5
Modelos univariados de séries temporais

5.1
Introdução

Este capítulo é dedicado ao estudo da teoria da modelagem de series temporais. No caso univariado, uma serie temporal é modelada como uma função dos seus valores passados e de um termo de perturbação. A expressão geral de uma serie temporal é:

$$x_t = f(x_{t-1}, x_{t-2}, \ldots, u_t) \quad (5\text{-}1)$$

Para que a equação 5-1 se torne operacional, é necessário especificar três componentes: a forma funcional $f(\bullet)$, o numero de defasagens, e uma estrutura para o termo de perturbação u_t. Se por exemplo especificarmos uma função linear com apenas uma defasagem e um termo de perturbação do tipo ruído branco[1], o resultado terá o seguinte processo auto-regressivo de primeira ordem AR(1). Por simplicidade, suprimindo-se a constante, a equação 5-1 admite a seguinte simplificação:

$$x_t = \alpha x_{t-1} + u_t \quad (5\text{-}2)$$

O processo auto-regressivo de ordem p, $AR(p)$, pode ser escrito da seguinte forma:

$$x_t = \alpha_1 x_{t-1} + \alpha_2 x_{t-2} + \ldots + \alpha_p x_{t-p} + u_t \quad (5\text{-}3)$$

Quando a perturbação refere-se a um processo do tipo ruído branco diz-se que a equação 5-3 descreve um processo $AR(p)$ puro. Mas é possível enriquecer ainda mais o processo, assumindo uma estrutura um pouco mais complexa para o termo perturbação. Quando não é assumido que u denota um processo ruído

[1]Um processo é dito Ruído Branco se satisfaz as seguintes propriedades:

$$\begin{aligned} E(u_i) &= 0 \quad \textit{para todo } i \\ E(u_i^2) &= \sigma^2 \quad \textit{para todo } i \\ E(u_i u_j) &= 0 \quad \textit{para } i \neq j \end{aligned}$$

Nestas expressões $E(\bullet)$ é o operador Esperança Matemática.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0511088/CA

branco, a especificação usual é assumir que u descreve um processo de médias móveis, $MA(q)$:

$$u_t = \varepsilon_t - \beta_1 \varepsilon_{t-1} - \ldots - \beta_q \varepsilon_{t-q} \tag{5-4}$$

situação em que ε é um processo ruído branco. A equação 5-4 especifica um processo $MA(q)$ puro. Combinando as equações 5-3 e 5-4, obtem-se um processo auto-regressivo e de médias móveis $ARMA(p,q)$,

$$x_t = \alpha_1 x_{t-1} + \ldots + \alpha_p x_{t-p} + \varepsilon_t - \beta_1 \varepsilon_{t-1} - \ldots - \beta_q \varepsilon_{t-q} \tag{5-5}$$

5.2 A racionalidade da análise univariado

A tentativa de explicar uma serie temporal, ou de usá-la apenas para o propósito de previsão através do seu passado histórico, pode parecer um procedimento ineficiente, porque ignora a informação potencial de outras series temporais com ela relacionadas. A justificação possível é que, a priori, a informação das possíveis relações entre series temporais pode não ser bem fundamentada. Neste caso, um simples modelo estatístico relacionando valores correntes com valores passados pode ser um instrumento útil, e pode ser usado para gerar previsões de curto prazo.

5.2.1 Operador de desfasagem

O operador de defasagem, representado por L, aplicado a uma variável com índice t (tempo), resgata o valor anterior na serie temporal.

Tem-se, assim,

$$\begin{aligned} L(x_t) &= x_{t-1} \\ L^2(x_t) = L[L(x_t)] &= L(x_{t-1}) = x_{t-2} \\ L^s(x_t) &= x_{t-s} \\ (1-L)x_t &= x_t - x_{t-1} = \Delta x_t \\ L(1-L)x_t &= x_{t-1} - x_{t-2} = \Delta x_{t-1} \end{aligned} \tag{5-6}$$

Nesta expressão, Δ é o operador das primeiras diferenças. Em muitas manipulações algébricas, o operador de defasagem pode ser tratado como um escalar. Uma das operações mais importantes é o cálculo da inversa de uma expressão em L; por exemplo, seja $A(L) = 1 - \alpha L$ um polinômio de primeira ordem em L. Ao considerar a multiplicação

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0511088/CA

$$(1 - \alpha L)(1 + \alpha L + \alpha^2 L^2 + \alpha^3 L^3 + \ldots + \alpha^p L^p) = 1 - \alpha^{p+1} L^{p+1} \qquad (5\text{-}7)$$

é possível observa que quando $p \rightarrow \infty$, $\alpha^{p+1} L^{p+1} \rightarrow 0$ dado que $|\alpha| < 1$. Logo, pode-se escrever a inversa de $A(L)$ como

$$A^{-1}(L) = \frac{1}{1 - \alpha L} = 1 + \alpha L + \alpha^2 L^2 + \alpha^3 L^3 + \ldots \qquad (5\text{-}8)$$

5.2.2
A modelagem de um processo ARMA

A modelagem de um processo ARMA esta composto por três passos:

1. Testar a estacionariedade[2] da série temporal e, se for necessário, transformar a série para induzir a estacionariedade.

2. A partir das propriedades da função de autocorrelação da série transformada selecionar algumas especificações ARMA para estimá-las e testá-las com o intuito de selecionar uma melhor especificação acorde com a hipótese de resíduos seguindo um processo ruído branco.

3. Calcular previsões num relevante horizonte de tempo a partir da melhor especificação selecionada no item 2.

Na seguinte subseção serão analisadas as principais propriedades das funções de autocorrelação dos principais processos AR, MA e ARMA. A comparação entre estas funções teóricas e as trajetórias empíricas de uma série temporal em particular é o que permite selecionar especificações ARMA para a estimação e teste segundo o item 2.

5.3
Propriedades dos processos AR, MA, e ARMA

5.3.1
Processo AR(1)

Inicialmente serão derivadas as propriedades do processo $AR(1)$. A especificação de um processo $AR(1)$ é dada por:

$$y_t = m + \alpha y_{t-1} + \epsilon_t \qquad (5\text{-}9)$$

ϵ é um processo do tipo ruído branco. Utilizando o operador de defasagem, a equação 5-9 pode ser reescrita como:

[2] Uma série temporal $\{x_t\}$ é dita estacionaria (no sentido fraco) se tem media, variância e covariâncias constantes, e independentes do tempo.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0511088/CA

$$(1 - \alpha L)y_t = m + \epsilon_t \tag{5-10}$$

Logo,

$$y_t = (1 + \alpha L + \alpha^2 L^2 + \ldots)(m + \epsilon_t) \tag{5-11}$$

Dado que a constante m tem o mesmo valor em todos os períodos, então:

$$y_t = (1 + \alpha + \alpha^2 + \ldots)m + (1 + \alpha L + \alpha^2 L^2 + \ldots)\epsilon_t \tag{5-12}$$

$$y_t = (1 + \alpha + \alpha^2 + \ldots)m + (\epsilon_t + \alpha\epsilon_t + \alpha^2\epsilon_t + \ldots) \tag{5-13}$$

Si $|\alpha| < 1$:

$$E(y_t) = \frac{m}{1 - \alpha} = \mu \tag{5-14}$$

Logo, o processo $\{y_t\}$ possui uma media incondicional constante e independente do tempo. Por outro lado, a mesma condição sobre α determina uma variância constante e independente do tempo:

$$\sigma_y^2 = E(y_t - \mu)^2 = \frac{\sigma_\epsilon^2}{1 - \alpha^2} = \tag{5-15}$$

Dado 5-14 pode-se reescrever a equação 5-9:

$$x_t = \alpha x_{t-1} + \epsilon_t \tag{5-16}$$

sendo que $x_t = y_t - \mu$.

Calculando-se a 'esperança' do quadrado da equação
5-16 temos:

$$E(x_t^2) = \alpha^2 E(x_{t-1}^2) + E(\epsilon_t^2) + 2\alpha E(x_{t-1}\epsilon_t) \tag{5-17}$$

O último termo do lado direito da equação acima na realidade se anula, pois x_{t-1} depende unicamente de $\epsilon_{t-1}, \epsilon_{t-2}, \ldots$. Ainda nesta expressão, ϵ_t é não correlacionado com os seus valores defasados já que denota um ruído branco. Quando α satisfaz a condição de estacionariedade, $|\alpha| < 1$, então

$$\sigma_y^2 = E(x_t^2) = E(x_{t-1}^2) = \ldots \tag{5-18}$$

Logo, a equação anterior pode ser reescrita como:

$$\sigma_y^2 = \alpha^2\sigma_y^2 + \sigma_\epsilon^2 \tag{5-19}$$

Confirma-se, assim, a equação 5-15.

Considerando-se a 'esperança' do produto da equação 5-16 pelo termo x_{t-1} obtem-se:

$$E(x_t x_{t-1}) = \alpha E(x_{t-1}^2) + E(x_{t-1}\epsilon_t) \tag{5-20}$$

Definindo $\gamma_1 = \alpha\gamma_0$, a última equação pode ser reescrita como:

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0511088/CA

Introduzindo γ_0 como outra notação para σ_y^2. De forma similar, ao multiplicar-se 5-16 por x_{t-2} e, simirlarmente aplicando-se o operador 'esperança':

$$\gamma_2 = \alpha\gamma_1 \tag{5-21}$$

e em geral,

$$\gamma_k = \alpha\gamma_{k-1} = \alpha^k\gamma_0 \quad k = 1, 2, \ldots \tag{5-22}$$

A função de autocorrelação para uma série esta definida por:

$$\rho_k = \frac{E(x_t x_{t-k})}{\sqrt{var(x_t)}\sqrt{var(x_{t-k})}} = \frac{\gamma_k}{\gamma_0} \tag{5-23}$$

A função de autocovariância e autocorrelação é simétrica com relação ao valor zero, o que simplifica a analise. Logo, torna-se apenas necessário estudar a parte positiva da função de autocorrelação. A representação gráfica da função de autocorrelação é conhecida como correlograma.

5.3.2 Processo AR(2)

No contexto do método, um processo AR(2) é definido como:

$$y_t = m + \alpha_1 y_{t-1} + \alpha_2 y_{t-2} + \epsilon_t \tag{5-24}$$

Assumindo a estacionariedade do processo $AR(2)$, a média incondicional é calculada pela expressão:

$$\mu = \frac{m}{1 - \alpha_1 - \alpha_2} \tag{5-25}$$

Para a situação $x_t = y_t - \mu$, a equação (5-24) pode ser reescrita como:

$$x_t = \alpha_1 x_{t-1} + \alpha_2 x_{t-2} + \epsilon_t \tag{5-26}$$

Tomando-se a 'esperança' do produto da equação (5-26) pelo termo x_t:

$$\gamma_0 = \alpha_1\gamma_1 + \alpha_2\gamma_2 + E(x_t\epsilon_t) \tag{5-27}$$

De (5-26) deduz-se que $E(x_t\epsilon_t) = \sigma_\epsilon^2$, o que permite escrever:

$$\gamma_0 = \alpha_1\gamma_1 + \alpha_2\gamma_2 + \sigma_\epsilon^2 \tag{5-28}$$

Multiplicando sucessivamente a equação (5-26) por x_{t-1} e por x_{t-2}, e tomando a 'esperança' desses produtos, obtém-se, respectivamente:

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \alpha_1\gamma_0 + \alpha_2\gamma_1 \\ \gamma_2 &= \alpha_1\gamma_1 + \alpha_2\gamma_0 \end{aligned} \tag{5-29}$$

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0511088/CA

Substituindo (5-29) em (5-28) e simplificando, obtem-se:

$$\gamma_0 = \frac{(1-\alpha_2)\sigma_\epsilon^2}{(1+\alpha_2)(1-\alpha_1-\alpha_2)(1+\alpha_1-\alpha_2)} \tag{5-30}$$

Sobre a hipótese de estacionariedade, γ_0 deve ser constante e positivo. Logo, torna-se necessario que:

$$\begin{aligned} \alpha_2 + \alpha_1 &< 1 \\ \alpha_2 - \alpha_1 &< 1 \\ |\alpha_2| &< 1 \end{aligned} \tag{5-31}$$

Assim, (5-31) define as condições de estacionariedade para um processo $AR(2)$.

As relações na equação (5-29) podem ser reescritas em termos das autocorrelações:

$$\begin{aligned} \rho_1 &= \alpha_1 + \alpha_2\rho_1 \\ \rho_2 &= \alpha_1\rho_1 + \alpha_2 \end{aligned} \tag{5-32}$$

As equações (5-32) são as equações de Yule-Walker para um processo $AR(2)$. Ao resolver estas equações obtêm-se os dois primeiros coeficientes de autocorrelação:

$$\rho_1 = \frac{\alpha_1}{1-\alpha_2} \qquad \rho_2 = \frac{\alpha_1^2}{1-\alpha_2} + \alpha_2 \tag{5-33}$$

A função de autocorrelação para um processo $AR(2)$ é dada por:

$$\rho_k = \alpha_1\rho_{k-1} + \alpha_2\rho_{k-2} \qquad k = 3, 4, \ldots \tag{5-34}$$

A equação (5-34) representa uma equação cuja magnitude é de segunda ordem, tendo os seus dois primeiros valores são dados pela equação (5-33). As condições de estabilidade da equação (5-34) são exatamente as condições de estacionariedade do processo $AR(2)$.

Função de Autocorrelação Parcial

Em geral é difícil distinguir a ordem de um processo AR baseado unicamente no correlograma. Uma ferramenta útil para esta discriminação é a função de autocorrelação parcial.

A função de autocorrelação parcial para um processo $AR(2)$ tem valor zero para toda defasagem maior que 2. Em geral, a função de autocorrelação

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0511088/CA

parcial para um processo $AR(p)$ tem valor zero para valores de defasagens maiores que p.

5.3.3 Processo MA

O processo $AR(1)$ da equação (5-16) pode ser invertida

$$x_t = \epsilon_t + \alpha\epsilon_{t-1} + \alpha^2\epsilon_{t-2} + \dots \tag{5-35}$$

Este é um processo MA de ordem infinita, $MA(\infty)$. Um processo MA puro é uma variável que depende unicamente dos termos presente e defasado da perturbação ruído branco. Em aplicações práticas, unicamente os processos MA finitos, abaixo descritos, possuem relevância.

O processo $MA(1)$ está dado por:

$$x_t = \epsilon_t - \beta\epsilon_{t-1} \tag{5-36}$$

É simples mostrar que as autocovariâncias são:

$$\begin{aligned} \gamma_0 &= (1+\beta_1^2)\sigma_\epsilon^2 \\ \gamma_1 &= -\beta_1\sigma_\epsilon^2 \\ \gamma_2 &= \gamma_3 = \dots = 0 \end{aligned} \tag{5-37}$$

os quais fornecem os seguintes coeficientes de autocorrelação:

$$\begin{aligned} \rho_1 &= \frac{-\beta_1}{1+\beta_1^2} \\ \rho_2 &= \rho_3 = \dots = 0 \end{aligned} \tag{5-38}$$

O processo $MA(1)$ pode ser tal que ϵ_t pode ser expresso como uma série infinita de $x_t, x_{t-1}, \dots$; ou seja:

$$\epsilon_t = x_t + \beta_1 x_{t-1} + \beta_1^2 x_{t-2} + \dots \tag{5-39}$$

$$x_t = -\beta_1 x_{t-1} - \beta_1^2 x_{t-2} - \dots + \epsilon_t \tag{5-40}$$

Dado que o processo $MA(1)$ é um $AR(\infty)$, então a função de autocorrelação parcial jamais assumirá o valor zero, ainda que ele esteja convergindo a zero quando o numero de defasagem tende para infinito.

Em geral, um processo $MA(q)$ tem uma função de autocorrelação que possui valores iguais a zero para defasagens maiores que o valor de q, e tem

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0511088/CA

uma função de autocorrelação parcial que não assume o valor zero, mas que tende a zero quando o número de defasagem tende a infinito.

A equação 5-40 somente possui significado físico se $|\beta_1| < 1$. Se esta condição não for satisfeita, então a defasagem se distancia do valor de x_t e tende a apresentar maior efeito sobre o valor corrente de x. A condição $|\beta_1| < 1$ é conhecida como **condição de invertibilidade**. Esta condição é similar à condição de estacionariedade de um processo $AR(1)$. Entretanto, note-se que estacionariedade de um processo $MA(1)$ não implica restrições sobre β_1. Em geral, para um processo $MA(q)$ unicamente os primeiros valores da função de autocorrelação têm valores diferentes de zero, enquanto todos os restantes assumem o valor zero. E mais, a função de autocorrelação parcial nunca assume o valor zero, embora tenda para zero quando o número de defasagem também apresenta a mesma tendência.

5.3.4 Processo ARMA

A expressão geral de um processo $ARMA(p,q)$ esta dado por:

$$A(L)x_t = B(L)\epsilon_t \tag{5-41}$$

Nesta espressão

$$\begin{aligned} A(L) &= 1 - \alpha_1 L - \alpha_2 L^2 - \ldots - \alpha_p L^p \\ B(L) &= 1 - \beta_1 L - \beta_2 L^2 - \ldots - \beta_q L^q \end{aligned} \tag{5-42}$$

A estacionariedade do processo $ARMA(p,q)$ requer (i)que todas as raízes do polinômio $A(L)$ estejam fora do círculo unitário e (ii) que o processo seja inversível (admita matriz inversa) se as raízes do polinômio $B(L)$ estiverem fora do circulo unitário. Dada as condições de estacionariedade e inversibilidade, o processo $ARMA(p,q)$ pode ser expressado alternativamente como um processo $AR(\infty)$ ou como um processo $MA(\infty)$:

$$B^{-1}(L)A(L)x_t = \epsilon_t \quad x_t = A^{-1}(L)B(L)\epsilon_t \tag{5-43}$$

O processo $ARMA(p,q)$ de ordem inferior é o processo $ARMA(1,1)$:

$$x_t = \alpha x_{t-1} + \epsilon_t - \beta\epsilon_{t-1} \tag{5-44}$$

De (5-44) pode-se obter a função de autocovariâncias:

$$\gamma_0 = \frac{1 - 2\alpha\beta^2}{1 - \alpha^2}\sigma_\epsilon^2 \tag{5-45}$$

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0511088/CA

$$\gamma_1 = \frac{(\alpha - \beta)(1 - \alpha\beta)}{1 - \alpha^2}\sigma_\epsilon^2 \tag{5-46}$$

$$\gamma_k = \alpha\gamma_{k-1} \qquad k = 2, 3, \dots \tag{5-47}$$

E a função de autocorrelação:

$$\begin{aligned} \rho_1 &= \frac{(\alpha - \beta)(1 - \alpha\beta)}{1 - 2\alpha\beta + \beta^2} \\ \rho_k &= \alpha\rho_{k-1} \qquad k = 2, 3, \dots \end{aligned} \tag{5-48}$$

Por outro lado, a função de autocorrelação parcial do processo $ARMA(1,1)$ jamais assumirá o valor zero, embora possa convergir para zero quando o número de defasagens também o fizer.

5.4 Prova de hipótese de estacionariedade

Se uma série de tempo é não estacionária, faz-se necessário transformar para a tornar estacionaria. Logo, um processo ARMA poderia ser utilizado para modelar a série de tempo transformada.

Existem dois métodos principais para detectar não estacionariedade:

1. Análise do gráfico da série e do correlograma.

2. Provas de hipótese estatísticas para raiz unitária.

Provas de Hipótese para Raiz Unitária

Para fundamentar a hipótese, considere:

$$\begin{aligned} y_t &= \delta_0 + \delta_1 t + u_t \\ u &= \alpha u_{t-1} + \epsilon_t \end{aligned} \tag{5-49}$$

Para testar a hipótese de raiz unitária deve-se testar a hipótese nula . Mas a equação (5-49) pode ser reescrita como:

$$\Delta y_t = [\delta_0(1 - \alpha) + \alpha\delta_1] + \delta_1(1 - \alpha)t + \gamma y_t + \epsilon_t \tag{5-50}$$

Agora a hipótese de raiz unitária pode ser testada por meio da hipótese nula $H_0 : \gamma = 0$. Assim, γ será zero se existir raiz unitária.

Importante lembrar que faz-se necessário definir qual é a distribuição do teste estatístico sobre a hipótese nula.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0511088/CA