descreve-se por

$$r_l = S_{YC} . [1 + \alpha_{NP} . F_{NP}(\wp)] \tag{3.8}$$

ao substituir-se a equação (3.6) e (3.7) na (3.8) tem-se que

$$dr_l = [S_{YC} . \alpha_{NP} . (F_{NPt} + F_{NPm}) - S_{YC} . \alpha_{NP} . F_{NP}(\wp)] . b_{NP} . d\wp \tag{3.9}$$

Cancelando-se o produto $S_{Yc} \cdot \alpha_{NP}$, obtém-se que a equação da evolução do fator NP transiente $F_{NP}(\wp)$ é

$$dF_{NP}(\wp) = [F_{NPt} + F_{NPm} - F_{NP}(\wp)] . b_{NP} . d\wp \tag{3.10}$$

onde F_{NPt} é o fator NP final e F_{NPm} é o fator NP de memória.

A generalização do modelo de Tanaka assume que o valor final do fator transiente NP $F_{NP}(p)$ é igual a $F_{NPt} = \left(A_T.\sqrt{2}\right)^{\beta_T}$, já que o parâmetro não proporcional A_T é igual à zero em histórias proporcionais e tende a $1/\sqrt{2}$ para as trajetórias circulares para deformação plástica. Portanto, o fator de NP desejado tende corretamente para os casos limites $F_{NPt} = 0$ e $F_{NPt} = 1$, independente do valor ajustado para o expoente β_T, tornando o fator NP $F_{NP}(p)$ correto para os valores desejados 0 e 1, respectivamente. Na presente tese, trabalha-se com histórias reais 90° fora de fase, que resultam em $F_{NPt} = 1$. Além disso, neste trabalho não são levados em consideração os efeitos da história prévia sobre o encruamento cíclico, portanto se considera o fator NP de memória $F_{NPm} = 0$.

O encruamento isotrópico e NP podem ser expressos num único modelo combinando as Equações 3.6 e 3.8. Seus efeitos serão considerados independentes entre si, dado que o raio da superfície de escoamento evolui segundo.

$$r_l = \underbrace{S_{YC}.[1+\alpha_{NP}.F_{NP}(p)]}_{\text{Evolução NP}} + \underbrace{(S_Y - S_{YC}).e^{-b_C.p}}_{\text{Evolução Isotrópica}} \tag{3.11}$$

Considerando-se $S_Y = H_m.0{,}002^{h_c}$, $S_{YC} = H_C.0{,}002^{h_c}$ e cancelando o termo $0{,}002^{h_c}$, resulta-se na equação que descreve a evolução do coeficiente de Ramberg-Osgood transiente:

$$H(p) = \underbrace{H_C.[1+\alpha_{NP}.F_{NP}(p)]}_{\text{Evolução NP}} + \underbrace{(H_m - H_C).e^{-b_C.p}}_{\text{Evolução Isotrópica}} \tag{3.12}$$

3.4. Modelo de encruamento cinemático múltiplas-superfícies

O modelo de encruamento cinemático baseado no efeito de *Bauschinger* pode ser modelado no espaço de tensões permitindo o deslocamento da superfície de escoamento sem a mudança em seu tamanho e forma. Assim, no espaço de tensões desviatórias, o encruamento cinemático mantém o raio r_l da superfície de escoamento constante, enquanto o centro é transladado, mudando-se o módulo plástico generalizado C. Vários modelos têm sido propostos para se calcular o valor atual de C, como a superfície de escoamento transladada, assim como direção de translação para obter o incremento de deformação plástica associada. A maioria dos modelos de encruamento podem ser divididos em duas classes: modelo de múltiplas-superfícies e encruamento não-linear. Nesta seção centra-se no estudo do modelo de múltiplas-superfícies, as quais assumem que C é constante em cada superfície. Isso resulta na descrição multi-linear da curva tensão deformação. Ou seja, é constituída por vários segmentos lineares que tratam de aproximar sua forma não-linear.

3.4.1. Representação de múltiplas-superfícies

O primeiro modelo de múltiplas-superfícies foi introduzido por Mróz em 1967, que definiu uma família de superfícies, aninhadas no espaço de tensão, uma no interior da outra (vide Figura 3.3). As superfícies são definidas no espaço de tensões desviatórias E_{5S} de ordem reduzida 5D adotadas, utilizando-se a função de escoamento de Mises para descrever cada superfície. O espaço 5D tem duas vantagens sobre a formulação 6D: evitar a redundância na representação das tensões desviatórias, o que permite diminuir o custo computacional nos cálculos das tensões e deformações, e o fato de que r_1 na superfície de escoamento seja igual à tensão de escoamento, sem a necessidade de incluir o fator de escala $\sqrt{2/3}$, como se apresentará na Figura 3.1. Embora todas as equações do encruamento cinemático sejam representadas no espaço 5D, sua conversão para 6D é trivial, como se apresentou nas Tabelas 1 e 2. A localização do centro da superfície de escoamento é definida como o ponto $\bar{S}_{c1}'$, que é igual ao vetor *backstress* $\bar{\alpha}'$. Além da superfície de escoamento com raio r_1, as $M-1$ superfícies de encruamento com raios r_2, r_3 ,..., r_M são definidas dentro da superfície de ruptura com raio r_{M+1}, igual à tensão real de ruptura σ_U do material.

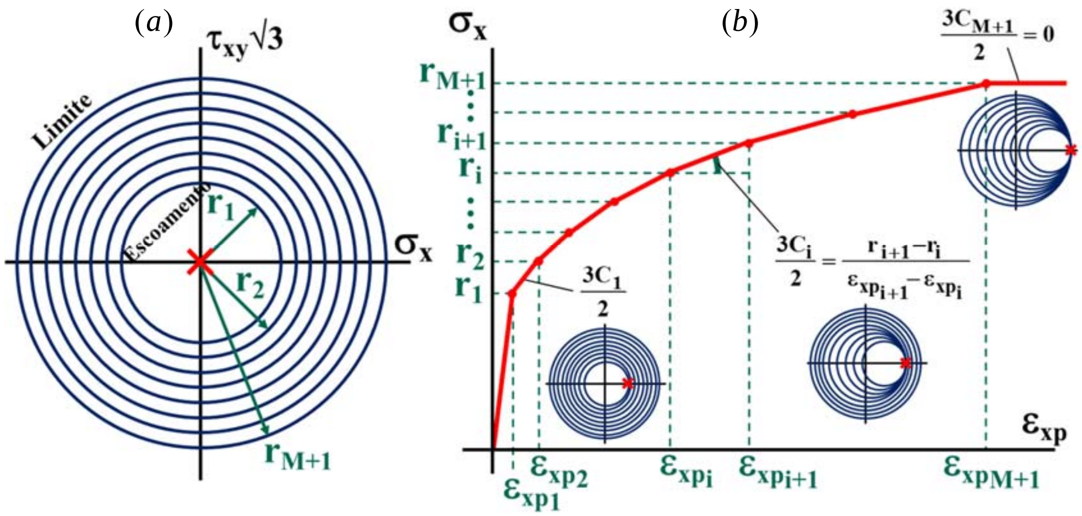

Figura 3.1. (a) Superfície de escoamento, encruamento e falha no sub espaço $\sigma_x \; x \; \tau_{xy}\sqrt{3}$ de E_{5s} e (b) raios correspondentes r_i e o módulo de plasticidade generalizado C_i

Estas M+1 superfícies aninhadas devem ter raios crescentes $r_1 < r_2 < \ldots < r_{M+1}$ e devem ser inicializadas de forma concêntrica na origem do espaço E_{5S}, e.g. inicialmente $\bar{S}_{c1}' = 0$. O raio r_1 da superfície de encruamento é igual ao nível de tensão definido pelo usuário associado à deformação plástica que delineia a representação multilinear da curva tensão-deformação (vide Figura 3.1).

A diferença entre os raios de superfícies consecutivas é definida como $\Delta r_i \equiv r_{i+1} - r_i$. A princípio, o raio r_i pode mudar durante a deformação plástica como resultado dos efeitos do encruamento isotrópico e NP. A superfície de falha nunca é transladada, porque qualquer tensão que atinja seu limite causa fratura no material devido ao critério $|\bar{S}'| = r_{M+1} = \sigma_U$, portanto seu centro está sempre na origem do espaço E_{5S}, i.e. $\bar{S}_{cM+i}' \equiv 0$.

O vetor *backstress* pode ser decomposto na soma de M componentes $\bar{\alpha}_1'$, $\bar{\alpha}_2'$, …, $\bar{\alpha}_M'$ que descrevem a posição relativa $\bar{\alpha}_i' \equiv \bar{S}_{ci}' - \bar{S}_{ci+1}'$ entre os centros de superfícies consecutivas (vide Figura 3.2). Note-se que o comprimento (norma) $|\bar{\alpha}_i'|$ de cada componente de translação da superfície de escoamento está sempre entre 0, se $\overline{S}_{ci}'$ e $\overline{S}_{ci+1}'$ coincidem (condição sem encruamento) e Δr_i se as superfícies são mutuamente tangentes (condição de saturação ou máximo encruamento).

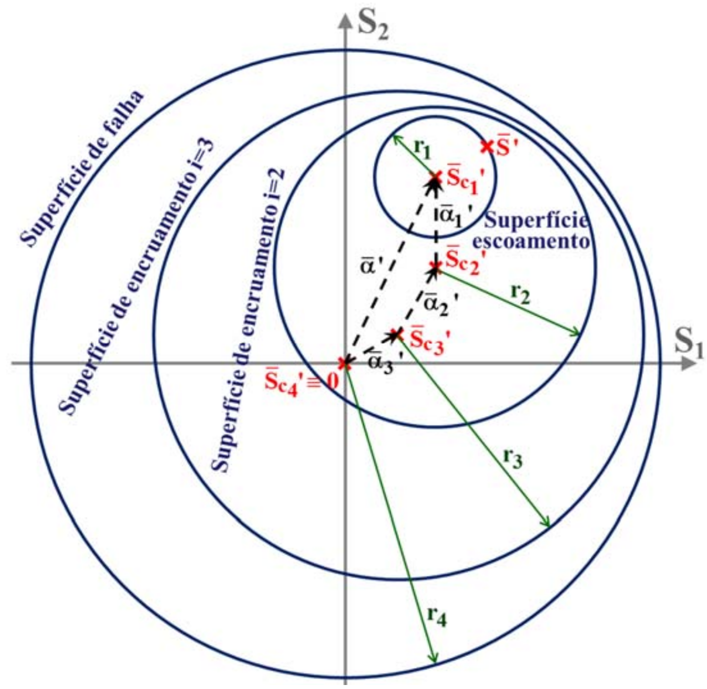

Figura 3.2. Superfície de escoamento, encruamento e falha no sub espaço desviatório $S_1 \times S_2$ para M = 3, apresentando o vetor de translação da superfície de escoamento $\overline{\alpha}'$

Como mostra a Figura 3.3, a condição saturada do componente de translação da superfície de escoamento $\overline{\alpha}_i'$ alinhado ao vetor $\overline{n}'$ que é perpendicular a estas superfícies na tensão atual $\overline{S}'$, resulta em $\overline{\alpha}_i' = \overline{n}'.(r_{i+1} - r_i) = \overline{n}'.\Delta r_i$.

A partir de $\overline{S}_{cM+1}' \equiv 0$ e da definição de componentes *backstress*, obtém-se que o centro $\overline{S}_{ci}'$ da superfície de escoamento ou qualquer encruamento i é a soma de todas as componentes de translação da superfície de escoamento a partir de $\overline{\alpha}_i'$ para $\overline{\alpha}_M'$:

$$\overline{S}_{ci}' = \overline{\alpha}_i' + \overline{\alpha}_{i+1}' + \overline{\alpha}_{i+2}' + \ldots + \overline{\alpha}_{M-2}' + \overline{\alpha}_{M-1}' + \overline{\alpha}_M' \qquad (3.13)$$

A regra principal da evolução destas superfícies é: **(i)** eles devem transladarse como um corpo rígido, quando o ponto $\overline{S}'$ que define o estado de tensões desviatórias atuais no espaço E_{5S} alcança seu limite. **(ii)** as superfícies não podem passar um através da outra, portanto elas gradualmente tornam-se mutuamente tangentes no ponto da tensão atual.

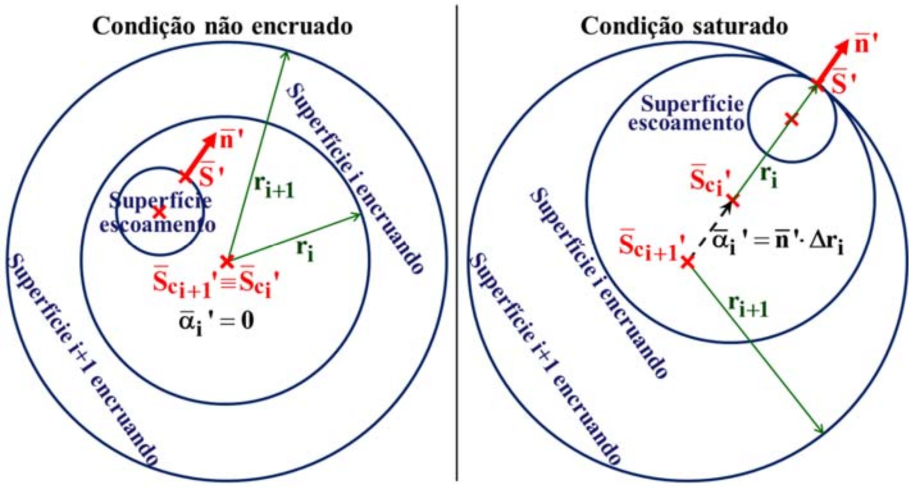

Figura 3.3. Configurações (a) sem encruamento e (b) saturado das superfícies consecutivas i e i+1

A superfície externa que está se movendo é chamado de superfície ativa, com índice i_A. Qualquer mudança no estado das tensões no interior da superfície de escoamento assume-se elástico, sem translação de nenhuma superfície, desde que $\left|\overline{S}'-\overline{S}_{c1}'\right| < r_1$. Portanto nenhuma superfície é ativada e $i_A = 0$. À medida que a tensão se incrementa até um estado plástico, a tensão no ponto $\overline{S}'$ primeiro encontrará a superfície de escoamento, tornando ativa essa superfície ($i_A = 1$), e seguirá em frente até atingir a primeira superfície de encruamento. A superfície se tornará ativa $i_A = 2$, quando as duas superfícies se movimentarão juntas na tangente $\overline{S}'$ até encontrar a próxima superfície de encruamento, e assim por diante.

3.4.2. Regras da translação das superfícies

A regra adotada para a translação destas superfícies foi a proposta por Jiang e Sehitoglu [50, 51]. O modelo de plasticidade de Jiang assume que a direção da translação total da superfície de escoamento é a soma da direção em que cada superfície i é transladada. Ele foi escolhidopela sua habilidade de prever retcheting uniaxial e multiaxial, além de relaxação da carga média, ao contrário de outros modelos de encruamento cinemático. Os componentes da direção de translação efetiva são obtidos pela seguinte expresão,

$$\bar{v}_i' = \bar{n}'.\Delta r_i - \left(\left|\bar{\alpha}_i'\right| / \Delta r_i\right)^{x_i} .\bar{\alpha}_i' \tag{3.14}$$

onde x_i é o expoente de ratcheting, com $0 \leq x_i < \infty$. O módulo plástico generalizado C é calculado a partir de:

$$C = \frac{2}{3}(c_1 . \bar{v}_1'^T + c_2 . \bar{v}_2'^T + ... + c_M . \bar{v}_M'^T).\bar{n}' \equiv \frac{2}{3}.(c . \bar{v}'^T).\bar{n}' \tag{3.15}$$

onde c é o coeficiente de módulo plástico generalizado efetivo e $\bar{v}'$ é a direção de translação efetiva, enquanto c_i é o coeficiente calibrado para cada superfície.

3.4.3. Descrição do algoritmo

Todas as superfícies de escoamento e encruamento são inicialmente centrados na origem, na configuração sem encruamento com as componentes de translação das superfícies de escoamento (*backstress*) $\bar{\alpha}_1' = \bar{\alpha}_2' = ... = \bar{\alpha}_M' = 0$.

Para uma dada história de tensão, cada incremento de tensão 6D $\Delta\bar{\sigma}$ deve primeiro ser projetada sobre o sub espaço E_{5S} 5D para se obter o incremento da tensão desviatória $\Delta\bar{S}' = A.\Delta\bar{\sigma}$, onde **A** é a matriz de projeção. O incremento de tensão hidrostática 6D $\Delta\bar{\sigma}_h = \Delta\sigma_h.[1 \;\; 1 \;\; 1 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0]^T$ é, então, associado e calculado utilizando-se $\Delta\sigma_h = \left(\Delta\sigma_x + \Delta\sigma_y + \Delta\sigma_z\right)/3$, do qual se obtém o incremento de deformação hidrostática, a partir de $\Delta\bar{\varepsilon}_h = 3.\mathcal{K} / \Delta\bar{\sigma}_h$, onde $\mathcal{K}$ é módulo de compressão do material, dado por $\mathcal{K} = E/[3\cdot(1-2\nu)]$.

O centro da superfície de escoamento $\bar{S}_{c1}' \equiv \bar{\alpha}'$ é obtido a partir das componentes de translação das superfícies de escoamento 5D atual, através de

$\bar{\alpha}' = \bar{\alpha}_1' + \bar{\alpha}_2' + ... + \bar{\alpha}_M'$. O comprimento $\left|\bar{S}' - \bar{\alpha}'\right|$ é calculado entre o centro do estado de tensões atuais e a superfície de escoamento. Se $\left|\bar{S}' - \bar{\alpha}'\right| = r_1$, então o estado de tensão atual $\bar{S}'$ está sobre a borda da superfície. Portanto, o vetor normal 5D $\bar{n}'$ à superfície de escoamento em $\bar{S}'$ é calculado como $\bar{n}' = \left(\bar{S}' - \bar{\alpha}'\right) / \left|\bar{S}' - \bar{\alpha}'\right| = \left(\bar{S}' - \bar{\alpha}'\right) / r_1$.

Se $\left|\bar{S}' - \bar{\alpha}'\right| / r_1$ e $\Delta\bar{S}'^T . \bar{n}' < 0$, então $\Delta\bar{S}'$ provoca uma condição de descarregamento elástico, a partir da borda da superfície de escoamento. Por outro lado, se $\left|\bar{S}' - \bar{\alpha}'\right| < r_1$, então o estado de tensão atual $\bar{S}'$ é elástico, uma vez que está dentro da superfície de escoamento. Em ambos casos, o incremento da tensão $\Delta\bar{S}'$ assume-se puramente elástico. Para uma dada história de deformações, estima-se $\Delta\bar{S}'$ pela lei de Hooke $\Delta\bar{S}' = 2G.\Delta\bar{e}'$.

Para saber se todo o incremento $\Delta\bar{S}'$ é de fato puramente elástico, a equação $\left|\bar{S}' + b^*.\Delta\bar{S}' - \bar{\alpha}'\right| = r_1$ é resolvida para a raiz positiva de b* para encontrar o incremento de tensão $b^*.\Delta\bar{S}'$ que iria atingir a superfície de escoamento. Se b* ≥ 1, então $\Delta\bar{S}'$ é um incremento inteiramente elástico, e os componentes elásticos e plásticos dos incrementos de deformação são calculados pela lei de Hooke $\Delta\bar{e}_e' = \Delta\bar{e}' = \Delta\bar{S}'/2G$ e $\Delta\bar{e}_p' = 0$. Caso contrário, se 0 < b* < 1, então somente a fração $b^*.\,\Delta\bar{S}'$ do incremento de tensão é elástica; esta etapa de cálculo é repetida localmente servindo-se de um degrau de entrada refinada $b^*.\,\Delta\bar{\sigma}$ ou $b^*.\,\Delta\bar{\varepsilon}$ que induz incremento desviatório elástico $b^*.\,\Delta\bar{S}'$, atingindo exatamente a superfície de escoamento. Neste caso, a fração restante $(1 - b^*).\,\Delta\bar{\sigma}$, ou $(1 - b^*).\,\Delta\bar{\varepsilon}$, será utilizada no cálculo da próxima etapa sobre condições elastoplásticas.

O incremento puramente elastoplástico ocorre se $\left|\bar{S}' - \bar{\alpha}'\right| = r_1$ e $\Delta\bar{S}'^T . \bar{n}' > 0$. As direções de translação $\bar{v}_i'$ em 5D são calculadas para superfície a partir do modelo de translação escolhido como uma função de $\bar{n}'$ e $\bar{\alpha}_i'$, usada para calcular o módulo de plasticidade atual C a partir da equação ((3.14)). Note-se que, para a formulação das múltiplas –superfícies, C obtém-se apenas a partir do valor C_i da superfície ativa. Para a história de deformações, o incremento elastoplástico $\Delta\bar{S}'$ (que originalmente foi assumido como elástico) é calculado a partir de C, utilizando a solução do problema inverso $\Delta\bar{S}' = 2G.\left[\Delta\bar{e}' - (\Delta\bar{e}'^{T}.\bar{n}').\bar{n}'.2G/(2G+C)\right]$ em 5D. A componente plástica do incremento de deformação em 5D é, então, obtida a partir do incremento elastoplástico $\Delta\bar{S}'$ utilizando a regra da normalidade $\Delta\bar{e}_p' = (\Delta\bar{S}'^{T}.\bar{n}').\bar{n}'./C$, enquanto a componente elástica é obtida da lei de Hooke $\Delta\bar{e}_e' = \Delta\bar{S}'/2G$.

A translação da superfície sempre ocorre durante a deformação plástica, para todas as superfícies de escoamento e encruamento, a partir dos incrementos $\Delta\bar{\alpha}_i' = c_i.\bar{v}_i'.\Delta\mathscr{p}$, onde $\Delta\mathscr{p} = (2/3)\left|\Delta\bar{e}_p'\right|$. Finalmente, a cada incremento são armazenadas as tensões e as deformações no sub-espaço 5D e 6D. Na Tabela 4 descreve-se o algoritmo.

Tabela 4. Algoritmo de plasticidade incremental, apresentando suas semelhanças e diferenças

Algoritmo de múltiplas-superfícies	**Algoritmo de cinemática não-linear**
Cálculo do incremento hidrostático em 6D $\Delta\bar{\sigma}_h$ ou $\Delta\bar{\varepsilon}_h$, correlacionados por $\Delta\bar{\varepsilon}_h = 3.\mathscr{K} / \Delta\bar{\sigma}_h$.	
A histórias de tensões projetar no sub-espaço 5D $\Delta\bar{S}' = A.\Delta\bar{\sigma}$; a histórias de deformações projetar no sub-espaço 5D $\Delta\bar{e}' = A.\Delta\bar{\varepsilon}$.	
Cálculo do centro da superfície de escoamento a partir das componentes de translação da superfície de escoamento (*Backstress*) 5D: $\bar{\alpha}' = \bar{\alpha}_1' + \bar{\alpha}_2' + \ldots + \bar{\alpha}_M'$.	
Se $\left\|\bar{S}' - \bar{\alpha}'\right\| = r_1$ (o estado de tensão atual $\bar{S}'$ está sobre a superfície), então o vetor normal $\bar{n}'$ à superfície de escoamento em $\bar{S}'$ (5D) é calculado utilizando $\bar{n}' = \left(\bar{S}' - \bar{\alpha}'\right) / \left\|\bar{S}' - \bar{\alpha}'\right\| = \left(\bar{S}' - \bar{\alpha}'\right) / r_1$.	

Se $\left\|\bar{S}'-\bar{\alpha}'\right\| < r_1$ (o $\bar{S}'$ atual está no interior da superfície de escoamento) ou $\left\|\bar{S}'-\bar{\alpha}'\right\| = r_1$ com $\Delta\bar{S}'^T.\bar{n}' < 0$ (descarregamento elástico, a partir da borda da superfície de escoamento), então se assume $\Delta\bar{S}'$ e $\Delta\bar{e}'$ elásticos, correlacionados a partir da lei de Hooke por $\Delta\bar{e}_e' = \Delta\bar{e}' = \Delta\bar{S}'/2G$, com $\Delta\bar{e}_p' = 0$. Deste modo, resolver $\left\|\bar{S}' + a.\Delta\bar{S}'-\bar{\alpha}'\right\| = r_1$ para **"a"** encontrar o incremento de tensão $a.\Delta\bar{S}'$ que atinja a superfície de escoamento. Assim, se **a** ≥ 1, então esta etapa de cálculo finaliza aqui, uma vez o incremento é totalmente elástico, caso contrário se 0 < **a** < 1 deve se repetir a etapa de cálculo refinando a entrada localmente $a.\Delta\bar{\sigma}$ ou $a.\Delta\bar{\varepsilon}$.	
Caso contrário, se $\left\|\bar{S}'-\bar{\alpha}'\right\| < r_1$ com $\Delta\bar{S}'^T.\bar{n}' > 0$, testa-se $d\bar{S}'^T.\bar{n}' < 0$ se é descarregamento elástico ou elastoplástico.	
É importante obter-se em 5D as direções de translação da superfície $\bar{v}_i'$ a partir do modelo escolhido como uma função de $\bar{n}'$ e $\bar{\alpha}_i'$.	
Módulo linear tirado da superfície ativa: $C = C_i$ para i = iA	Módulo não-linear: $C = \frac{2}{3}\sum_{i=1}^{M} c_i.\bar{v}_i'^T.\bar{n}'$
Para história de deformação, $\Delta\bar{S}'$ é obtido a partir de C por $\Delta\bar{S}' = 2G.\left[\Delta\bar{e}' - (\Delta\bar{e}'^T.\bar{n}').\bar{n}'.2G/(2G+C)\right]$.	
Cálculo do incremento de deformação elástica em 5D: $\Delta\bar{e}_e' = \Delta\bar{S}'/2G$.	
Cálculo do incremento de deformação plástica em 5D, a partir da regra da normalidade: $\Delta\bar{e}_p' = (\Delta\bar{S}'^T.\bar{n}').\bar{n}'/C$.	
Verificar se $\bar{S}'+\Delta\bar{S}'$ ainda estará dentro da próxima superfície de encruamento i+1, caso contrário repetir a etapa de cálculo com entradas refinadas localmente $a.\Delta\bar{\sigma}$ ou $a.\Delta\bar{\varepsilon}$, onde 0 < **a** < 1 e $F_{i+1}\left(\bar{S}'+a.\Delta\bar{S}'\right) = 0$.	$\Delta\bar{\alpha}_i' = c_i.\bar{v}_i'.\Delta\wp$ para todas as superfícies de escoamento e encruamento, onde $\Delta\wp = (2/3)\left\|\Delta\bar{e}_p'\right\|$.

$\Delta\bar{\alpha}_i' = 0$ para todo i $\neq$ i_A e $\Delta\bar{\alpha}_i' = b.\Delta\bar{v}_i'$ para a superfície ativa i = i_A, onde b > 0 e $F_i = \left\|\bar{S}' + \Delta\bar{S}' - \left(\bar{S}_{ci}' + b.\Delta v_i'\right)\right\|^2 - r_i^2 = 0$.	Se qualquer componente *backstress* estiver sobressaturada ($\left\|\bar{\alpha}_i' + \Delta\bar{\alpha}_i'\right\| > \Delta r_i$), repetir esta etapa de cálculo com entradas $\Delta\bar{\sigma}$ ou $\Delta\bar{\varepsilon}$ refinadas para garantir que as superfícies se encontrarão tangencialmente ($\left\|\bar{\alpha}_i' + \Delta\bar{\alpha}_i'\right\| = \Delta r_i$)
Translação da superfície de escoamento e encruamento fazendo $\bar{\alpha}_i' := \bar{\alpha}_i' + \Delta\bar{\alpha}_i'$, i = 1, 2, …, M	
Projeção dos incrementos para 6D: $\Delta\bar{\sigma} = \Delta\bar{\sigma}_h + (2/3).A^T.\Delta\bar{S}'$ e $\Delta\bar{\varepsilon} = \Delta\bar{\varepsilon}_h + (2/3).A^T.\left(\Delta\bar{e}_e' + \Delta\bar{e}_p'\right)$.	
As variáveis a serem armazenadas e atualização em 6D e 5D são: $\bar{\sigma} := \bar{\sigma} + \Delta\bar{\sigma}$, $\bar{\varepsilon} := \bar{\varepsilon} + \Delta\bar{\varepsilon}$, $\bar{S}' := \bar{S}' + \Delta\bar{S}'$ e $\bar{e}' = \bar{e}' + \Delta\bar{e}_e' + \Delta\bar{e}_p'$.	

No próximo capítulo apresenta-se o projeto da máquina tração torção, a qual foi desenvolvido para se avaliar experimentalmente os modelos de plasticidade incremental apresentados.