

2 Fundamentos de Plasticidade Incremental

2.1. Introdução

Na maioria das aplicações na engenharia é conhecida a história de tensões ou deformações, mas não ambas. Geralmente para projetar um componente novo, a história de tensões é calculada, ou estimada a partir das cargas de projeto (medidas ou especificadas). Entretanto, em componentes que já existem só podem ser medidas as deformações mediante a avaliação da integridade estrutural (utilizando *strain gage* ou rosetas). Mas os melhores modelos para determinar o dano à fadiga multiaxial requerem o conhecimento de ambas: a história de tensões e suas correspondentes deformações, para assim quantificar o parâmetro de dano associado.

Nos corpos de prova submetidos a histórias não proporcionais, o fenômeno de encruamento não proporcional tem um papel importante na previsão da vida à fadiga. Na literatura são apresentados diversos modelos que relacionam tensões e deformações tentando modelar este fenômeno para histórias proporcionais, mas nenhum deles aplica-se ao caso não proporcional (NP). Uma solução geral para este problema pode ser a utilização de um modelo complexo de plasticidade incremental, que normalmente requer a modelagem global da peça.

2.2. Algoritmos de plasticidade incremental

Para histórias na zona linear elástica é muito fácil correlacionar a tensão com a deformação, através da Lei de Hooke. Entretanto, para histórias elastoplásticas proporcionais onde as direções principais são mantidas fixas, pode-se utilizar alguns modelos de tensão-deformação aproximados.

Contudo, para reproduzir corretamente os laços de histerese tensão-

deformação sobre histórias elastoplásticas não proporcionais, que dependem da direção da carga, é necessário utilizar modelos de plasticidade incremental para correlacionar as variações infinitesimais de todas as componentes de tensões com as deformações associadas e vice-versa. Estas equações são baseadas nas equações da função de escoamento (descreve a combinação de tensões que levam ao escoamento), a regra de fluxo (descreve a relação entre tensão e deformação plástica) e a regra de encruamento (define a mudança do encruamento com a deformação plástica). A seguir mostram-se como as 12 componentes das tensões ou deformações podem ser representadas, projetadas em planos específicos e combinadas em valores equivalentes.

2.2.1. Tensor de tensão e deformação

Geralmente as tensões e deformações são representadas pelo tensor 3 x 3 de Cauchy $[\sigma_{ij}]$ e $[\varepsilon_{ij}]$, com 9 elementos

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix}, \quad [\varepsilon_{ij}] = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_y & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xz} & \varepsilon_{yz} & \varepsilon_z \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

onde $\tau_{ij} = \tau_{ji}$ e $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$, para $i \neq j$.

A tensão ou deformação desviatória é definida pela diferença entre a tensão ou deformação e sua componente hidrostática $\sigma_h = (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)/3$ e $\varepsilon_h = (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)/3$, que pode ser representada como um tensor 3 x 3 Cauchy $[S_{ij}]$ e $[e_{ij}]$:

$$[S_{ij}] = \begin{bmatrix} S_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & S_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & S_z \end{bmatrix}, \quad [e_{ij}] = \begin{bmatrix} e_x & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{xy} & e_y & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xz} & \varepsilon_{yz} & e_z \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

onde

$$\begin{aligned} S_x &\equiv \sigma_x - \sigma_h = (2\sigma_x - \sigma_y - \sigma_z)/3, & e_x &\equiv \varepsilon_x - \varepsilon_h = (2\varepsilon_x - \varepsilon_y - \varepsilon_z)/3 \\ S_y &\equiv \sigma_y - \sigma_h = (2\sigma_y - \sigma_x - \sigma_z)/3, & e_y &\equiv \varepsilon_y - \varepsilon_h = (2\varepsilon_y - \varepsilon_x - \varepsilon_z)/3 \\ S_z &\equiv \sigma_z - \sigma_h = (2\sigma_z - \sigma_x - \sigma_y)/3, & e_z &\equiv \varepsilon_z - \varepsilon_h = (2\varepsilon_z - \varepsilon_x - \varepsilon_y)/3 \end{aligned}$$

Se todas as tensões cisalhantes forem zero, então x , y e z representam as direções principais, e o estado de tensões principais $\sigma_x - \sigma_y - \sigma_z$ pode ser representado por um vetor $[\sigma_x \ \sigma_y \ \sigma_z]^T$. Os pontos de tensão desviatória $[S_x \ S_y \ S_z]^T$ descreve um plano nesta direção principal chamado plano desviatório ou plano- π , que consiste de um dos oito planos octaédricos. Qualquer plano paralelo ao plano- π é também chamado de plano desviatório e a tensão normal perpendicular ao plano desviatório é associado com um vetor de tensão hidrostática $[\sigma_h \ \sigma_h \ \sigma_h]^T$. Note que a componente hidrostática da tensão e deformação desviatória é sempre zero, uma vez que $S_x + S_y + S_z = (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) - 3\sigma_h = 0$ e $e_x + e_y + e_z = (\epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z) - 3\epsilon_h = 0$. Qualquer tensão (ou deformação) pode-se decompor em duas componentes, o desviatório e a hidrostática, e.g., $[\sigma_x \ \sigma_y \ \sigma_z]^T = [S_x \ S_y \ S_z]^T + [\sigma_h \ \sigma_h \ \sigma_h]^T$. Estas componentes são ortogonais, já que o produto escalar entre eles é zero ($(S_x - \sigma_h + S_y - \sigma_h + S_z - \sigma_h) = (S_x + S_y + S_z) - 3\sigma_h = 0$).

Ilyushin [25] representou o tensor da tensão e deformação como um vetor de 9 dimensões (9D), evitando a necessidade de tratar operações tensoriais. Voigt e Mandel [26] propuseram uma representação ainda melhor, considerando as vantagens das simetrias $\tau_{ij} = \tau_{ji}$ e $\epsilon_{ij} = \epsilon_{ji}$ (com $i \neq j$, e.g. $\tau_{xy} = \tau_{yx}$, $\tau_{xz} = \tau_{zx}$, $\tau_{yz} = \tau_{zy}$, $\epsilon_{xy} = \epsilon_{yx}$, $\epsilon_{xz} = \epsilon_{zx}$ e $\epsilon_{yz} = \epsilon_{zy}$) para expressar as tensões e deformações como um vetor de 6 dimensões (6D).

$$\left. \begin{aligned} \bar{\sigma} \equiv \bar{\sigma}_{6D} &= [\sigma_x \ \sigma_y \ \sigma_z \ \tau_{xy}\sqrt{2} \ \tau_{xz}\sqrt{2} \ \tau_{yz}\sqrt{2}]^T \\ \bar{\epsilon} \equiv \bar{\epsilon}_{6D} &= [\epsilon_x \ \epsilon_y \ \epsilon_z \ \gamma_{xy}/\sqrt{2} \ \gamma_{xz}/\sqrt{2} \ \gamma_{yz}/\sqrt{2}]^T \\ \bar{S} \equiv \bar{S}_{6D} &= [S_x \ S_y \ S_z \ \tau_{xy}\sqrt{2} \ \tau_{xz}\sqrt{2} \ \tau_{yz}\sqrt{2}]^T \\ \bar{e} \equiv \bar{e}_{6D} &= [e_x \ e_y \ e_z \ \gamma_{xy}/\sqrt{2} \ \gamma_{xz}/\sqrt{2} \ \gamma_{yz}/\sqrt{2}]^T \end{aligned} \right\} \text{Voigt-Mandel (2.3)}$$

onde $\gamma_{ij} \equiv 2\epsilon_{ij}$ (significa $\gamma_{xy} = \epsilon_{xy} + \epsilon_{yx} = 2\epsilon_{xy}$, $\gamma_{xz} = 2\epsilon_{xz}$ e $\gamma_{yz} = 2\epsilon_{yz}$), e T representa a transposta de um vetor. A notação 6D de Voigt-Mandel é utilizada extensivamente para representar as relações tensão-deformação na mecânica dos sólidos, e para a eficiência computacional em softwares numéricos de mecânica estrutural.

A transformação a partir da tensão ou deformação 6D para suas partes

desviatórias na notação de Voigt-Mandel pode ser representada por uma matriz de projeção de 6×6 A_{6D} através de $\bar{S}=A_{6D} \cdot \bar{\sigma}$ e $\bar{e}=A_{6D} \cdot \bar{\varepsilon}$, onde

$$A_{6D} = \begin{bmatrix} 2/3 & -1/3 & -1/3 & 0 & 0 & 0 \\ -1/3 & 2/3 & -1/3 & 0 & 0 & 0 \\ -1/3 & -1/3 & 2/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

Na notação Voigt-Mandel, é possível representar a deformação elastoplástica $\bar{\varepsilon}$ em suas componentes elástica e plástica, através de

$$\bar{\varepsilon} = \bar{\varepsilon}_e + \bar{\varepsilon}_p \quad (2.5)$$

onde $\bar{\varepsilon}_e = [\varepsilon_{xe} \quad \varepsilon_{ye} \quad \varepsilon_{ze} \quad \gamma_{xye}/\sqrt{2} \quad \gamma_{xze}/\sqrt{2} \quad \gamma_{yze}/\sqrt{2}]^T$ e

$$\bar{\varepsilon}_p = [\varepsilon_{xp} \quad \varepsilon_{yp} \quad \varepsilon_{zp} \quad \gamma_{xyp}/\sqrt{2} \quad \gamma_{xzp}/\sqrt{2} \quad \gamma_{yzp}/\sqrt{2}]^T$$

A lei de Hooke na forma vetorial é descrita por

$$\bar{\varepsilon}_e = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xe} \\ \varepsilon_{ye} \\ \varepsilon_{ze} \\ \gamma_{xye}/\sqrt{2} \\ \gamma_{xze}/\sqrt{2} \\ \gamma_{yze}/\sqrt{2} \end{bmatrix} = \frac{1}{E} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & -\nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1+\nu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1+\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1+\nu \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy}\sqrt{2} \\ \tau_{xz}\sqrt{2} \\ \tau_{yz}\sqrt{2} \end{bmatrix} = E_{6D}^{-1} \cdot \bar{\sigma} \quad (2.6)$$

onde ν é o coeficiente elástico de Poisson e E_{6D}^{-1} é a matriz 6×6 de Hooke.

Para deformações elastoplásticas, é também possível representar as componentes elástica e plástica de sua parte desviatória na notação de Voigt-Mandel através de

$$\bar{e} = \bar{e}_e + \bar{e}_p \quad (2.7)$$

onde $\bar{e}_e \equiv [\varepsilon_{xe} \quad \varepsilon_{ye} \quad \varepsilon_{ze} \quad \gamma_{xye}/\sqrt{2} \quad \gamma_{xze}/\sqrt{2} \quad \gamma_{yze}/\sqrt{2}]^T$ e

$$\bar{\mathbf{e}}_p \equiv \left[e_{xp} \quad e_{yp} \quad e_{zp} \quad \gamma_{xy}/\sqrt{2} \quad \gamma_{xz}/\sqrt{2} \quad \gamma_{yz}/\sqrt{2} \right]^T$$

A partir das equações acima e segundo a lei de Hooke, relaciona-se a tensão desviatória $6D \bar{\mathbf{S}}$ com a componente de deformação elástica $\bar{\mathbf{e}}_e$ na notação de Voigt-Mandel,

$$\bar{\mathbf{e}}_e = \bar{\mathbf{S}} / 2G \quad (2.8)$$

onde $G = E/[2 \cdot (1+\nu)]$.

Note que a deformação hidrostática ϵ_h é sempre elástica para materiais insensíveis à pressão, que são definidos como materiais cujo escoamento é independente de sua tensão hidrostática σ_h (e.g. materiais que seguem o critério de escoamento de Mises ou Tresca). Portanto, ela não pode causar deformação plástica, e pode-se relacionar σ_h e ϵ_h utilizando a lei de Hooke:

$$\begin{aligned} E\epsilon_{xe} &= \sigma_x - \nu \cdot (\sigma_y + \sigma_z) \\ + E\epsilon_{ye} &= \sigma_y - \nu \cdot (\sigma_x + \sigma_z) \\ E\epsilon_{ze} &= \sigma_z - \nu \cdot (\sigma_x + \sigma_y) \end{aligned} \Rightarrow \epsilon_h = \frac{\sigma_h}{3\mathcal{K}} \Rightarrow \bar{\epsilon}_h = \frac{\bar{\sigma}_h}{3\mathcal{K}} \quad (2.9)$$

$$3E \cdot \epsilon_h = 3\sigma_h \cdot (1 - 2\nu)$$

onde $\mathcal{K} = E/[3 \cdot (1 - 2\nu)]$ é módulo de compressão volumétrica do material, que mede sua resistência à compressão uniforme.

Uma vez que ϵ_h é sempre elástico puro (e.g. tem componente plástica zero) para materiais insensíveis à pressão, então a deformação plástica ϵ_{xp} , ϵ_{yp} e ϵ_{zp} deve ser igual a ϵ_x , ϵ_y e ϵ_z .

$$\begin{cases} e_x \equiv \epsilon_x - \epsilon_h \\ e_y \equiv \epsilon_y - \epsilon_h \\ e_z \equiv \epsilon_z - \epsilon_h \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} e_{xp} = \epsilon_{xp} \\ e_{yp} = \epsilon_{yp} \\ e_{zp} = \epsilon_{zp} \end{cases} \quad (2.10)$$

2.2.2.

Redução de ordem do espaço de tensão e deformação

Ao trabalhar com cálculos de tensão-deformação multiaxial, é uma boa ideia

trabalhar com um espaço de tensões ou deformações de dimensão reduzida, economizando o esforço computacional sem modificar os resultados. Trabalhando no espaço desviatório é possível simplificar várias equações, e.g. a lei de Hooke torna-se uma operação escalar em vez de multiplicações com a matriz de rigidez ou sua inversa.

Uma vez que $S_x + S_y + S_z = 0$, é possível reduzir a dimensão da tensão desviatória de 6D para 5D, definindo um vetor 5D $\bar{S}' \equiv \bar{S}_{5D} = [S_1 \ S_2 \ S_3 \ S_4 \ S_5]^T$ [27].

O subespaço euclidiano 5D (E_{5S}) utilizado nesta tese para esta projeção 5D é definido por

$$\bar{S}' \equiv \bar{S}_{5D} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -1/2 & -1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & -\sqrt{3}/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{3}/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{3}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{3}/2 \end{bmatrix}}_A \cdot \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy}\sqrt{2} \\ \tau_{xz}\sqrt{2} \\ \tau_{yz}\sqrt{2} \end{bmatrix} \equiv A \cdot \bar{\sigma} \quad (2.11)$$

onde A é a matriz de projeção do espaço 6D de Voigt-Mandel dentro do subespaço 5D de tensão desviatória adotado.

O espaço desviatório 5D definido acima \bar{S}' têm três propriedades interessantes:

Primeiro: a norma do vetor \bar{S}' é igual à tensão de Mises equivalente σ_{Mises} ,

$$\text{pois } |\bar{S}'| = \frac{|\bar{S}|}{\sqrt{2/3}} = \frac{|\bar{S}_{9D}|}{\sqrt{2/3}} = \sigma_{Mises} = \frac{\tau_{Mises}\sqrt{3}}{\sqrt{2/3}}.$$

Segundo: O comprimento euclidiano no espaço E_{5S} entre dois estados de tensão (pontos) $\bar{S}'_A = [S_{1A}, S_{2A}, S_{3A}, S_{4A}, S_{5A}]^T$ e $\bar{S}'_B = [S_{1B}, S_{2B}, S_{3B}, S_{4B}, S_{5B}]^T$, associados respectivamente a \bar{S}_A e \bar{S}_B em 6D, é igual à gama de tensão de Mises $\Delta\sigma_{Mises}$ entre esses estados de tensões.

$$|\bar{S}'_B - \bar{S}'_A| = \frac{|\bar{S}_B - \bar{S}_A|}{\sqrt{2/3}} = \frac{|\bar{S}_{9D,B} - \bar{S}_{9D,A}|}{\sqrt{2/3}} = \Delta\sigma_{\text{Mises}} = \frac{\Delta\tau_{\text{Mises}}\sqrt{3}}{\sqrt{2/3}} \quad (2.12)$$

Terceiro: O lugar geométrico dos pontos que têm o mesmo $\Delta\sigma_{\text{Mises}}$ com relação a um ponto \bar{S}' no subespaço desviatório E_{5S} é a superfície de uma hipersfera com centro em \bar{S}' e raio $\Delta\sigma_{\text{Mises}}$.

Para uma história de deformações, é possível representar a deformação desviatória em um subespaço euclidiano 5D transformado E_{5e} utilizando a mesma matriz de transformação A utilizada para tensões desviatórias, resultando em deformações desviatórias de ordem reduzida.

$$\bar{e}' \equiv \bar{e}_{5D} = [e_1 \ e_2 \ e_3 \ e_4 \ e_5]^T = A \cdot \bar{e} = A \cdot \bar{e} \quad (2.13)$$

$$\text{onde } e_1 \equiv \varepsilon_x - \frac{\varepsilon_y}{2} - \frac{\varepsilon_z}{2} = \frac{3}{2}\varepsilon_x, \quad e_2 \equiv \frac{\varepsilon_y - \varepsilon_z}{2}\sqrt{3} = \frac{e_y - e_z}{2}\sqrt{3}, \quad e_3 \equiv \frac{\gamma_{xy}}{2}\sqrt{3},$$

$$e_4 \equiv \frac{\gamma_{xz}}{2}\sqrt{3}, \quad e_5 \equiv \frac{\gamma_{yz}}{2}\sqrt{3}.$$

A deformação desviatória 5D \bar{e}' no subespaço de deformação E_{5e} também tem propriedades muito semelhantes ao subespaço E_{5S} .

Para histórias constituídas apenas pela combinação da tensão uniaxial σ_x e a torção τ_{xy} (onde $\sigma_y = \sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$), pode ser utilizado um subespaço 2D para representar a tensão e deformação desviatória:

$$\bar{S}_{2D} \equiv [S_1 \ S_2]^T = [\sigma_x \ \tau_{xy}\sqrt{3}]^T \quad (2.14)$$

$$\bar{e}_{2D} \equiv [e_1 \ e_3]^T = [\varepsilon_x \cdot (1+\bar{\nu}) \ \frac{\gamma_{xy}}{2}\sqrt{3}]^T \quad (2.15)$$

onde $S_1 = \sigma_x, S_3 = \tau_{xy}\sqrt{3}$ e $e_1 \equiv \varepsilon_x - \frac{-\bar{\nu}\cdot\varepsilon_x}{2} - \frac{-\bar{\nu}\cdot\varepsilon_x}{2} = \varepsilon_x \cdot (1-\bar{\nu})$ que, assumindo que $\varepsilon_y = \varepsilon_z \equiv -\bar{\nu}\cdot\varepsilon_x$, resulta em $e_1 = \varepsilon_x \cdot (1-\bar{\nu})$ e $e_2 \equiv 0$.

Tais simplificações são a maior vantagem da formulação de ordem reduzida 5D. Separando a deformações desviatórias em suas componentes elástica e plástica,

temos

$$\bar{\epsilon}_{2De} \equiv (1+\bar{\nu}) \cdot \left[\epsilon_{xe} \quad \frac{\gamma_{xye}}{2 \cdot (1+\bar{\nu})} \cdot \sqrt{3} \right]^T \quad (2.16)$$

$$\bar{\epsilon}_{2Dp} \equiv \frac{3}{2} \cdot \left[\epsilon_{xp} \quad \frac{\gamma_{xyp}}{\sqrt{3}} \right]^T \quad (2.17)$$

As transformações entre os espaços 6D e 5D são resumidas na Tabelas 1 e 2

Tabela 1. Transformação direta e inversa entre o espaço 6D e 5D, na forma matricial

Transformação	A partir de 6D para 5D	A partir de 5D para 6D
Tensão	$\bar{S}' = A \cdot \bar{\sigma} = A \cdot \bar{S}$	$\bar{S} = \frac{2}{3} A^T \cdot \bar{S}' \Rightarrow \bar{\sigma} = \bar{S} + \bar{\sigma}_h$
Deformação elastoplástica	$\bar{\epsilon}' = A \cdot \bar{\epsilon} = A \cdot \bar{\epsilon}$	$\bar{\epsilon} = \frac{2}{3} A^T \cdot \bar{\epsilon}' \Rightarrow \bar{\epsilon} = \bar{\epsilon} + \bar{\epsilon}_h$
Deformação elástica	$\bar{\epsilon}_e' = A \cdot \bar{\epsilon}_e = A \cdot \bar{\epsilon}_e$	$\bar{\epsilon}_e = \frac{2}{3} A^T \cdot \bar{\epsilon}_e' \Rightarrow \bar{\epsilon}_e = \bar{\epsilon}_e + \bar{\epsilon}_h$
Deformação plástica	$\bar{\epsilon}_p' = A \cdot \bar{\epsilon}_p = A \cdot \bar{\epsilon}_p$	$\bar{\epsilon}_p = \bar{\epsilon}_p = \frac{2}{3} A^T \cdot \bar{\epsilon}_p'$ (Já que $\bar{\epsilon}_h$ é elástica)

Tabela 2. Transformação direta e inversa entre o espaço 6D e 5D, na forma escalar

Transformação	A partir de 6D para 5D	A partir de 5D para 6D
Tensão	$S_1 = \sigma_x - (\sigma_y + \sigma_z)$ $S_2 = (\sigma_y - \sigma_z) \cdot \sqrt{3} / 2$ $S_3 = \tau_{xy} \cdot \sqrt{3}, S_4 = \tau_{xz} \cdot \sqrt{3}$ $S_5 = \tau_{yz} \cdot \sqrt{3}$	$\sigma_x = \sigma_h + S_1 \cdot 2 / 3$ $\sigma_y = \sigma_h - S_1 / 3 + S_2 / \sqrt{3}$ $\sigma_z = \sigma_h - S_1 / 3 - S_2 / \sqrt{3}$ $\tau_{xy} = S_3 / \sqrt{3}, \tau_{xz} = S_4 / \sqrt{3}, \tau_{yz} = S_5 / \sqrt{3}$
Deformação elastoplástica	$e_1 = \epsilon_x - (\epsilon_y + \epsilon_z) / 2$ $e_2 = (\epsilon_y - \epsilon_z) \cdot \sqrt{3} / 2$ $e_3 = \gamma_{xy} \cdot \sqrt{3} / 2$ $e_4 = \gamma_{xz} \cdot \sqrt{3} / 2$ $e_5 = \gamma_{yz} \cdot \sqrt{3} / 2$	$\epsilon_x = \epsilon_h + e_1 \cdot 2 / 3$ $\epsilon_y = \epsilon_h - e_1 / 3 + e_2 / \sqrt{3}$ $\epsilon_z = \epsilon_h - e_1 / 3 + e_2 / \sqrt{3}$ $\gamma_{xy} = e_3 \cdot 2 / \sqrt{3}, \gamma_{xz} = e_4 \cdot 2 / \sqrt{3}$ $\gamma_{yz} = e_5 \cdot 2 / \sqrt{3}$

Deformação elástica	$e_{1e} = \varepsilon_{xe} - (\varepsilon_{ye} + \varepsilon_{ze}) / 2$ $e_{2e} = (\varepsilon_{ye} - \varepsilon_{ze}) \cdot \sqrt{3} / 2$ $e_{3e} = \gamma_{xye} \cdot \sqrt{3} / 2$ $e_{4e} = \gamma_{xze} \cdot \sqrt{3} / 2$ $e_{5e} = \gamma_{yze} \cdot \sqrt{3} / 2$	$\varepsilon_{xe} = \varepsilon_h + e_{1e} \cdot 2 / 3$ $\varepsilon_{ye} = \varepsilon_h - e_{1e} / 3 + e_{2e} / \sqrt{3}$ $\varepsilon_{ze} = \varepsilon_h - e_{1e} / 3 + e_{2e} / \sqrt{3}$ $\gamma_{xye} = e_{3e} \cdot 2 / \sqrt{3}, \gamma_{xze} = e_{4e} \cdot 2 / \sqrt{3}$ $\gamma_{yze} = e_{5e} \cdot 2 / \sqrt{3}$
Deformação plástica	$e_{1p} = \varepsilon_{xp} - (\varepsilon_{yp} + \varepsilon_{zp}) / 2$ $e_{2p} = (\varepsilon_{yp} - \varepsilon_{zp}) \cdot \sqrt{3} / 2$ $e_{3p} = \gamma_{xyp} \cdot \sqrt{3} / 2$ $e_{4p} = \gamma_{xzp} \cdot \sqrt{3} / 2$ $e_{5p} = \gamma_{yzp} \cdot \sqrt{3} / 2$	$\varepsilon_{xp} = \varepsilon_h + e_{1p} \cdot 2 / 3$ $\varepsilon_{yp} = \varepsilon_h - e_{1p} / 3 + e_{2p} / \sqrt{3}$ $\varepsilon_{zp} = \varepsilon_h - e_{1p} / 3 + e_{2p} / \sqrt{3}$ $\gamma_{xyp} = e_{3p} \cdot 2 / \sqrt{3}, \gamma_{xzp} = e_{4p} \cdot 2 / \sqrt{3}$ $\gamma_{yzp} = e_{5p} \cdot 2 / \sqrt{3}$

2.2.3.

Incremento de deformação plástica equivalente e deformação plástica total

Várias equações de plasticidade incremental utilizam a norma $|\overline{d\varepsilon}_p|$ do incremento de deformação plástica $d\varepsilon_p$, que define a variação infinitesimal do vetor de deformação plástica. Uma maneira de representar a norma através do incremento de deformação plástica $d\mathcal{p}$, uma quantidade escalar positiva que pode ser definida como a variação absoluta da deformação efetiva plástica de Mises $\varepsilon_{p,Mises}$. Esta deformação é dada por $\varepsilon_{p,Mises} = |\overline{\varepsilon}_p| / (1 + 0,5)$, assumindo coeficiente de Poisson plástico 0.5. A partir das relações $|\overline{\varepsilon}_p| = |\overline{e}_p| = |\overline{e}_p'| \cdot \sqrt{2/3}$ entre as representações da deformação 6D e 5D, pode-se expressar o $d\mathcal{p}$ como

$$\varepsilon_{p,Mises} = \frac{2}{3} \cdot |\overline{\varepsilon}_p'| \Rightarrow d\mathcal{p} = \frac{2}{3} \cdot |d\overline{\varepsilon}_p'| = \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot |d\overline{e}_p| = \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot |d\overline{\varepsilon}_p| \quad (2.18)$$

A integral desse incremento positivo $d\mathcal{p}$ é definida como a deformação plástica acumulada \mathcal{p} , e expressada como

$$\mathcal{p} = \int d\mathcal{p} = \frac{2}{3} \cdot \int |d\overline{\varepsilon}_p'| = \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \int |d\overline{e}_p| = \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \int |d\overline{\varepsilon}_p| \quad (2.19)$$

Note que $\varepsilon_{p,Mises}$, $\varepsilon_{p,Mises}$ e \mathcal{p} são quantidades diferentes, já que $\varepsilon_{p,Mises}$ pode

oscilar durante um ciclo de carga, enquanto p aumenta monotonicamente em qualquer processo de deformação plástica.

2.2.4. Função de escoamento e regra de fluxo

A função de escoamento é uma equação no espaço de tensões $\bar{\sigma}$ que descreve a combinação das componentes de tensão que causam escoamento. A função de escoamento mais utilizada é a baseada no critério de escoamento de Mises:

$$F \equiv F_1 = \sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - \sigma_x \sigma_y - \sigma_x \sigma_z - \sigma_y \sigma_z + 3 \cdot (\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{xz}^2) - r_1^2 = 0 \quad (2.20)$$

onde r_1 é a tensão de escoamento (seja monotônica $r_1 = S_y$ ou cíclica $r_1 = S_{yc}$, ou algum valor entre eles). A função de escoamento assume que o material é isotrópico e insensível à pressão hidrostática.

Geometricamente, a função de escoamento de Mises $F = 0$ descreve, em sua representação em 2D no diagrama $\sigma_x - \sigma_y$, o contorno de uma elipse girada 45° a partir do eixo x, vide Figura 2.1.

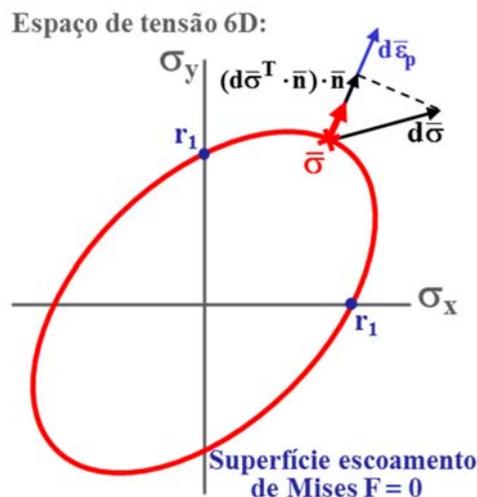


Figura 2.1 A superfície de escoamento de Mises no plano $|\sigma_x - \sigma_y|$ com o vetor normal e a regra de fluxo plástico

A regra de fluxo de Prandtl-Reuss descreve a relação entre um incremento

$d\bar{\sigma}$ de tensão, direcionado para fora da superfície de Mises, e o incremento de deformação plástica correspondente:

$$d\bar{\epsilon}_p = \frac{1}{C} \cdot (d\bar{\sigma}^T \cdot \bar{n}) \cdot \bar{n} \quad (2.21)$$

onde $d\bar{\sigma}^T \cdot \bar{n}$ é o produto escalar de $d\bar{\sigma}$ e \bar{n} , C é geralmente conhecido por módulo de plasticidade, e \bar{n} é o vetor unitário normal à superfície $F = 0$ e no estado atual $\bar{\sigma}$,

$$\bar{n} = \frac{\partial F / \partial \bar{\sigma}}{|\partial F / \partial \bar{\sigma}|} \quad (2.22)$$

onde $|\partial F / \partial \bar{\sigma}|$ é a norma do gradiente de F ,

$$\frac{\partial F}{\partial \bar{\sigma}} = \left[\frac{\partial F}{\partial \sigma_x} \quad \frac{\partial F}{\partial \sigma_y} \quad \frac{\partial F}{\partial \sigma_z} \quad \frac{\partial F}{\partial \tau_{xy}\sqrt{2}} \quad \frac{\partial F}{\partial \tau_{xz}\sqrt{2}} \quad \frac{\partial F}{\partial \tau_{yz}\sqrt{2}} \right]^T \quad (2.23)$$

O módulo de plasticidade generalizado C pode ser obtido para o caso uniaxial utilizando a equação de Ramberg-Osgood,

$$C = \frac{2}{3} \cdot h_c \cdot H_c \cdot \left(\frac{\sigma_x}{H_c} \right)^{1-1/h_c} \quad (2.24)$$

onde h_c e H_c são o expoente e coeficiente de encruamento cíclico.

2.2.5.

Regra do fluxo plástico no espaço desviatório 5D

È possível representar a função de escoamento de Mises, a regra de fluxo plástico e a lei de Hooke com relação aos vetores $S' \equiv \bar{S}_{5D}$ e deformação $e' \equiv \bar{e}_{5D}$ 5D, em vez de utilizar vetores 6D $\bar{\sigma}$, $\bar{\epsilon}$, \bar{S} ou \bar{e} de Voigt-Mandel, com ajuda da matriz de transformação A . No espaço desviatório 5D, demonstrou-se que a lei de Hooke torna-se simplesmente.

$$\bar{e}'_e = \bar{S}'/2G \quad \Rightarrow \quad d\bar{e}'_e = d\bar{S}'/2G \quad (2.25)$$

A partir das relações $\bar{e}'_e = A \cdot \bar{e}_e$, $\bar{e}'_p = A \cdot \bar{e}_p$ e $\bar{e}_p = \bar{\epsilon}_p$, tem-se que os incrementos de deformação elástico e plástico são $d\bar{e}'_e = A \cdot (d\bar{\epsilon}_e - d\bar{\epsilon}_h)$ e

$d\bar{\epsilon}_p' = A \cdot d\bar{\epsilon}_p$. No espaço desviatório 5D, a função de escoamento é ainda mais simplificada, para

$$F = [S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 + S_4^2 + S_5^2] - r_1^2 = |\bar{S}'|^2 - r_1^2 = 0 \quad (2.26)$$

onde, $|\bar{S}'|$ é a norma do vetor de tensão desviatória 5D de ordem reduzida. A superfície de escoamento é então a hipersfera com raio r_1 (e não $r_1 \cdot \sqrt{2/3}$, como na representação 6D) em tal subespaço desviatório, que concorda com $|\bar{S}| = \sigma_{\text{Mises}}$, onde σ_{Mises} é a tensão equivalente de Mises e r_1 é a resistência ao escoamento atual. Quando é representado num diagrama 2D S_1 - S_2 , assumindo $S_3 = S_4 = S_5 = 0$, a superfície resultante na fronteira é descrita por um círculo (vide Figura 2.2).

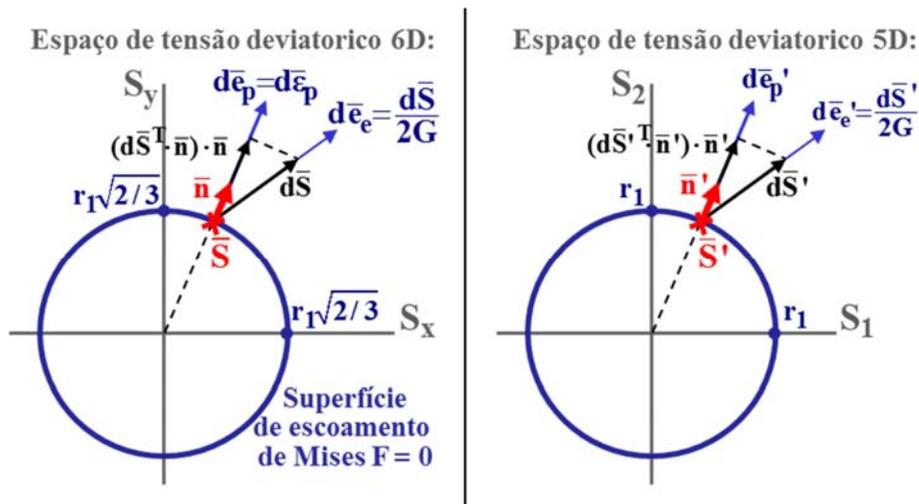


Figura 2.2 Superfície de escoamento de Mises no espaço de tensão desviatório 6D e 5D, onde ilustra-se o vetor normal \bar{n} e a regra de fluxo

A regra de fluxo plástico no subespaço 5D resulta em

$$d\bar{\epsilon}_p' = \frac{1}{C} \cdot (d\bar{S}'^T \cdot \bar{n}') \cdot \bar{n}' \quad (2.27)$$

e o incremento de deformação plástica 6D pode ser calculado a partir de

$$d\bar{\epsilon}_p = \frac{2}{3} A^T \cdot d\bar{\epsilon}_p' = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{C} \cdot (d\bar{S}'^T \cdot \bar{n}') \cdot A^T \cdot \bar{n}' = \frac{1}{C} \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot (d\bar{S}'^T \cdot \bar{n}') \cdot \bar{n} \quad (2.28)$$

Note que a equação de fluxo plástico acima é somente válida se $d\bar{S}'^T \cdot \bar{n}' > 0$ ou seja, se o estado de tensão atual \bar{S}' está sobre a superfície de escoamento e seu incremento $d\bar{S}'$ é na direção exterior de $F = 0$, caso contrário o incremento é elástico e $d\bar{\epsilon}_p = d\bar{\epsilon}_p' = 0$.

2.2.5.1.

Problema direto em 5D (dada uma história de tensões)

Se \bar{S}' está sobre a superfície de escoamento e sua variação $d\bar{S}'$ é na direção para fora de $F = 0$ (e.g. $d\bar{S}'^T \cdot \bar{n}' > 0$), então o incremento de deformação $d\bar{\epsilon}$ pode ser calculado utilizando a formulação 5D:

$$\left. \begin{array}{l} \bar{S}' = A \cdot (\bar{\sigma} - \bar{\sigma}_h) \\ d\bar{S}' = A \cdot (d\bar{\sigma} - d\bar{\sigma}_h) \end{array} \right\} \Rightarrow d\bar{\epsilon}' = d\bar{\epsilon}_e' - d\bar{\epsilon}_p' = \frac{d\bar{S}'}{2G} + \frac{1}{C} (d\bar{S}'^T \cdot \bar{n}') \cdot \bar{n}' \quad (2.29)$$

O incremento de deformação no espaço 5D é convertido no incremento de deformação $d\bar{\epsilon}$ em 6D utilizando

$$d\bar{\epsilon} = d\bar{\epsilon}_e + d\bar{\epsilon}_p + d\bar{\epsilon}_h = \frac{2}{3} A^T \cdot (d\bar{\epsilon}_e' + d\bar{\epsilon}_p') + \frac{d\bar{\sigma}_h}{3\mathcal{K}} \quad (2.30)$$

resultando em

$$d\bar{\epsilon} = \frac{2}{3} A^T \cdot \left(\frac{d\bar{S}'}{2G} + \frac{1}{C} (d\bar{S}'^T \cdot \bar{n}') \cdot \bar{n}' \right) + \frac{d\bar{\sigma}_h}{3\mathcal{K}} \quad (2.31)$$

Por outro lado, se \bar{S}' não está sobre a superfície de escoamento ou seu incremento $d\bar{S}'$ não é na direção para fora de $F = 0$ (e.g. $d\bar{S}'^T \cdot \bar{n}' \leq 0$), então o incremento de tensão é puramente elástico, resultando em $d\bar{\epsilon} = d\bar{\epsilon}_e + d\bar{\epsilon}_h$.

2.2.5.2.

Condição de consistência

A condição de consistência é uma equação que garante que o novo estado de tensões $\bar{S}' + d\bar{S}'$ durante o processo de deformação plástica irá cair sobre a superfície de escoamento r_1 , cuja equação no espaço 5D E_{5S} é:

$$F = |\bar{S}' - \bar{\alpha}'|^2 = (\bar{S}' - \bar{\alpha}')^T \cdot (\bar{S}' - \bar{\alpha}') - r_1^2 = 0 \quad (2.32)$$

onde $\bar{\alpha}'$ é o vetor de translação da superfície de escoamento, que permite determinar o centro da superfície de escoamento no espaço de tensão 5D. A condição de deformação elástica é associada com $F < 0$ (dentro da superfície de escoamento). Entretanto, para a condição de deformação plástica, sempre deve ser válido $F = 0$ e $dF = 0$, resultando em:

$$dF = 2.d\bar{S}'^T \cdot (\bar{S}' - \bar{\alpha}') - 2.d\bar{\alpha}'^T \cdot (\bar{S}' - \bar{\alpha}') - 2.dr_1 = 0 \quad (2.33)$$

Sempre que \bar{S}' está sobre a superfície de escoamento, o comprimento radial $|\bar{S}' - \bar{\alpha}'| \equiv |\bar{S}' - \bar{S}'_{cl}|$ é igual a seu raio r_1 e o vetor normal \bar{n}' pode ser determinado através de $\bar{n}' = (\bar{S}' - \bar{\alpha}') / |\bar{S}' - \bar{\alpha}'| = (\bar{S}' - \bar{\alpha}') / r_1$. A condição de consistência é obtida dividindo a equação (2.33) por $2 \cdot r_1$.

$$d\bar{S}'^T \cdot \bar{n}' = d\bar{\alpha}'^T \cdot \bar{n}' + dr_1 / r_1 \quad (2.34)$$

Na condição de consistência, o termo dr_1/r_1 leva em conta a variação do raio da superfície de escoamento, mudando gradualmente devido aos efeitos de encruamento isotrópico ou não proporcional.

2.3. Modelos de plasticidade incremental

Na presença de plasticidade cíclica, o material pode experimentar uma série de mudanças e seu comportamento tensão-deformação, que pode ser representada num diagrama de tensão através da mudança de sua superfície de escoamento, e.g. Considerando-se uma história tração-torção aplicada ao material, o comportamento de sua superfície de escoamento pode ser descrito no diagrama $\sigma_x \times \tau_{xy} \cdot \sqrt{3}$ mediante um círculo de raio $r_1 = \sigma_{Mises} = \sqrt{\sigma_x^2 + (\tau_{xy} \cdot \sqrt{3})^2}$.

A seguir apresentam-se alguns dos modelos de plasticidade incremental que se baseiam em fenômenos observados durante carregamentos cíclicos multiaxiais. Todos esses modelos são frequentemente complexos e incluem numerosas constantes do material, que deverão ser determinadas mediante ensaios.

2.3.1. Encruamento cinemático

O efeito *Bauschinger* observado sobre carregamento cíclico é a mudança no valor absoluto do oposto da tensão de escoamento, após deformação plástica. Em outras palavras, carregar um corpo de prova acima de seu limite de escoamento num sentido reduz (em valor absoluto) a tensão de escoamento na direção oposta.

Na Figura 2.3 mostra-se o efeito *Bauschinger* para uma história uniaxial representada no diagrama $\sigma_x \times \tau_{xy} \cdot \sqrt{3}$, onde a superfície de escoamento $\sigma_{Mises} = S_y$ translada-se sem nenhuma mudança na forma ou raio r_1 . Se o centro da superfície de escoamento é transladado na direção x no espaço de tensão por $(\sigma_{Max} - S_y)$, então a superfície resultante será intersectada com o eixo x na nova tensão de escoamento à tração $(\sigma_x - S_y + S_y) = \sigma_x$ e na nova tensão de escoamento compressivo $(\sigma_x - S_y - S_y) = (\sigma_x - 2.S_y)$. Dado que este fenômeno envolve somente a translação cinemática da superfície de escoamento, é chamado de encruamento cinemático.

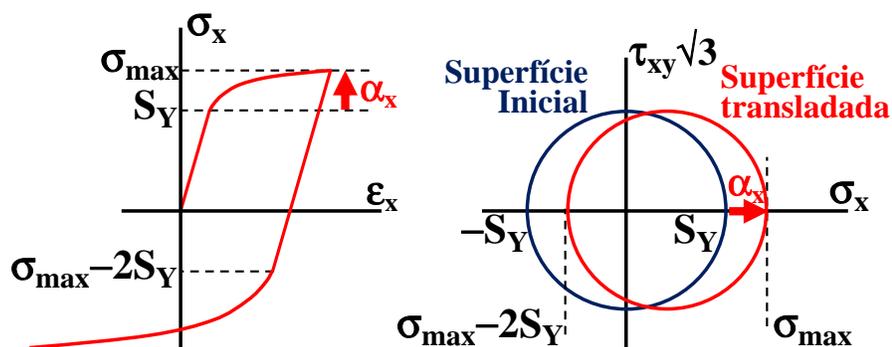


Figura 2.3 Encruamento cinemático

O novo centro da superfície de escoamento é representada pelo vetor α , e comumente é chamado de vetor de translação da superfície de escoamento, responsável por armazenar a memória plástica. Na Figura 2.3, a resistência à tração no primeiro ciclo translada o centro da superfície de escoamento a partir de seu valor inicial $\alpha = [0 \ 0]^T$ para $\alpha = [\sigma_x - \sigma_y \ 0]^T$.

2.3.2. Encruamento isotrópico

O encruamento isotrópico resulta a partir da mudança na microestrutura nos estados iniciais do carregamento cíclico, aumentando ou diminuindo sua resistência contra a deformação plástica do material. Geralmente, os materiais submetidos à deformação plástica cíclica uniaxial tendem a endurecer ou amolecer, isto devido às interações entre os deslocamentos até sua estabilização, após alguns ciclos (entre 5 e 50 ciclos nos metais), e.g. Metais recozidos tendem a deformar e a endurecer ciclicamente, devido à sua baixa resistência ao escoamento e, por outro lado, os aços temperados tendem a amolecer ciclicamente. Durante o processo de estabilização, o raio da superfície de escoamento muda gradualmente a partir de S_y para S_{yc} (vide Figura 2.4). Uma vez que a superfície de escoamento se expande ou se contrai uniformemente em todas as direções, chama-se a este fenômeno de encruamento isotrópico.

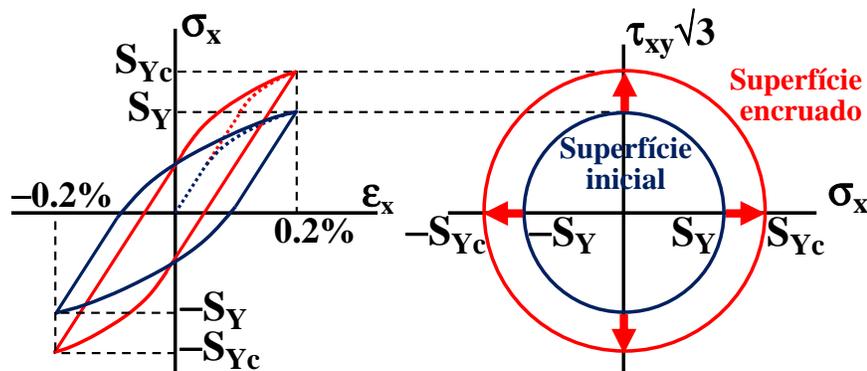


Figura 2.4 Encruamento isotrópico para um material que encrua

Observa-se que o encruamento isotrópico causa incremento gradual na amplitude de sua tensão até sua estabilização, enquanto o amolecimento isotrópico causa sua diminuição. Esta transição gradual da superfície de escoamento, pode ser modelada por uma mudança gradual do expoente e do coeficiente monotônico de Ramberg-Osgood (H , h) para seus valores cíclicos (H_c , h_c). Para simplificar a equação da transição associada, recomenda-se ajustar a equação de Ramberg-Osgood para uma curva monotônica tensão-deformação com parâmetros (H_m , h_c),

utilizando-se o mesmo expoente h_c da curva cíclica e o coeficiente de encruamento monotônico equivalente H_m .

2.3.3. Encruamento não-proporcional

Alguns materiais submetidos aos carregamentos cíclicos multiaxial não-proporcionais (NP) podem endurecer por deformação muito mais do que o esperado a partir da curva cíclica $\sigma \times \epsilon$ uniaxial. Este fenômeno é chamado de encruamento não-proporcional, encruamento cruzado, ou encruamento adicional, que depende da história do carregamento através do fator não proporcional F_{NP} ($0 \leq F_{NP} \leq 1$), e do material através do coeficiente de encruamento α_{NP} (tipicamente $0 \leq \alpha_{NP} \leq 1$). O encruamento NP pode ser modelado utilizando o coeficiente de encruamento H_c e o expoente h_c da equação cíclica uniaxial de Ramberg-Osgood, assumindo-se que h_c não varia, enquanto o coeficiente de encruamento H_c é incrementado gradualmente até o coeficiente de encruamento NP:

$$H_{NP} = H_c \cdot (1 + \alpha_{NP} \cdot F_{NP}) \quad (2.35)$$

onde H_c é o coeficiente de encruamento cíclico uniaxial de Ramberg-Osgood.

Na Figura 2.5, comparam-se os laços de histerese produzidos por uma história NP tração-torção fora de fase e uma história proporcional, ambas com a mesma amplitude de deformação normal $\Delta \epsilon / 2 \cong 0.4\%$ [6]. Na história NP, o raio da superfície de escoamento aumenta gradualmente a partir de um valor de resistência ao escoamento entre S_y e S_{yc} devido ao encruamento isotrópico, até sua resistência ao escoamento com encruamento NP S_{yNP} .

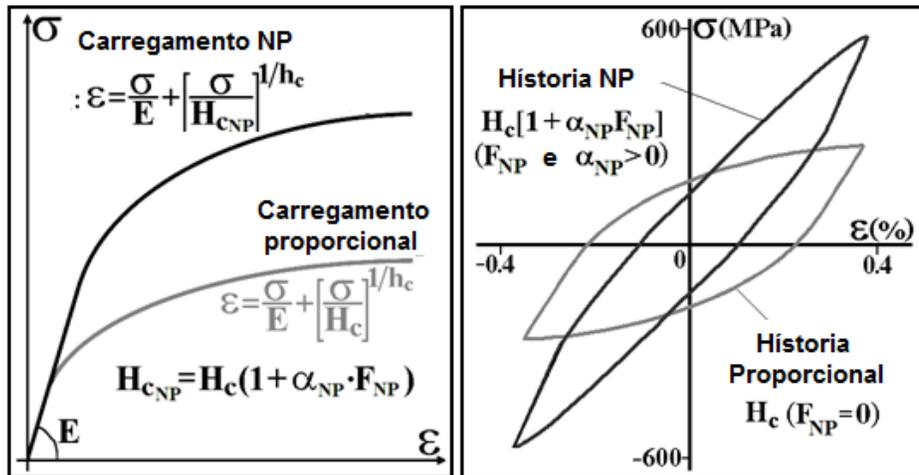


Figura 2.5 Efeito da carga cíclica NP sobre o encruamento NP, e laços de histerese proporcional e NP causado pela mesma gama $\Delta\epsilon$ num aço AISI 304

Quando o encruamento NP é significativo, as histórias NP podem causar vida à fadiga muito mais curtas que as produzidas por histórias proporcionais com a mesma gama de deformação $\Delta\epsilon$, sempre que o encruamento NP aumenta sua correspondente gama de tensão $\Delta\sigma$. Portanto, cálculos baseados no controle de deformação em histórias NP, como os encontrados em corpos de prova ϵN , ou em entalhes muito afiados, deveriam levar em consideração o efeito de encruamento NP para evitar previsões não conservadoras. Entretanto, a vida à fadiga para histórias NP sobre controle de tensão (caso mais comum na prática) pode ser maior que para o carregamento proporcional com a mesma gama de tensão $\Delta\sigma$, já que para atingir a gama de tensão $\Delta\sigma$ é necessário uma menor gama de deformação $\Delta\epsilon$ devido ao encruamento NP. A vida à fadiga associada às histórias NP sobre o controle da deformação (vide Figura 2.5) podem ser ordens de grandeza menores que as associadas às histórias proporcionais, mesmo se ambas as histórias têm a mesma gama de deformação normal $\Delta\epsilon / 2 \cong 0.4\%$.

O coeficiente de encruamento α_{NP} é um parâmetro que reflete a sensibilidade do material às histórias não-proporcionais (vide Tabela 3). Estas, à temperatura ambiente, são geralmente altas nos aços inoxidáveis ($\alpha_{NP} \cong 1$ para o aço inox-316), menor em aços carbonos ($\alpha_{NP} \cong 0.3$ para o aço 1045) e muito baixas nas ligas de alumínio ($\alpha_{NP} \cong 0$ para o Al 7075).

Tabela 3. Coeficiente de Encruamento NP.

Material	α_{NP}
Aço Inox-316	1.0
Aço Inox-304	0.5-1.0
Aço Inox-316 (550°C)	0.37
OFHC cobre	0.3
Aço 1045	0.3
Aço Inox-304 (650°C)	0.3
Inconel 718	0.2
Al 6061-T6	0.2
Aço 42 CrMo	0.15
Aço 1% Cr Mo-V	0.14
En15R	0.14
Al 7075	0.0
Al 1100	0.0

O encruamento não proporcional não depende só do material através de α_{NP} , mas também da trajetória do carregamento, através do fator NP F_{NP} . As histórias proporcionais não levam ao encruamento não-proporcional resultando em $F_{NP}=0$. O maior efeito de encruamento NP ocorre quando $F_{NP}=1$, e.g. para uma história de carregamento tração-torção 90° fora de fase, que gera um círculo no diagrama de tensão de Mises $\sigma_x \times \tau_{xy} \cdot \sqrt{3}$ ou deformação $\epsilon_x \times \gamma_{xy} / \sqrt{3}$. Na Figura 2.6 apresentam-se o fator NP para três trajetórias de deformação.

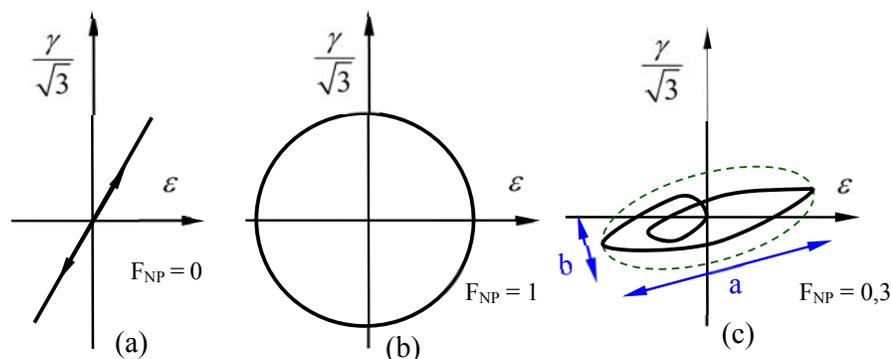


Figura 2.6 Fator não proporcional para 3 tipos de carregamentos (a) proporcional, (b) 90° fora de fase e (c) genérico.

Para determinar o fator não proporcional F_{NP} desenha-se uma elipse que circunscreve a trajetória inteira da história, e F_{NP} se dá em função da razão de aspecto da elipse, $F_{NP} = b/a$. Na Figura 2.6, a trajetória proporcional a 90° fora de fase, define os dois valores as extremidades $F_{NP} = 0$ e $F_{NP} = 1$, respectivamente. E para a trajetória genérica, determina-se $F_{NP} = 0,3$.

2.3.4. Fluência cíclica ou Ratcheting

Ratcheting, também conhecido como fluência cíclica, é a acumulação de qualquer componente de deformação plástica com o incremento do número de ciclos. Tal incremento de deformação constante em uma certa direção pode influenciar a vida à fadiga de partes mecânicas devido ao esgotamento prematuro da ductilidade do material, muito mais rápido do que a vida de iniciação à fadiga. Geralmente, a fluência cíclica está associada à tensão média da história do carregamento uniaxial ou multiaxial, já que qualquer história de carregamento desequilibrado pode provocá-la. Existem dois tipos de *ratcheting*: uniaxial e multiaxial. O primeiro é causado por uma história uniaxial (ou proporcional) desequilibrada, e o segundo causado por uma história NP multiaxial desequilibrada, ambas sobre controle de tensão.

2.3.4.1. Ratcheting uniaxial

A fluência cíclica uniaxial é o acúmulo de deformação na direção da tensão média diferente de zero, devido a uma história uniaxial desequilibrada. Este fenômeno é resultado da diferença no comportamento não linear do material em tração e compressão (anisotropia entre tração e compressão). O comportamento de *ratcheting* uniaxial para um carregamento uniaxial cíclico desequilibrado é um laço elastoplástico que não fecha, que faz com que o material acumule deformação a cada ciclo.

Considere a história de carregamento uniaxial apresentado na Figura 2.7, com variação da tensão entre σ_{\max} ($\sigma_{\max} > S_{Yc}$) e $-S_{Yc}$. Para facilitar, considera-se um material com comportamento tensão-deformação bi-linear e sem nenhuma

transição de encruamento isotrópico. A deformação plástica ao longo da trajetória AB é maior que em CD, mesmo que ambas as trajetórias possuam a mesma variação de tensão. Este comportamento assimétrico (não Masing) provoca uma inclinação da trajetória da tensão AB menor que a inclinação da trajetória de compressão CD, o que resulta num incremento de deformação plástica após cada laço. Nota-se que este aumento de deformação plástica não pode ser explicado pelo amolecimento isotrópico, pois as trajetórias AB, A'B' e A''B'' são paralelas, com um comportamento isotrópico estabilizado. Da mesma forma, as trajetórias CD, C'D' e C''D'' são também paralelas, embora não sejam paralelas a AB, devido ao comportamento não-Masing.

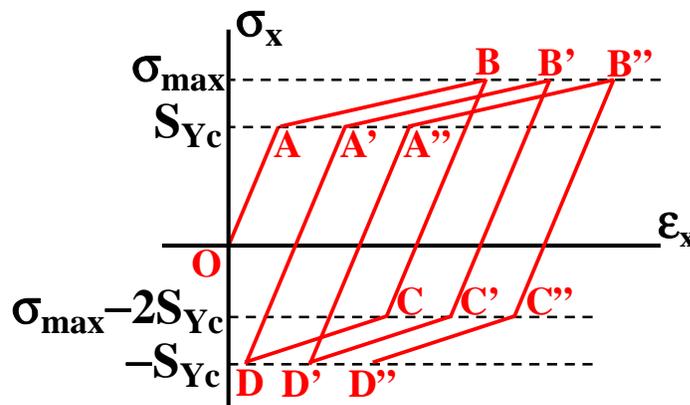


Figura 2.7 Ratcheting uniaxial para um material submetido a uma história de tensões desequilibrada entre $\sigma_{\max} > S_{Yc}$ e $-S_{Yc}$.

Na Figura 2.7, a deformação de *ratcheting* ϵ_{ri} pode ser calculada após o primeiro ciclo como $\epsilon_{r1} = (\epsilon_B + \epsilon_D)/2$, após o segundo ciclo como $\epsilon_{r2} = (\epsilon_{B'} + \epsilon_{D'})/2$, e assim por diante. A taxa de *ratcheting* por ciclo $d\epsilon/dN$ é calculada pela diferença entre as deformações de *ratcheting* de ciclos consecutivos $d\epsilon/dN = (\epsilon_{ri+1} - \epsilon_{ri})$. A taxa de *ratcheting* incrementa-se com a gama de tensão e a tensão média, no entanto é muito mais sensível à tensão média. Geralmente, a taxa de *ratcheting* varia com o número de ciclos, mesmo para os carregamentos de amplitude constante. Para histórias com grandes amplitudes de tensão, a taxa $d\epsilon/dN$ tende a aumentar a cada ciclo, até que o componente falha devido ao esgotamento da ductilidade do material (vide Figura 2.8(a)). Entretanto, para histórias com baixas amplitudes de deformações, a taxa tende a diminuir até atingir o estado estacionário com

$d\epsilon/dN = 0$ e o laço de histerese estável fechar completamente (vide Figura 2.8 (b)).

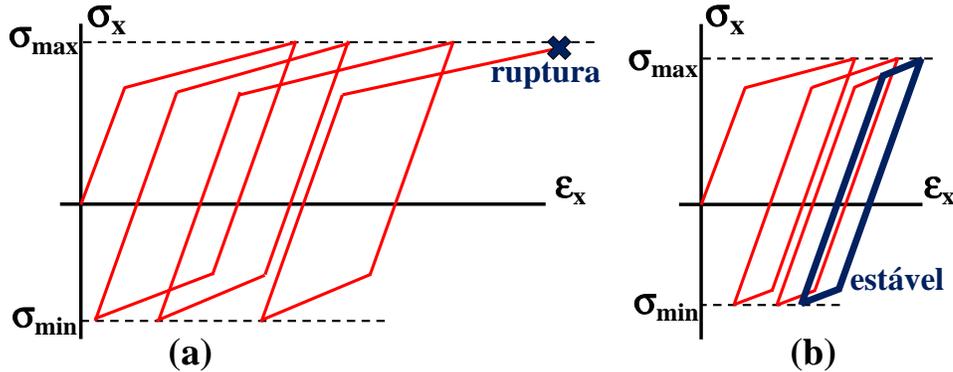


Figura 2.8 Ratcheting uniaxial para um material submetido a uma história de tensões desequilibradas com (a) alta e (b) baixa amplitude de deformação

2.3.4.2. Ratcheting multiaxial

A fluência cíclica multiaxial é o acúmulo de deformação plástica ao longo de uma determinada direção, devido a uma história de carregamento multiaxial desequilibrada. Na Figura 2.9 apresenta-se um eixo submetido a uma história de torção cíclica elastoplástica com amplitude τ_a combinada com uma tração axial constante σ_m . Inicialmente, a trajetória uniaxial OO' provoca uma deformação elástica na direção normal até atingir σ_m . Sempre que a trajetória $O'A_0$ está dentro da superfície de escoamento, causa uma deformação cisalhante elástica, sem nenhuma componente axial. Após o estado de tensão atingir a superfície de escoamento no ponto A_0 , a superfície de escoamento inicia seu deslocamento para o ponto A , gerando deformação plástica.

Na maioria dos materiais, tal deformação plástica ocorre ao longo da direção normal \bar{n}_A à superfície de escoamento, conhecido como condição de normalidade. Sempre que o vetor normal \bar{n}_A na Figura 2.9 (a) não for vertical, a deformação plástica ao longo da trajetória A_0A não só irá atingir um nível de deformação cisalhante elastoplástico γ_a , mas também provocará o incremento de deformação puramente plástico na tração (*ratcheting* incremental).

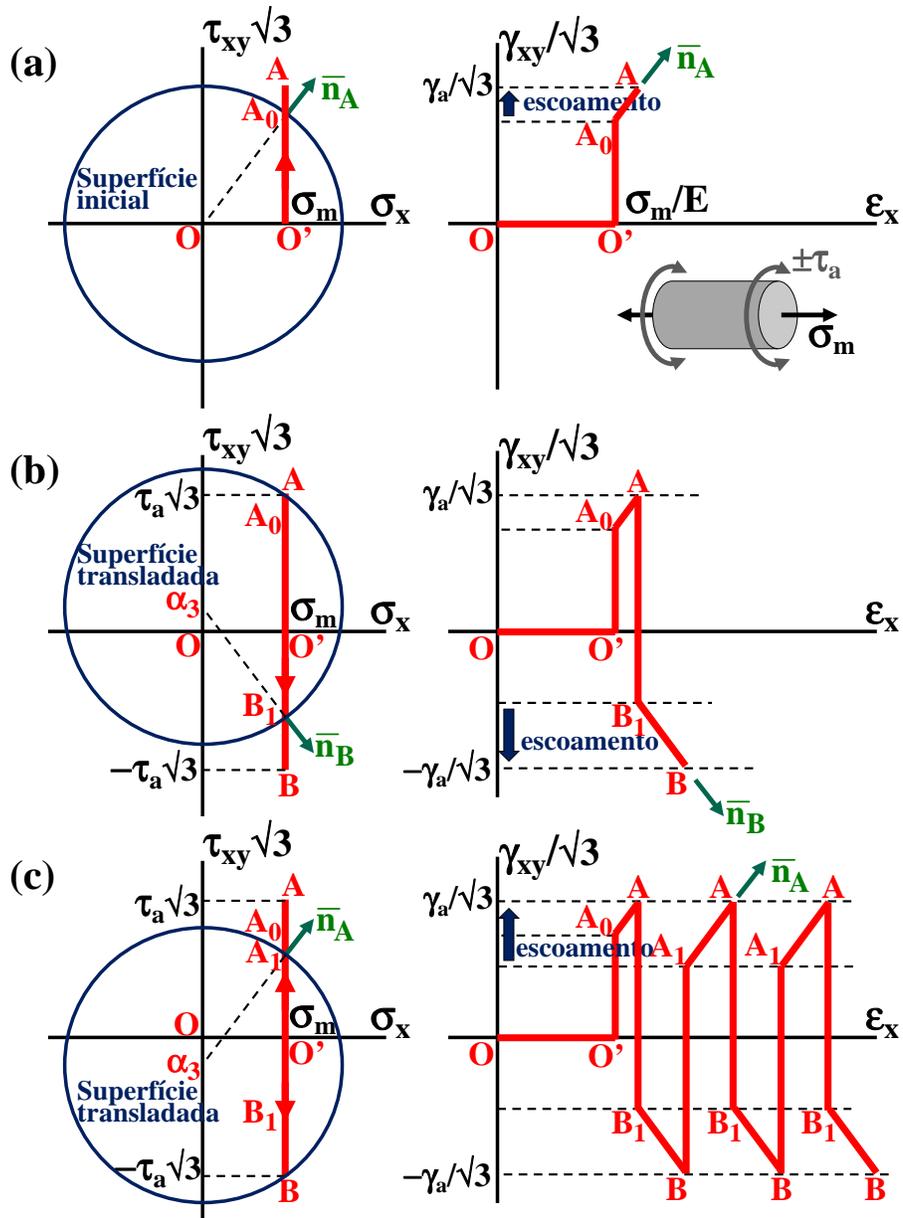


Figura 2.9 Ratcheting multiaxial na direção axial do diagrama $\epsilon_x \times \gamma_{xy}/\sqrt{3}$ devido a uma história de torção cíclica com amplitude τ_a e tensão axial σ_m constante.

A trajetória A_0A provoca a translação da superfície de escoamento até seu centro atingir a posição $(0, \alpha_3)$, como se mostra na Figura 2.9 (b), onde α_3 é a componente de translação torsional. Logo, descarrega-se elasticamente o componente de cisalhamento ao longo da trajetória AB_1 , até atingir o estado de tensões da superfície deslocada em B_1 , associando-o com o vetor normal \bar{n}_B . Então,

a superfície de escoamento inicia sua translação para o ponto B, provocando a deformação plástica em ambas componentes de cisalhamento e axial. Na Figura 2.12 (c) mostra-se o processo contínuo de *ratcheting* multiaxial com uma taxa de *ratcheting* constante.

Outro problema típico de *ratcheting* pode ocorrer se o eixo é submetido a uma tensão compressão cíclica, com uma componente de cisalhamento estática. Este cálculo de *ratcheting* multiaxial é muito semelhante ao do exemplo anterior, exceto no deslocamento da superfície de escoamento, que se dá na direção axial e o *ratcheting* resultante ocorre na direção cisalhante, como se apresenta na Figura 2.10.

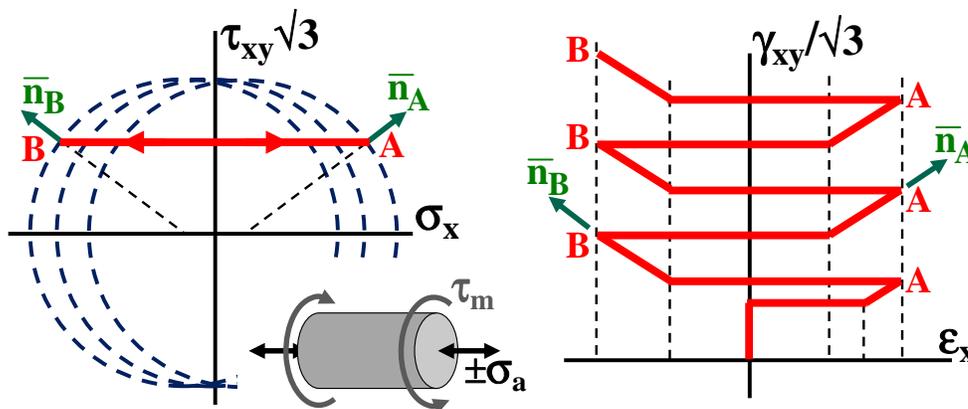


Figura 2.10 Ratcheting multiaxial no diagrama $\epsilon_x \times \gamma_{xy} / \sqrt{3}$ devido a uma história de tração-compressão cíclica com amplitude σ_a e tensão cisalhante constante τ_m .

No próximo capítulo, apresenta-se a formulação e implementação de um simulador de plasticidade incremental, que permite reproduzir o comportamento dos modelos de plasticidade incremental apresentados.