



**Guilherme Simon da Rosa**

**Propagação de ondas eletromagnéticas em  
estruturas coaxiais carregadas com meios não  
homogêneos excitadas pelo modo TEM**

**Dissertação de Mestrado**

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós-graduação em Engenharia Elétrica do Departamento de Engenharia Elétrica da PUC-Rio.

Orientador : Prof. José Ricardo Bergmann

Coorientador: Prof. Sandro Rogério Zang

Rio de Janeiro  
Abril de 2013



**Guilherme Simon da Rosa**

**Propagação de ondas eletromagnéticas em  
estruturas coaxiais carregadas com meios não  
homogêneos excitadas pelo modo TEM**

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós-graduação em Engenharia Elétrica do Departamento de Engenharia Elétrica do Centro Técnico Científico da PUC-Rio. Aprovada pela comissão examinadora abaixo assinada.

**Prof. José Ricardo Bergmann**

Orientador

Centro de Estudos em Telecomunicações — PUC-Rio

**Prof. Sandro Rogério Zang**

Coorientador

Centro de Estudos em Telecomunicações — PUC-Rio

**Prof. Flavio José Vieira Hasselmann**

Centro de Estudos em Telecomunicações — PUC-Rio

**Prof. Fernando José da Silva Moreira**

Departamento de Engenharia Eletrônica — UFMG

**Prof. José Eugenio Leal**

Coordenador do Centro Técnico Científico — PUC-Rio

Rio de Janeiro, 1 de Abril de 2013

Todos os direitos reservados. Proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, do autor e do orientador.

### **Guilherme Simon da Rosa**

Graduou-se em Engenharia Elétrica pela Universidade Federal de Santa Maria em 2011. Foi bolsista de Iniciação Científica de 2008 a 2011 no Laboratório de Radiofrequência e Comunicações do Centro Regional Sul de Pesquisas Espaciais/INPE. Iniciou em 2011 no Centro de Estudos em Telecomunicações da Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro seu mestrado na área de Eletromagnetismo Aplicado.

#### Ficha Catalográfica

Rosa, Guilherme Simon da

Propagação de ondas eletromagnéticas em estruturas coaxiais carregadas com meios não homogêneos excitadas pelo modo TEM / Guilherme Simon da Rosa; orientador: José Ricardo Bergmann; coorientador: Sandro Rogério Zang. — Rio de Janeiro : PUC–Rio, Departamento de Engenharia Elétrica, 2013.

v., 220 f: il. ; 29,7 cm

1. Dissertação (Mestrado em Engenharia Elétrica) - Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Engenharia Elétrica.

Inclui referências bibliográficas.

1. Engenharia Elétrica – Tese. 2. Método do casamento de modos. 3. guias de onda coaxiais não homogêneos com perdas. 4. corneta coaxial não homogêneos de banda larga. 5. telemetria sem fio em poços de petróleo. I. Bergmann, José Ricardo. II. Zang, Sandro Rogério. III. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Engenharia Elétrica. IV. Título.

## Agradecimentos

Em primeiro lugar, agradeço à minha família: aos meus pais, Cleonice Simon e José Ataíde Wegner da Rosa, um muito obrigado. Aos meus irmãos, Eduardo Simon da Rosa e Lucas Simon da Rosa, *idem*.

Agradeço à Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro pela bolsa de estudo de isenção do pagamento das mensalidades escolares oferecida no Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da PUC-Rio; auxílio sem o qual esse trabalho não poderia ser realizado.

Agradeço ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico pela bolsa de fomento à Pós-graduação na modalidade Mestrado com o processo 131730/2011-8, no período de Março/2011 a Julho/2012.

Agradeço à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior pela bolsa de fomento à Pós-graduação na modalidade Mestrado, no período de Agosto/2012 a Março/2013.

De forma especial agradeço ao Dr. José Ricardo Bergmann, meu orientador, pelas incansáveis orientações, e principalmente pelos ensinamentos ao longo de nosso trabalho.

Igualmente agradeço ao Dr. Sandro Rogério Zang, meu co-orientador, por toda a colaboração.

Ao Dr. Nelson Jorge Schuch por me mostrar a importância das nossas liberdades.

Ao pessoal do PAA, alunos, professores e funcionários: agradeço pelo companheirismo e amizade.

À Camyla agradeço pelo apoio, carinho e principalmente pela paciência.

## Resumo

Rosa, Guilherme Simon da; Bergmann, José Ricardo; Zang, Sandro Rogério. **Propagação de ondas eletromagnéticas em estruturas coaxiais carregadas com meios não homogêneos excitadas pelo modo TEM**. Rio de Janeiro, 2013. 220p. Dissertação de Mestrado — Departamento de Engenharia Elétrica, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Neste trabalho são analisadas junções entre guias coaxiais não homogêneos com perdas. A expansão modal dos campos eletromagnéticos em um guia coaxial com duas camadas radiais é detalhadamente deduzida, e posteriormente a formulação é generalizada para guias com multicamadas radiais. As constantes de propagação para guias com perdas são determinadas pelo método do *winding number*, garantindo que todos os autovalores possam ser encontrados. O método do casamento de modos é aplicado na análise e projeto de estruturas coaxiais. A formulação é aplicada na otimização de estruturas de acoplamento e cornetas radiantes com carregamento dielétrico não homogêneo. O preenchimento não homogêneo é empregado nas estruturas radiantes a fim de minimizar a perda de retorno, e principalmente controlar e melhorar o formato do diagrama de radiação para operação em banda larga. Adicionalmente, a formulação é utilizada para analisar a propagação eletromagnética em sistemas de telemetria sem fio para poços de petróleo.

## Palavras-chave

Método do casamento de modos; guias de onda coaxiais não homogêneos com perdas; corneta coaxial não homogêneos de banda larga; telemetria sem fio em poços de petróleo.

## Abstract

Rosa, Guilherme Simon da; Bergmann, José Ricardo (advisor); Zang, Sandro Rogério. **Electromagnetics wave propagation in coaxial guides with non-homogeneous load excited by the TEM Mode**. Rio de Janeiro, 2013. 220p. Dissertação de Mestrado — Departamento de Engenharia Elétrica, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

In this work, we analyzed junctions between coaxial waveguides heterogeneously filled with lossy dielectrics. The modal expansion of the electromagnetic fields in a coaxial waveguide with two radial layers is derived in detail, and afterward the formulation is generalized for a multilayer waveguide. The propagation constants for lossy waveguides are determined through the method of winding number, ensuring that all eigenvalues can be found. The mode matching technique is applied in the analysis and design of coaxial structures. The formulation is applied in the optimization of coupling structures and radiating horns with heterogeneous dielectric loading. The heterogeneous filling is used in radiating structures in order to reduce the return loss, and especially to control and improve the shape of the radiation pattern for broadband operation. Additionally, the formulation is used to analyze the electromagnetic propagation in wireless telemetry systems for oil wells.

## Keywords

Mode matching technique; coaxial waveguides heterogeneously filled with lossy dielectrics; dielectric loaded coaxial horn; wireless telemetry for oil fields.

## Sumário

<b>1</b>	<b>Apresentação</b>	<b>17</b>
1.1	Introdução . . . . .	17
1.2	Motivação . . . . .	19
1.3	Organização da Dissertação . . . . .	20
<b>2</b>	<b>Campos Modais</b>	<b>21</b>
2.1	Introdução . . . . .	21
2.2	Construção de Solução para Meios Homogêneos sem Fontes . . . . .	22
2.3	Modos $TM^z$ e $TE^z$ . . . . .	24
2.4	Guia Coaxial Circular não Homogêneo . . . . .	24
2.5	Guia Coaxial Circular Homogêneo . . . . .	40
2.6	Observações Sobre os Modos $TM^z$ , $TE^z$ e $TEM^z$ . . . . .	44
2.7	Comparação entre as Equações Características Exata e Aprox. . . . .	44
2.8	Validação . . . . .	50
<b>3</b>	<b>Casamento de Modos</b>	<b>59</b>
3.1	Introdução . . . . .	59
3.2	Formulação do MMT . . . . .	60
3.3	Validação da Formulação e do Algoritmo Numérico . . . . .	99
<b>4</b>	<b>Aplicação do MMT à Estruturas Radiantes</b>	<b>134</b>
4.1	Introdução . . . . .	134
4.2	Estrutura de Acoplamento da Corneta Coaxial . . . . .	134
<b>5</b>	<b>Aplicação do MMT à Estruturas com Perdas</b>	<b>147</b>
5.1	Introdução . . . . .	147
5.2	Classificação dos Modos de Propagação . . . . .	149
5.3	MMT em Sistemas de Telemetria de Poços Petrolíferos . . . . .	154
<b>6</b>	<b>Conclusões</b>	<b>168</b>
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>171</b>
<b>A</b>	<b>Solução da Equação de Onda de Helmholtz</b>	<b>177</b>
A.1	Introdução . . . . .	177
A.2	Equação de Helmholtz . . . . .	177
<b>B</b>	<b>Teorema da Reciprocidade de Lorentz e Consequências</b>	<b>180</b>
B.1	Teorema da Reciprocidade de Lorentz . . . . .	180
B.2	Ortogonalidade e Normalização Modal . . . . .	181
<b>C</b>	<b>Propriedades da Matriz GSM</b>	<b>182</b>
C.1	Ortogonalidade, Normalização e Conservação da Reação . . . . .	182
C.2	Propriedades da Matriz GSM Associadas com a Conservação de Reação	183

<b>D</b>	<b>Guias Coaxial→Circular/Circular→Coaxial</b>	<b>185</b>
D.1	Acoplamento entre Guias Coaxial→Circular . . . . .	185
D.2	Acoplamento entre Guias Circular→Coaxial . . . . .	185
D.3	Acoplamento entre Guias Circular→Circular . . . . .	186
D.4	Validação . . . . .	186
<b>E</b>	<b>Guia não Homogêneo com <math>N</math> Camadas Radiais</b>	<b>189</b>
E.1	Introdução . . . . .	189
E.2	Autovalores para Guias com $N$ Camadas Radiais . . . . .	189
E.3	Resolvendo a Equação Transcendental . . . . .	194
E.4	Folhas de Riemann e <i>Branch Cuts</i> . . . . .	195
E.5	Método do Winding Number . . . . .	196
E.6	Validação da Formulação . . . . .	207
<b>F</b>	<b>Autovalores Complexos em Guias de Onda</b>	<b>209</b>
F.1	Introdução . . . . .	209
F.2	Equação Característica sem Polos . . . . .	210
<b>G</b>	<b>Modelagem de Antenas</b>	<b>214</b>
G.1	Introdução . . . . .	214
G.2	Modelo de Fonte . . . . .	214
G.3	Modelo de Antena Receptora . . . . .	219



## Lista de figuras

2.1	Sistema de coordenadas cilíndrico. . . . .	22
2.2	Vistas ortogonais do guia coaxial com duplo carregamento dielétrico. . . . .	25
2.3	Lugar das raízes para o guia coaxial homogêneo de dimensões $a = 1,5250$ mm e $c = 3,550$ mm preenchido com ar ( $\hat{\epsilon}_r = 1,0$ ). Os autovalores das equações características exata (2-36) e assintótica (2-71) são comparados. . . . .	46
2.4	<i>Zoom</i> nos arredores dos autovalores exato ( $\circ$ ) e aproximado ( $\square$ ) da Fig. 2.3 para os modos $TM_{01}$ , $TM_{02}$ e $TM_{03}$ . . . . .	46
2.5	Lugar das raízes para o guia coaxial não homogêneo de dimensões $a = 1,5250$ mm, $b = 3,043750$ mm e $c = 3,550$ mm preenchido com $\hat{\epsilon}_{r1} = 1,0$ e $\hat{\epsilon}_{r2} = 2,550$ . Os autovalores das equações características exata (2-36) e assintótica (2-71) são comparados. . . . .	47
2.6	Equação característica exata em função das partes real e imaginária de $k_{\rho 1}$ . O pontos marcados com $\blacktriangledown$ indicam os máximos locais da curva, e são os zeros de (2-36) para o guia descrito na Fig. 2.5. . . . .	47
2.7	Lugar das raízes para o guia coaxial não homogêneo de dimensões $a = 1,5250$ mm, $b = 3,043750$ mm e $c = 3,550$ mm preenchido com $\hat{\epsilon}_{r1} = 1,0$ e $\hat{\epsilon}_{r2} = 2,550 - j2,550$ ( $\tan \delta = 1$ ). Os autovalores das equações características exata (2-36) e assintótica (2-71) são comparados. . . . .	49
2.8	Equação característica exata em função das partes real e imaginária de $k_{\rho 1}$ . O pontos marcados com $\blacktriangledown$ indicam os máximos locais da curva, e são os zeros de (2-36) para o guia descrito na Fig. 2.7. . . . .	49
2.9	Curvas de dispersão do modo $TM^z$ simuladas em comparação com as obtidas em [16, p. 309]. . . . .	51
2.10	Curvas de dispersão do modo $TM^z$ simuladas em comparação com as obtidas em [17, p. 2051]. . . . .	52
2.11	Curvas de dispersão do modo $TM^z$ da Fig. 2.10 com assíntotas para $v = c_0$ e $v = c_{e1}$ . . . . .	53
2.12	Vetor de Poynting médio para o modo $TM_{00}$ . . . . .	54
2.13	Vetor de Poynting médio para o modo $TM_{01}$ . . . . .	54
2.14	Vetor de Poynting médio para o modo $TM_{02}$ . . . . .	55
2.15	Valor absoluto dos campos para o modo $TM_{00}^z$ em função da posição radial no guia coaxial não homogêneo caracterizado por $a = 1,60$ mm, $b = 2,650$ mm, $c = 3,70$ mm, preenchido com um dielétrico de $\epsilon_{r1} = 2,550$ em $a < \rho < b$ e por ar em $b < \rho < c$ . . . . .	57
2.16	Curvas de dispersão. Esquerda: guia preenchido com dielétrico na camada 1, em que avalia-se o crescimento da camada do dielétrico. Direita: guia preenchido com dielétrico na camada 2, em que avalia-se o crescimento da camada do dielétrico. . . . .	58
3.1	Representação dos modos transmitidos e refletidos a cada descontinuidade do guia de onda coaxial. . . . .	60
3.2	Descontinuidade da seção transversal entre guias coaxiais. . . . .	65

3.3	Várias descontinuidades da seção transversal entre guias coaxiais não homogêneos. . . . .	66
3.4	Descontinuidade mista e problema equivalente. . . . .	67
3.5	Valores de $k_\rho$ para os 3 primeiros modos. A região <i>I</i> é um guia homogêneo com dimensões $a_1 = 1,840$ mm e $c_1 = 5,0$ mm preenchido por ar ( $\epsilon_r = \mu_r = 1,0$ ). A região <i>II</i> é um guia não homogêneo preenchido por um dielétrico ( $\epsilon_r = 2,550$ ) de $a_2 = 1,50$ mm a $b_2 = 4,840$ mm, e por ar de $b_2 = 4,840$ mm a $c_2 = 5,0$ mm. Pontos destacados com o marcador $\square$ são as frequências em que (3-49) é singular. . . . .	79
3.6	Representação das equações de $P_{nm}^{TM \rightleftharpoons TM}$ (3-45) e (3-51) a medida que $k_{\rho 1,m} \simeq k_{\rho 2,n}$ . . . . .	87
3.7	Perda de retorno e curvas de dispersão para a junção de dois guias homogêneos. Guia <i>I</i> : $a_1 = 1,840$ mm, $c_1 = 5,0$ mm preenchido com ar. Guia <i>II</i> : $a_2 = 1,50$ mm, $c_2 = 5,0$ mm preenchido com ar. .	101
3.8	Matrizes para 3,0 GHz. Superior: Parte real da matriz GSM do junção dos guias descritos da Fig. 3.7. Inferior: Verificação da propriedade da matriz GSM. . . . .	101
3.9	Matrizes para 44,0 GHz. Superior: Parte real da matriz GSM do junção dos guias descritos da Fig. 3.7. Inferior: Verificação da propriedade da matriz GSM. . . . .	102
3.10	Matrizes para 50,0 GHz. Superior: Parte real da matriz GSM do junção dos guias descritos da Fig. 3.7. Inferior: Verificação da propriedade da matriz GSM. . . . .	102
3.11	Perda de retorno e curvas de dispersão para a junção um guia homogêneo ( <i>I</i> ) com um guia não homogêneo ( <i>II</i> ). Guia <i>I</i> : $a_1 = 1,840$ mm, $c_1 = 5,0$ mm preenchido com ar. Guia <i>II</i> : $a_2 = 1,50$ mm, $b_2 = 4,84$ mm, $c_2 = 5,0$ mm preenchido por um dielétrico com $\epsilon_{r1} = 2,550$ em $a_2 < \rho < b_2$ , e por ar em $b_2 < \rho < c_2$ . . . .	103
3.12	Matrizes para 3,0 GHz. Superior: Parte real da matriz GSM do junção dos guias descritos da Fig. 3.11. Inferior: Verificação da propriedade da matriz GSM. . . . .	104
3.13	Matrizes para 30,0 GHz. Superior: Parte real da matriz GSM do junção dos guias descritos da Fig. 3.11. Inferior: Verificação da propriedade da matriz GSM. . . . .	104
3.14	Matrizes para 50,0 GHz. Superior: Parte real da matriz GSM do junção dos guias descritos da Fig. 3.11. Inferior: Verificação da propriedade da matriz GSM. . . . .	105
3.15	scale=.95 . . . . .	106
3.16	Perdas de retorno das estruturas descritas nas figuras 3.11 e 3.15. .	107
3.17	Balanço de energia da junção do guia homogêneo com não homogêneo descrito na Fig. 3.11. . . . .	107
3.18	Estrutura de acoplador para dois guias de onda coaxiais com dimensões distintas. . . . .	109
3.19	Comparação entre o módulo do coeficiente de reflexão simulado e o obtido em [9, p. 65]. . . . .	109

3.20	Estrutura de acoplador para dois guias de onda coaxiais com carregamento dielétrico. O dielétrico é representado pelo preenchimento em cinza na região <i>III</i> . . . . .	110
3.21	Comparação entre o módulo do coeficiente de reflexão simulado e o obtido em [9, p. 67]. . . . .	110
3.22	Comparação entre o módulo do coeficiente de reflexão simulado e o obtido por [9, p. 67] usando várias configurações para os raios $b_1$ , $b_2$ e $b_3$ . . . . .	111
3.23	Estrutura de acoplamento entre guias coaxiais. . . . .	111
3.24	Estrutura de acoplamento da Fig. 3.23 com deslocamento do cilindro central para a direita. . . . .	112
3.25	Estrutura de acoplamento da Fig. 3.23 com deslocamento do cilindro central para a esquerda. . . . .	112
3.26	Perda de retorno das estrutura das figuras 3.24 e 3.25 em função do número de modos considerados para 3 GHz. . . . .	113
3.27	Perda de retorno das estrutura das figuras 3.24 e 3.25 para um deslocamento $\ell = 1 \times 10^{-6}$ m com 20 modos. . . . .	114
3.28	Perda de retorno das estrutura das figuras 3.24 e 3.25 para um deslocamento $\ell = 1 \times 10^{-6}$ m com 20 modos. . . . .	114
3.29	Estrutura de acoplador com trecho de guia não homogêneo. . . . .	116
3.30	Comparação entre o módulo do coeficiente de reflexão simulado com o MMT e o obtido em [5, p. 87] com o MEF. . . . .	116
3.31	Estrutura 1. . . . .	118
3.32	Comparação entre a perda de retorno simulada no CST com os valores obtidos pelo MMT para a configuração dada na Tabela 3.10. Número de células da grade do CST: 3158028. . . . .	118
3.33	Comparação entre a perda de retorno simulada no CST com os valores obtidos pelo MMT para a configuração dada na Tabela 3.10. Número de células da grade do CST: 16241800 hexaedros para o TD e 1649382 tetraedros para o FD. . . . .	119
3.34	Estrutura 2. . . . .	120
3.35	Comparação entre a perda de retorno simulada no CST com os valores obtidos pelo MMT para a configuração dada na Tabela 3.11. Número de células da grade do CST: 4363308. . . . .	120
3.36	Comparação entre a perda de retorno simulada no CST com os valores obtidos pelo MMT para a configuração dada na Tabela 3.11. Número de células da grade do CST: 4881600. . . . .	121
3.37	Comparação entre a perda de retorno simulada no CST (---) com os valores obtidos pelo MMT (—) para a configuração dada na Tabela 3.11. Número de células da grade do CST: 4881600. . . . .	121
3.38	Estrutura 3. . . . .	125
3.39	Comparação entre a perda de retorno simulada no CST com os valores obtidos pelo MMT para a configuração dada na Tabela 3.12. Número de células da grade do CST: 5913648. . . . .	125
3.40	Estrutura 4 . . . . .	126
3.41	Comparação entre a perda de retorno simulada no CST com os valores obtidos pelo MMT para a configuração dada na Tabela 3.13. Número de células da grade do CST: 5913648. . . . .	126

3.42	Estrutura 5. . . . .	127
3.43	Comparação entre a perda de retorno simulada no CST com os valores obtidos pelo MMT para a configuração dada na Tabela 3.14. Número de células da grade do CST: 6220800. . . . .	127
3.44	Estrutura 6. . . . .	128
3.45	Comparação entre a perda de retorno simulada no CST com os valores obtidos pelo MMT para a configuração dada na Tabela 3.15. Número de células da grade do CST: 14480000. . . . .	128
3.46	Comparação entre a perda de retorno simulada no CST (— — —) com os valores obtidos pelo MMT (——) para a configuração dada na Tabela 3.15. Número de células da grade do CST: 14480000. . . . .	129
3.47	Comparação entre a perda de retorno simulada no CST com os valores obtidos pelo MMT para a configuração dada na Tabela 3.15. Número de células da grade do CST: 14480000. . . . .	129
3.48	Comparação entre a perda de retorno simulada no CST com os valores obtidos pelo MMT para a configuração dada na Tabela 3.15. Número de células da grade do CST: 4881600. . . . .	130
3.49	Comparação entre a perda de retorno simulada no CST (— — —) com os valores obtidos pelo MMT (——) para a configuração dada na Tabela 3.15. Número de células da grade do CST: 4881600. . . . .	130
3.50	Estrutura 7. . . . .	131
3.51	Comparação entre a perda de retorno simulada no CST com os valores obtidos pelo MMT para a configuração dada na Tabela 3.16. Número de células da grade do CST: 2092032. . . . .	131
3.52	Estrutura 8 . . . . .	132
3.53	Comparação entre a perda de retorno simulada no CST com os valores obtidos pelo MMT para a configuração dada na Tabela 3.17. Número de células da grade do CST: 19783872. . . . .	132
3.54	Comparação entre a perda de retorno simulada no CST com os valores obtidos pelo MMT para a configuração dada na Tabela 3.16. Número de células da grade do CST: 19783872 hexaedros para o TD e 877211 tetraedros para o FD. . . . .	133
4.1	Visão tridimensional da corneta coaxial apresentada por [12]. Imagem obtida em [13, p. 229]. . . . .	135
4.2	Dimensões da corneta coaxial apresentada por [12]. Imagem obtida em [13, p. 229]. . . . .	135
4.3	Acoplador coaxial proposto em [13, p. 230] adicionalmente usando regiões não homogêneas <i>II</i> e <i>IV</i> . . . . .	136
4.4	Comparação entre a perda de retorno simulada obtida em [13, p. 231] com os valores obtidos pelo MMT. . . . .	136
4.5	Comparação entre a perda de retorno obtida pelo MMT para várias configurações de $h_1$ e $h_2$ . . . . .	137
4.6	Comparação entre a perda de retorno obtida pelo MMT para várias configurações de $h_1$ e $h_2$ . . . . .	138
4.7	Comparação entre a perda de retorno obtida em [13, p. 231] com os valores obtidos pelo MMT para o alimentador otimizado. Adicionalmente, é mostrada a perda de retorno obtida para os valores extremos de $h_1$ e $h_2$ . . . . .	139

4.8	Ilustração das regiões em que o MMT e o MoM são empregados no método híbrido de análise usado em [13]. . . . .	140
4.9	Comparação das medidas de perda de retorno com o caso $h_1 = h_2 = 0$ e com o caso $h_1 = 1,0$ mm e $h_2 = 0,55$ mm. . . . .	141
4.10	Caso 1, corneta com preenchimento homogêneo proposta em [13, pp. 229-231] – Diagramas de radiação em função da frequência. . . . .	142
4.11	Caso 2 – Diagramas de radiação em função da frequência. . . . .	143
4.12	Caso 3 – Diagramas de radiação em função da frequência. . . . .	143
4.13	Comparação entre perdas de retorno para os casos 1, 2 e 3. . . . .	144
4.14	Caso 4 – Diagramas de radiação em função da frequência. . . . .	145
4.15	Comparação entre perdas de retorno para os casos 1 e 4. . . . .	145
4.16	Esboço das cornetas dos casos 1 a 4. As unidades dos gráficos estão em metros. . . . .	146
5.1	Estrutura com descontinuidades coaxiais usada em [10] para caracterização eletromagnética de materiais. . . . .	150
5.2	Comparação do coeficiente de reflexão $S_{11}$ simulado e o obtido em [10, p. 227]. . . . .	150
5.3	Comparação do coeficiente de transmissão $S_{21}$ com os dados em [10]. . . . .	151
5.4	Estrutura coaxial com material com perdas. . . . .	152
5.5	Comparação entre a perda de retorno simulada no CST com os valores obtidos pelo MMT para a configuração dada na Tabela 5.2. Número de células da grade do CST: 32371200. . . . .	152
5.6	Comparação entre a perda de retorno para a configuração dada na Tabela 5.2, em que a condutividade da camada 2 da região II $\sigma_2$ é variada. Foram usados 20 modos em todas as regiões e configurações de condutividade. . . . .	153
5.7	Vista em corte de um poço de produção de petróleo utilizando telemetria sem fio. . . . .	156
5.8	Autovalores $k_{\rho 1}^{TM}$ para a estrutura de um poço de petróleo. Os resultados são para a frequência de 10 Hz, considerando-se os parâmetros listados na Tabela 5.3. O <i>branch cut</i> $\text{Im}(k_{\rho 2})=0$ é representado pela linha tracejada. . . . .	157
5.9	<i>Zoom</i> nos arredores de alguns modos guiados da Fig. 5.8. Compare-se os resultados com os autovalores do guia circular (tubo interno) e coaxial (tubo interno + externo). . . . .	157
5.10	Autovalores $TM^z$ do guia descrito na Tabela 5.3 para diversas configurações de condutividade dos tubos. Os <i>branch cuts</i> de cada caso são representados por linhas tracejadas. . . . .	158
5.11	Autovalores para várias configurações de guias de onda em 1 Hz. . . . .	160
5.12	Autovalores para várias configurações de guias de onda em 1 Hz. . . . .	160
5.13	Autovalores para várias configurações de guias de onda em 1 Hz. . . . .	161
5.14	Autovalores para várias configurações de guias de onda em 1 Hz. . . . .	161
5.15	Resistividade de 4 amostras de lama medidas em [45]. . . . .	162
5.16	Permissividade relativa de 4 amostras de lama medidas em [45]. . . . .	163

5.17	Coeficiente de transmissão em decibel para um poço coaxial alimentado pelo modo fundamental em 1000 m. O poço é considerado um guia coaxial homogêneo, preenchido pelos materiais das 4 amostras de lama. . . . .	163
5.18	Coeficiente de transmissão em função da frequência para poços com 100 m. . . . .	165
5.19	Coeficiente de transmissão em função da frequência para poços com 200 m e com dois preenchimentos. . . . .	166
5.20	Coeficiente de transmissão em função da frequência para poços com 200 m e com dois preenchimentos. . . . .	167
5.21	Coeficiente de transmissão em função da frequência para um poço formado por 500 m de ar, 500 m de lama, e 100 m de óleo. . . . .	167
D.1	Acoplamento entre Guias Coaxial→Circular e entre Circular→Coaxial.	186
D.2	Acoplamento entre guias coaxial→circular. . . . .	188
D.3	Comparação entre a perda de retorno simulada no CST com os valores obtidos pelo MMT . Número de células do TD do CST: 827424. . . . .	188
E.1	Vistas ortogonais do guia não homogêneo com $N$ camadas radiais.	189
E.2	Planos complexos em que $f = z^{1/2}$ . O meio plano da direita do plano complexo $f$ é mapeado para a folha de Riemann de cima, enquanto o meio plano da esquerda é mapeado na folha Riemann de baixo. . . . .	196
E.3	Plano complexo $k_{\rho 1}$ . O contorno admissível está na região sombreada.	199
E.4	Plano complexo $k_{\rho 1}^2$ . . . . .	199
E.5	Plano complexo $k_{\rho 1}$ . A região admissível para a busca das raízes de $G(k_{\rho 1})$ está sombreada. . . . .	200
E.6	Ilustração da grade de pontos no plano complexo $k_{\rho 1}^2$ e seu mapeamento no plano $k_{\rho 1}$ . . . . .	206
E.7	Ilustração do algoritmo para busca de raízes no plano complexo $k_{\rho 1}^2$ .	207
E.8	Constantes de fase e de atenuação para o modo fundamental do guia descrito da Tabela E.1. Número de células do CST: 4467382. .	208
F.1	Constantes de propagação computadas para o modo TM em 1 GHz em um túnel com 2 m de raio, preenchido com ar, e cujas paredes tem de solo apresentam $\epsilon_2 = (10 - j)\epsilon_0$ . . . . .	212
F.2	Constantes de propagação computadas para o modo TE em 1 GHz em um túnel com 2 m de raio, preenchido com ar, e cujas paredes tem de solo apresentam $\epsilon_2 = (10 - j)\epsilon_0$ . . . . .	213
F.3	Autovalores computados para modos híbridos em 1 GHz em um túnel com 2 m de raio, preenchido com ar, e cujas paredes tem de solo apresentam $\epsilon_2 = (10 - j)\epsilon_0$ . Nota-se o empecilho de uma equação característica com polos. . . . .	213
G.1	fonte de corrente elétrica em guia de onda de seção transversal $S_0$ .	215
G.2	Antena transmissora: bobina com $N_e$ espira de corrente. . . . .	216
G.3	Espira de corrente. . . . .	216



## Lista de tabelas

2.1	Relação de substituição das funções de Bessel em função do número de onda das camadas 1 e 2 (ambas sem perdas). . . . .	48
3.1	$P_{n0}^{TM \rightleftharpoons TM}$ em função das combinações de regiões. . . . .	88
3.2	$P_{0m}^{TM \rightleftharpoons TM}$ em função das combinações de regiões. . . . .	90
3.3	$P_{0m}^{TM \rightleftharpoons TM}$ em função das combinações de regiões. . . . .	91
3.4	$R_{00}^{TM}$ em função das combinações de regiões. . . . .	96
3.5	$Q_{00}^{TM}$ em função das combinações de regiões. . . . .	98
3.6	Dimensões e parâmetros dos guias usados na simulação da Fig. 3.18.	109
3.7	Dimensões e parâmetros dos guias usados na simulação da Fig. 3.20.	110
3.8	Dimensões e parâmetros dos guias usados na simulação da Fig. 3.23.	111
3.9	Dimensões e parâmetros dos guias usados na simulação da Fig. 3.29.	116
3.10	Dimensões e parâmetros dos guias usados na simulação da Fig. 3.32.	118
3.11	Dimensões e parâmetros dos guias usados na simulação da Fig. 3.35.	120
3.12	Dimensões e parâmetros dos guias usados na simulação da Fig. 3.39.	125
3.13	Dimensões e parâmetros dos guias usados na simulação da Fig. 3.41.	126
3.14	Dimensões e parâmetros dos guias usados na simulação da Fig. 3.43.	127
3.15	Dimensões e parâmetros dos guias usados na simulação da Fig. 3.45.	128
3.16	Dimensões e parâmetros dos guias usados na simulação da Fig. 3.51.	131
3.17	Dimensões e parâmetros dos guias usados na simulação da Fig. 3.53.	132
4.1	Dimensões e parâmetros do acoplador coaxial proposto em [13, pp. 229-230] . . . . .	136
4.2	Dimensões e parâmetros do acoplador coaxial otimizado em [13, p. 229-230] . . . . .	138
5.1	Dimensões e parâmetros da estrutura da Fig. 5.1. . . . .	150
5.2	Dimensões e parâmetros dos guias usados na simulação da Fig. 5.4.	152
5.3	Dimensões e parâmetros dos guias usados na simulação da Fig. 5.4.	155
5.4	Relação entre permissividade, impedância intrínseca do guia coaxial, e coeficiente de transmissão. . . . .	164
D.1	Dimensões e parâmetros da junção entre guias coaxial→circular usados na simulação da Fig. D.3. . . . .	188
E.1	Dimensões do guia coaxial com 4 camadas radiais. As regiões $0 \leq \rho \leq 1,5250$ e $\rho \geq 3,550$ são condutores elétricos perfeitos. . .	208
F.1	<i>Winding number</i> em um contorno infinitesimal envolvendo a origem $w = 0$ em função da ordem das funções cilíndricas $\nu$ . . . . .	211

*It doesn't matter how many resources you have.*

*If you don't know how to use them, it will never be enough.*

**Autor desconhecido.**



# 1

## Apresentação

### 1.1

#### Introdução

A necessidade de operação em largas bandas de frequência associada ao desempenho com baixas perdas de retorno e robustez mecânica exigem que dispositivos de microondas sejam dimensionados de formas diversas, e eventualmente são preenchidos com meios dielétricos não homogêneos.

A propagação de ondas eletromagnéticas em estruturas guiadas, que envolvam descontinuidades na seção transversal à propagação podem ser analisadas com técnicas analíticas aproximadas descritas em [1] [2], [3]. Essas técnicas empregam, em geral, circuitos equivalentes para representar as descontinuidades isoladas, e apresentam limitações ao determinar o comportamento eletromagnético de estruturas não convencionais. Estas limitações podem ser superadas quando a solução rigorosa das equações de Maxwell é empregada na análise da estrutura inteira.

Na literatura existem diversos métodos numéricos rigorosos que podem ser utilizados na análise eletromagnética de estruturas coaxiais. Entre essas técnicas destacam-se o método dos elementos finitos [4], [5], método das diferenças finitas [6], método do casamento de modos [7], [8], entre outros.

Métodos puramente numéricos, como o método de diferenças finitas no domínio do tempo (FDTD) e a formulação do método dos elementos finitos (MEF) são versáteis, e permitem soluções satisfatórias mesmo para geometrias complexas. Um ponto crítico destes métodos é o elevado consumo computacional.

Em geometrias mais simples, nas quais as funções de onda são conhecidas, um método preciso, que é largamente utilizado [7], [8], é o método do casamento de modos, conhecido na literatura internacional por *mode matching technique* (MMT). No MMT os campos eletromagnéticos são expandidos em termos modais, e integrais de acoplamento são determinadas para o casamento modal entre descontinuidades na seção transversal entre dois guias de onda. As integrais de acoplamento para todos os modos considerados formam a matriz de espalhamento de cada descontinuidade.

É importante observar que, em geral, as integrais de acoplamento modal são analíticas, e portanto, o MMT é computacionalmente menos intenso se comparado a técnicas como FDTD e MEF.

Em [7] e [8] o MMT foi aplicado para descontinuidades em guias circulares homogêneos para modelar estruturas corrugadas. Em [9] o MMT foi usado em guias coaxiais circulares com seção transversal homogênea para analisar estruturas de acoplamento.

Nesta Dissertação o método de casamento de modos é aplicado a descontinuidades entre guias de ondas coaxiais não homogêneos com perdas. A formulação é desenvolvida para guias com seções transversais compostas por até 2 camadas. A formulação proposta, além de tratar descontinuidades entre guias coaxiais não homogêneos, também se aplica a descontinuidades entre guias: coaxial→circular e circular→coaxial; também não homogêneos e passíveis a perdas.

As equações características que dão os autovalores modais são formuladas para guias com 2 camadas radiais. Esta formulação é generalizada para guias de ondas com  $N$  camadas radiais, radiantes ou confinados.

Um ponto crítico do MMT é a necessidade do conhecimento das constantes de propagação modais em cada trecho de guia. Em muitos casos, as equações características são transcendentais, e é requerida uma solução numérica. Contudo, devido a complexidade das equações características; que envolve a presença de polos, polos falsos, ou mesmo zeros muito próximos uns aos outros, senão iguais; em formulações clássicas algumas raízes acabam não sendo detectadas, comprometendo a acurácia do método. A fim de contornar estes problemas, emprega-se o método do *winding number* para localizar as raízes da equação característica. Além disso, a equação característica é formulada para ser livre de polos; salvo na origem do plano complexo que requer maior análise. A ausência de polos acaba por tornar as expressões pouco compactas, mas numericamente estáveis.

A contribuição científica deste trabalho diz respeito ao emprego de uma formulação do MMT para guias coaxiais com carregamento dielétrico não homogêneo, com autovalores determinados por expressões analíticas, não sendo necessário recorrer a métodos de diferenças finitas como o usado em [10]. Não foram encontradas publicações na literatura que empregassem o método do *winding number* para estruturas coaxiais preenchidas com dielétricos (homogêneos ou não homogêneos) com perdas. A formulação empregada nesta dissertação também é apta a tratar descontinuidades entre junções de guias guias coaxial→coaxial, coaxial→circular, circular→coaxial e circular→circular excitadas pelo modo TEM. No MMT empregado em [11] estes tipos de descontinuidades também podiam ser analisadas, contudo, apenas para guias homogêneos e preenchidos com dielétricos sem perdas.

## 1.2

### Motivação

Antenas refletoras têm desempenho controlado pelo alimentador. Em geral, a operação se restringe a faixas estreitas de frequências. Isso se deve a baixa perda de retorno requerida ao alimentador [12]. Um problema adicional é que com o aumento da frequência, em geral, o diagrama de radiação se estreita, prejudicando a iluminação de um refletor ou sub-refletor.

Em [13] foi observado que com a entrada de um modo superior em uma corneta coaxial pode-se melhorar a característica do diagrama de radiação para aplicação em uma antena com duplo refletor.

Uma forma de obter modos de propagação superiores em estruturas compactas é o emprego de carregamento dielétrico. Contudo, a fim de não deteriorar a perda de retorno, e visando homogeneizar o diagrama de radiação do alimentador, pode-se empregar o carregamento dielétrico em uma corneta com seção transversal não homogênea. É bem conhecido que os campos eletromagnéticos em guias de ondas se concentram em dielétricos [14], e dessa forma, com cornetas coaxiais não homogêneas, além de ser possível a propagação de modos de alta ordem sem prejudicar a perda de retorno, pode-se concentrar a potência radiante da corneta sobre determinadas regiões da saída da corneta.

Em [13] foi apresentado o projeto de uma corneta coaxial como alimentador para antenas omnidirecionais com duplo-refletores. A análise rigorosa do alimentador realizada em [13] foi feita pelo método de casamento de modos entre descontinuidades de guias coaxiais homogêneos. Contudo, a construção da corneta exigiu seções de guias coaxiais não homogêneos, que não foram consideradas na análise. Estas regiões não homogêneas foram usadas como apoios mecânicos, para fixar e alinhar a estrutura interna e externa da corneta coaxial. A influência da heterogeneidade constituída pelos apoios dielétrico da corneta é analisada nesta dissertação.

Adicionalmente, a influência na característica do diagrama de radiação da presença de uma capa dielétrica dentro da corneta coaxial é investigada.

A formulação do MMT usada para analisar descontinuidades em guias de ondas não homogêneos com perdas também foi motivada para a simulação da telemetria sem fio em poços de petróleo.

O monitoramento e controle dos sensores em um poço de petróleo são classicamente realizados por cabos elétricos, que conectam sensores e atuadores no fundo do poço com a estação de superfície. Em poços ultra-profundos, as técnicas clássicas de telemetria apresentam aspectos críticos [15], e em alguns casos sua utilização é inviável. Isso motiva a investigação de métodos

de telemetria sem fio. O problema de propagação é modelado pelo MMT, e sua viabilidade é analisada.

### 1.3

#### **Organização da Dissertação**

No Capítulo 2 é apresentado a geometria do guia coaxial não homogêneo de estudo. São desenvolvidos os campos modais e o equacionamento para a obtenção das equações características dos modos TE e TM puros. Expressões assintóticas são desenvolvidas, e auxiliam na determinação dos autovalores. A formulação é validada a partir da comparação das curvas de dispersão obtidas com resultados encontradas na literatura.

A formulação do método do casamento de modos é apresentada no Capítulo 3. O algoritmo numérico implementado em FORTRAN é validado para o caso de guias homogêneos a partir de resultados encontrados na literatura. Os casos não homogêneos são validados utilizando um software de simulação eletromagnética comercial, por meio de métodos no domínio tempo e no domínio da frequência.

No Capítulo 4, o MMT é aplicado a estruturas de acoplamento, e investiga-se a influencia do carregamento dielétrico não homogêneo em estruturas radiantes.

O Capítulo 5 trata da aplicação do MMT em estruturas guiadas com perdas. Sistemas de telemetria de poços petrolíferos são modelados usando o MMT.

As considerações finais e resultados obtidos estão no Capítulo 6.

## 2

## Campos Modais

### 2.1

#### Introdução

Neste capítulo são desenvolvidas as expressões dos campos modais  $TM^z$  e  $TE^z$  para um guia coaxial circular não homogêneo.

Em [1, pp. 396-397] foram desenvolvidas expressões para o modo fundamental em um guia coaxial parcialmente preenchido por dielétrico, e foram propostas aproximações por redes de circuitos equivalentes. Uma abordagem semelhante foi usada em [16], em que a análise de [1] foi inclusive expandida para modos híbridos. Em [17], ao invés de resolver as condições de contorno ao problema, as equações de Maxwell foram resolvidas pelo *shooting method* até que uma determinada condição de erro fosse alcançada. Apesar de poder ser utilizada em guias com preenchimento dielétrico mais gerais, os próprios autores de [17] mencionam que essa formulação pode enfrentar problemas numéricos.

Nos trabalhos [1, pp. 396-397], [16] e [17] são apresentados resultados para os primeiros modos em guias coaxiais com duplo carregamento dielétrico radial. Esses resultados são usados para verificar e validar a formulação deste capítulo.

A formulação utilizada nesta dissertação vai resolver o problema de contorno de forma rigorosa, visando obter expressões analíticas junto a sua interpretação física e a identificação dos fenômenos envolvidos.

Como descrito pela literatura [14], [18], é bastante conveniente o emprego de um sistema de coordenadas coincidente com as superfícies do problema de contorno. Pela geometria de um guia de onda coaxial circular em que se espera a propagação no sentido de  $z$ , as coordenadas cilíndricas orientadas de acordo com a Fig. 2.1 são apropriadas.

Após a aplicação das condições de contorno do problema, uma equação característica que dá as constantes de propagação é determinada para o modo  $TM^z$ , bem como sua aproximação assintótica é apresentada<sup>1</sup>. Um caso particular da formulação em que o guia coaxial é homogêneo é avaliado e expressões analíticas são comparadas com as propostas na literatura.

---

<sup>1</sup>A equação característica para o modo  $TE^z$  não é explicitada, mas mostra-se a seguir que ela pode ser obtida por dualidade em respeito a equação do modo  $TM^z$ . No Capítulo 3 vai ser verificado que os campos  $TE^z$  não se acoplam com o modo fundamental do guia coaxial, sendo necessário apenas os modos  $TM^z$  para a formulação do MMT.

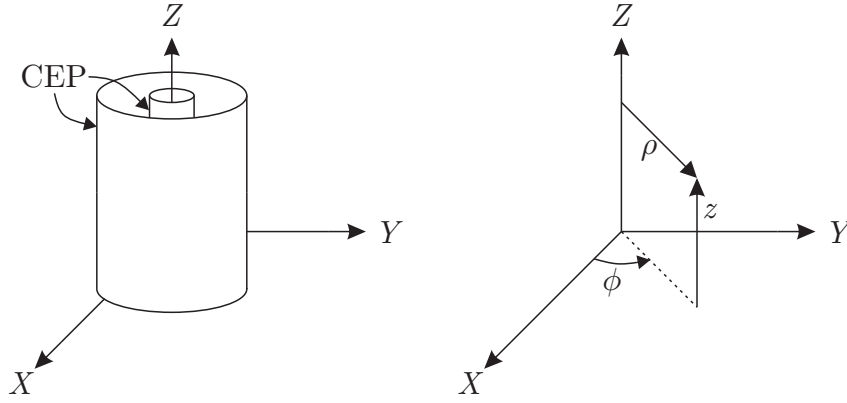


Figura 2.1: Sistema de coordenadas cilíndrico.

## 2.2

### Construção de Solução para Meios Homogêneos sem Fontes

Em meios homogêneos, isotrópicos, lineares e sem fontes, os campos devem satisfazer

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\hat{z}\mathbf{H}, \text{ e} \quad (2-1)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \hat{y}\mathbf{E},$$

em que os parâmetros  $\hat{z} = j\omega\hat{\mu}$  e  $\hat{y} = (\hat{\sigma} + j\omega\hat{\epsilon})$  têm dimensões de impedância por comprimento e admitância por comprimento, respectivamente [14, p. 19].<sup>2</sup> As letras romanas em negrito representam vetores. Os vetores unitários são representados pela letra u seguida do subscrito indicando a direção. Por exemplo:  $\mathbf{u}_z$  é um vetor unitário na direção da coordenada  $z$ .

Ao longo desta dissertação é usada a dependência harmônica  $\exp(j\omega t)$  para representar os campos eletromagnéticos no domínio da frequência, e por comodidade de notação este termo é omitido. A permissividade elétrica complexa do meio é representada por  $\hat{\epsilon}$ , a permeabilidade magnética complexa do meio é dada por  $\hat{\mu}$ , e  $\hat{\sigma}$  é a condutividade complexa do meio. Nestes meios,  $\hat{z}$  e  $\hat{y}$  independem da posição (meio homogêneo), são escalares (meio isotrópico), e são independentes de  $\text{Abs}(\mathbf{E})$  e  $\text{Abs}(\mathbf{H})$  (meio linear). Aplicando o operador rotacional na primeira equação de (2-1), tem-se

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = -\hat{z}\nabla \times \mathbf{H},$$

que, após a substituição de  $\nabla \times \mathbf{H}$  da segunda equação de (2-1) torna-se

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = -\hat{z}\hat{y}\mathbf{E}.$$

Fazendo o número de onda do meio  $k = \sqrt{-\hat{z}\hat{y}}$ , a equação anterior em termos de  $k$  torna-se

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} - k^2\mathbf{E} = 0. \quad (2-2)$$

<sup>2</sup>Em [18],  $\hat{y}$  e  $\hat{z}$  representam vetores unitários. Nesta dissertação estes parâmetros representam admitividade e imeditividade, e não devem ser confundidos.

Aplicando o operador rotacional na segunda equação de (2-1), e substituindo  $\nabla \times \mathbf{E}$  da primeira equação, tem-se

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{H} - k^2 \mathbf{H} = 0. \quad (2-3)$$

Como  $\nabla^2 \mathbf{A} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla \times \nabla \times \mathbf{A}$ , aplicando o operador divergência nas equações 2-2 e 2-3, e usando a identidade vetorial  $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$ , tem-se que (2-2) e (2-3) reduzem-se a

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E} &= 0, \text{ e} \\ \nabla \cdot \mathbf{H} &= 0. \end{aligned} \quad (2-4)$$

Como  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{H}$  têm divergência nula, pode-se expressar os campos em termos do vetor potencial magnético  $\mathbf{A}$  ou em termos do vetor potencial elétrico  $\mathbf{F}$ , ou pode-se empregar a superposição de ambos. As equações gerais para os vetores potenciais são [14, p. 129]

$$\begin{aligned} \nabla \times \nabla \times \mathbf{A} - k^2 \mathbf{A} &= -\hat{y} \nabla \Phi^a, \text{ e} \\ \nabla \times \nabla \times \mathbf{F} - k^2 \mathbf{F} &= -\hat{z} \nabla \Phi^f, \end{aligned} \quad (2-5)$$

em que  $\Phi^a$  e  $\Phi^f$  são escalares arbitrários. Os campos eletromagnéticos em termos de  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{F}$  são dados por

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= -\nabla \times \mathbf{F} + \frac{1}{\hat{y}} \nabla \times \nabla \times \mathbf{A}, \text{ e} \\ \mathbf{H} &= \nabla \times \mathbf{A} + \frac{1}{\hat{z}} \nabla \times \nabla \times \mathbf{F}. \end{aligned} \quad (2-6)$$

Escolhendo as constantes arbitrárias  $\Phi$  de acordo com

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = -\hat{y} \Phi^a, \text{ e} \quad \nabla \cdot \mathbf{F} = -\hat{z} \Phi^f, \quad (2-7)$$

as equações de (2-5) se reduzem para os potenciais de onda

$$\begin{aligned} \nabla^2 \mathbf{A} + k^2 \mathbf{A} &= 0, \text{ e} \\ \nabla^2 \mathbf{F} + k^2 \mathbf{F} &= 0. \end{aligned}$$

Observando que na identidade vetorial

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$$

o termo  $\nabla^2 \mathbf{A} = -k^2 \mathbf{A}$ , tem-se que quando (2-7) é satisfeita pode-se reescrever as equações de (2-6) como<sup>3</sup>

---

<sup>3</sup>No desenvolvimento supracitado, bem como em [14],  $\mathbf{A}$  é o vetor potencial magnético de  $\mathbf{H}$ . Em geral, é mais comum fazer  $\mathbf{A}$  ser o vetor potencial magnético de  $\mathbf{B}$ , como empregado em [18]. Em meios homogêneos os dois potenciais diferem por uma constante, na proporção de  $1/\hat{\mu}$ . Por dualidade, tem-se que o vetor potencial elétrico  $\mathbf{F}$  de [14] e [18] difere na proporção de  $1/\hat{\epsilon}$  em meios homogêneos sem condutividade elétrica.

$$\mathbf{E} = -\nabla \times \mathbf{F} - \hat{z}\mathbf{A} + \frac{1}{\hat{y}}\nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}), \text{ e}$$

$$\mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{A} - \hat{y}\mathbf{F} + \frac{1}{\hat{z}}\nabla(\nabla \cdot \mathbf{F}).$$

### 2.3

#### Modos $\text{TM}^z$ e $\text{TE}^z$

A formulação por potencial vetor e escalar é empregada para expressar um campo eletromagnético em termos da função de onda  $\psi$ . Fazendo  $\mathbf{A} = \mathbf{u}_z\psi$  e  $\mathbf{F} = 0$  tem-se que os campos TM para  $z$  ( $\text{TM}^z$ ) em uma região homogênea sem fontes são dados por [14, p. 202], [18, p. 273]:

$$\begin{aligned} E_\rho &= \frac{1}{\hat{y}} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \rho \partial z} & H_\rho &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \phi} \\ E_\phi &= \frac{1}{\hat{y}\rho} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi \partial z} & H_\phi &= -\frac{\partial \psi}{\partial \rho} \\ E_z &= \frac{1}{\hat{y}} \left( \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \right) \psi & H_z &= 0. \end{aligned} \quad (2-8)$$

Fazendo  $\mathbf{F} = \mathbf{u}_z\psi$  e  $\mathbf{A} = 0$  tem-se que os campos TE para  $z$  ( $\text{TE}^z$ ) são dados por [14, p. 202], [18, p. 275]:

$$\begin{aligned} E_\rho &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \phi} & H_\rho &= \frac{1}{\hat{z}} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \rho \partial z} \\ E_\phi &= \frac{\partial \psi}{\partial \rho} & H_\phi &= \frac{1}{\hat{z}\rho} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi \partial z} \\ E_z &= 0 & H_z &= \frac{1}{\hat{z}} \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + k^2 \right) \psi. \end{aligned} \quad (2-9)$$

### 2.4

#### Guia Coaxial Circular não Homogêneo

Seja o guia de onda coaxial circular<sup>4</sup> com duas camadas dielétricas da Fig. 2.2. A região hachurada representa uma superfície que é assumida condutora elétrica perfeita (CEP). Seja a camada 1 compreendida em  $a < \rho < b$  e a camada 2 definida em  $b < \rho < c$ , como mostra a Fig. 2.2. No Apêndice A é desenvolvida solução da equação de onda escalar de Helmholtz em coordenadas cilíndricas, e particularizada para o problema do guia coaxial. A partir disso, pode-se escolher as funções de onda  $\psi$  elétrica e magnética como

<sup>4</sup>Ao longo desta Dissertação, por comodidade de notação, os termos *guia de onda*, *guia coaxial* e *guia* devem ser entendidos como *guia de onda coaxial circular*. Salvo onde explicitado de forma contrária, estes termos se referem ao guia da Fig. 2.2.



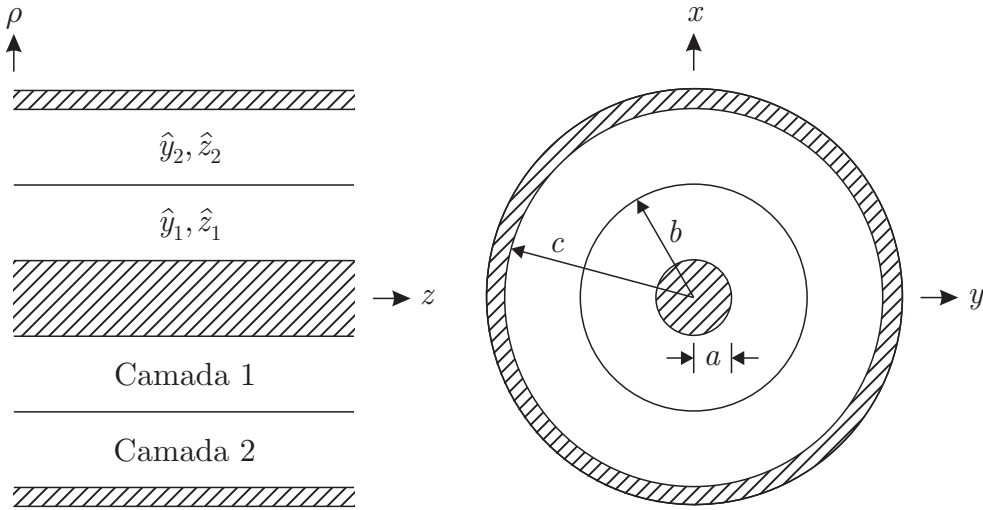


Figura 2.2: Vistas ortogonais do guia coaxial com duplo carregamento dielétrico.

$$\begin{aligned}\psi^{TM1} &= [A_n J_n(k_{\rho 1}^{TM} \rho) + B_n Y_n(k_{\rho 1}^{TM} \rho)] \cos n\phi e^{-jk_z^{TM} z}, \text{ e} \\ \psi^{TE1} &= [E_n J_n(k_{\rho 1}^{TE} \rho) + F_n Y_n(k_{\rho 1}^{TE} \rho)] \text{senn}\phi e^{-jk_z^{TE} z}\end{aligned}\quad (2-10)$$

na camada 1, e

$$\begin{aligned}\psi^{TM2} &= [C_n J_n(k_{\rho 2}^{TM} \rho) + D_n Y_n(k_{\rho 2}^{TM} \rho)] \cos n\phi e^{-jk_z^{TM} z}, \text{ e} \\ \psi^{TE2} &= [G_n J_n(k_{\rho 2}^{TE} \rho) + H_n Y_n(k_{\rho 2}^{TE} \rho)] \text{senn}\phi e^{-jk_z^{TE} z}\end{aligned}\quad (2-11)$$

na camada 2, em que é assumido a propagação na direção  $\mathbf{u}_z$ . A função de onda  $\psi^{TM}$  determina os campos parciais do modo  $\text{TM}^z$  de acordo com (2-8) e  $\psi^{TE}$  determina os campos parciais do modo  $\text{TE}^z$  de acordo com (2-9). As funções  $J_n(k_\rho \rho)$  e  $Y_n(k_\rho \rho)$  denotam as soluções para a equação de Bessel de primeiro e segundo tipo, respectivamente, e de ordem  $n$ . Os números de onda radial ( $k_\rho$ ) e axial ( $k_z$ ) são funções de  $n$  e  $p$ ; por simplicidade da notação estes índices são suprimidos. O índice  $p$  denota a ordem da raiz  $k_\rho$  que satisfaz o problema de contorno; ou seja,  $p = 0, 1, 2, \dots$ . Como é verificado a seguir, as constantes  $A_n, B_n, C_n, D_n, E_n, F_n, G_n$  e  $H_n$  dependem dos números de onda, e portanto, dependem de  $n$  e  $p$ . Mais uma vez a fim de simplificar a notação, o índice  $p$  é omitido. Essas constates podem ser encontradas usando as condições

de contorno

$$E_\phi(\rho = a, \phi, z) = 0, \quad (2-12a)$$

$$E_z(\rho = a, \phi, z) = 0, \quad (2-12b)$$

$$E_\phi(\rho = c, \phi, z) = 0, \quad (2-12c)$$

$$E_z(\rho = c, \phi, z) = 0, \quad (2-12d)$$

$$E_\phi^1(\rho = b, \phi, z) = E_\phi^2(\rho = b, \phi, z), \quad (2-12e)$$

$$E_z^1(\rho = b, \phi, z) = E_z^2(\rho = b, \phi, z), \quad (2-12f)$$

$$H_\phi^1(\rho = b, \phi, z) = H_\phi^2(\rho = b, \phi, z), \quad (2-12g)$$

$$H_z^1(\rho = b, \phi, z) = H_z^2(\rho = b, \phi, z), \quad (2-12h)$$

$$\text{Os campos devem ser finitos em todo espaço, e} \quad (2-12i)$$

$$\text{Os campos devem se repetir a cada } 2\pi \text{ radianos em } \phi. \quad (2-12j)$$

As condições de contorno (2-12i) e (2-12j) são satisfeitas naturalmente pelas funções de onda (2-10) e (2-11), isto é, as funções seno e cosseno garantem a repetibilidade dos campos em  $\phi$ , e a combinação das funções de Bessel escolhidas para formar a solução provê campos finitos em todo espaço; devido a geometria do problema de contorno da Fig. 2.2. Além disso, tem-se que garantir que o termo das exponenciais de (2-11) e (2-10) sejam limitados. De acordo com (A-12), tem-se  $k_z = \pm (k^2 - k_\rho^2)^{1/2}$ . Caso  $k_z$  seja complexo o sinal da raiz quadrada é escolhido de forma a garantir que

$$\text{Im}(k_z) > 0, \quad \text{quando } z \rightarrow +\infty, \text{ e}$$

$$\text{Im}(k_z) < 0, \quad \text{quando } z \rightarrow -\infty.$$

Para garantir as condições de contorno restantes de (2-12) é conveniente decompor os campos em modos  $\text{TM}^z$  e  $\text{TE}^z$ .

### 2.4.1

#### Campos para o Modo $\text{TM}^z$

Usando  $\psi^{TM1}$  e  $\psi^{TM2}$  em (2-8) tem-se os campos para o modo  $\text{TM}^z$  nas camadas 1 e 2. Na camada 1, tem-se

$$\begin{aligned} E_\rho^{TM1} &= \frac{1}{\hat{y}_1} \frac{\partial^2}{\partial \rho \partial z} \left\{ [A_n J_n(k_{\rho 1}^{TM} \rho) + B_n Y_n(k_{\rho 1}^{TM} \rho)] \cos n\phi e^{-jk_z^{TM} z} \right\} \\ &= \frac{1}{\hat{y}_1} (-jk_z^{TM} k_{\rho 1}^{TM}) [A_n J'_n(k_{\rho 1}^{TM} \rho) + B_n Y'_n(k_{\rho 1}^{TM} \rho)] \cos n\phi e^{-jk_z^{TM} z} \end{aligned} \quad (2-13)$$

em que ' denota a derivada com respeito ao argumento das funções de Bessel, ou seja,  $' = \partial/\partial(k_{\rho 1}^{TM} \rho)$ . O parâmetro  $\hat{y}_1$  equivale a  $\hat{y}_1 = (\hat{\sigma}_1 + j\omega\hat{\epsilon}_1)$ . Para a componente em  $\phi$  do campo elétrico para o modo  $TM^z$  no meio 1, tem-se

$$\begin{aligned} E_{\phi}^{TM1} &= \frac{1}{\hat{y}_1 \rho} \frac{\partial^2}{\partial \phi \partial z} \left\{ [A_n J_n(k_{\rho 1}^{TM} \rho) + B_n Y_n(k_{\rho 1}^{TM} \rho)] \cos n\phi e^{-jk_z^{TM} z} \right\} \\ &= \frac{1}{\hat{y}_1 \rho} (jn k_z^{TM}) [A_n J_n(k_{\rho 1}^{TM} \rho) + B_n Y_n(k_{\rho 1}^{TM} \rho)] \operatorname{sen} n\phi e^{-jk_z^{TM} z}. \end{aligned} \quad (2-14)$$

Para a componente em  $z$  do campo elétrico para o modo  $TM^z$  no meio 1 pode-se escrever

$$E_z^{TM1} = \frac{1}{\hat{y}_1} \left( \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k_1^2 \right) \left\{ [A_n J_n(k_{\rho 1}^{TM} \rho) + B_n Y_n(k_{\rho 1}^{TM} \rho)] \cos n\phi e^{-jk_z^{TM} z} \right\}.$$

Como a derivada segunda em termos de  $z$  do termo entre chaves  $\{ \}$  vale  $[-(k_z^{TM})^2]$ , a última expressão se reduz para

$$E_z^{TM1} = \frac{1}{\hat{y}_1} \left[ k_1^2 - (k_z^{TM})^2 \right] \left\{ [A_n J_n(k_{\rho 1}^{TM} \rho) + B_n Y_n(k_{\rho 1}^{TM} \rho)] \cos n\phi e^{-jk_z^{TM} z} \right\},$$

e notando que a definição de  $k_{\rho}$  dada em (A-12) para o meio 1 é tal que  $(k_1^{TM})^2 = (k_{\rho 1}^{TM})^2 + (k_z^{TM})^2$ , tem-se

$$E_z^{TM1} = \frac{1}{\hat{y}_1} (k_{\rho 1}^{TM})^2 [A_n J_n(k_{\rho 1}^{TM} \rho) + B_n Y_n(k_{\rho 1}^{TM} \rho)] \cos n\phi e^{-jk_z^{TM} z}. \quad (2-15)$$

A componente em  $\rho$  do campo magnético no meio 1 para o modo TM é dada por

$$\begin{aligned} H_{\rho}^{TM1} &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \phi} \left\{ [A_n J_n(k_{\rho 1}^{TM} \rho) + B_n Y_n(k_{\rho 1}^{TM} \rho)] \cos n\phi e^{-jk_z^{TM} z} \right\} \\ &= \frac{1}{\rho} (-n) [A_n J_n(k_{\rho 1}^{TM} \rho) + B_n Y_n(k_{\rho 1}^{TM} \rho)] \operatorname{sen} n\phi e^{-jk_z^{TM} z}. \end{aligned} \quad (2-16)$$

A componente em  $\phi$  do campo magnético no meio 1 para o modo TM é dada por

$$\begin{aligned} H_{\phi}^{TM1} &= -\frac{\partial}{\partial \rho} \left\{ [A_n J_n(k_{\rho 1}^{TM} \rho) + B_n Y_n(k_{\rho 1}^{TM} \rho)] \cos n\phi e^{-jk_z^{TM} z} \right\} \\ &= -k_{\rho 1}^{TM} [A_n J_n'(k_{\rho 1}^{TM} \rho) + B_n Y_n'(k_{\rho 1}^{TM} \rho)] \cos n\phi e^{-jk_z^{TM} z}, \end{aligned} \quad (2-17)$$

em que novamente  $' = \partial/\partial(k_{\rho 1}^{TM} \rho)$ . E finalmente, para o modo Transversal Magnético para  $z$  tem-se

$$H_z^{TM1} = 0. \quad (2-18)$$

As expressões de  $\psi^{TM1}$  e  $\psi^{TM2}$  dadas em (2-10) e (2-11) são duais. Fazendo

$$\begin{aligned} A_n &\rightarrow C_n, \\ B_n &\rightarrow D_n, \\ k_{\rho 1}^{TM} &\rightarrow k_{\rho 2}^{TM}, \text{ e} \\ \hat{y}_1 &\rightarrow \hat{y}_2 \end{aligned} \quad (2-19)$$

tem-se que  $\psi^{TM1}$  equivale a  $\psi^{TM2}$ . Fazendo as substituições de (2-19) nas expressões dos campos para o modo TM na camada 1, (2-13) a (2-18), tem-se os campos deste modo para a camada 2, ou seja:

$$E_{\rho}^{TM2} = \frac{1}{\hat{y}_2} (-jk_z^{TM} k_{\rho 2}^{TM}) [C_n J'_n(k_{\rho 2}^{TM} \rho) + D_n Y'_n(k_{\rho 2}^{TM} \rho)] \cos n\phi e^{-jk_z^{TM} z}, \quad (2-20)$$

$$E_{\phi}^{TM2} = \frac{1}{\hat{y}_2 \rho} (jn k_z^{TM}) [C_n J_n(k_{\rho 2}^{TM} \rho) + D_n Y_n(k_{\rho 2}^{TM} \rho)] \operatorname{senn}\phi e^{-jk_z^{TM} z}, \quad (2-21)$$

$$E_z^{TM2} = \frac{1}{\hat{y}_2} (k_{\rho 2}^{TM})^2 [C_n J_n(k_{\rho 2}^{TM} \rho) + D_n Y_n(k_{\rho 2}^{TM} \rho)] \cos n\phi e^{-jk_z^{TM} z}, \quad (2-22)$$

$$H_{\rho}^{TM2} = \frac{1}{\rho} (-n) [C_n J_n(k_{\rho 2}^{TM} \rho) + D_n Y_n(k_{\rho 2}^{TM} \rho)] \operatorname{senn}\phi e^{-jk_z^{TM} z}, \quad (2-23)$$

$$H_{\phi}^{TM2} = -k_{\rho 2}^{TM} [C_n J'_n(k_{\rho 2}^{TM} \rho) + D_n Y'_n(k_{\rho 2}^{TM} \rho)] \cos n\phi e^{-jk_z^{TM} z}, \text{ e} \quad (2-24)$$

$$H_z^{TM2} = 0. \quad (2-25)$$

Deve ser observado que  $\hat{y}_2 = (\hat{\sigma}_2 + j\omega\hat{\epsilon}_2)$ , e ' é a derivada com respeito ao argumento das funções de Bessel em (2-20) e (2-24), ou seja, ' =  $\partial/\partial(k_{\rho 2}^{TM} \rho)$ .

Aplicando as condições de contorno (2-12a) e (2-12b) em  $\rho = a$  tem-se que impor

$$E_{\phi}^{TM1}(\rho = a, \phi, z) = 0, \text{ e}$$

$$E_z^{TM1}(\rho = a, \phi, z) = 0,$$

ou seja,

$$\frac{1}{\hat{y}_1 a} (jn k_z^{TM}) [A_n J_n(k_{\rho 1}^{TM} a) + B_n Y_n(k_{\rho 1}^{TM} a)] \operatorname{senn}\phi e^{-jk_z^{TM} z} = 0, \text{ e}$$

$$\frac{1}{\hat{y}_1} (k_{\rho 1}^{TM})^2 [A_n J_n(k_{\rho 1}^{TM} a) + B_n Y_n(k_{\rho 1}^{TM} a)] \cos n\phi e^{-jk_z^{TM} z} = 0,$$

que se reduzem para

$$\frac{n k_z^{TM}}{\hat{y}_1 a} [A_n J_n(k_{\rho 1}^{TM} a) + B_n Y_n(k_{\rho 1}^{TM} a)] = 0, \text{ e} \quad (2-26)$$

$$A_n J_n(k_{\rho 1}^{TM} a) + B_n Y_n(k_{\rho 1}^{TM} a) = 0. \quad (2-27)$$

Aplicando as condições de contorno (2-12c) e (2-12d) em  $\rho = c$  tem-se que impor

$$E_{\phi}^{TM2}(\rho = c, \phi, z) = 0, \text{ e}$$

$$E_z^{TM2}(\rho = c, \phi, z) = 0,$$

ou seja,

$$\frac{1}{\hat{y}_2 c} (j n k_z^{TM}) [C_n J_n(k_{\rho 2}^{TM} c) + D_n Y_n(k_{\rho 2}^{TM} c)] \operatorname{senn} \phi e^{-j k_z^{TM} z} = 0, \text{ e}$$

$$\frac{1}{\hat{y}_2} (k_{\rho 2}^{TM})^2 [C_n J_n(k_{\rho 2}^{TM} c) + D_n Y_n(k_{\rho 2}^{TM} c)] \cos n \phi e^{-j k_z^{TM} z} = 0,$$

que se reduzem para

$$\frac{n k_z^{TM}}{\hat{y}_2 c} [C_n J_n(k_{\rho 2}^{TM} c) + D_n Y_n(k_{\rho 2}^{TM} c)] = 0, \text{ e} \quad (2-28)$$

$$C_n J_n(k_{\rho 2}^{TM} c) + D_n Y_n(k_{\rho 2}^{TM} c) = 0. \quad (2-29)$$

Aplicando as condições de contorno da continuidade do campo elétrico transversal (2-12e) e (2-12f) em  $\rho = b$  tem-se que impor

$$E_{\phi}^{TM1}(\rho = b, \phi, z) = E_{\phi}^{TM2}(\rho = b, \phi, z), \text{ e}$$

$$E_z^{TM1}(\rho = b, \phi, z) = E_z^{TM2}(\rho = b, \phi, z),$$

ou seja,

$$\frac{1}{\hat{y}_1 b} (j n k_z^{TM}) [A_n J_n(k_{\rho 1}^{TM} b) + B_n Y_n(k_{\rho 1}^{TM} b)] \operatorname{senn} \phi e^{-j k_z^{TM} z} =$$

$$\frac{1}{\hat{y}_2 b} (j n k_z^{TM}) [C_n J_n(k_{\rho 2}^{TM} b) + D_n Y_n(k_{\rho 2}^{TM} b)] \operatorname{senn} \phi e^{-j k_z^{TM} z}, \text{ e}$$

$$\frac{1}{\hat{y}_1} (k_{\rho 1}^{TM})^2 [A_n J_n(k_{\rho 1}^{TM} b) + B_n Y_n(k_{\rho 1}^{TM} b)] \cos n \phi e^{-j k_z^{TM} z} =$$

$$\frac{1}{\hat{y}_2} (k_{\rho 2}^{TM})^2 [C_n J_n(k_{\rho 2}^{TM} b) + D_n Y_n(k_{\rho 2}^{TM} b)] \cos n \phi e^{-j k_z^{TM} z},$$

que se reduzem para

$$\hat{y}_2 (n k_z^{TM}) [A_n J_n(k_{\rho 1}^{TM} b) + B_n Y_n(k_{\rho 1}^{TM} b)] =$$

$$\hat{y}_1 (n k_z^{TM}) [C_n J_n(k_{\rho 2}^{TM} b) + D_n Y_n(k_{\rho 2}^{TM} b)], \text{ e} \quad (2-30)$$

$$\hat{y}_2 (k_{\rho 1}^{TM})^2 [A_n J_n(k_{\rho 1}^{TM} b) + B_n Y_n(k_{\rho 1}^{TM} b)] = \hat{y}_1 (k_{\rho 2}^{TM})^2 [C_n J_n(k_{\rho 2}^{TM} b) + D_n Y_n(k_{\rho 2}^{TM} b)]. \quad (2-31)$$

Aplicando a condição de contorno da continuidade do campo magnético transversal (2-12g) em  $\rho = b$  tem-se que impor

$$H_{\phi}^{TM1}(\rho = b, \phi, z) = H_{\phi}^{TM2}(\rho = b, \phi, z),$$

ou seja,

$$\begin{aligned} -k_{\rho 1}^{TM} [A_n J'_n(k_{\rho 1}^{TM} b) + B_n Y'_n(k_{\rho 1}^{TM} b)] \cos n\phi e^{-jk_z^{TM} z} = \\ -k_{\rho 2}^{TM} [C_n J'_n(k_{\rho 2}^{TM} b) + D_n Y'_n(k_{\rho 2}^{TM} b)] \cos n\phi e^{-jk_z^{TM} z}, \end{aligned}$$

que se reduz para

$$k_{\rho 1}^{TM} [A_n J'_n(k_{\rho 1}^{TM} b) + B_n Y'_n(k_{\rho 1}^{TM} b)] = k_{\rho 2}^{TM} [C_n J'_n(k_{\rho 2}^{TM} b) + D_n Y'_n(k_{\rho 2}^{TM} b)]. \quad (2-32)$$

Deve-se observar que a condição de contorno (2-12h) no modo  $TM^z$  é naturalmente satisfeita, visto que  $H_z^{TM} = 0$ .

Para o modo  $TM^z$  se propagar, deve-se satisfazer as equações 2-26, 2-27, 2-28, 2-29, 2-30, 2-31 e 2-32. Nota-se que quando  $n = 0$ , as condições de contorno se reduzem apenas a (2-27), (2-29), (2-31) e (2-32). Contudo, para  $n \neq 0$ , as equações (2-30) e (2-31) são linearmente independentes (LI), e neste caso tem-se 5 equações LI para 4 variáveis desconhecidas ( $A_n$ ,  $B_n$ ,  $C_n$  e  $D_n$ )<sup>5</sup>. Dessa forma, o sistema de equações lineares é sobredeterminado, e não tem solução. Fisicamente isso significa que o modo  $TM^z$  puro com  $n \neq 0$  não existe no guia não homogêneo da Fig. 2.2.

### Modos $TM_{0p}^z$

As condições de contorno (2-27), (2-29), (2-31) e (2-32) formam um sistema de equações lineares homogêneo, que na forma matricial pode ser escrito por

$$\begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} & z_{13} & z_{14} \\ z_{21} & z_{22} & z_{23} & z_{24} \\ z_{31} & z_{32} & z_{33} & z_{34} \\ z_{41} & z_{42} & z_{43} & z_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_0 \\ B_0 \\ C_0 \\ D_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (2-33)$$

em que

---

<sup>5</sup>Rigorosamente é necessário resolver apenas 3 constantes, uma vez que pode-se normalizar as restantes a partir de  $A_n$ , por exemplo. Por conveniência da representação conserva-se as 4 constantes.

$$\begin{aligned}
z_{11} &= z_{12} = z_{23} = z_{24} = 0, \\
z_{13} &= J_0(k_{\rho 2}^{TM} c), \\
z_{14} &= Y_0(k_{\rho 2}^{TM} c), \\
z_{21} &= J_0(k_{\rho 1}^{TM} a), \\
z_{22} &= Y_0(k_{\rho 1}^{TM} a), \\
z_{31} &= \hat{y}_2 (k_{\rho 1}^{TM})^2 J_0(k_{\rho 1}^{TM} b), \\
z_{32} &= \hat{y}_2 (k_{\rho 1}^{TM})^2 Y_0(k_{\rho 1}^{TM} b), \\
z_{33} &= -\hat{y}_1 (k_{\rho 2}^{TM})^2 J_0(k_{\rho 2}^{TM} b), \\
z_{34} &= -\hat{y}_1 (k_{\rho 2}^{TM})^2 Y_0(k_{\rho 2}^{TM} b), \\
z_{41} &= k_{\rho 1}^{TM} J'_0(k_{\rho 1}^{TM} b), \\
z_{42} &= k_{\rho 1}^{TM} Y'_0(k_{\rho 1}^{TM} b), \\
z_{43} &= -k_{\rho 2}^{TM} J'_0(k_{\rho 2}^{TM} b), \text{ e} \\
z_{44} &= -k_{\rho 2}^{TM} Y'_0(k_{\rho 2}^{TM} b).
\end{aligned} \tag{2-34}$$

Denotando  $B_\nu(x)$  uma solução arbitrária para a equação de Bessel, tem-se que [14, p. 463]

$$B'_\nu(x) = \pm B_{\nu \mp 1}(x) \mp \frac{\nu}{x} B_\nu(x),$$

que permite recrever os 4 últimos coeficientes de (2-34) como

$$\begin{aligned}
z_{41} &= -k_{\rho 1}^{TM} J_1(k_{\rho 1}^{TM} b), \\
z_{42} &= -k_{\rho 1}^{TM} Y_1(k_{\rho 1}^{TM} b), \\
z_{43} &= k_{\rho 2}^{TM} J_1(k_{\rho 2}^{TM} b), \text{ e} \\
z_{44} &= k_{\rho 2}^{TM} Y_1(k_{\rho 2}^{TM} b).
\end{aligned} \tag{2-35}$$

As equações supracitadas obtidas a partir das condições de contorno (2-12) possuem solução não trivial apenas se o determinante da matriz de coeficientes for nulo.

Denotando a matriz de coeficientes por  $\bar{\bar{Z}}$ , o determinante de  $\bar{\bar{Z}}$  é tal que

$$\begin{aligned}
\det(\bar{\bar{Z}}) &= 0 \times (-1)^{1+1} \times \begin{vmatrix} z_{22} & 0 & 0 \\ z_{32} & z_{33} & z_{34} \\ z_{42} & z_{43} & z_{44} \end{vmatrix} + 0 \times (-1)^{1+2} \times \begin{vmatrix} z_{21} & 0 & 0 \\ z_{31} & z_{33} & z_{34} \\ z_{41} & z_{43} & z_{44} \end{vmatrix} \\
&+ z_{13} \times (-1)^{1+3} \times \begin{vmatrix} z_{21} & z_{22} & 0 \\ z_{31} & z_{32} & z_{34} \\ z_{41} & z_{42} & z_{44} \end{vmatrix} + z_{14} \times (-1)^{1+4} \times \begin{vmatrix} z_{21} & z_{22} & 0 \\ z_{31} & z_{32} & z_{33} \\ z_{41} & z_{42} & z_{43} \end{vmatrix}.
\end{aligned}$$

Notando que os dois primeiros termos são nulos, e resolvendo os determinan-

tes das matrizes  $3 \times 3$  restantes, tem-se

$$\det(\bar{\bar{Z}}) = z_{13}(z_{21}z_{32}z_{44} + z_{22}z_{34}z_{41} - z_{34}z_{42}z_{21} - z_{44}z_{22}z_{31}) \\ - z_{14}(z_{21}z_{32}z_{43} + z_{22}z_{33}z_{41} - z_{33}z_{42}z_{21} - z_{43}z_{22}z_{31}).$$

Rearranjando os termos da última expressão e lembrando que a solução de interesse é dada pela solução da equação característica na forma de determinante tal que  $\det(\bar{\bar{Z}}) = 0$ , pode-se escrever

$$z_{13}z_{21}z_{32}z_{44} + z_{13}z_{22}z_{34}z_{41} - z_{13}z_{21}z_{34}z_{42} - z_{13}z_{22}z_{31}z_{44} \\ - z_{14}z_{21}z_{32}z_{43} - z_{14}z_{22}z_{33}z_{41} + z_{14}z_{21}z_{33}z_{42} + z_{14}z_{22}z_{31}z_{43} = 0. \quad (2-36)$$

Se a condutividade elétrica nas duas camadas do guia é nula, a equação característica (2-36) pode ser normalizada por  $(j\omega)$ . Se as camadas do guia são feitas homogêneas, tem-se  $\hat{y}_1 = \hat{y}_2$  e  $k_{\rho 1}^{TM} = k_{\rho 2}^{TM}$  e a equação (2-36) pode ser normalizada por  $\hat{y}_1 k_{\rho 1}^{TM}$ , em que tem-se que os valores de  $k_{\rho 1}^{TM}$  (e  $k_{\rho 2}^{TM}$ ) independem da frequência, para meios com  $\hat{\sigma}$  e  $\hat{\epsilon}$  constantes. Na seção 2.5 mais particularidades do guia homogêneo são verificadas. Nesse caso, os valores de  $k_{\rho 1}^{TM}$  e  $k_{\rho 2}^{TM}$  dependem exclusivamente dos raios  $a$ ,  $b$  e  $c$  do guia.

Para encontrar as constantes  $A_0$ ,  $B_0$ ,  $C_0$  e  $D_0$ , pode-se escrever  $A_0$  como combinação linear das demais constantes a partir de (2-33). Da primeira linha de (2-33) tem-se que  $D_0$  pode ser expresso por

$$z_{13}C_0 + z_{14}D_0 = 0$$

$$D_0 = -\frac{z_{13}}{z_{14}}C_0. \quad (2-37)$$

Da segunda linha de (2-33), tem-se

$$z_{21}A_0 + z_{22}B_0 = 0$$

$$B_0 = -\frac{z_{21}}{z_{22}}A_0. \quad (2-38)$$

Da terceira linha de (2-33), tem-se

$$z_{31}A_0 + z_{32}B_0 + z_{33}C_0 + z_{34}D_0 = 0,$$

que usando (2-37) e (2-38) equivale a

$$z_{31}A_0 - z_{32}\frac{z_{21}}{z_{22}}A_0 + z_{33}C_0 - z_{34}\frac{z_{13}}{z_{14}}C_0 = 0, \quad (2-39)$$

que relaciona  $A_0$  e  $C_0$ . Da quarta linha de (2-33), pode-se escrever

$$z_{41}A_0 + z_{42}B_0 + z_{43}C_0 + z_{44}D_0 = 0,$$



que usando (2-37) e (2-38) equivale a

$$z_{41}A_0 - z_{42}\frac{z_{21}}{z_{22}}A_0 + z_{43}C_0 - z_{44}\frac{z_{13}}{z_{14}}C_0 = 0, \quad (2-40)$$

que da mesma forma que (2-39) relaciona  $A_0$  e  $C_0$ . De (2-39) e (2-40) pode-se escrever:

$$A_0 \left( z_{31} - z_{32}\frac{z_{21}}{z_{22}} \right) + C_0 \left( z_{33} - z_{34}\frac{z_{13}}{z_{14}} \right) = 0, \text{ e} \quad (2-41a)$$

$$A_0 \left( z_{41} - z_{42}\frac{z_{21}}{z_{22}} \right) + C_0 \left( z_{43} - z_{44}\frac{z_{13}}{z_{14}} \right) = 0. \quad (2-41b)$$

Fazendo (2-41a) + (2-41b), pode-se escrever

$$A_0 \left[ z_{31} + z_{41} - \frac{z_{21}}{z_{22}}(z_{32} + z_{42}) \right] + C_0 \left[ z_{33} + z_{43} - \frac{z_{13}}{z_{14}}(z_{34} + z_{44}) \right] = 0$$

$$C_0 = -A_0 \frac{z_{31} + z_{41} - \frac{z_{21}}{z_{22}}(z_{32} + z_{42})}{z_{33} + z_{43} - \frac{z_{13}}{z_{14}}(z_{34} + z_{44})}, \quad (2-42)$$

que relaciona  $C_0$  a partir de  $A_0$ . Substituindo  $C_0$  dado em (2-42) em (2-37), tem-se uma expressão que relaciona  $D_0$  com  $A_0$ , ou seja,

$$D_0 = A_0 \frac{z_{13}}{z_{14}} \frac{z_{31} + z_{41} - \frac{z_{21}}{z_{22}}(z_{32} + z_{42})}{z_{33} + z_{43} - \frac{z_{13}}{z_{14}}(z_{34} + z_{44})}. \quad (2-43)$$

Assim, definido  $A_0 = 1$ , é possível encontrar  $B_0$ ,  $C_0$  e  $D_0$  a partir de (2-38), (2-42) e (2-43).

Para  $n = 0$  os campos eletromagnéticos para o modo  $\text{TM}_{0p}^z$  de (2-13) a (2-15) e (2-20) a (2-22) se reduzem para:

$$E_\rho^{TM1} = \frac{1}{\hat{y}_1} (-jk_z^{TM} k_{\rho 1}^{TM}) [A_0 J'_0(k_{\rho 1}^{TM} \rho) + B_0 Y'_0(k_{\rho 1}^{TM} \rho)] e^{-jk_z^{TM} z}, \quad (2-44)$$

$$E_z^{TM1} = \frac{1}{\hat{y}_1} (k_{\rho 1}^{TM})^2 [A_0 J_0(k_{\rho 1}^{TM} \rho) + B_0 Y_0(k_{\rho 1}^{TM} \rho)] e^{-jk_z^{TM} z}, \quad (2-45)$$

$$H_\phi^{TM1} = -k_{\rho 1}^{TM} [A_0 J'_0(k_{\rho 1}^{TM} \rho) + B_0 Y'_0(k_{\rho 1}^{TM} \rho)] e^{-jk_z^{TM} z}, \text{ e} \quad (2-46)$$

$$E_\phi^{TM1} = H_\rho^{TM1} = H_z^{TM1} = 0 \quad (2-47)$$

na camada 1 com  $a < \rho < b$ , e

$$E_\rho^{TM2} = \frac{1}{\hat{y}_2} (-jk_z^{TM} k_{\rho 2}^{TM}) [C_0 J'_0(k_{\rho 2}^{TM} \rho) + D_0 Y'_0(k_{\rho 2}^{TM} \rho)] e^{-jk_z^{TM} z}, \quad (2-48)$$

$$E_z^{TM2} = \frac{1}{\hat{y}_2} (k_{\rho 2}^{TM})^2 [C_0 J_0(k_{\rho 2}^{TM} \rho) + D_0 Y_0(k_{\rho 2}^{TM} \rho)] e^{-jk_z^{TM} z}, \quad (2-49)$$

$$H_\phi^{TM2} = -k_{\rho 2}^{TM} [C_0 J'_0(k_{\rho 2}^{TM} \rho) + D_0 Y'_0(k_{\rho 2}^{TM} \rho)] e^{-jk_z^{TM} z}, \text{ e} \quad (2-50)$$

$$E_{\phi}^{TM2} = H_{\rho}^{TM2} = H_z^{TM2} = 0 \quad (2-51)$$

na camada 2 com  $b < \rho < c$ . É importante lembrar que os números de onda  $k_{\rho}^{TM}$  e  $k_z^{TM}$  são funções de  $n$  e  $p$ , bem como  $A_0$ ,  $B_0$ ,  $C_0$  e  $D_0$  dependem de  $p$ .

### Aproximação Assintótica da Equação Característica

A equação característica para os autovalores  $k_{\rho 1}$  e  $k_{\rho 2}$  que satisfazem as condições de contorno dada em (2-36) envolve 34 funções de Bessel de primeiro e segundo tipo. O cálculo dessa quantidade de funções especiais na busca das raízes  $k_{\rho 1}$  e  $k_{\rho 2}$  pode demandar um grande tempo computacional. Como é de interesse uma quantidade razoável de modos, é conveniente investigar a expansão assintótica de (2-36).<sup>6</sup> As aproximações assintóticas das funções de Bessel de primeiro e segundo tipo para grandes argumentos são dadas por [19, p. 364]

$$J_{\nu}(z) \xrightarrow{z \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \left\{ \cos \left( z - \frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}\nu\pi \right) + e^{|\text{Im}(z)|} O(|z|^{-1}) \right\}, \quad \text{e} \quad (2-52)$$

$$Y_{\nu}(z) \xrightarrow{z \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \left\{ \sin \left( z - \frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}\nu\pi \right) + e^{|\text{Im}(z)|} O(|z|^{-1}) \right\}, \quad (2-53)$$

em que  $|\text{phase}(z)| < \pi$ . Substituindo essas aproximações assintóticas em (2-34) e (2-35), e negligenciando o termo de ordem superior, pode-se escrever:

$$z_{13} = \sqrt{\frac{2}{\pi r}} \cos \left( r - \frac{\pi}{4} \right), \quad (2-54a)$$

$$z_{14} = \sqrt{\frac{2}{\pi r}} \sin \left( r - \frac{\pi}{4} \right), \quad (2-54b)$$

$$z_{21} = \sqrt{\frac{2}{\pi q}} \cos \left( q - \frac{\pi}{4} \right), \quad (2-54c)$$

$$z_{22} = \sqrt{\frac{2}{\pi q}} \sin \left( q - \frac{\pi}{4} \right), \quad (2-54d)$$

$$z_{31} = \hat{y}_2 (k_{\rho 1}^{TM})^2 \sqrt{\frac{2}{\pi s}} \cos \left( s - \frac{\pi}{4} \right), \quad (2-54e)$$

$$z_{32} = \hat{y}_2 (k_{\rho 1}^{TM})^2 \sqrt{\frac{2}{\pi s}} \sin \left( s - \frac{\pi}{4} \right), \quad (2-54f)$$

$$z_{33} = -\hat{y}_1 (k_{\rho 2}^{TM})^2 \sqrt{\frac{2}{\pi t}} \cos \left( t - \frac{\pi}{4} \right), \quad (2-54g)$$

$$z_{34} = -\hat{y}_1 (k_{\rho 2}^{TM})^2 \sqrt{\frac{2}{\pi t}} \sin \left( t - \frac{\pi}{4} \right), \quad (2-54h)$$

<sup>6</sup>Na prática as aproximações assintóticas não são usada nas expressões dos campos: as aproximações são empregadas apenas para avaliar o comportamento assintótico da equação característica.

$$z_{41} = -k_{\rho 1}^{TM} \sqrt{\frac{2}{\pi s}} \cos \left( s - \frac{3\pi}{4} \right), \quad (2-54i)$$

$$z_{42} = -k_{\rho 1}^{TM} \sqrt{\frac{2}{\pi s}} \operatorname{sen} \left( s - \frac{3\pi}{4} \right) \quad (2-54j)$$

$$z_{43} = +k_{\rho 2}^{TM} \sqrt{\frac{2}{\pi t}} \cos \left( t - \frac{3\pi}{4} \right), \text{ e} \quad (2-54k)$$

$$z_{44} = +k_{\rho 2}^{TM} \sqrt{\frac{2}{\pi t}} \operatorname{sen} \left( t - \frac{3\pi}{4} \right), \quad (2-54l)$$

em que, por comodidade de notação, foi usado

$$\begin{aligned} q &= k_{\rho 1}^{TM} a, \\ r &= k_{\rho 2}^{TM} c, \\ s &= k_{\rho 1}^{TM} b, \text{ e} \\ t &= k_{\rho 2}^{TM} b. \end{aligned} \quad (2-55)$$

Pode-se escrever (2-36) de forma que

$$Z_1 + Z_2 - Z_3 - Z_4 - Z_5 - Z_6 + Z_7 + Z_8 = 0, \quad (2-56)$$

em que

$$\begin{aligned} Z_1 &= z_{13} z_{21} z_{32} z_{44}, \quad Z_5 = z_{14} z_{21} z_{32} z_{43}, \\ Z_2 &= z_{13} z_{22} z_{34} z_{41}, \quad Z_6 = z_{14} z_{22} z_{33} z_{41}, \\ Z_3 &= z_{13} z_{21} z_{34} z_{42}, \quad Z_7 = z_{14} z_{21} z_{33} z_{42}, \text{ e} \\ Z_4 &= z_{13} z_{22} z_{31} z_{44}, \quad Z_8 = z_{14} z_{22} z_{31} z_{43}. \end{aligned} \quad (2-57)$$

A seguir são determinados os coeficientes  $Z_1$  a  $Z_8$  individualmente usando (2-54). De (2-57), tem-se que  $Z_1$  pode ser escrito como

$$\begin{aligned} Z_1 &= \sqrt{\frac{2}{\pi r}} \cos \left( r - \frac{\pi}{4} \right) \sqrt{\frac{2}{\pi q}} \cos \left( q - \frac{\pi}{4} \right) \\ &\quad \times \hat{y}_2 (k_{\rho 1}^{TM})^2 \sqrt{\frac{2}{\pi s}} \operatorname{sen} \left[ s - \frac{\pi}{4} (2n+1) \right] k_{\rho 2}^{TM} \sqrt{\frac{2}{\pi t}} \operatorname{sen} \left( t - \frac{3\pi}{4} \right). \end{aligned} \quad (2-58)$$

Definindo  $Z_0$  como

$$Z_0 = \frac{1}{k_{\rho 1}^{TM} k_{\rho 2}^{TM}} \sqrt{\frac{2}{\pi q}} \sqrt{\frac{2}{\pi r}} \sqrt{\frac{2}{\pi s}} \sqrt{\frac{2}{\pi t}}, \quad (2-59)$$

pode-se escrever  $Z_1/Z_0$  como

$$\frac{Z_1}{Z_0} = \hat{y}_2 k_{\rho 1}^{TM} \cos \left( r - \frac{\pi}{4} \right) \cos \left( q - \frac{\pi}{4} \right) \operatorname{sen} \left( s - \frac{\pi}{4} \right) \operatorname{sen} \left( t - \frac{3\pi}{4} \right). \quad (2-60)$$

De (2-57) e (2-59), tem-se que  $Z_2/Z_0$  pode ser escrito como

$$\frac{Z_2}{Z_0} = \hat{y}_1 k_{\rho 2}^{TM} \cos \left( r - \frac{\pi}{4} \right) \operatorname{sen} \left( q - \frac{\pi}{4} \right) \operatorname{sen} \left( t - \frac{\pi}{4} \right) \cos \left( s - \frac{3\pi}{4} \right). \quad (2-61)$$

De (2-57) e (2-59), tem-se que  $Z_3/Z_0$  pode ser escrito como

$$\frac{Z_3}{Z_0} = \hat{y}_1 k_{\rho^2}^{TM} \cos\left(r - \frac{\pi}{4}\right) \cos\left(q - \frac{\pi}{4}\right) \sin\left(t - \frac{\pi}{4}\right) \sin\left(s - \frac{3\pi}{4}\right). \quad (2-62)$$

De (2-57) e (2-59), tem-se que  $Z_4/Z_0$  pode ser escrito como

$$\frac{Z_4}{Z_0} = \hat{y}_2 k_{\rho^1}^{TM} \cos\left(r - \frac{\pi}{4}\right) \sin\left(q - \frac{\pi}{4}\right) \cos\left(s - \frac{\pi}{4}\right) \sin\left(t - \frac{3\pi}{4}\right). \quad (2-63)$$

De (2-57) e (2-59), tem-se que  $Z_5/Z_0$  pode ser escrito como

$$\frac{Z_5}{Z_0} = \hat{y}_2 k_{\rho^1}^{TM} \sin\left(r - \frac{\pi}{4}\right) \cos\left(q - \frac{\pi}{4}\right) \sin\left(s - \frac{\pi}{4}\right) \cos\left(t - \frac{3\pi}{4}\right). \quad (2-64)$$

De (2-57) e (2-59), tem-se que  $Z_6/Z_0$  pode ser escrito como

$$\frac{Z_6}{Z_0} = \hat{y}_1 k_{\rho^2}^{TM} \sin\left(r - \frac{\pi}{4}\right) \sin\left(q - \frac{\pi}{4}\right) \cos\left(t - \frac{\pi}{4}\right) \cos\left(s - \frac{3\pi}{4}\right). \quad (2-65)$$

De (2-57) e (2-59), tem-se que  $Z_7/Z_0$  pode ser escrito como

$$\frac{Z_7}{Z_0} = \hat{y}_1 k_{\rho^2}^{TM} \sin\left(r - \frac{\pi}{4}\right) \cos\left(q - \frac{\pi}{4}\right) \cos\left(t - \frac{\pi}{4}\right) \sin\left(s - \frac{3\pi}{4}\right). \quad (2-66)$$

De (2-57) e (2-59), tem-se que  $Z_8/Z_0$  pode ser escrito como

$$\frac{Z_8}{Z_0} = \hat{y}_2 k_{\rho^1}^{TM} \sin\left(r - \frac{\pi}{4}\right) \sin\left(q - \frac{\pi}{4}\right) \cos\left(s - \frac{\pi}{4}\right) \cos\left(t - \frac{3\pi}{4}\right). \quad (2-67)$$

Dividindo (2-56) por  $Z_0$  e substituindo (2-60) a (2-67), tem-se que a aproximação assintótica da equação característica pode ser escrita como

$$\begin{aligned} & \cos\left(r - \frac{\pi}{4}\right) \left[ u \cos\left(q - \frac{\pi}{4}\right) \sin\left(s - \frac{\pi}{4}\right) \sin\left(t - \frac{3\pi}{4}\right) \right. \\ & \quad + v \sin\left(q - \frac{\pi}{4}\right) \sin\left(t - \frac{\pi}{4}\right) \cos\left(s - \frac{3\pi}{4}\right) \\ & \quad - v \cos\left(q - \frac{\pi}{4}\right) \sin\left(t - \frac{\pi}{4}\right) \sin\left(s - \frac{3\pi}{4}\right) \\ & \quad \left. - u \sin\left(q - \frac{\pi}{4}\right) \cos\left(s - \frac{\pi}{4}\right) \sin\left(t - \frac{3\pi}{4}\right) \right] \\ & + \sin\left(r - \frac{\pi}{4}\right) \left[ -u \cos\left(q - \frac{\pi}{4}\right) \sin\left(s - \frac{\pi}{4}\right) \cos\left(t - \frac{3\pi}{4}\right) \right. \\ & \quad - v \sin\left(q - \frac{\pi}{4}\right) \cos\left(t - \frac{\pi}{4}\right) \cos\left(s - \frac{3\pi}{4}\right) \\ & \quad + v \cos\left(q - \frac{\pi}{4}\right) \cos\left(t - \frac{\pi}{4}\right) \sin\left(s - \frac{3\pi}{4}\right) \\ & \quad \left. + u \sin\left(q - \frac{\pi}{4}\right) \cos\left(s - \frac{\pi}{4}\right) \cos\left(t - \frac{3\pi}{4}\right) \right] = 0, \end{aligned}$$

em que  $u = \hat{y}_2 k_{\rho^1}^{TM}$  e  $v = \hat{y}_1 k_{\rho^2}^{TM}$ . Após algumas simplificações, a expressão

anterior pode ser escrita como

$$v \sin(w_1 + w_2) - v \sin(w_1 - w_2) + u \sin(w_1 + w_2) + u \sin(w_1 - w_2) = 0, \quad (2-68)$$

em que foram introduzidas as variáveis  $w_1$  e  $w_2$ , tais que

$$w_1 = q - s = k_{\rho 1}^{TM} a - k_{\rho 1}^{TM} b, \text{ e} \quad (2-69)$$

$$w_2 = t - r = k_{\rho 2}^{TM} b - k_{\rho 2}^{TM} c. \quad (2-70)$$

Notando que

$$\begin{aligned} \cos(w_1 + w_2) - \cos(w_1 - w_2) &= -2 \sin w_1 \sin w_2, \\ \sin(w_1 + w_2) - \sin(w_1 - w_2) &= 2 \cos w_1 \cos w_2, \text{ e} \\ \sin(w_1 + w_2) + \sin(w_1 - w_2) &= 2 \cos w_2 \cos w_1, \end{aligned}$$

tem-se que (2-68) se reduz para

$$2v \cos w_1 \sin w_2 + 2u \cos w_2 \sin w_1 = 0.$$

Substituindo as expressões de  $u$  e  $v$ , pode-se escrever

$$\hat{y}_1 k_{\rho 2}^{TM} \cos w_1 \sin w_2 + \hat{y}_2 k_{\rho 1}^{TM} \cos w_2 \sin w_1 = 0. \quad (2-71)$$

Dividindo a última expressão por  $\cos w_1 \cos w_2$  e retornando as expressões de  $w_1$  e  $w_2$  dadas em (2-69) e (2-70), pode-se escrever uma expressão envolvendo funções tangentes, ou seja,

$$\hat{y}_1 k_{\rho 2}^{TM} \tan(k_{\rho 2}^{TM} b - k_{\rho 2}^{TM} c) + \hat{y}_2 k_{\rho 1}^{TM} \tan(k_{\rho 1}^{TM} a - k_{\rho 1}^{TM} b) = 0 \quad (2-72)$$

$$\frac{k_{\rho 2}^{TM}}{\hat{y}_2} \tan[k_{\rho 2}^{TM} (b - c)] = -\frac{k_{\rho 1}^{TM}}{\hat{y}_1} \tan[k_{\rho 1}^{TM} (a - b)].^7 \quad (2-73)$$

Em geral, verifica-se que encontrar as raízes de (2-72) é numericamente muito mais rápido do que calcular todas as funções de Bessel de (2-36). Dessa forma, para argumentos das funções de Bessel de (2-36) *suficientemente grandes* é conveniente o emprego de (2-72). As condições para a validade das aproximações de (2-52) e (2-53) são [20, p. 718-719]:

$$k_{\rho 1}^{TM} a \gg \frac{1}{8}, \quad k_{\rho 2}^{TM} c \gg \frac{1}{8}, \quad k_{\rho 1}^{TM} b \gg \frac{3}{8}, \quad \text{e} \quad k_{\rho 2}^{TM} b \gg \frac{3}{8}.$$

A equação característica aproximada na forma (2-73) tem pólos quando

---

<sup>7</sup>É interessante notar que a aproximação assintótica da equação característica (2-73) é da mesma forma daquela para um guia retangular parcialmente preenchido por dielétrico obtida em [14, p. 159]. Isso podia ser antecipado, uma vez que o comportamento assintótico das funções de Bessel de primeiro e segundo tipo para argumentos grandes tende a funções harmônicas seno e cosseno.

$k_{\rho 1}^{TM}(a-b)$  ou  $k_{\rho 2}^{TM}(b-c)$  são múltiplos ímpares de  $\frac{\pi}{2}$ . A busca dos zeros ( $k_{\rho 1}^{TM}$  ou  $k_{\rho 2}^{TM}$ ) que satisfazem (2-73) pode levar a um problema de não convergência, ou convergência lenta em que eventualmente alguns zeros muito próximos aos pólos podem não ser encontrados. Em geral, o uso da equação característica aproximada (2-71); que é livre de pólos; é uma melhor escolha. Da expressão assintótica da equação característica fica claro para autovalores de ordem elevada a equação característica tem comportamento periódico. Isso é uma informação relevante na busca dos zeros da equação característica.

Observa-se a partir de (2-73) que a função tem 4 períodos em termos de  $k_{\rho 1}^{TM}$  e  $k_{\rho 2}^{TM}$  quando:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(k_{\rho 1}^{TM})(a-b) &= \pi, & \operatorname{Re}(k_{\rho 2}^{TM})(b-c) &= \pi, \\ \operatorname{Im}(k_{\rho 1}^{TM})(a-b) &= j\pi, \text{ e } & \operatorname{Im}(k_{\rho 2}^{TM})(b-c) &= j\pi. \end{aligned}$$

O conhecimento dos períodos da aproximação assintótica permite saber aproximadamente onde estarão os zeros da equação característica (2-36) quando o argumento das funções de Bessel é grande.

### 2.4.2

#### **Campos para o Modo $TE^z$**

Os campos para o modo  $TE^z$  são dados pelas expressões de (2-9). Como os campos  $TM^z$  e  $TE^z$  dados em (2-8) e (2-9) são duais, é conveniente usar os campos  $TM^z$  desenvolvidos anteriormente para obter os campos para o modo  $TE^z$ . Dessa forma, fazendo

$$\begin{aligned} \hat{y} \rightarrow \hat{z}, \quad \hat{z} \rightarrow \hat{y}, \quad \cos n\phi \rightarrow \operatorname{senn}\phi, \quad \operatorname{senn}\phi \rightarrow -\cos n\phi, \quad \psi^{TM} \rightarrow \psi^{TE}, \\ A_n \rightarrow E_n, \quad B_n \rightarrow F_n, \quad C_n \rightarrow G_n, \quad \text{e } D_n \rightarrow H_n \end{aligned}$$

tem-se que

$$\begin{aligned} E_{\rho}^{TM} \rightarrow H_{\rho}^{TE}, \quad E_{\phi}^{TM} \rightarrow H_{\phi}^{TE}, \quad E_z^{TM} \rightarrow H_z^{TE}, \\ H_{\rho}^{TM} \rightarrow -E_{\rho}^{TE}, \quad H_{\phi}^{TM} \rightarrow -E_{\phi}^{TE}, \quad \text{e } H_z^{TM} \rightarrow -E_z^{TE}. \end{aligned}$$

Dessa forma, pode-se escrever

$$E_{\rho}^{TE1} = -\frac{n}{\rho} [E_n J_n(k_{\rho 1}^{TE} \rho) + F_n Y_n(k_{\rho 1}^{TE} \rho)] \cos n\phi e^{-jk_z^{TE} z}. \quad (2-74)$$

$$E_{\phi}^{TE1} = k_{\rho 1}^{TE} [E_n J'_n(k_{\rho 1}^{TE} \rho) + F_n Y'_n(k_{\rho 1}^{TE} \rho)] \operatorname{senn}\phi e^{-jk_z^{TE} z}, \quad (2-75)$$

$$E_z^{TE1} = 0, \quad (2-76)$$

$$H_{\rho}^{TE1} = -\frac{1}{\hat{z}_1}(-jk_z^{TE}k_{\rho 1}^{TE}) [E_n J'_n(k_{\rho 1}^{TE}\rho) + F_n Y'_n(k_{\rho 1}^{TE}\rho)] \text{senn}\phi e^{-jk_z^{TE}z}, \quad (2-77)$$

$$H_{\phi}^{TE1} = -\frac{1}{\hat{z}_1\rho}(jn k_z^{TE}) [E_n J_n(k_{\rho 1}^{TE}\rho) + F_n Y_n(k_{\rho 1}^{TE}\rho)] \cos n\phi e^{-jk_z^{TE}z}, \text{ e} \quad (2-78)$$

$$H_z^{TE1} = \frac{1}{\hat{z}_1} (k_{\rho 1}^{TE})^2 [E_n J_n(k_{\rho 1}^{TE}\rho) + F_n Y_n(k_{\rho 1}^{TE}\rho)] \text{senn}\phi e^{-jk_z^{TE}z}. \quad (2-79)$$

As funções de onda  $\psi^{TE1}$  e  $\psi^{TE2}$  dados em (2-10) e (2-11), são duais, ou seja, fazendo

$$\begin{aligned} E_n &\rightarrow G_n, \\ F_n &\rightarrow H_n, \\ k_{\rho 1}^{TE} &\rightarrow k_{\rho 2}^{TE}, \text{ e} \\ \hat{z}_1 &\rightarrow \hat{z}_2 \end{aligned} \quad (2-80)$$

tem-se que  $\psi^{TE1}$  equivale a  $\psi^{TE2}$ . Logo, pode-se escrever

$$E_{\rho}^{TE2} = -\frac{n}{\rho} [G_n J_n(k_{\rho 2}^{TE}\rho) + H_n Y_n(k_{\rho 2}^{TE}\rho)] \cos n\phi e^{-jk_z^{TE}z}. \quad (2-81)$$

$$E_{\phi}^{TE2} = k_{\rho 2}^{TE} [G_n J'_n(k_{\rho 2}^{TE}\rho) + H_n Y'_n(k_{\rho 2}^{TE}\rho)] \text{senn}\phi e^{-jk_z^{TE}z}, \quad (2-82)$$

$$E_z^{TE2} = 0, \quad (2-83)$$

$$H_{\rho}^{TE2} = \frac{1}{\hat{z}_2}(-jk_z^{TE}k_{\rho 2}^{TE}) [G_n J'_n(k_{\rho 2}^{TE}\rho) + H_n Y'_n(k_{\rho 2}^{TE}\rho)] \text{senn}\phi e^{-jk_z^{TE}z}, \quad (2-84)$$

$$H_{\phi}^{TE2} = -\frac{1}{\hat{z}_2\rho}(jn k_z^{TE}) [G_n J_n(k_{\rho 2}^{TE}\rho) + H_n Y_n(k_{\rho 2}^{TE}\rho)] \cos n\phi e^{-jk_z^{TE}z}, \text{ e} \quad (2-85)$$

$$H_z^{TE2} = \frac{1}{\hat{z}_2} (k_{\rho 2}^{TE})^2 [G_n J_n(k_{\rho 2}^{TE}\rho) + H_n Y_n(k_{\rho 2}^{TE}\rho)] \text{senn}\phi e^{-jk_z^{TE}z}. \quad (2-86)$$

Aplicando as condições de contorno (2-12) aos campos (2-74) a (2-79), de forma análoga ao o realizado para o modo  $\text{TM}^z$ , pode-se mostrar que apenas os modos  $\text{TE}^z$  com  $n = 0$  são suportados no guia da Fig. 2.2.

### Modos $\text{TE}_{0p}^z$

Fazendo  $n = 0$ , os campos eletromagnéticos para o modo  $\text{TE}_{0p}^z$  sem dependência azimutal de (2-74) a (2-79) se reduzem para:

$$E_{\phi}^{TE1} = k_{\rho 1}^{TE} [E_0 J'_0(k_{\rho 1}^{TE}\rho) + F_0 Y'_0(k_{\rho 1}^{TE}\rho)] e^{-jk_z^{TE}z}, \quad (2-87)$$

$$H_\rho^{TE1} = -\frac{1}{\hat{z}_1}(-jk_z^{TE}k_{\rho 1}^{TE})[E_0J_0'(k_{\rho 1}^{TE}\rho) + F_0Y_0'(k_{\rho 1}^{TE}\rho)]e^{-jk_z^{TE}z}, \quad (2-88)$$

$$H_z^{TE1} = \frac{1}{\hat{z}_1}(k_{\rho 1}^{TE})^2[E_0J_0(k_{\rho 1}^{TE}\rho) + F_0Y_0(k_{\rho 1}^{TE}\rho)]e^{-jk_z^{TE}z}, \quad (2-89)$$

$$E_\rho^{TE1} = E_z^{TE1} = H_\phi^{TE1} = 0 \quad (2-90)$$

na camada 1 com  $a < \rho < b$ , e

$$E_\phi^{TE2} = k_{\rho 2}^{TE}[G_0J_0'(k_{\rho 2}^{TE}\rho) + H_0Y_0'(k_{\rho 2}^{TE}\rho)]e^{-jk_z^{TE}z}, \quad (2-91)$$

$$H_\rho^{TE2} = -\frac{1}{\hat{z}_2}(-jk_z^{TE}k_{\rho 2}^{TE})[G_0J_0'(k_{\rho 2}^{TE}\rho) + H_0Y_0'(k_{\rho 2}^{TE}\rho)]e^{-jk_z^{TE}z}, \quad (2-92)$$

$$H_z^{TE2} = \frac{1}{\hat{z}_2}(k_{\rho 2}^{TE})^2[G_0J_0(k_{\rho 2}^{TE}\rho) + H_0Y_0(k_{\rho 2}^{TE}\rho)]e^{-jk_z^{TE}z}, \quad (2-93)$$

$$E_\rho^{TE2} = E_z^{TE2} = H_\phi^{TE2} = 0 \quad (2-94)$$

na camada 2 com  $b < \rho < c$ .

A determinação das constantes  $E_0$ ,  $F_0$ ,  $G_0$  e  $H_0$  e da equação característica para o modo  $TE^z$  não é de interesse e não é mostrada aqui. No Capítulo 3 é verificado que os campos  $TE^z$  não se acoplam com os campos do modo TEM da excitação de interesse. Como os campos  $TM^z$  e  $TE^z$  são duais, a equação característica para o modo  $TE^z$  pode ser obtida fazendo  $\hat{y} \rightarrow \hat{z}$  em (2-36) ou mesmo na equação característica aproximada (2-73).

## 2.5

### Guia Coaxial Circular Homogêneo

A formulação supracitada na seção 2.4 desenvolveu os campos eletromagnéticos para o modo  $TM^z$  da estrutura da Fig. 2.2 considerando 2 camadas radiais distintas. Nesta seção é avaliada o caso em que as camadas 1 e 2 são formadas pelo mesmo material, ou seja, compartilham os mesmos parâmetros  $\hat{y}$  e  $\hat{z}$ . Fazendo  $\hat{y} = \hat{y}_1 = \hat{y}_2$  e  $\hat{z} = \hat{z}_1 = \hat{z}_2$ , sobre as condições de contorno para o modo  $TM^z$  (2-26) a (2-32) verifica-se que: 1) as equações 2-26 e 2-27 são linearmente dependentes (LD), 2) as equações 2-28 e 2-29 são LD, e 3) as equações 2-30 e 2-31 também são LD. Assim, as condições de contorno se reduzem para

$$A_n J_n(k_\rho^{TM}a) + B_n Y_n(k_\rho^{TM}a) = 0, \quad (2-95)$$

$$C_n J_n(k_\rho^{TM}c) + D_n Y_n(k_\rho^{TM}c) = 0, \quad (2-96)$$

$$A_n J_n(k_\rho^{TM}b) + B_n Y_n(k_\rho^{TM}b) = C_n J_n(k_\rho^{TM}b) + D_n Y_n(k_\rho^{TM}b), \quad (2-97)$$



$$A_n J'_n(k_\rho^{TM} b) + B_n Y'_n(k_\rho^{TM} b) = C_n J'_n(k_\rho^{TM} b) + D_n Y'_n(k_\rho^{TM} b), \quad (2-98)$$

em que  $k_\rho^{TM} = k_{\rho 1}^{TM} = k_{\rho 2}^{TM}$ . As funções de onda  $\psi^{TM}$  para os meios 1 e 2 são iguais, ou seja,  $C_n = A_n$  e  $D_n = B_n$  em (2-10) e (2-11). Dessa forma, como era de se esperar, as equações 2-97 e 2-98 que dependem de  $b$  não levam a nenhuma condição de contorno. Assim, a partir de (2-95) e (2-96) pode-se obter  $B_n$  em função de  $A_n$ , ou seja,

$$B_n = -\frac{J_n(k_\rho^{TM} a)}{Y_n(k_\rho^{TM} a)} A_n, \quad (2-99)$$

que condiciona os mesmos campos para o modo  $TM^z$  encontrados em [9, p. 27].

Para as camadas 1 e 2 formadas pelo mesmo material, pode-se escrever as seguintes relações para os coeficientes de (2-34):

$$\begin{aligned} z_{31} &= -z_{33}, \\ z_{32} &= -z_{34}, \\ z_{41} &= -z_{43}, \text{ e} \\ z_{42} &= -z_{44}. \end{aligned} \quad (2-100)$$

Deve ser observado que no guia coaxial homogêneo podem existir modos  $TM^z$  com  $n \neq 0$ . No guia não homogêneo, entretanto, foi verificado que se propagam apenas modos  $TM^z$  puros com  $n = 0$ . Dessa forma, pode-se trocar subscritos das funções de Bessel de (2-34) por  $n$ . Assim, (2-100) é válida para  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Para  $C_n = A_n$ , de (2-42), tem-se que

$$\begin{aligned} \frac{z_{13}}{z_{14}} &= \frac{z_{21}}{z_{22}} \\ \frac{J_n(k_\rho^{TM} c)}{Y_n(k_\rho^{TM} c)} &= \frac{J_n(k_\rho^{TM} a)}{Y_n(k_\rho^{TM} a)}, \end{aligned}$$

que se reduz para

$$J_n(k_\rho^{TM} a) Y_n(k_\rho^{TM} c) - Y_n(k_\rho^{TM} a) J_n(k_\rho^{TM} c) = 0, \quad (2-101)$$

que é a mesma equação característica encontrada em [18, p. 539] e [9, p. 27] para o guia coaxial circular homogêneo.

Deve ser observado que a equação característica (2-101) independe da frequência e os valores de  $k_\rho^{TM}$  que satisfazem a equação dependem apenas das dimensões  $a$  e  $c$  do guia.

### 2.5.1

#### Aproximação Assintótica da Equação Característica

Apesar da equação característica para o modo  $TM^z$  do guia coaxial homogêneo ser mais simples que a do caso não homogêneo, ainda estão envolvidas 4 funções de Bessel. O lugar das raízes de (2-101) não é óbvio, e é conveniente

conhecer o comportamento assintótico desta equação característica. Usando resultados precedentes e um raciocínio análogo ao usado na expressão assintótica do caso não homogêneo, pode-se aproximar (2-101) por

$$\begin{aligned} & \sqrt{\frac{2}{\pi k_{\rho}^{TM} a}} \cos\left(k_{\rho}^{TM} a - \frac{\pi}{4} - \frac{n\pi}{2}\right) \sqrt{\frac{2}{\pi k_{\rho}^{TM} c}} \sin\left(k_{\rho}^{TM} c - \frac{\pi}{4} - \frac{n\pi}{2}\right) \\ & - \sqrt{\frac{2}{\pi k_{\rho}^{TM} a}} \sin\left(k_{\rho}^{TM} a - \frac{\pi}{4} - \frac{n\pi}{2}\right) \sqrt{\frac{2}{\pi k_{\rho}^{TM} c}} \cos\left(k_{\rho}^{TM} c - \frac{\pi}{4} - \frac{n\pi}{2}\right) = 0, \end{aligned}$$

que para o caso sem simetria azimutal ( $n = 0$ ) e com algumas manipulações se reduz para

$$\cos\left(k_{\rho}^{TM} a - \frac{\pi}{4}\right) \sin\left(k_{\rho}^{TM} c - \frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(k_{\rho}^{TM} a - \frac{\pi}{4}\right) \cos\left(k_{\rho}^{TM} c - \frac{\pi}{4}\right) = 0.$$

Fazendo  $u = k_{\rho}^{TM} a - \pi/4$ , e  $v = k_{\rho}^{TM} c - \pi/4$ , pode-se escrever

$$\cos(u) \sin(v) - \sin(u) \cos(v) = 0$$

$$\sin(v - u) = 0,$$

que tem solução quando

$$v - u = k_{\rho}^{TM} (c - a) = m\pi, \text{ para } m \text{ inteiro.}$$

Fica claro que para argumentos das funções de Bessel de (2-101) *suficientemente grandes* ( $k_{\rho}^{TM} a \gg \frac{1}{8}$ ) pode-se escrever

$$k_{\rho}^{TM} = \frac{m\pi}{c - a}. \quad (2-102)$$

### 2.5.2

#### **Campos para o Modo TEM<sup>z</sup>**

O modo dominante em um guia coaxial é o TM<sup>z</sup> de mais baixa ordem (logicamente designado por TM<sub>00</sub><sup>z</sup>) [14, p. 218]. Este modo se reduz para o modo radial de linha de transmissão; modo transversal eletromagnético (TEM); em um guia homogêneo e não tem frequência de corte [1, p. 72].

Fazendo o limite em que  $k_{\rho} \rightarrow 0$  ( $p = 0$ ) para os campos TM<sup>z</sup> sem dependência azimutal ( $n = 0$ ), e usando as aproximações para pequenos argumento das funções de Bessel [14, p. 462]

$$\begin{aligned} J_0(z) & \xrightarrow{z \rightarrow 0} 1, & Y_0(z) & \xrightarrow{z \rightarrow 0} \frac{2}{\pi} \log\left(\frac{\gamma z}{2}\right) \text{ em que } \gamma = 1,781, \\ J_1(z) & \xrightarrow{z \rightarrow 0} \frac{z}{2}, \text{ e} & Y_1(z) & \xrightarrow{z \rightarrow 0} -\frac{2}{\pi z}, \end{aligned}$$

os campos  $TM^z$  se reduzem para

$$\begin{aligned}
 E_\rho^{TEM} &= \frac{1}{\hat{y}}(-jk_z^{TM}k_\rho^{TM}) [A_0J'_0(k_\rho^{TM}\rho) + B_0Y'_0(k_\rho^{TM}\rho)] e^{-jk_z^{TEM}z} \\
 &= \frac{1}{\hat{y}}(-jk_z^{TM}k_\rho^{TM}) \left[ -A_0\frac{1}{2}(k_\rho^{TM}\rho) + B_0\frac{2}{\pi k_\rho^{TM}\rho} \right] e^{-jk_z^{TEM}z} \\
 &= \frac{-jk_z^{TM}}{\hat{y}}k_\rho^{TM}B_0\frac{2}{\pi k_\rho^{TM}\rho} e^{-jk_z^{TEM}z} = \left( -\frac{2B_0}{\pi} \frac{jk_z^{TM}}{\hat{y}} \right) \frac{1}{\rho} e^{-jk_z^{TEM}z},
 \end{aligned} \tag{2-103}$$

$$\begin{aligned}
 E_z^{TEM} &= \frac{1}{\hat{y}}(k_\rho^{TM})^2 [A_0J_0(k_\rho^{TM}\rho) + B_0Y_0(k_\rho^{TM}\rho)] e^{-jk_z^{TEM}z} \\
 &= \frac{1}{\hat{y}}(k_\rho^{TM})^2 \left[ A_0 + B_0\frac{2}{\pi} \log\left(\frac{\gamma k_\rho^{TM}\rho}{2}\right) \right] e^{-jk_z^{TEM}z} = 0,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 H_\phi^{TEM} &= -k_{\rho 1}^{TM} [A_0J'_0(k_{\rho 1}^{TM}\rho) + B_0Y'_0(k_{\rho 1}^{TM}\rho)] e^{-jk_z^{TEM}z} \\
 &= -k_\rho^{TM} \left[ -A_0\frac{k_\rho^{TM}\rho}{2} + B_0\frac{2}{\pi k_\rho^{TM}\rho} \right] e^{-jk_z^{TEM}z} \\
 &= -k_\rho^{TM}B_0\frac{2}{\pi k_\rho^{TM}\rho} e^{-jk_z^{TEM}z} = \left( -\frac{2B_0}{\pi} \right) \frac{1}{\rho} e^{-jk_z^{TEM}z}, \text{ e}
 \end{aligned}$$

$$E_\phi^{TEM} = H_\rho^{TEM} = H_z^{TEM} = 0,$$

com  $a < \rho < c$ . Deve-se observar que da definição de (A-12), tem-se  $\lim_{k_\rho \rightarrow 0} (k_z^{TEM})^2 = k^2$ . Normalizando os campos supracitados em função do termo entre parênteses de (2-103), os campos para o modo  $TEM^z$  em uma guia coaxial homogêneo são dados por:

$$E_\rho^{TEM} = \frac{1}{\rho} e^{-jkz}, \tag{2-104}$$

$$H_\phi^{TEM} = \frac{1}{\eta\rho} e^{-jkz}, \text{ e} \tag{2-105}$$

$$H_\rho^{TEM} = E_\phi^{TEM} = E_z^{TEM} = H_z^{TEM} = 0,$$

em que

$$k = \sqrt{-\hat{z}\hat{y}} \text{ e } \eta = \sqrt{\frac{\hat{z}}{\hat{y}}}. \tag{2-106}$$

## 2.6

### Observações Sobre os Modos $TM^z$ , $TE^z$ e $TEM^z$

O guia coaxial circular com duplo carregamento dielétrico da Fig. 2.2 pode suportar um número infinito de modos. Como foi verificado nas seções precedentes, os modos suportados na estrutura deste guia são  $TM^z$  e  $TE^z$  puros apenas quando as configurações dos campos são simétricas e independentes de  $\phi$  ( $n = 0$ ). Modos que apresentam variação angular em  $\phi$  ( $n \neq 0$ ) não podem ser modos  $TM^z$  ou  $TE^z$  puros. Esses modos híbridos podem ser representados pela superposição dos campos  $TM$  e  $TE$  [14, p. 131], e sua abordagem foge ao escopo desta Dissertação. Quando o guia da Fig. 2.2 é homogêneo, os modos  $TM^z$  e  $TE^z$  puros podem existir mesmo com  $n \neq 0$ .

O modo fundamental do guia da Fig. 2.2 é o  $TM_{00}^z$ . Para o caso particular em que o guia é homogêneo, uma solução possível é  $k = k_z$ , em que a componente de campo elétrico  $E_z$  é nula. Este modo é o modo  $TEM^z$ . Em outras palavras, o modo  $TM_{00}^z$  representa uma perturbação do modo  $TEM^z$  que existe em um guia homogêneo [21, p. 141].

## 2.7

### Comparação entre as Equações Características Exata e Aproximada para o modo $TM^z$

A fim de verificar a validade da expressão assintótica da equação característica alguns casos são testados. Foi realizada uma avaliação extensiva em várias frequências de operação, na qual verificou resultados consistentes. Por comodidade, a seguir são analisados detalhadamente apenas o caso para 5 GHz. Primeiro, considera-se um guia coaxial homogêneo de dimensões  $a = 1,5250$  mm e  $c = 3,550$  mm preenchido com ar ( $\epsilon_r = 1,0$ ). Essas são as dimensões de um conector tipo N. A dimensão  $b$  é qualquer valor entre  $a$  e  $c$ . Os autovalores  $k_{\rho 1} = k_{\rho 2}$  encontrados para (2-36) são mostrados na Fig. 2.3<sup>8</sup> junto com os valores que satisfazem a equação característica assintótica. Adicionalmente o autovalor  $k_{\rho 1}$  para o modo  $TEM$  é mostrado. Esse autovalor não é encontrado pela equação característica, pois leva a uma singularidade. Verifica-se da Fig. 2.3 que as expressões (2-36) e (2-71) têm zeros muito próximos. Na Fig. 2.4 os autovalores dos modos  $TM_{01}$ ,  $TM_{02}$  e  $TM_{03}$  são destacados e verifica-se que, como era esperado, a medida que  $k_\rho$  cresce (2-36)  $\rightarrow$  (2-71).

A equação característica tem um período bem definido, como fica claro na posição dos zeros mostrados na Fig. 2.3. Como o guia de onda considerado é homogêneo, a medida que o argumento das funções de Bessel da equação

<sup>8</sup>Por comodidade, todas as figuras com gráficos desta Dissertação usam o separador decimal ponto (.) ao invés de vírgula (,). No restante da Dissertação a vírgula é o separador decimal empregado.

característica cresce, tem-se que os zeros exatos podem ser aproximados por (2-102).

Considera-se um segundo caso: um guia coaxial não homogêneo com dimensões  $a = 1,5250$  mm,  $b = 3,043750$  mm e  $c = 3,550$  mm preenchido com um dielétrico de  $\hat{\epsilon}_{r1} = 1,0$  em  $a < \rho < b$  e por outro dielétrico com  $\hat{\epsilon}_{r2} = 2,550$  em  $b < \rho < c$ . Os autovalores  $k_{\rho1}$  encontrados para (2-36) são mostrados na Fig. 2.5. A Fig. 2.5 está privilegiando o eixo imaginário, que é onde as maiores diferenças entre as equações características exata e aproximada ocorrem. Desta figura verifica-se que  $k_{\rho1}$  para o modo fundamental  $TM_{00}$  é um valor imaginário puro. O autovalor representado por  $-TM_{00}$  também é solução do problema de autovalor pois de (A-12)  $k_{\rho1} = \pm\sqrt{k_1^2 - k_z^2}$ . A convenção adotada nessa Dissertação é escolher a raiz cuja a parte real é positiva, ou seja,  $\text{Re}(k_{\rho1}) > 0$ . Assim, o autovalor  $-TM_{00}$  não deve ser incluído na solução.

Para meios sem perdas, se o autovalor  $k_{\rho1}$  é imaginário puro, tem-se que a constante de propagação na direção de  $z$  fica da forma

$$\begin{aligned} k_z &= \sqrt{k_1^2 - k_{\rho1}^2} \\ &= \sqrt{k_1^2 - j^2 \text{Abs}(k_{\rho1})^2} = \sqrt{k_1^2 + \text{Abs}(k_{\rho1})^2}. \end{aligned} \quad (2-107)$$

É interessante notar que a constante de propagação  $k_z^{TM}$  do modo fundamental  $TM_{00}^z$  do guia não homogêneo é sempre maior que  $k_1$  da camada 1. No caso homogêneo, o modo fundamental  $TEM^z$  admite  $k_z^{TM} = k_1$ . Em termos de velocidade de fase, como o número de onda da camada 1 é dado por  $k_1 = \omega/v_{p1}$ , tem-se que a velocidade de fase  $v_p$  do modo  $TM_{00}^z$  é menor que a velocidade de fase da camada 1. Assim, este modo se propaga como uma *slow wave* na camada em que  $\epsilon_{r1} = 1,0$ , e como uma *fast wave* na camada em que  $\epsilon_{r2} = 2,550$ .

A partir de (A-12) escrito para as camadas 1 e 2, tem-se que  $k_1^2 - k_2^2 = k_{\rho1}^2 - k_{\rho2}^2$ . Para guias sem perdas, os números de onda de cada camada são reais. Entretanto, o argumentos das funções de Bessel de primeiro e segundo tipo podem ser reais ou imaginários dependendo de qual camada possui permissividade dielétrica maior. Se  $k_2 > k_1$  é conveniente buscar as raízes da equação característica em termos de  $k_{\rho1}$ , pois  $k_{\rho1}$  *necessariamente* é real e  $k_{\rho2}$  pode ser real ou imaginário. Quando  $k_{\rho2}$  for imaginário os campos na camada 2 podem ser expressos em termos de funções de Bessel modificadas e primeiro e segundo tipo, ou seja  $I_n$  e  $K_n$ . De forma análoga ao raciocínio anterior, quando  $k_1 > k_2$  é conveniente buscar as raízes da equação característica em termos de  $k_{\rho2}$ , pois  $k_{\rho2}$  *necessariamente* é real e  $k_{\rho1}$  pode ser real ou imaginário. Para a condição de dielétricos sem perdas, as substituições mostradas na Tabela 2.1 são convenientes à formulação supracitada neste Capítulo a fim de evitar

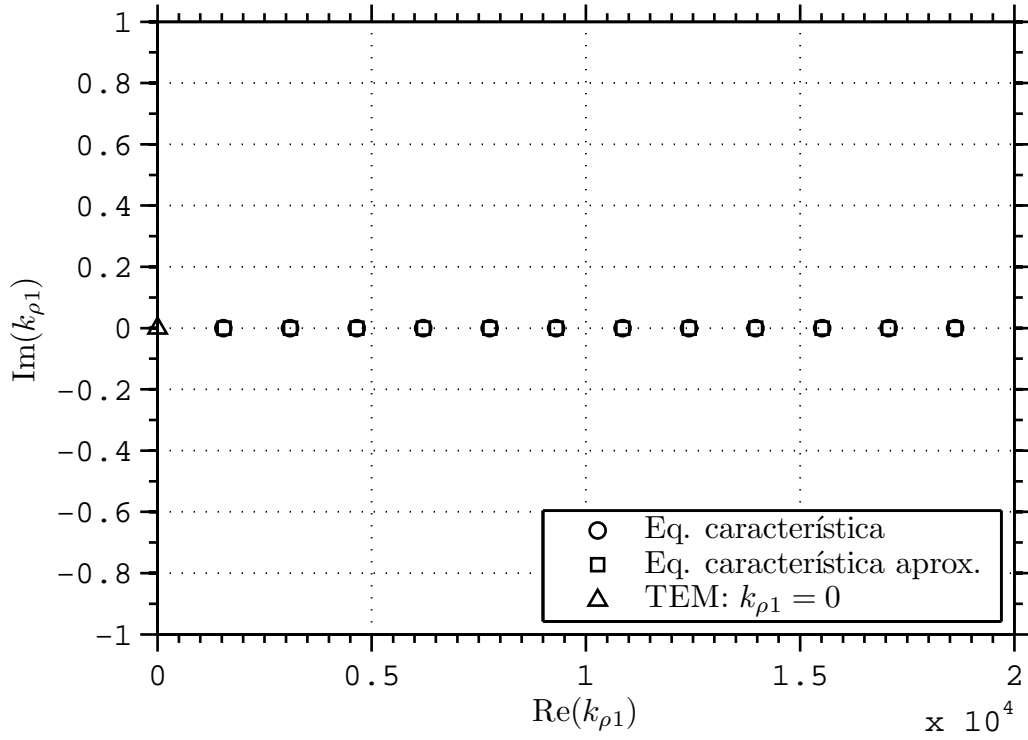


Figura 2.3: Lugar das raízes para o guia coaxial homogêneo de dimensões  $a = 1,5250$  mm e  $c = 3,550$  mm preenchido com ar ( $\hat{\epsilon}_r = 1,0$ ). Os autovalores das equações características exata (2-36) e assintótica (2-71) são comparados.

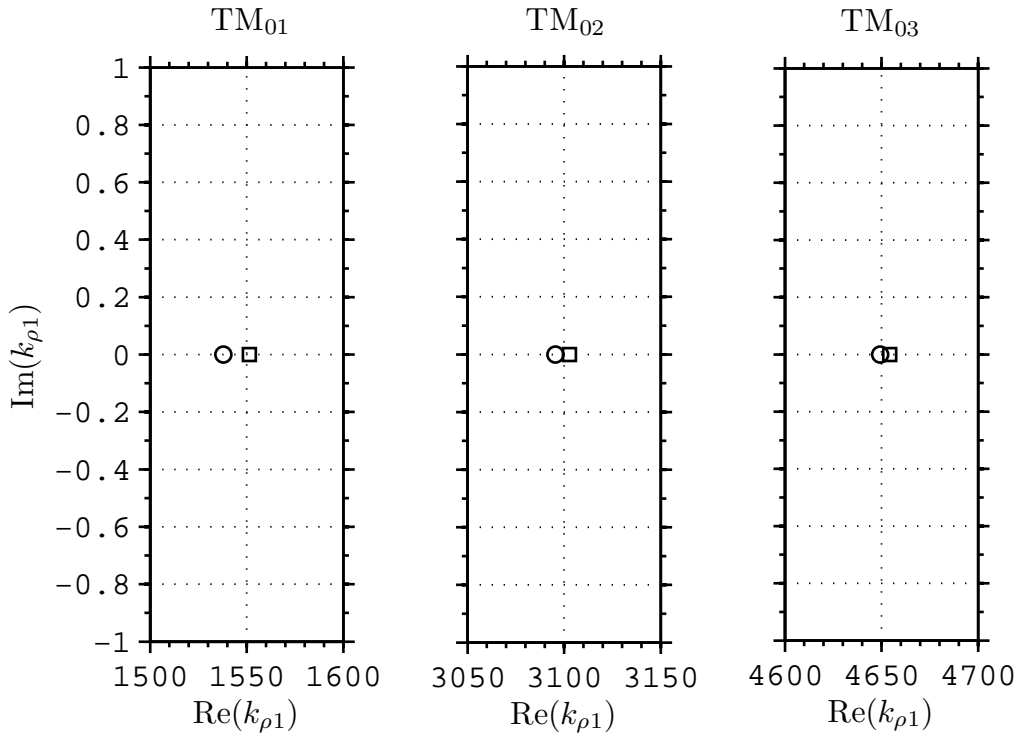


Figura 2.4: *Zoom* nos arredores dos autovalores exato ( $\circ$ ) e aproximado ( $\square$ ) da Fig. 2.3 para os modos  $\text{TM}_{01}$ ,  $\text{TM}_{02}$  e  $\text{TM}_{03}$ .

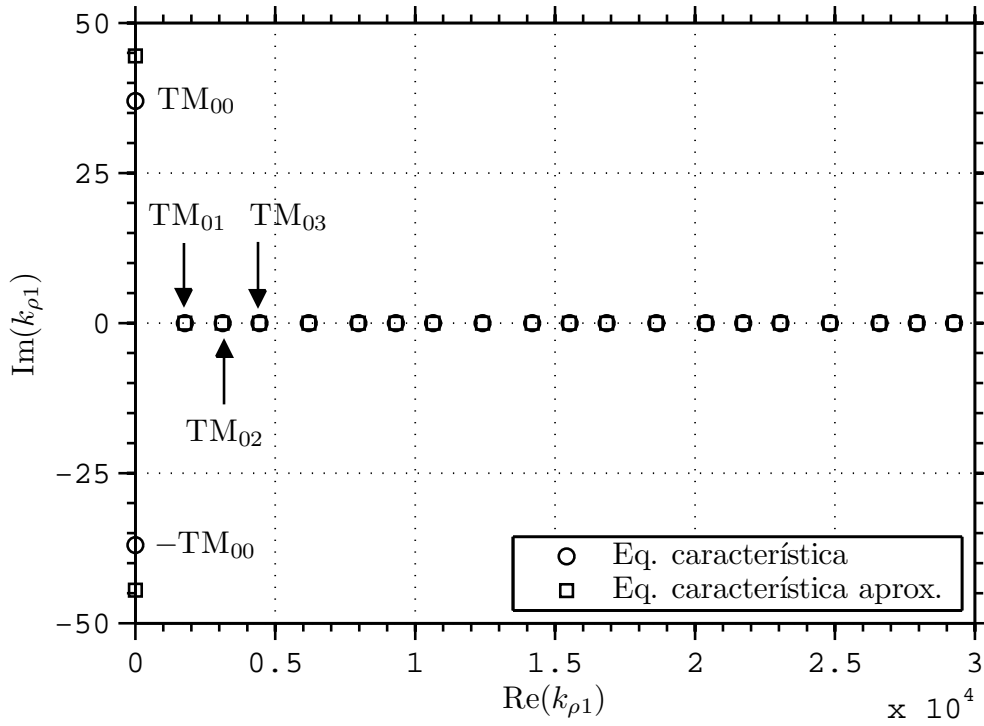


Figura 2.5: Lugar das raízes para o guia coaxial não homogêneo de dimensões  $a = 1,5250$  mm,  $b = 3,043750$  mm e  $c = 3,550$  mm preenchido com  $\hat{\epsilon}_{r1} = 1,0$  e  $\hat{\epsilon}_{r2} = 2,550$ . Os autovalores das equações características exata (2-36) e assintótica (2-71) são comparados.

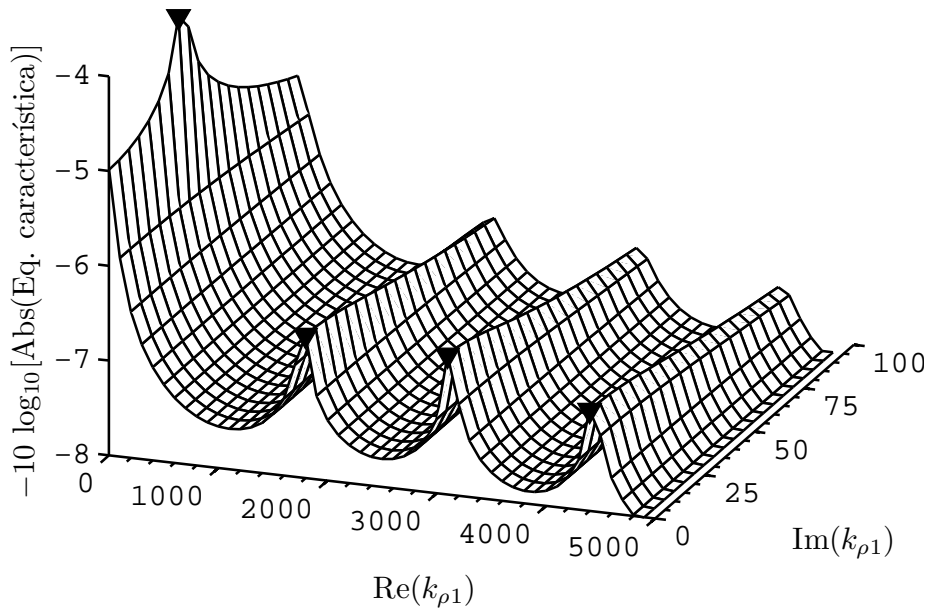


Figura 2.6: Equação característica exata em função das partes real e imaginária de  $k_{\rho 1}$ . O pontos marcados com ▼ indicam os máximos locais da curva, e são os zeros de (2-36) para o guia descrito na Fig. 2.5.

Condição	$k_{\rho 1}$	$k_{\rho 2}$	Substituição
$k_1 > k_2$	Imaginário	Real	$J_n(k_{\rho 1}\rho) \rightarrow I_n[\text{Im}(k_{\rho 1}\rho)]$ $Y_n(k_{\rho 1}\rho) \rightarrow K_n[\text{Im}(k_{\rho 1}\rho)]$ $(k_{\rho 1})^2 \rightarrow -\text{Im}(k_{\rho 1})^2$
$k_2 > k_1$	Real	Imaginário	$J_n(k_{\rho 2}\rho) \rightarrow I_n[\text{Im}(k_{\rho 2}\rho)]$ $Y_n(k_{\rho 2}\rho) \rightarrow K_n[\text{Im}(k_{\rho 2}\rho)]$ $(k_{\rho 2})^2 \rightarrow -\text{Im}(k_{\rho 2})^2$

Tabela 2.1: Relação de substituição das funções de Bessel em função do número de onda das camadas 1 e 2 (ambas sem perdas).

funções de Bessel com argumentos complexos. Na Tabela 2.1, a variável  $\rho$  do argumento das funções de Bessel pode ser  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , ou mesmo o próprio  $\rho$  do sistema de coordenadas cilíndrico. Em geral, apenas os primeiros modos  $\text{TM}^z$  apresentam autovalores  $k_\rho$  imaginários. A partir de um determinado índice modal  $p$  ambos  $k_{\rho 1}$  e  $k_{\rho 2}$  são reais, e assim se mantêm com o crescimento de  $p$ . Neste ponto, todos os modos superiores se propagam como *fast waves*. Em um guia coaxial circular não homogêneo o modo  $\text{TM}_{00}^z$  sempre será uma *slow wave* na região com menor permissividade elétrica em camadas sem perdas.<sup>9</sup> Isso sugere que a distribuição do fluxo de potência da seção transversal de um guia não homogêneo irá se concentrar principalmente na região com maior permissividade elétrica para o modo fundamental e todos demais modos *slow waves*. Ao passo que o fluxo de potência dos modos superiores *fast waves* se concentram principalmente na camada de menor permissividade elétrica. Na Fig. 2.6 a amplitude da equação característica para o modo  $\text{TM}^z$  (2-36) é mostrada em função dos valores complexos de  $k_{\rho 1}^{\text{TM}}$ . Nesta figura o eixo vertical foi plotado em escala logarítmica, e com sinal negativo. Isso serve para melhor representar os pequenos valores, bem como privilegiar a representação de pico ao invés de vales, a fim de facilitar a visualização. Deste ponto de vista, a busca de zeros da equação características pode ser tratada como um problema de localização de máximos (ou mínimos) locais.

Adicionalmente, considera-se um terceiro caso: um guia coaxial não homogêneo de dimensões  $a = 1,5250$  mm,  $b = 3,043750$  mm e  $c = 3,550$  mm preenchido com um dielétrico de  $\hat{\epsilon}_{r1} = 1,0$  em  $a < \rho < b$  e por outro dielétrico com  $\hat{\epsilon}_{r2} = 2,550 - j2,550$  em  $b < \rho < c$ . Este é uma caso de guia com elevada perda dielétrica ( $\tan \delta = 1$ ). Os autovalores  $k_{\rho 1}$  encontrados para (2-36) são mostrados na Fig. 2.7. Esta figura está privilegiando a representação o eixo imaginário, que é onde as maiores diferenças entre as equações características

<sup>9</sup>Em um guia coaxial circular homogêneo todos os modos superiores se propagam como *fast waves*. O modo fundamental TEM se propaga com a mesma velocidade de fase que a luz no dielétrico que preenche o guia.



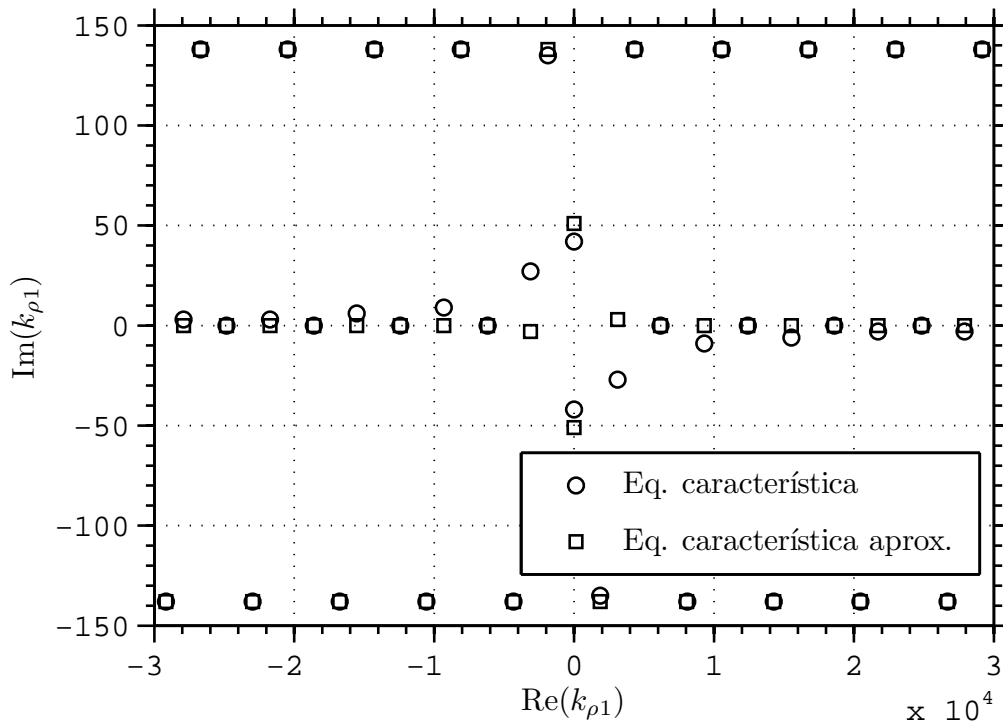


Figura 2.7: Lugar das raízes para o guia coaxial não homogêneo de dimensões  $a = 1,5250$  mm,  $b = 3,043750$  mm e  $c = 3,550$  mm preenchido com  $\hat{\epsilon}_{r1} = 1,0$  e  $\hat{\epsilon}_{r2} = 2,550 - j2,550$  ( $\tan \delta = 1$ ). Os autovalores das equações características exata (2-36) e assintótica (2-71) são comparados.

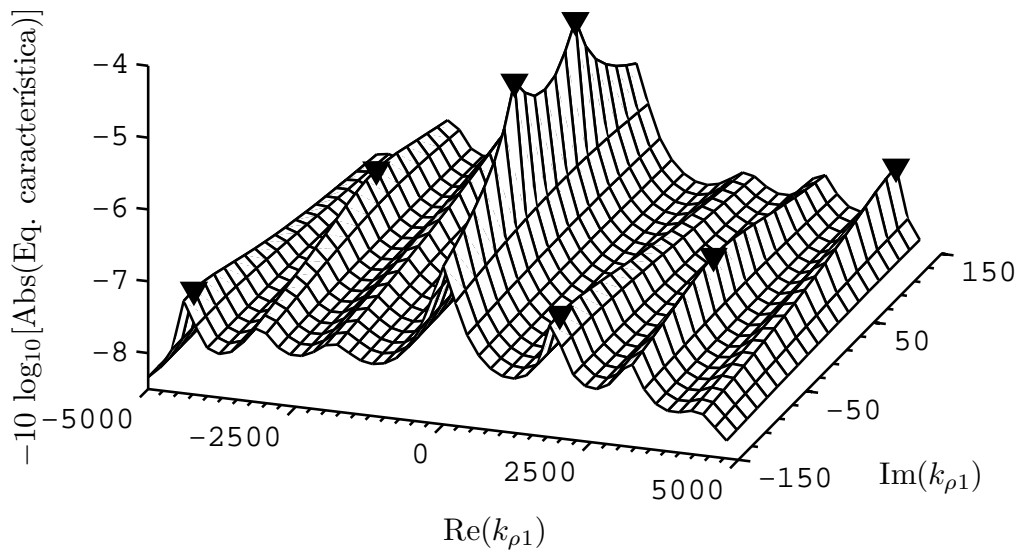


Figura 2.8: Equação característica exata em função das partes real e imaginária de  $k_{\rho 1}$ . O pontos marcados com  $\blacktriangledown$  indicam os máximos locais da curva, e são os zeros de (2-36) para o guia descrito na Fig. 2.7.

exata e aproximada ocorrem. Desta figura verifica-se que os autovalores  $k_{\rho 1}$  estão espalhados pelo plano complexo. Para o modo fundamental  $TM_{00}$ ,  $k_{\rho 1}$  é praticamente um número imaginário puro, e é uma *slow wave* na camada 1. Desta figura verifica-se que, como era de se esperar, a aproximação assintótica é uma boa aproximação para equação característica. As maiores diferenças ocorrem nos primeiros modos, contudo, como os zeros em geral estão afastados, localizar os autovalores tratando o problema de mínimo local como ilustra a Fig. 2.8 é bastante conveniente. Deve ser observado que apesar de alguns zeros das equação aproximada estarem deslocados dos zeros obtido pela equação exata, como o eixo das ordenadas está em escala de unidades e o eixo das abscissas está em escala de  $10^4$ , em geral a aproximação é boa. Verifica-se que para autovalores de índice modal elevado; que implica em argumentos grandes para as funções de Bessel de (2-36); os autovalores distribuem-se em períodos bem definidos, como prevê a equação característica assintótica.

Deve ser observado que nas figuras 2.7 e 2.8 os autovalores  $k_{\rho 1}$  são solução para a propagação para  $+z$  estão mostrados junto os autovalores para a propagação para  $-z$ . Isso se deve a função raiz quadrada que ocorre em  $k_{\rho 1}^2 = k^2 - k_z^2$  ser uma função *double valued*<sup>10</sup>. A solução de interesse para ondas *forward* é aquela tal que  $\text{Im}(k_z) > 0$  quando  $z \rightarrow \infty$ .

Nas figuras 2.7 e 2.8 também se observa que os autovalores estão espalhados pelo plano complexo  $k_{\rho 1}$ . É evidente que a medida que as perdas nos materiais que preenchem o guia coaxial diminuem os autovalores  $k_{\rho 1}$  se aproximam dos eixos. Para a condição de perdas pequenas os autovalores do caso sem perdas podem ser usados como valor inicial aproximado para a busca dos autovalores complexos. Mas, em geral, é necessário saber os limites no plano complexo em que os autovalores  $k_{\rho 1}$  estão, e o mais importante: quantos autovalores existem nesta região de busca.

A localização de autovalores no plano complexo foge ao escopo deste Capítulo. No Apêndice E a localização de zeros da equação característica para um guia coaxial não homogêneo com  $N$  camadas radiais é abordado com detalhes. Através do método do *winding number* é possível determinar todos os autovalores de interesse.

## 2.8

### Validação

A fim de validar a formulação supracitada, duas referências, [16] e [17], foram usadas para verificar a correta localização dos autovalores para guias de

<sup>10</sup>Uma revisão sucinta sobre funções analíticas no plano complexo é apresentada na Seção E.4, p. 195.

onda coaxiais circulares não homogêneos. O caso particular em que as camadas 1 e 2 da Fig. 2.2 são preenchidas pelo mesmo material simplificou a equação característica para uma expressão analítica bem conhecida na literatura [ver (2-101)]. Dessa forma, admite-se que para guias homogêneos a determinação de autovalores está correta.

Em [16] foram determinadas curvas de dispersão para os primeiros modos propagantes em um guia coaxial com duplo carregamento dielétrico radial. Os autores de [16] consideraram um guia coaxial de raio interno  $a = 10,0$  mm, e raio externo  $c = 40,0$  mm. A camada mais interna do preenchimento do guia, de  $a < \rho < b = 20,0$  mm, é formada por um poliestireno com  $\hat{\epsilon}_{r1} = 2,50$ . A camada mais externa do guia, compreendida de  $b < \rho < c$ , é ar ( $\hat{\epsilon}_{r2} = 1,0$ ). As curvas de dispersão obtidas em [16] são mostradas na Fig. 2.9 junto aos resultados calculados pela formulação deste Capítulo. Nesta figura a constante de propagação  $k_z^{TM}$  fica implícita em termos do comprimento de onda guiado  $\lambda_g$ , ou seja,  $k_z^{TM} = 2\pi/\lambda_g$ . Verifica-se que os dados apresentam boa concordância. Em [16] são apresentados resultados apenas para os 2 primeiros modos  $TM^z$ . Adicionalmente, os modos  $TM_{02}$  e  $TM_{03}$  são mostrados na Fig. 2.9.

Algumas conclusões interessantes podem ser verificadas da Fig. 2.9.

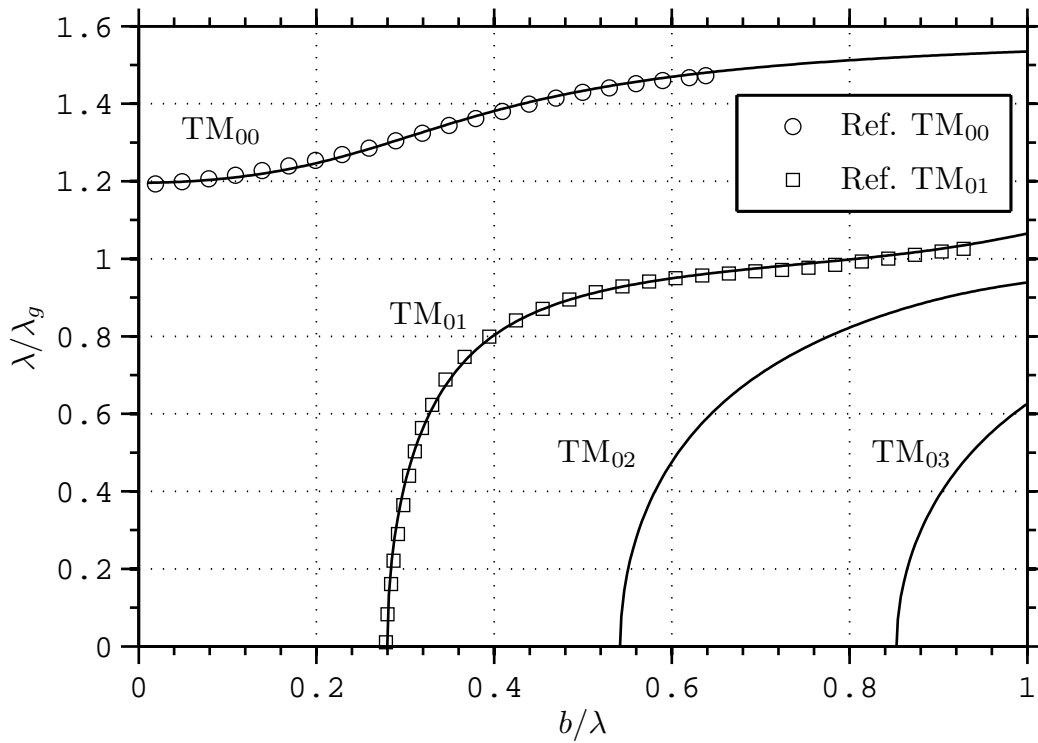


Figura 2.9: Curvas de dispersão do modo  $TM^z$  simuladas em comparação com as obtidas em [16, p. 309].

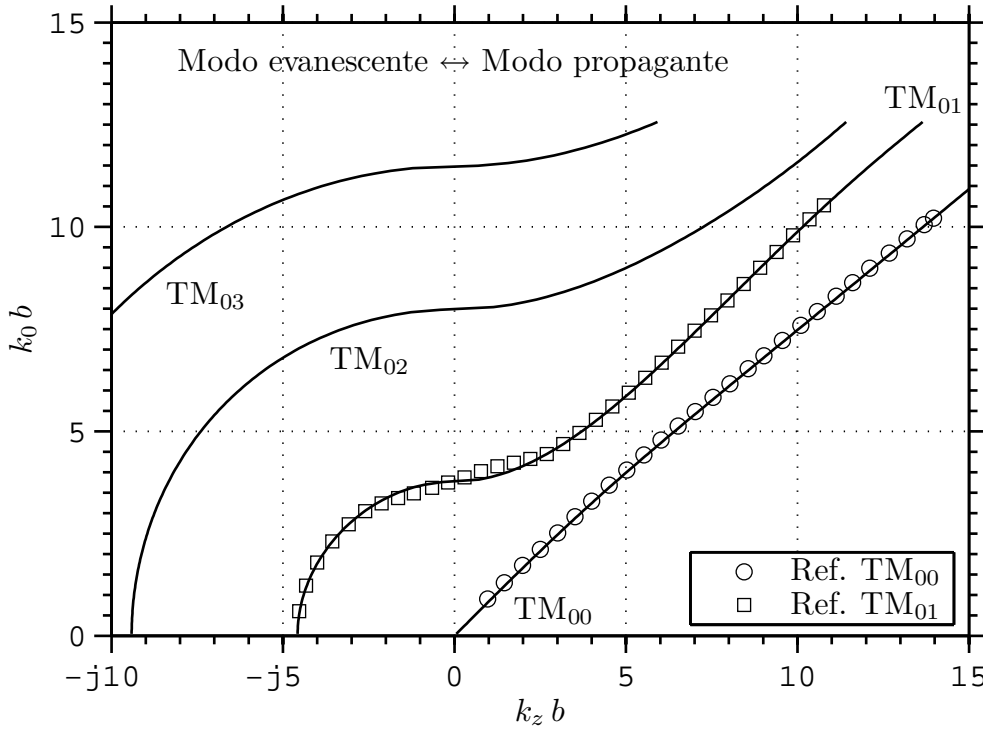


Figura 2.10: Curvas de dispersão do modo  $TM^z$  simuladas em comparação com as obtidas em [17, p. 2051].

Primeiro: o limite em que  $\lambda/\lambda_g = 1$  representada a ocorrência de *slow wave*, ou seja, a medida que esta razão fica maior que 1 os modos se propagam com velocidade de fase maior que a da camada com dielétrico  $\hat{\epsilon}_{r2} = 1,0$ . Segundo: como era de se esperar, o modo fundamental é uma *slow wave*, e a medida que a frequência ou o raio  $b$  aumentam os modos superiores apresentam menores velocidades de fase.

No trabalho de [17] foram reportadas curvas de dispersão para um guia de onda coaxial com duas camadas dielétricas com dimensões  $a = 10,0$  mm,  $b = 15,0$  mm, e  $c = 20,0$  mm, de acordo com a geometria mostrada na Fig. 2.2, e preenchido com  $\hat{\epsilon}_{r1} = 2,0$  e  $\hat{\epsilon}_{r2} = 1,0$ . Essa estrutura foi simulada usando a formulação supracitada, e os resultados são comparados com os de [17] na Fig. 2.10. Da figura verifica-se que os resultados apresentam boa concordância. As maiores diferenças ocorrem em torno do ponto em que o modo  $TM_{01}$  torna-se propagante.

Na formulação de [17], em que o problema de contorno não foi formalmente resolvido, os autores empregaram um método de *shooting* para encontrar autovalores numericamente. Nesse método vários valores de constante de propagação são testados até que os resíduos das condições de contorno sejam pequenos. Isso pode ser, eventualmente, uma explicação para as pequenas diferenças observadas.

A partir da estrutura comparada na Fig. 2.10, algumas observações são pertinentes. As curvas de dispersão mostradas na Fig. 2.10 são repetidas na Fig. 2.11 junto às assíntotas para quando a velocidade de fase da constante de propagação é igual a velocidade da luz no vácuo  $v = c_0$  e igual a velocidade da luz no dielétrico da camada 1, ou seja,  $v = c_{\epsilon 1}$ . Essas assíntotas são obtidas se o guia considerado for homogêneo, completamente preenchido por ar ou com o dielétrico. Verifica-se que o modo  $TM_{00}$  sempre se propaga como uma *slow wave* com respeito a camada com  $\epsilon_2 = 1,0$ , e como uma *fast wave* com respeito a camada com  $\epsilon_1 = 2,0$ . A medida que a frequência aumenta o modo  $TM_{01}$  também apresenta o mesmo comportamento. Isso sugere que em altas frequências a distribuição de fluxo de potência se concentra na região com maior permissividade elétrica para os modos  $TM_{00}$  e  $TM_{01}$ . O fluxo de potência para os modos superiores deve estar concentrado principalmente na camada de ar. As figuras 2.12 a 2.14 mostram o vetor de Poynting médio em função da distância radial, e confirmam as observações anteriores. A componente de campo magnético  $H_\phi$  é continua ao longo de  $\rho$ , contudo, o campo elétrico normal (componente  $E_\rho$ , pois  $E_\phi = 0$ ) é descontínuo na interface entre as duas camadas, em  $\rho = b$ . Isso justifica a descontinuidade na curva do vetor de Poynting médio mostrada nas figuras citadas anteriormente.

Da Fig. 2.11 tem-se que o modo  $TM_{01}$  começa a se comportar como uma

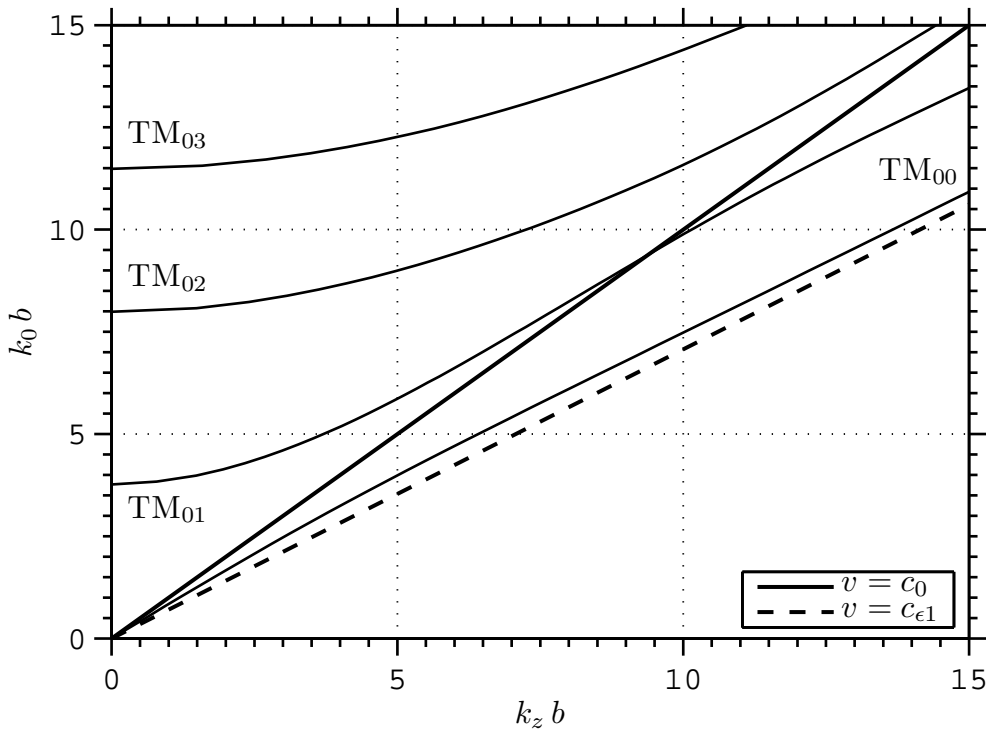


Figura 2.11: Curvas de dispersão do modo  $TM^z$  da Fig. 2.10 com assíntotas para  $v = c_0$  e  $v = c_{\epsilon 1}$ .

*slow wave* em  $k_0 b \approx 10$ , ou próximo de 32 GHz. Da Fig. 2.13 tem-se que com o aumento da frequência a densidade do fluxo de potência deste modo se

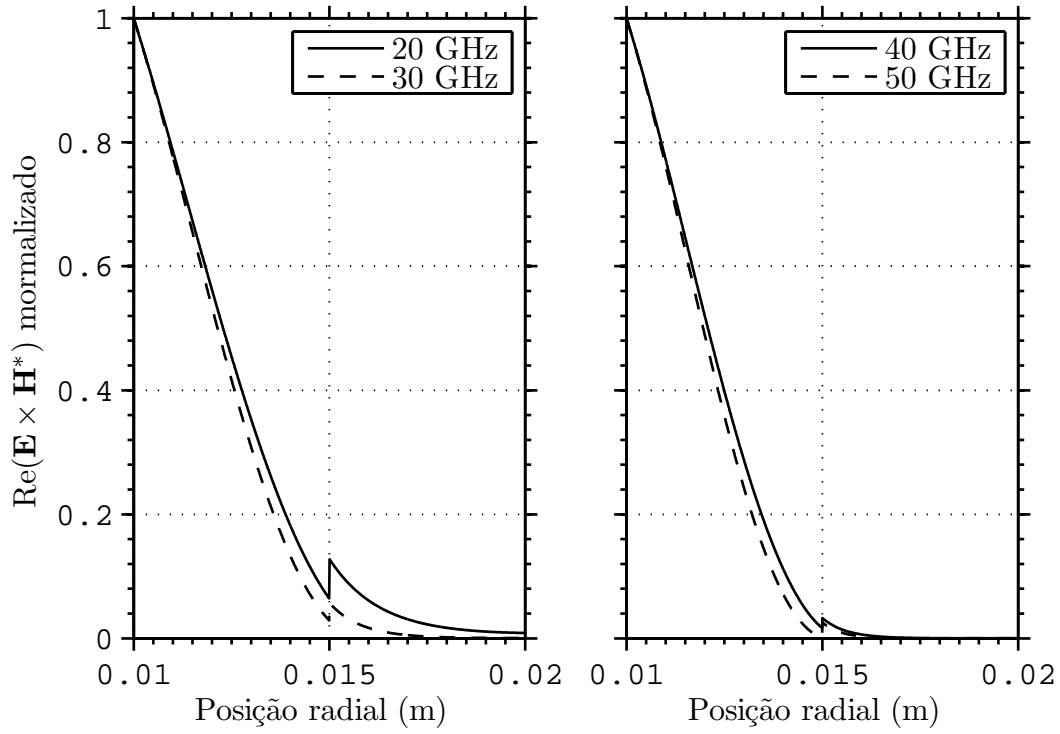


Figura 2.12: Vetor de Poynting médio para o modo  $\text{TM}_{00}$ .

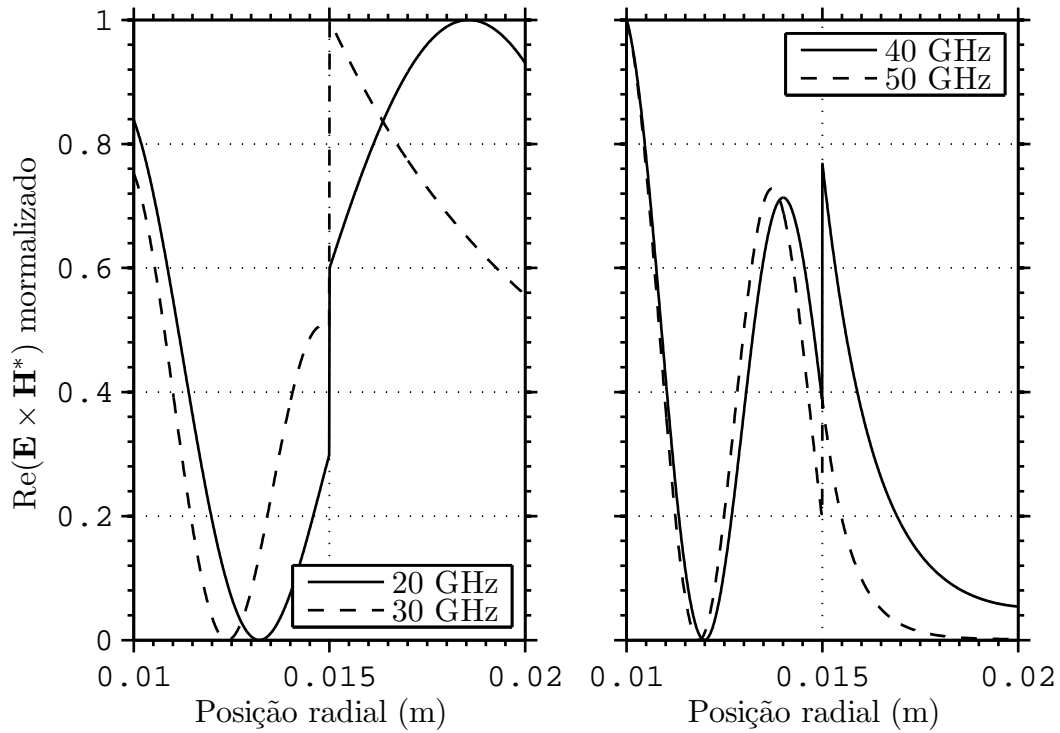


Figura 2.13: Vetor de Poynting médio para o modo  $\text{TM}_{01}$ .

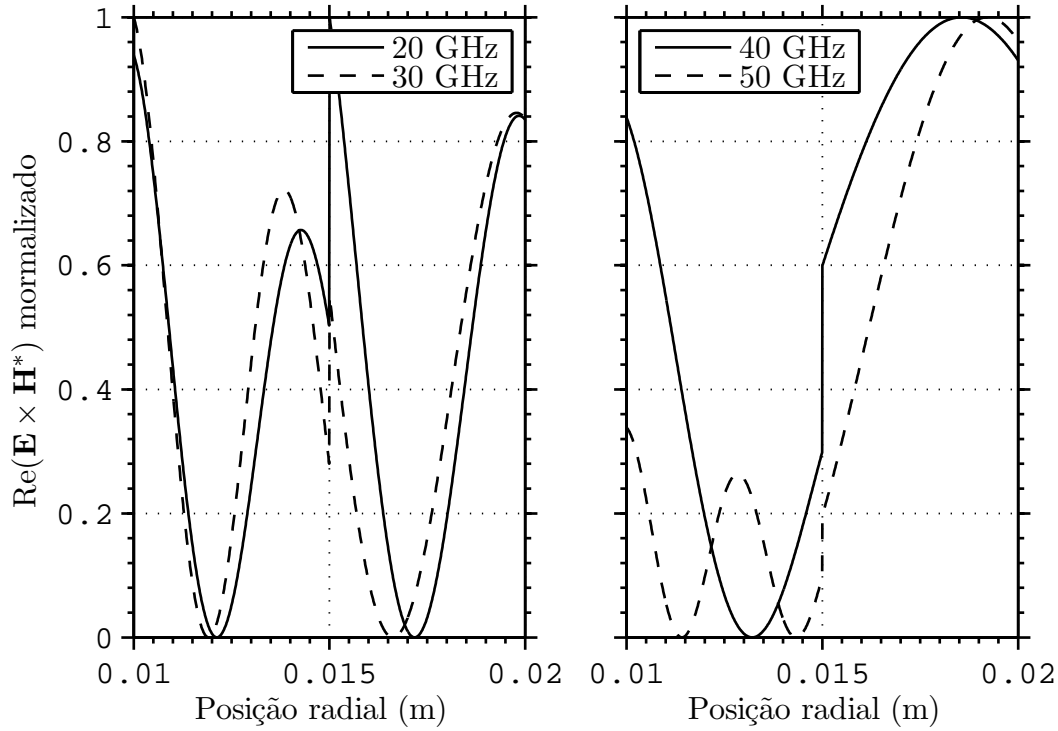


Figura 2.14: Vetor de Poynting médio para o modo  $TM_{02}$ .

concentra na camada 1 (dielétrico).

Da Fig. 2.11 tem-se que a curva de dispersão do modo  $TM_{02}$  se aproxima da assíntota de  $v = c_0$  com aumento da frequência, ou seja, este modo se propaga com velocidade fase próxima a da camada 2 (ar). Como consequência, o fluxo de potência deste modo se concentra nesta camada. A Fig. 2.14 confirma essa sustentação.

A partir dos resultados de comparação com [16] e [17] verifica-se que a equação característica para o modo  $TM^z$  e a implementação de busca de autovalores está correta.

### 2.8.1

#### Campos Eletromagnéticos no Guia Coaxial não Homogêneo

Como foi observado anteriormente, em frequências muito baixas, o modo  $TM_{00}^z$  é muito parecido com o modo  $TEM^z$  da camada com menor permissividade elétrica. Contudo, o modo  $TM_{00}^z$  possui uma componente de campo elétrico  $E_z \neq 0$ . Quando a frequência é muito baixa,  $E_z$  é pequeno; como sugerem os resultados da Fig. 2.15. A medida que a frequência cresce, a componente  $E_z$  do modo  $TM_{00}^z$  também cresce. Entretanto, quando o segundo modo torna-se propagante ( $\sim 52$  GHz, ver Fig. 2.16 para  $b = 2,650$  mm) a componente  $E_z$  do modo fundamental diminui com o aumento da frequência. Isso sugere

que, em altas frequências, o modo  $TM_{00}^z$  é muito parecido com modo  $TEM^z$  da camada com maior permissividade elétrica.

Algumas observações sobre os campos em respeito as várias frequências mostrados na Fig. 2.15 são pertinentes. Como era de se esperar, o campo elétrico normal a interface das camada 1 e 2 é descontínuo; essa descontinuidade é proporcional a densidade de carga elétrica em  $\rho = b$ . A componente de campo elétrico  $E_z$  é contínua em  $\rho = b$ , pois tem direção tangencial as camadas 1 e 2. Como são considerados apenas meios sem fontes ou cargas, as componentes tangenciais do campo magnético são contínuas em  $\rho = b$ .

Na Fig. 2.16 avalia-se duas situações: 1) um guia é preenchido com dielétrico na camada 1 e avalia-se o crescimento da camada do dielétrico, e 2) o mesmo guia é preenchido com dielétrico na camada 2, e avalia-se o crescimento da camada do dielétrico. É interessante notar quando o dielétrico preenche a metade de cada guia ( $b = 2,65$  mm), as curvas de dispersão das duas situações são muito semelhantes. Contudo, a potência complexa em geral será concentrada no dielétrico: no caso 1 a potência se concentra na camada 1, e no caso 2 a potência se concentra na camada 2.

Em analogia a guias coaxiais homogêneos, o preenchimento dielétrico da camada 1 equivale a se ter um guia com área transversal menor, pois os modos propagates se concentram principalmente no dielétrico. Caso a camada 2 seja preenchida, os campos eletromagnéticos se distribuem de forma semelhante ao que seria esperado em um guia homogêneo com área transversal maior.

Além de redistribuir os campos, camada radiais de dielétrico também permitem antecipar – em termos da frequência de corte – a propagação de modos superiores. Isso fica claro observando a Fig. 2.16, nos gráficos da esquerda de cima para baixo, e nos gráficos da direita, de baixo para cima.



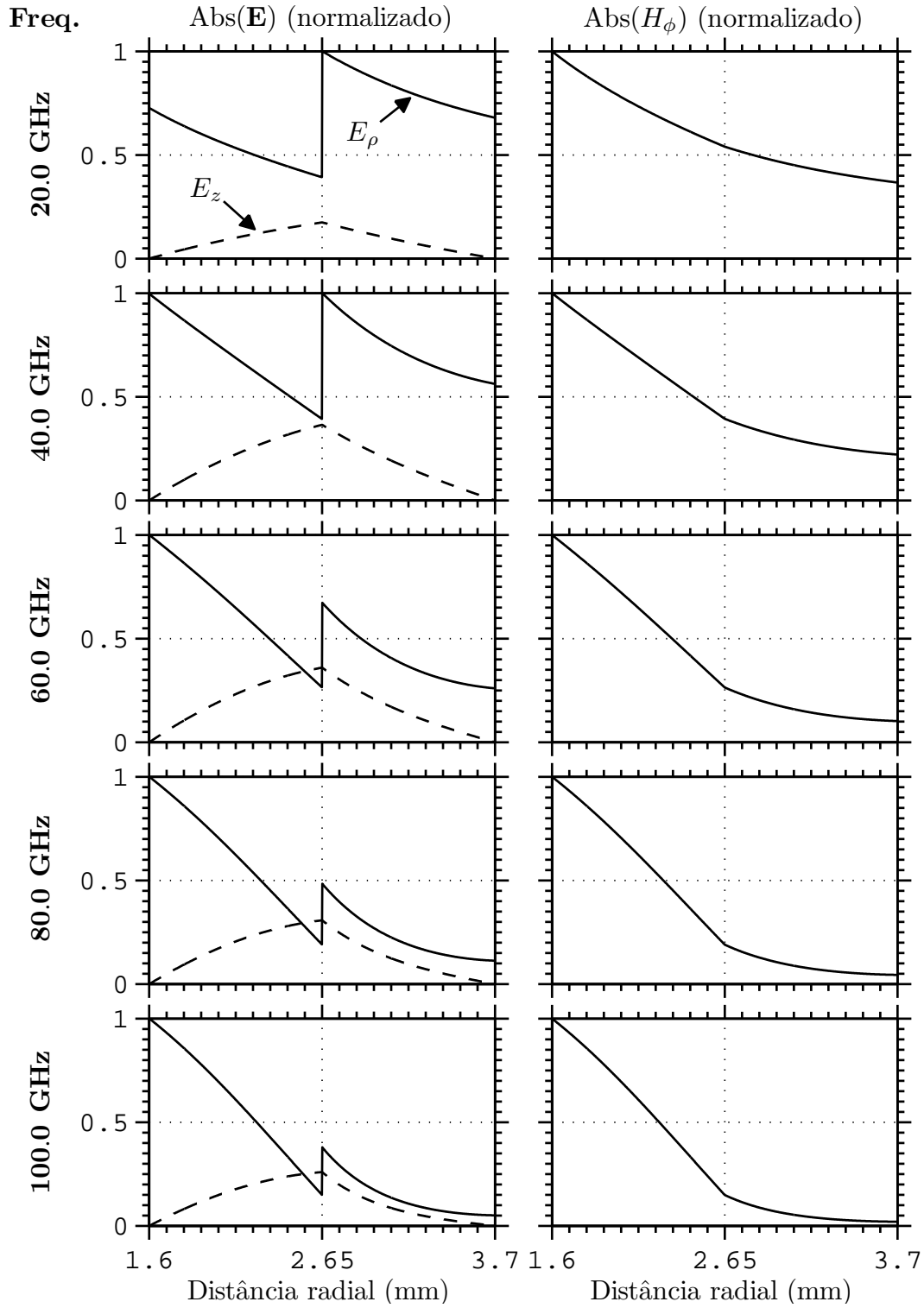


Figura 2.15: Valor absoluto dos campos para o modo  $\text{TM}_{00}^z$  em função da posição radial no guia coaxial não homogêneo caracterizado por  $a = 1,60$  mm,  $b = 2,650$  mm,  $c = 3,70$  mm, preenchido com um dielétrico de  $\epsilon_{r1} = 2,550$  em  $a < \rho < b$  e por ar em  $b < \rho < c$ .

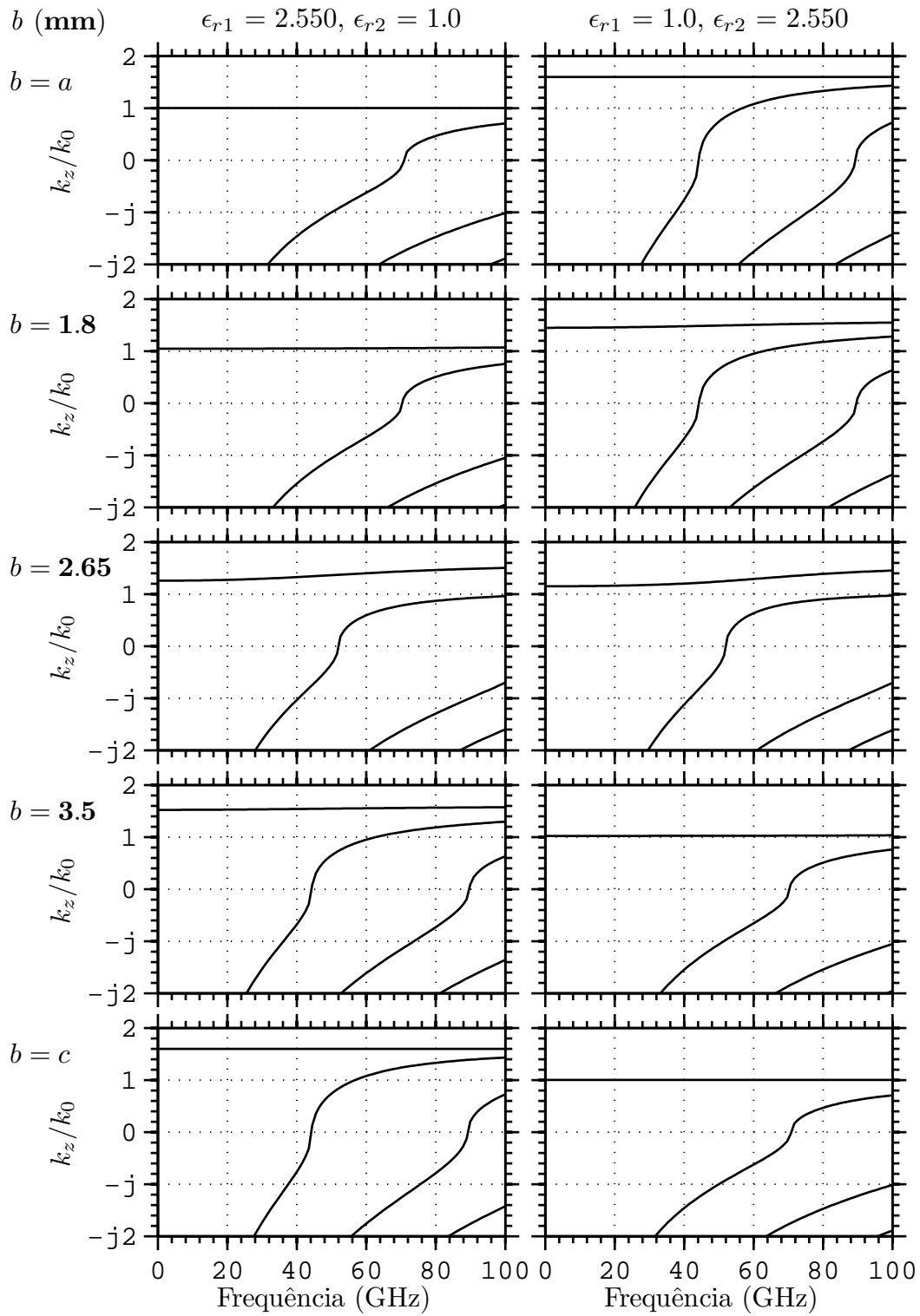


Figura 2.16: Curvas de dispersão. Esquerda: guia preenchido com dielétrico na camada 1, em que avalia-se o crescimento da camada do dielétrico. Direita: guia preenchido com dielétrico na camada 2, em que avalia-se o crescimento da camada do dielétrico.

## 3

### Casamento de Modos

#### 3.1

##### Introdução

Neste capítulo o método do casamento de modos (MMT) é formulado para modelar descontinuidades entre guias coaxiais com duplo carregamento dielétrico. O MMT é empregado para obtenção da matriz de espalhamento generalizada; *generalized scattering matrix* (GSM). A técnica aplicada aqui é baseada nos trabalhos de [7, pp. 1059 - 1066], [8, cap. 2] e [9, cap. 3]. As referências utilizaram o MMT para descontinuidades em guias de onda circular e coaxial homogêneos sem perdas. Adicionalmente, a formulação proposta neste capítulo trata de guias coaxiais não homogêneos com preenchimento dielétrico passível a perdas. O MMT permite determinar as matrizes de espalhamento entre cada descontinuidade da seção transversal de guias de onda, e através do cascadeamento de diversas matrizes de cada descontinuidades determina-se a matriz GSM equivalente de toda estrutura de interesse. A técnica aplicada garante a conservação da auto-reação na descontinuidade entre dois trechos de guia liso, usando os campos modais desenvolvidos do Capítulo 2. A formulação abrange guias de onda coaxiais arbitrários, contudo, é requerido que a área comum entre a junção de dois guias de onda lisos seja igual a seção transversal do menor guia de onda. Em termos práticos, um guia de onda coaxial circular deve estar completamente contido em outro guia de área de seção transversal maior. Isso elimina uma série de conexões em *offset*, e requer que todos os trechos de guia de onda possuam a mesma linha de centro. Isto simplifica a análise, desde que apenas modos com uma variação azimutal necessitam ser considerados. Em geral, essas não são restrições típicas de aplicações práticas. Nestes termos, a formulação desenvolvida a seguir é geral o suficiente para resolver uma classe de problemas de junções entre guias coaxiais circulares de dimensões e preenchimentos não homogêneos arbitrários.

A validação numérica do programa implementado é realizada no final deste capítulo. A validação do caso particular em que os guias de onda são homogêneos foi realizada a partir de comparações com os resultados publicados em [9] e [4]. Como não foram encontradas publicações tratando de descontinuidades em guias coaxiais não homogêneos suficientemente gerais para a validação completa da formulação, o *software* CST MWS [22] foi usado para a validação sistemática da formulação proposta a seguir.

### 3.2

#### Formulação do MMT

Na formulação desenvolvida a seguir assume-se que um guia de onda coaxial circular é excitado por um campo  $\text{TEM}^z$  na região  $I$  do guia da Fig. 3.1. Isto requer que este guia coaxial inicial seja homogêneo. Entretanto, os demais trechos de guias seguintes podem ser não homogêneos. Seguindo a formulação proposta em [7], considera-se cada mudança na seção transversal do guia isoladamente para a determinação da matriz de espalhamento associada a cada descontinuidade. A princípio determina-se a matriz de espalhamento entre o guia homogêneo da região  $I$  e o guia da região  $II$ . *A posteriori*, determina-se a matriz de espalhamento do guia liso da região  $II$ , que é cascadeada com a matriz de espalhamento da primeira descontinuidade. Em seguida, o processo se repete para todas as outras descontinuidades. Por fim, com a associação em cascata das matrizes de espalhamento de todos os trechos de guia de onda, tem-se a amplitude dos campos modais no último trecho de guia em função das amplitudes dos campos modais do guia de excitação.

#### 3.2.1

##### Descontinuidade de Seção Transversal entre 2 Guias

Denota-se região  $I$  o primeiro trecho de guia coaxial, e região  $II$  o trecho de guia seguinte a partir da descontinuidade da seção transversal. Na região  $I$  da Fig. 3.1 sejam os campos transversais  $\mathbf{E}_I$  e  $\mathbf{H}_I$  em  $z = 0$  representados pela

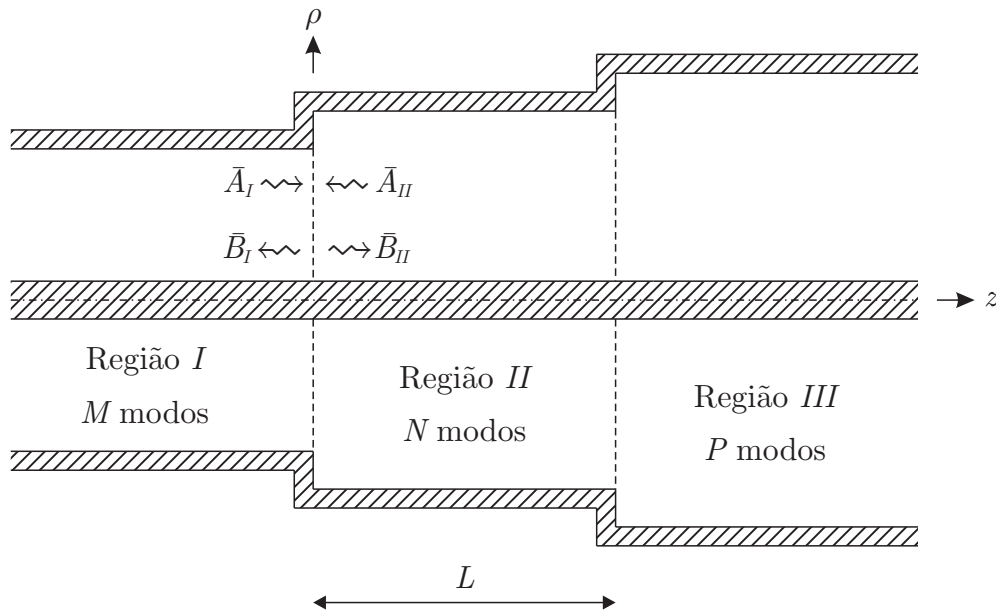


Figura 3.1: Representação dos modos transmitidos e refletidos a cada descontinuidade do guia de onda coaxial.

solução modal

$$\mathbf{E}_I = \sum_m^{\infty} (A_{mI} + B_{mI}) \mathbf{e}_{mI}, \text{ e} \quad (3-1)$$

$$\mathbf{H}_I = \sum_m^{\infty} (A_{mI} - B_{mI}) \mathbf{h}_{mI}, \quad (3-2)$$

em que  $\mathbf{e}_{mI}$  e  $\mathbf{h}_{mI}$  são os campos modais transversais,  $A_{mI}$  e  $B_{mI}$  são os coeficientes modais de transmissão e reflexão, respectivamente, a serem determinados.

Similarmente para a região  $II$  tem-se que os campos transversais em  $z = 0$  são dados por

$$\mathbf{E}_{II} = \sum_n^{\infty} (A_{nII} + B_{nII}) \mathbf{e}_{nII}, \text{ e} \quad (3-3)$$

$$\mathbf{H}_{II} = \sum_n^{\infty} (A_{nII} - B_{nII}) \mathbf{h}_{nII}, \quad (3-4)$$

em que  $A_{nII}$  e  $B_{nII}$  são os coeficientes modais de transmissão e de reflexão, respectivamente, em relação a  $z = 0$ .

Como verificado no Capítulo 2, tanto o guia coaxial homogêneo como o não homogêneo suportam um número infinito de modos. Porém, o número máximo de modos utilizados para aproximar os campos nas regiões  $I$  e  $II$  ( $M$  e  $N$  modos) é dimensionado a fim de garantir a convergência dos resultados. Sejam  $s_I$  e  $s_{II}$  as áreas livres das seções de corte transversal dos guia de onda das regiões  $I$  e  $II$ . Impondo a continuidade dos campos transversais através da descontinuidade em  $z = 0$ , considerando *a priori* que  $s_I \subset s_{II}$ , tem-se que

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{E}_I = \mathbf{E}_{II} \\ \mathbf{H}_I = \mathbf{H}_{II} \end{array} \right\} \text{ para pontos interiores a } s_I, \text{ e} \quad (3-5)$$

$$\mathbf{E}_I = 0 \quad \text{para pontos interiores a } s_{II} - s_I.^1 \quad (3-6)$$

---

<sup>1</sup>Deve-se observar que outra condição de contorno deve ser satisfeita na descontinuidade em  $z = 0$ :  $\mathbf{H}_{II} = \mathbf{J}_s$  sobre  $s_{II} - s_I$ , em que  $\mathbf{J}_s$  é a densidade de corrente elétrica superficial. Na referência [23] é mencionado que esta equação não é explicitamente levada em conta em nenhuma formulação de casamento de modos, embora seja uma condição de contorno independente de (3-5) e (3-6). Contudo, uma vez que os modos correspondentes ao campo elétrico são válidos sobre  $s_I$ , e  $\mathbf{H}_{II} = \mathbf{J}_s$  sobre  $s_{II} - s_I$ , o mesmo resultado é obtido se apenas (3-6) é levado em conta. Dessa forma não se introduz  $\mathbf{J}_s$  na formulação; que é desconhecida desde que o campo magnético transversal também é desconhecido.

Para pontos interiores a  $s_I$ , de (3-1), (3-3) e (3-5) pode-se escrever

$$\sum_{m=0}^{M-1} (A_{mI} + B_{mI}) \mathbf{e}_{mI} = \sum_{n=0}^{N-1} (A_{nII} + B_{nII}) \mathbf{e}_{nII}, \text{ e} \quad (3-7)$$

$$\sum_{m=0}^{M-1} (A_{mI} - B_{mI}) \mathbf{h}_{mI} = \sum_{n=0}^{N-1} (A_{nII} - B_{nII}) \mathbf{h}_{nII}. \quad (3-8)$$

Para pontos interiores a  $s_{II} - s_I$ , de (3-1), (3-3) e (3-6) pode-se escrever

$$\mathbf{e}_{mI} = \sum_{n=0}^{N-1} (A_{nII} + B_{nII}) \mathbf{e}_{nII} = 0. \quad (3-9)$$

Multiplicando vetorialmente ambos os membros de (3-7) por  $\mathbf{h}_{\tilde{n}II}$ ,  $\tilde{n} = 0, 1, 2, \dots, N-1$ , e integrando sobre a superfície  $s_{II}$  tem-se

$$\int_{s_{II}} \left[ \sum_{m=0}^{M-1} (A_{mI} + B_{mI}) \mathbf{e}_{mI} \times \mathbf{h}_{\tilde{n}II} \right] \cdot d\mathbf{s} = \int_{s_{II}} \left[ \sum_{n=0}^{N-1} (A_{nII} + B_{nII}) \mathbf{e}_{nII} \times \mathbf{h}_{\tilde{n}II} \right] \cdot d\mathbf{s}$$

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{M-1} \left[ (A_{mI} + B_{mI}) \int_{s_{II}} (\mathbf{e}_{mI} \times \mathbf{h}_{\tilde{n}II}) \cdot d\mathbf{s} \right] = \\ \sum_{n=0}^{N-1} \left[ (A_{nII} + B_{nII}) \int_{s_{II}} (\mathbf{e}_{nII} \times \mathbf{h}_{\tilde{n}II}) \cdot d\mathbf{s} \right], \text{ com } \tilde{n} = 0, 1, 2, \dots, N-1. \end{aligned} \quad (3-10)$$

Notando a partir de (3-9) que  $\mathbf{e}_{mI} = 0$  em  $s_{II} - s_I$ , tem-se que a integral do lado esquerdo de (3-10) é não nula apenas sobre  $s_I$ , e que da propriedade da ortogonalidade entre os modos na integral do lado direito

$$\int_{s_{II}} (\mathbf{e}_{nII} \times \mathbf{h}_{\tilde{n}II}) \cdot d\mathbf{s} = 0 \text{ para } n \neq \tilde{n}, \quad (3-11)$$

pode-se escrever a última expressão na forma matricial

$$\bar{\bar{P}}(\bar{A}_I + \bar{B}_I) = \bar{\bar{Q}}(\bar{A}_{II} + \bar{B}_{II}), \quad (3-12)$$

em que  $\bar{A}_I$  e  $\bar{B}_I$  são matrizes  $M \times 1$  contendo os coeficientes  $A_{mI}$  e  $B_{mI}$ ,  $\bar{A}_{II}$  e  $\bar{B}_{II}$  são matrizes  $N \times 1$  contendo os coeficientes  $A_{nII}$  e  $B_{nII}$ ,  $\bar{\bar{P}}$  é uma matriz  $N \times M$ , e  $\bar{\bar{Q}}$  é uma matriz  $N \times N$ . Devido a ortogonalidade dos modos, a partir de (3-11) tem-se que  $\bar{\bar{Q}}$  é uma matriz diagonal. Os elementos das matrizes  $\bar{\bar{P}}$  e  $\bar{\bar{Q}}$  são dados por

$$P_{nm} = \int_{s_I} (\mathbf{e}_{mI} \times \mathbf{h}_{nII}) \cdot d\mathbf{s}, \text{ e} \quad (3-13)$$

$$Q_{nn} = \int_{s_{II}} (\mathbf{e}_{nII} \times \mathbf{h}_{nII}) \cdot d\mathbf{s}. \quad (3-14)$$

De forma análoga, multiplicando vetorialmente ambos os membros de (3-8) por  $\mathbf{e}_{\tilde{m}I}$ ,  $\tilde{m} = 0, 1, 2, \dots, M-1$ , e integrando sobre a superfície  $s_I$  tem-se

$$\int_{s_I} \left[ \sum_{m=0}^{M-1} (A_{mI} - B_{mI}) \mathbf{h}_{mI} \times \mathbf{e}_{\tilde{m}I} \right] \cdot d\mathbf{s} = \int_{s_I} \left[ \sum_{n=0}^{N-1} (A_{nII} - B_{nII}) \mathbf{h}_{nII} \times \mathbf{e}_{\tilde{m}I} \right] \cdot d\mathbf{s}$$

$$\sum_{m=0}^{M-1} \left[ (A_{mI} - B_{mI}) \int_{s_I} (\mathbf{h}_{mI} \times \mathbf{e}_{\tilde{m}I}) \cdot d\mathbf{s} \right] =$$

$$\sum_{n=0}^{N-1} \left[ (A_{nII} - B_{nII}) \int_{s_I} (\mathbf{h}_{nII} \times \mathbf{e}_{\tilde{m}I}) \cdot d\mathbf{s} \right], \text{ com } \tilde{m} = 0, 1, 2, \dots, M-1.$$
(3-15)

Notando que a integral do lado direito vale  $-P_{\tilde{m}n}$ , e usando a propriedade da ortogonalidade entre os modos da integral do lado esquerdo, pode-se escrever a última expressão na forma matricial

$$\bar{\bar{P}}^T (\bar{B}_{II} - \bar{A}_{II}) = \bar{\bar{R}} (\bar{A}_I - \bar{B}_I), \quad (3-16)$$

em que  $\bar{\bar{R}}$  é uma matriz  $M \times M$ , e devido a ortogonalidade dos modos, tem-se que  $\bar{\bar{R}}$  é uma matriz diagonal. Os elementos das matrizes  $\bar{\bar{R}}$  são dados por

$$R_{mm} = \int_{s_I} \mathbf{e}_{mI} \times \mathbf{h}_{mI} \cdot d\mathbf{s}. \quad (3-17)$$

Em uma outra formulação para descontinuidades em guias de onda [24], o campo magnético entra nas equações precedentes na forma de seu complexo conjugado; por exemplo:  $P_{nm} = \int_{s_I} (\mathbf{e}_{mI} \times \mathbf{h}_{nII}^*) \cdot d\mathbf{s}$ . Em ambas formulações a potência complexa é conservada através da descontinuidade. Pode-se verificar que ambas formulações são equivalentes para estruturas sem perdas [24].

As integrais que aparecem em  $P_{nm}$ ,  $Q_{nn}$  e  $R_{mm}$  em geral *não representam potência*, desde que o conjugado não aparece no campo magnético. Somente em meios sem perdas estas integrais são proporcionais a potência.

A forma integral do teorema da reciprocidade de Lorentz para regiões sem fontes [14, pp. 116-120] recai nas integrais do tipo das encontradas em  $P_{nm}$ ,  $Q_{nn}$  e  $R_{mm}$ . Essas integrais são chamadas de *reação* [14, p. 118], [25]. As integrais  $R_{mm}$  e  $Q_{nn}$  são a *auto-reação* das regiões  $I$  e  $II$ , respectivamente, enquanto a reação entre as regiões  $I$  e  $II$  é representada pela integral  $P_{nm}$ . Maiores detalhes sobre a relação das integrais  $P_{nm}$ ,  $Q_{nn}$  e  $R_{mm}$  com a reação/auto-reação das regiões  $I$  e  $II$  são apresentados nos apêndices B e C.

As equações matriciais (3-12) e (3-16) podem ser reorganizadas de forma a estabelecer uma relação entre os modos que se propagam em direções opostas.

Multiplicando ambos os termos de (3-12) por  $\bar{\bar{Q}}^{-1}$ , tem-se

$$\bar{\bar{Q}}^{-1}\bar{\bar{P}}(\bar{A}_I + \bar{B}_I) = \bar{A}_{II} + \bar{B}_{II}.$$

que permite explicitar  $\bar{B}_{II}$  dado por

$$\bar{B}_{II} = \bar{\bar{Q}}^{-1}\bar{\bar{P}}(\bar{A}_I + \bar{B}_I) - \bar{A}_{II}. \quad (3-18)$$

Substituindo a última expressão em (3-16), tem-se

$$\bar{\bar{P}}^T \left[ \bar{\bar{Q}}^{-1}\bar{\bar{P}}(\bar{A}_I + \bar{B}_I) - 2\bar{A}_{II} \right] = \bar{\bar{R}}(\bar{A}_I - \bar{B}_I),$$

que permite explicitar  $\bar{B}_I$  dado por

$$\bar{B}_I = (\bar{\bar{R}} + \bar{\bar{P}}^T\bar{\bar{Q}}^{-1}\bar{\bar{P}})^{-1}(\bar{\bar{R}} - \bar{\bar{P}}^T\bar{\bar{Q}}^{-1}\bar{\bar{P}})\bar{A}_I + 2(\bar{\bar{R}} + \bar{\bar{P}}^T\bar{\bar{Q}}^{-1}\bar{\bar{P}})^{-1}\bar{\bar{P}}^T\bar{A}_{II}. \quad (3-19)$$

De forma análoga, retirando-se o valor de  $\bar{B}_I$  em (3-16) e substituindo em (3-12) pode-se escrever

$$\bar{B}_{II} = 2(\bar{\bar{Q}} + \bar{\bar{P}}\bar{\bar{R}}^{-1}\bar{\bar{P}}^T)^{-1}\bar{\bar{P}}\bar{A}_I - (\bar{\bar{Q}} + \bar{\bar{P}}\bar{\bar{R}}^{-1}\bar{\bar{P}}^T)^{-1}(\bar{\bar{Q}} - \bar{\bar{P}}\bar{\bar{R}}^{-1}\bar{\bar{P}}^T)\bar{A}_{II}. \quad (3-20)$$

O sistema de equações formado por (3-19) e (3-20) estabelece uma relação entre as amplitudes dos campos modais se propagando para  $+z$  com as amplitude dos campos modais se propagando para  $-z$ , podendo ser reescrito da forma

$$\bar{B} = \bar{\bar{S}}\bar{A}, \quad (3-21)$$

em que

$$\bar{B} = \begin{bmatrix} \bar{B}_I \\ \bar{B}_{II} \end{bmatrix}, \quad (3-22)$$

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} \bar{A}_I \\ \bar{A}_{II} \end{bmatrix}, \text{ e} \quad (3-23)$$

$$\bar{\bar{S}} = \begin{bmatrix} \bar{\bar{S}}_{11} & \bar{\bar{S}}_{12} \\ \bar{\bar{S}}_{21} & \bar{\bar{S}}_{22} \end{bmatrix}. \quad (3-24)$$

A matriz  $\bar{\bar{S}}$  é a matriz de espalhamento, e as sub-matrizes que a compõem são obtidas comparando-se (3-19) e (3-20), e são dadas por [8, p. 7], [9, p. 47]

$$\bar{\bar{S}}_{11} = (\bar{\bar{R}} + \bar{\bar{P}}^T\bar{\bar{Q}}^{-1}\bar{\bar{P}})^{-1}(\bar{\bar{R}} - \bar{\bar{P}}^T\bar{\bar{Q}}^{-1}\bar{\bar{P}}), \quad (3-25)$$

$$\bar{\bar{S}}_{12} = 2(\bar{\bar{R}} + \bar{\bar{P}}^T\bar{\bar{Q}}^{-1}\bar{\bar{P}})^{-1}\bar{\bar{P}}^T, \quad (3-26)$$

$$\bar{\bar{S}}_{21} = 2(\bar{\bar{Q}} + \bar{\bar{P}}\bar{\bar{R}}^{-1}\bar{\bar{P}}^T)^{-1}\bar{\bar{P}}, \text{ e} \quad (3-27)$$

$$\bar{\bar{S}}_{22} = -(\bar{\bar{Q}} + \bar{\bar{P}}\bar{\bar{R}}^{-1}\bar{\bar{P}}^T)^{-1}(\bar{\bar{Q}} - \bar{\bar{P}}\bar{\bar{R}}^{-1}\bar{\bar{P}}^T). \quad (3-28)$$

A matriz  $\bar{\bar{S}}$  é conhecida na literatura internacional por *generalized scattering*



matriz (GSM) [24], [26].<sup>2</sup> A matriz  $\bar{\bar{S}}_{11}$  associa as amplitudes dos campos modais refletidos vistos pela região  $I$ , devido aos campos modais incidentes nessa região, e vice-versa para a matriz  $\bar{\bar{S}}_{22}$ . A matriz  $\bar{\bar{S}}_{12}$  associa as amplitudes dos campos refletidos visto pela região  $I$  devido aos campos modais incidentes da região  $II$ , e vice-versa para a matriz  $\bar{\bar{S}}_{21}$ .

A partir do vetor  $\bar{A}$ , calculando as matrizes  $\bar{P}$ ,  $\bar{Q}$  e  $\bar{R}$ , pode-se determinar o vetor  $\bar{B}$  a partir de (3-21).

As considerações supracitadas no desenvolvimento do método do casamento de modos são válidas para descontinuidades em guias de onda coaxiais em que  $s_I \subset s_{II}$ , ilustrada na Fig. 3.2. Para a condição  $s_{II} \subset s_I$  as considerações anteriores não são válidas. Essa limitação pode ser contornada através de algumas conclusões sobre os parâmetros de transmissão e reflexão das descontinuidades da Fig. 3.3. A Fig. 3.3a é o limite em que  $s_I \subset s_{II}$ , em que  $s_I = s_{II}$ . A formulação abrange, portanto, essa estrutura. A inversão das estrutura mostrada nas figuras 3.3b,d,f recai nas descontinuidades mostradas nas figuras 3.3c,e,g, respectivamente, que são abrangidas pela formulação. Invertendo a estrutura e calculando a matriz de espalhamento referente a descontinuidade crescente, devido a simetria entre as estruturas mostradas na Fig. 3.3, a matriz de espalhamento é expressa por

$$\bar{\bar{S}} = \begin{bmatrix} \bar{\bar{S}}_{22} & \bar{\bar{S}}_{21} \\ \bar{\bar{S}}_{12} & \bar{\bar{S}}_{11} \end{bmatrix}. \quad (3-29)$$

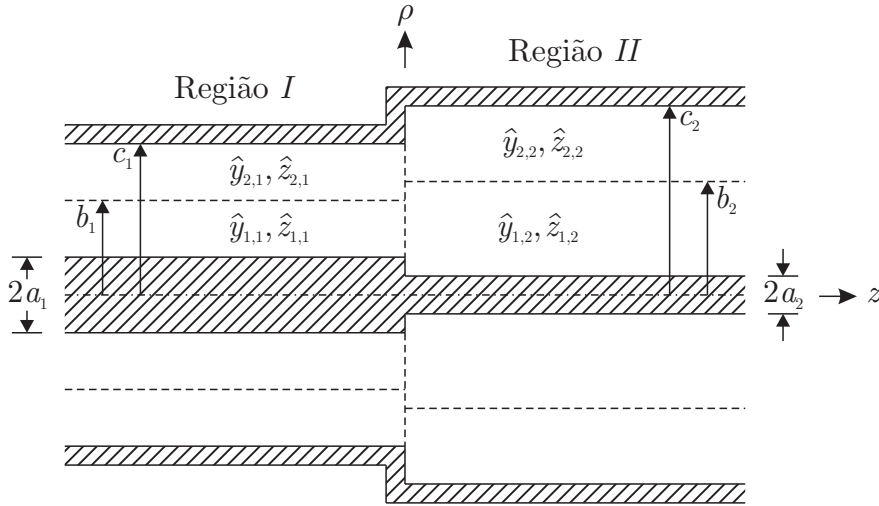


Figura 3.2: Descontinuidade da seção transversal entre guias coaxiais.

<sup>2</sup>A matriz de espalhamento generalizada  $\bar{\bar{S}}$  não deve ser confundida com a matriz de espalhamento convencional  $\bar{\bar{S}}_c$  que relaciona apenas as amplitudes dos modos propagantes. Se deseja-se encontrar a matriz  $\bar{\bar{S}}_c$  para uma junção entre guias de onda, inicialmente calcula-se a GSM e em seguida apenas os elementos relacionados a modos propagantes devem ser selecionadas para a construção da matriz de espalhamento convencional [24].

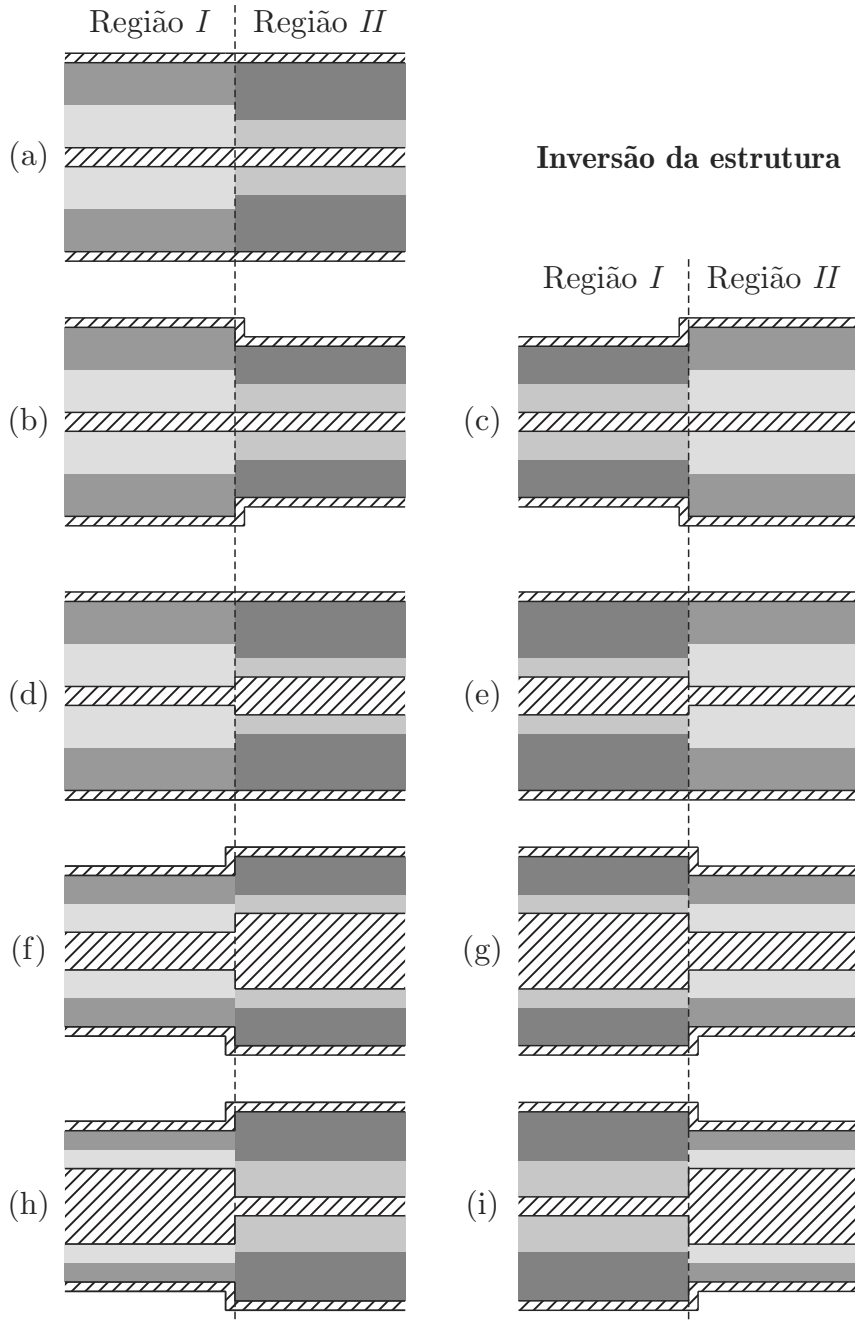


Figura 3.3: Várias descontinuidades da seção transversal entre guias coaxiais não homogêneos.

A descontinuidade mostrada na Fig. 3.3h, bem como a inversão da estrutura (Fig. 3.3i) não são abrangidas diretamente pela formulação de casamento de modos supracitada. Nessas estruturas nem a área transversal  $s_I$  nem  $s_{II}$  está completamente contida uma na outra. Esse tipo de descontinuidade pode ser tratada como duas descontinuidades cascadeadas, como ilustrado na Fig. 3.4b. A primeira descontinuidade é entre o guia da região  $I$  com o guia da região  $III$ , que é uma descontinuidade decrescente ( $s_{III} \subset s_I$ ). A segunda descontinuidade é entre o guia da região  $III$  com o guia da região  $II$ , que é

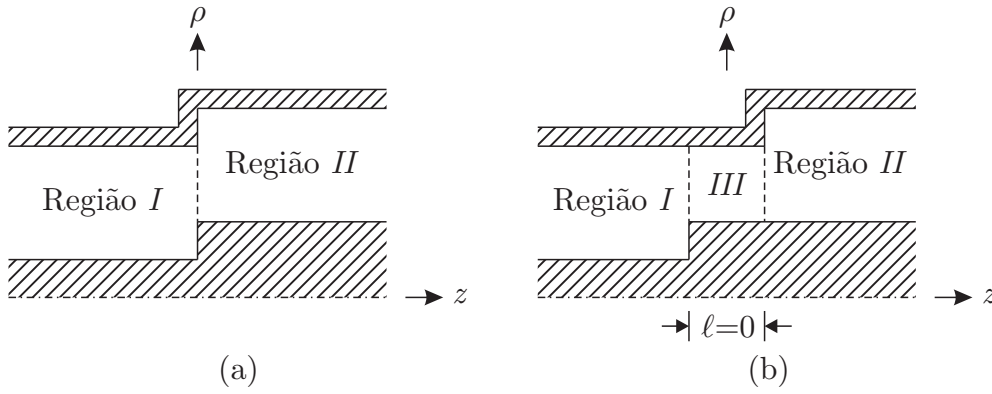


Figura 3.4: Descontinuidade mista e problema equivalente.

uma descontinuidade crescente ( $s_{III} \subset s_{II}$ ). Adicionalmente, para o problema mostrado em Fig. 3.4a equivaler ao mostrado em Fig. 3.4b, faz-se o comprimento do guia da região  $III$   $\ell \rightarrow 0$ . Isso implica que a matriz de espalhamento do guia liso da região  $III$  é a identidade no limite em que  $\ell = 0$ . Uma abordagem semelhante foi empregada por [13, apen. B] no estudo de estruturas de acoplamento coaxiais preenchidas com material homogêneo. A expansão direta para guias não homogêneos pode levar a problemas na escolha do material que preenche a região  $III$  do problema equivalente da Fig. 3.4b. Na seção 3.3.2 uma abordagem numérica avalia o preenchimento da região  $III$  para guias não homogêneos.

### 3.2.2

#### Matriz de Espalhamento de Guia Liso

A matriz de espalhamento do guia liso está associada a defasagem ou atenuação que cada modo sofre ao percorrer o guia. A determinação desta matriz está diretamente associada ao comprimento do guia e a constante de propagação associada ao cada modo. De acordo com [7] e [8, pp. 14-15] a matriz de espalhamento para um guia de comprimento  $L$  associada ao  $n$ -ésimo modo com constante de propagação  $\gamma_n = jk_{z,n}$  é dada por

$$\bar{\bar{S}}^g = \begin{bmatrix} 0 & \bar{\bar{S}}_{12}^g \\ \bar{\bar{S}}_{12}^g & 0 \end{bmatrix}, \quad (3-30)$$

em que a sub-matriz  $\bar{\bar{S}}_{12}^g$  é uma matriz diagonal  $N \times N$  com elementos dados por

$$(S_{12}^g)_{nn} = e^{-\gamma_n L}. \quad (3-31)$$

Da expressão anterior verifica-se que o comprimento  $L$  é um parâmetro essencial para o dimensionamento do número de modos  $N$  usados para aproximar os campos eletromagnéticos na região  $II$  do guia da Fig. 3.1. A medida que  $L$  aumenta, a atenuação dos modos evanescentes da região  $II$  torna-se maior; isso

implica que mesmo para um valor de  $N$  pequeno (determinado basicamente pelo número de modos propagantes) chega-se na convergência da matriz de espalhamento.

### 3.2.3

#### Cascadeamento de Matrizes de Espalhamento

Para obter a matriz de espalhamento total devido as descontinuidades da seção transversal da estrutura da Fig. 3.1 é necessário cascatear progressivamente todas as matrizes  $\bar{\bar{S}}$  de cada descontinuidade. Pode-se mostrar que a matriz de espalhamento resultante do cascadeamento de duas matrizes de espalhamento quaisquer  $\bar{\bar{S}}^a$  e  $\bar{\bar{S}}^b$  é dada por [7]

$$\bar{\bar{S}}^c = \begin{bmatrix} \bar{\bar{S}}_{11}^c & \bar{\bar{S}}_{12}^c \\ \bar{\bar{S}}_{21}^c & \bar{\bar{S}}_{22}^c \end{bmatrix}, \quad (3-32)$$

em que

$$\bar{\bar{S}}_{11}^c = \bar{\bar{S}}_{12}^a \left( \bar{\bar{I}} - \bar{\bar{S}}_{11}^b \bar{\bar{S}}_{22}^a \right)^{-1} \bar{\bar{S}}_{11}^b \bar{\bar{S}}_{21}^a + \bar{\bar{S}}_{11}^a, \quad (3-33a)$$

$$\bar{\bar{S}}_{12}^c = \bar{\bar{S}}_{12}^a \left( \bar{\bar{I}} - \bar{\bar{S}}_{11}^b \bar{\bar{S}}_{22}^a \right)^{-1} \bar{\bar{S}}_{12}^b, \quad (3-33b)$$

$$\bar{\bar{S}}_{21}^c = \bar{\bar{S}}_{21}^b \left( \bar{\bar{I}} - \bar{\bar{S}}_{22}^a \bar{\bar{S}}_{11}^b \right)^{-1} \bar{\bar{S}}_{21}^a, \text{ e} \quad (3-33c)$$

$$\bar{\bar{S}}_{22}^c = \bar{\bar{S}}_{21}^b \left( \bar{\bar{I}} - \bar{\bar{S}}_{22}^a \bar{\bar{S}}_{11}^b \right)^{-1} \bar{\bar{S}}_{22}^a \bar{\bar{S}}_{12}^b + \bar{\bar{S}}_{22}^b. \quad (3-33d)$$

As sub-matrizes com sobrescrito  $a$  e  $b$  compõem as matrizes de espalhamento  $\bar{\bar{S}}^a$  e  $\bar{\bar{S}}^b$ , respectivamente, que são montadas de forma análoga a matriz de (3-32) com a simples troca de sobrescrito. A matriz  $\bar{\bar{I}}$  é a identidade.

Um caso particular de interesse é o cascadeamento de uma matriz de espalhamento (associada a descontinuidade entre os guias das regiões  $I$  e  $II$ ) com a matriz de espalhamento do guia liso da região  $II$ . Nesse caso, fazendo a matriz de espalhamento associada a descontinuidade igual a  $\bar{\bar{S}}^a$ , e a matriz  $\bar{\bar{S}}^b$  igual a matriz de espalhamento do guia liso da região  $II$  igual a  $\bar{\bar{S}}^g$ , a partir de (3-30) pode reduzir (3-33) para

$$\bar{\bar{S}}_{11}^{cg} = \bar{\bar{S}}_{11}^a, \quad (3-34a)$$

$$\bar{\bar{S}}_{12}^{cg} = \bar{\bar{S}}_{12}^a \bar{\bar{S}}_{12}^g, \quad (3-34b)$$

$$\bar{\bar{S}}_{21}^{cg} = \bar{\bar{S}}_{12}^g \bar{\bar{S}}_{21}^a, \text{ e} \quad (3-34c)$$

$$\bar{\bar{S}}_{22}^{cg} = \bar{\bar{S}}_{12}^g \bar{\bar{S}}_{22}^a \bar{\bar{S}}_{12}^g. \quad (3-34d)$$

## 3.2.4

**Elementos da Matriz  $\bar{\bar{P}}$** 

Aqui são determinados os elementos da matriz  $\bar{\bar{P}}$  supondo que um guia coaxial homogêneo é excitado com o modo TEM<sup>z</sup> sem dependência azimutal. Assume-se que possam ocorrer descontinuidades na seção transversal deste guia de onda, como ilustra a Fig. 3.2. Os elementos da matriz  $\bar{\bar{P}}$  são dados por (3-13), ou seja,

$$P_{nm} = \int_{sI} (\mathbf{e}_{mI} \times \mathbf{h}_{nII}) \cdot d\mathbf{s},$$

em que

$$d\mathbf{s} = \mathbf{u}_z ds = \mathbf{u}_z \rho d\rho d\phi, \text{ e}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_{mI} \times \mathbf{h}_{nII} &= \begin{vmatrix} \mathbf{u}_\rho & \mathbf{u}_\phi & \mathbf{u}_z \\ e_{\rho mI} & e_{\phi mI} & e_{z mI} \\ h_{\rho nII} & h_{\phi nII} & h_{z nII} \end{vmatrix} \\ &= \mathbf{u}_\rho (e_{\phi mI} h_{z nII} - e_{z mI} h_{\phi nII}) + \mathbf{u}_\phi (e_{z mI} h_{\rho nII} - e_{\rho mI} h_{z nII}) \\ &\quad + \mathbf{u}_z (e_{\rho mI} h_{\phi nII} - e_{\phi mI} h_{\rho nII}), \end{aligned}$$

logo

$$(\mathbf{e}_{mI} \times \mathbf{h}_{nII}) \cdot \mathbf{u}_z = e_{\rho mI} h_{\phi nII} - e_{\phi mI} h_{\rho nII},$$

e portanto

$$P_{nm} = \int_0^{2\pi} \int_{a_1}^{c_1} (e_{\rho mI} h_{\phi nII} - e_{\phi mI} h_{\rho nII}) \rho d\rho d\phi.$$

Como verificado no Capítulo 2, na região *I* (homogênea) podem existir os modos TEM<sup>z</sup>, TM<sup>z</sup><sub>0p</sub> e TE<sup>z</sup><sub>0p</sub>. Na região *II* (não homogênea), tem-se os modos TM<sup>z</sup><sub>0p</sub> e TE<sup>z</sup><sub>0p</sub>. De acordo com (2-94), os modos TE<sup>z</sup><sub>0p</sub> nas regiões *I* e *II* não têm componentes  $e_\rho$  e  $h_\phi$ . Portanto, torna-se nulo o produto  $(e_\rho h_\phi)$  de todos os cruzamentos entre os modos TE<sup>z</sup><sub>0p</sub> nas regiões *I* e *II* com os modos TEM<sup>z</sup> e TM<sup>z</sup><sub>0p</sub> nas regiões *I* e *II*. É importante lembrar que como a excitação do guia homogêneo é feita com o modo TEM, sem dependência azimutal, e os modos híbridos não existem. Considerando que é de interesse avaliar o cascadeamento de vários trechos de guias de onda coaxial com descontinuidades da seção transversal, determina-se os elementos  $P_{nm}$  de forma generalizada. Admite-se que o trecho de guia onde ocorre a excitação pode ser formado por duas camadas: uma de  $a_1 < \rho < b_1$  e outra de  $b_1 < \rho < c_1$ . Essa representação é geral o suficiente para a região onde ocorre a excitação bem como outros trechos de guia homogêneo. Pode-se ter os seguintes cruzamentos de modos

em  $z = 0$ :

$$\begin{aligned}
 P_{00}^{TM \rightleftharpoons TM} &= \int_0^{2\pi} \int_{a_1}^{c_1} e_{\rho_{mI}}^{TEM} h_{\phi_{nII}}^{TEM} \rho d\rho d\phi, \\
 P_{n0}^{TM \rightleftharpoons TM} &= \int_0^{2\pi} \int_{a_1}^{c_1} e_{\rho_{mI}}^{TEM} h_{\phi_{nII}}^{TM} \rho d\rho d\phi, \\
 P_{0m}^{TM \rightleftharpoons TM} &= \int_0^{2\pi} \int_{a_1}^{c_1} e_{\rho_{mI}}^{TM} h_{\phi_{nII}}^{TEM} \rho d\rho d\phi, \\
 P_{nm}^{TM \rightleftharpoons TM} &= \int_0^{2\pi} \int_{a_1}^{c_1} e_{\rho_{mI}}^{TM} h_{\phi_{nII}}^{TM} \rho d\rho d\phi, \text{ e} \\
 P_{n0}^{TM \rightleftharpoons TE} &= P_{0m}^{TE \rightleftharpoons TM} = P_{nm}^{TE \rightleftharpoons TM} = P_{nm}^{TM \rightleftharpoons TE} = 0.
 \end{aligned}$$

Como o modo  $TE_{0p}^z$  não acopla com os outros modos, não tem influencia nos parâmetros de reflexão e transmissão associados a matriz de acoplamento. Dessa forma, a matriz  $\bar{\bar{P}}$  é montada apenas com os cruzamentos dos modos  $TM_{0p}^z$ , da maneira mostrada a seguir:

$$\bar{\bar{P}} = \begin{bmatrix} P_{00}^{TM \rightleftharpoons TM} & P_{01}^{TM \rightleftharpoons TM} & P_{02}^{TM \rightleftharpoons TM} & P_{03}^{TM \rightleftharpoons TM} & \dots & P_{0m}^{TM \rightleftharpoons TM} \\ P_{10}^{TM \rightleftharpoons TM} & P_{11}^{TM \rightleftharpoons TM} & P_{12}^{TM \rightleftharpoons TM} & P_{13}^{TM \rightleftharpoons TM} & \dots & P_{1m}^{TM \rightleftharpoons TM} \\ P_{20}^{TM \rightleftharpoons TM} & P_{21}^{TM \rightleftharpoons TM} & P_{22}^{TM \rightleftharpoons TM} & P_{23}^{TM \rightleftharpoons TM} & \dots & P_{2m}^{TM \rightleftharpoons TM} \\ P_{30}^{TM \rightleftharpoons TM} & P_{31}^{TM \rightleftharpoons TM} & P_{32}^{TM \rightleftharpoons TM} & P_{33}^{TM \rightleftharpoons TM} & \dots & P_{3m}^{TM \rightleftharpoons TM} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{n0}^{TM \rightleftharpoons TM} & P_{n1}^{TM \rightleftharpoons TM} & P_{n2}^{TM \rightleftharpoons TM} & P_{n3}^{TM \rightleftharpoons TM} & \dots & P_{nm}^{TM \rightleftharpoons TM} \end{bmatrix}. \quad (3-35)$$

### Elementos $P_{nm}^{TM \rightleftharpoons TM}$

Substituindo as expressões dos campos na expressão de  $P_{nm}$  que relaciona o cruzamento dos modos  $TM^z$  da região  $I$  com os modos  $TM^z$  da região  $II$ , em que existem  $m = 0, 1, 2, \dots, M-1$  modos TM na região  $I$ , e  $n = 0, 1, 2, \dots, N-1$  modos TM na região  $II$ , pode-se determinar os elementos  $P_{nm}^{TM \rightleftharpoons TM}$ . Como o modo  $TM_{00}^z$  se degenera em um modo  $TEM^z$  em um guia homogêneo, sua inclusão não é feita nesta seção. Contudo, tratando-se de guias não homogêneos as expressões desenvolvidas nessa seção são válidas inclusive para  $m = n = 0$ . Dessa forma, pode-se escrever para  $z = 0$

$$e_{\rho_{mI}}^{TM} = \begin{cases} \frac{-jk_{z,m}^{TM}k_{\rho 1,m}^{TM}}{\hat{y}_{1,1}} [A_{0,m}J'_0(k_{\rho 1,m}^{TM}\rho) + B_{0,m}Y'_0(k_{\rho 1,m}^{TM}\rho)], & \text{para } a_1 < \rho < b_1 \\ \frac{-jk_{z,m}^{TM}k_{\rho 2,m}^{TM}}{\hat{y}_{2,1}} [C_{0,m}J'_0(k_{\rho 2,m}^{TM}\rho) + D_{0,m}Y'_0(k_{\rho 2,m}^{TM}\rho)], & \text{para } b_1 < \rho < c_1 \end{cases}, \text{ e} \quad (3-36)$$

$$h_{\phi_{nII}}^{TM} = \begin{cases} -k_{\rho 1,n}^{TM} [A_{0,n}J'_0(k_{\rho 1,n}^{TM}\rho) + B_{0,n}Y'_0(k_{\rho 1,n}^{TM}\rho)], & \text{para } a_2 < \rho < b_2 \\ -k_{\rho 2,n}^{TM} [C_{0,n}J'_0(k_{\rho 2,n}^{TM}\rho) + D_{0,n}Y'_0(k_{\rho 2,n}^{TM}\rho)], & \text{para } b_2 < \rho < c_2 \end{cases}, \quad (3-37)$$

e portanto

$$P_{nm}^{TM \rightleftharpoons TM} = \int_0^{2\pi} \left\{ \begin{aligned} & \int_{a_1}^{b_1} e_{\rho 1,mI}^{TM} h_{\phi 2,nII}^{TM} \rho d\rho + \int_{b_1}^{c_1} e_{\rho 2,mI}^{TM} h_{\phi 2,nII}^{TM} \rho d\rho \\ & \int_{a_1}^{b_1} e_{\rho 1,mI}^{TM} h_{\phi 1,nII}^{TM} \rho d\rho + \int_{b_1}^{c_1} e_{\rho 2,mI}^{TM} h_{\phi 1,nII}^{TM} \rho d\rho \\ & \int_{a_1}^{b_2} e_{\rho 1,mI}^{TM} h_{\phi 1,nII}^{TM} \rho d\rho + \int_{b_2}^{b_1} e_{\rho 1,mI}^{TM} h_{\phi 2,nII}^{TM} \rho d\rho + \int_{b_1}^{c_1} e_{\rho 2,mI}^{TM} h_{\phi 2,nII}^{TM} \rho d\rho \\ & \int_{a_1}^{b_1} e_{\rho 1,mI}^{TM} h_{\phi 1,nII}^{TM} \rho d\rho + \int_{b_1}^{b_2} e_{\rho 2,mI}^{TM} h_{\phi 1,nII}^{TM} \rho d\rho + \int_{b_2}^{c_1} e_{\rho 2,mI}^{TM} h_{\phi 2,nII}^{TM} \rho d\rho \\ & \int_{a_1}^{b_1} e_{\rho 1,mI}^{TM} h_{\phi 1,nII}^{TM} \rho d\rho + \int_{b_1}^{c_1} e_{\rho 2,mI}^{TM} h_{\phi 2,nII}^{TM} \rho d\rho \end{aligned} \right\} d\phi, \quad (3-38)$$

$$\begin{cases} \text{se } a_1 \geq b_2 \\ \text{se } b_2 \geq c_1 \\ \text{se } a_1 < b_2 < c_1 \text{ e } b_1 > b_2, \\ \text{se } a_1 < b_2 < c_1 \text{ e } b_1 < b_2 \\ \text{se } a_1 < b_2 < c_1 \text{ e } b_1 = b_2 \end{cases}$$

que é suficientemente geral para resolver a matriz  $P_{nm}^{TM \rightleftharpoons TM}$  para as descon-  
tinuidades da seção transversal entre guias coaxiais não homogêneos da Fig.  
3.3.<sup>3</sup>

Notando que  $e_{\rho}^{TM}$  e  $h_{\phi}^{TM}$  independem de  $\phi$ , a integral em termos de  $\phi$   
em (3-38) é determinada. Dessa forma, as integrais restantes em (3-38) são

<sup>3</sup>Deve ser observado que foi empregado uma notação abreviada na representação dos  
campos modais. Por exemplo,  $k_{\rho 1,n}^{TM}$  deve ser interpretado como o  $n$ -ésimo número de onda  
radial da camada 1 (mais interna do guia coaxial) para o modo  $TM_{0n}^z$  da região  $II$ .

descritas de forma genérica por

$$\int \frac{jk_{z,m}^{TM} k_{\rho 1,m}^{TM} k_{\rho 1,n}^{TM}}{\hat{y}_{1,1}} Z'_0(k_{\rho 1,m}^{TM} \rho) Z'_0(k_{\rho 1,n}^{TM} \rho) \rho d\rho, \quad (3-39a)$$

$$\int \frac{jk_{z,m}^{TM} k_{\rho 1,m}^{TM} k_{\rho 2,n}^{TM}}{\hat{y}_{1,1}} Z'_0(k_{\rho 1,m}^{TM} \rho) Z'_0(k_{\rho 2,n}^{TM} \rho) \rho d\rho, \quad (3-39b)$$

$$\int \frac{jk_{z,m}^{TM} k_{\rho 2,m}^{TM} k_{\rho 2,n}^{TM}}{\hat{y}_{2,1}} Z'_0(k_{\rho 2,m}^{TM} \rho) Z'_0(k_{\rho 1,n}^{TM} \rho) \rho d\rho, \text{ e} \quad (3-39c)$$

$$\int \frac{jk_{z,m}^{TM} k_{\rho 2,m}^{TM} k_{\rho 2,n}^{TM}}{\hat{y}_{2,1}} Z'_0(k_{\rho 2,m}^{TM} \rho) Z'_0(k_{\rho 2,n}^{TM} \rho) \rho d\rho, \quad (3-39d)$$

em que foi usada a notação abreviada

$$Z'_0(k_{\rho 1,m}^{TM} \rho) = -Z_1(k_{\rho 1,m}^{TM} \rho) = A_{0,m} J'_0(k_{\rho 1,m}^{TM} \rho) + B_{0,m} Y'_0(k_{\rho 1,m}^{TM} \rho), \quad (3-40)$$

$$Z'_0(k_{\rho 2,m}^{TM} \rho) = -Z_1(k_{\rho 2,m}^{TM} \rho) = C_{0,m} J'_0(k_{\rho 2,m}^{TM} \rho) + D_{0,m} Y'_0(k_{\rho 2,m}^{TM} \rho), \quad (3-41)$$

$$Z'_0(k_{\rho 1,n}^{TM} \rho) = -Z_1(k_{\rho 1,n}^{TM} \rho) = A_{0,n} J'_0(k_{\rho 1,n}^{TM} \rho) + B_{0,n} Y'_0(k_{\rho 1,n}^{TM} \rho), \text{ e} \quad (3-42)$$

$$Z'_0(k_{\rho 2,n}^{TM} \rho) = -Z_1(k_{\rho 2,n}^{TM} \rho) = C_{0,n} J'_0(k_{\rho 2,n}^{TM} \rho) + D_{0,n} Y'_0(k_{\rho 2,n}^{TM} \rho). \quad (3-43)$$

De acordo com [19, p. 484] e [27, p. 142], para  $\mathcal{C}_\nu(z)$  e  $\mathcal{D}_\nu(z)$  duas funções cilíndricas quaisquer de ordem  $\nu$ , tem-se que

$$\int_{z_1}^{z_2} z \mathcal{C}_\nu(\alpha z) \mathcal{D}_\nu(\beta z) dz = \left\{ \frac{z}{\beta^2 - \alpha^2} [\alpha \mathcal{D}_\nu(\beta z) \mathcal{C}'_\nu(\alpha z) - \beta \mathcal{C}_\nu(\alpha z) \mathcal{D}'_\nu(\beta z)] \right\}_{z_1}^{z_2},$$

que permite escrever

$$\begin{aligned} & \int_{\rho_1}^{\rho_2} \frac{jk_{z,m}^{TM} k_{\rho 1,m}^{TM} k_{\rho 1,n}^{TM}}{\hat{y}_{1,1}} Z'_0(k_{\rho 1,m}^{TM} \rho) Z'_0(k_{\rho 1,n}^{TM} \rho) \rho d\rho \\ &= \frac{jk_{z,m}^{TM} k_{\rho 1,m}^{TM} k_{\rho 1,n}^{TM}}{\hat{y}_{1,1}} \int_{\rho_1}^{\rho_2} Z_1(k_{\rho 1,m}^{TM} \rho) Z_1(k_{\rho 1,n}^{TM} \rho) \rho d\rho \\ &= \frac{jk_{z,m}^{TM} k_{\rho 1,m}^{TM} k_{\rho 1,n}^{TM}}{\hat{y}_{1,1}} \left\{ \frac{\rho}{(k_{\rho 1,n}^{TM})^2 - (k_{\rho 1,m}^{TM})^2} \right. \\ & \quad \times \left. [k_{\rho 1,m}^{TM} Z_1(k_{\rho 1,n}^{TM} \rho) Z'_1(k_{\rho 1,m}^{TM} \rho) - k_{\rho 1,n}^{TM} Z_1(k_{\rho 1,m}^{TM} \rho) Z'_1(k_{\rho 1,n}^{TM} \rho)] \right\}_{\rho_1}^{\rho_2}. \end{aligned}$$



Como  $Z'_1(z) = Z_0(z) - Z_1(z)/z$ , pode-se escrever

$$\begin{aligned}
 & \int_{\rho_1}^{\rho_2} \frac{j k_{z,m}^{TM} k_{\rho_1,m}^{TM} k_{\rho_1,n}^{TM}}{\hat{y}_{1,1}} Z'_0(k_{\rho_1,m}^{TM} \rho) Z'_0(k_{\rho_1,n}^{TM} \rho) \rho d\rho \\
 &= \frac{j k_{z,m}^{TM} k_{\rho_1,m}^{TM} k_{\rho_1,n}^{TM}}{\hat{y}_{1,1}} \left\{ \frac{\rho}{(k_{\rho_1,n}^{TM})^2 - (k_{\rho_1,m}^{TM})^2} \right. \\
 & \quad \times \left\{ k_{\rho_1,m}^{TM} Z_1(k_{\rho_1,n}^{TM} \rho) \left[ Z_0(k_{\rho_1,m}^{TM} \rho) - \frac{1}{k_{\rho_1,m}^{TM} \rho} Z_1(k_{\rho_1,m}^{TM} \rho) \right] \right. \\
 & \quad \left. \left. - k_{\rho_1,n}^{TM} Z_1(k_{\rho_1,m}^{TM} \rho) \left[ Z_0(k_{\rho_1,n}^{TM} \rho) - \frac{1}{k_{\rho_1,n}^{TM} \rho} Z_1(k_{\rho_1,n}^{TM} \rho) \right] \right] \right\} \right\}_{\rho_1}^{\rho_2} \\
 &= \frac{j k_{z,m}^{TM} k_{\rho_1,m}^{TM} k_{\rho_1,n}^{TM}}{\hat{y}_{1,1}} \left\{ \frac{\rho}{(k_{\rho_1,n}^{TM})^2 - (k_{\rho_1,m}^{TM})^2} \right. \\
 & \quad \times \left[ k_{\rho_1,m}^{TM} Z_1(k_{\rho_1,n}^{TM} \rho) Z_0(k_{\rho_1,m}^{TM} \rho) - k_{\rho_1,n}^{TM} Z_1(k_{\rho_1,m}^{TM} \rho) Z_0(k_{\rho_1,n}^{TM} \rho) \right] \right\}_{\rho_1}^{\rho_2}. \quad (3-44)
 \end{aligned}$$

Usando o resultado de (3-44), por analogia, pode-se obter todas as demais integrais de (3-38). Assim, os elementos  $P_{nm}^{TM \rightleftharpoons TM}$  para  $a_1 \geq b_2$  são dados por

$$\begin{aligned}
 P_{nm}^{TM \rightleftharpoons TM} &= 2\pi j k_{z,m}^{TM} \left\{ \frac{k_{\rho_1,m}^{TM} k_{\rho_2,n}^{TM}}{\hat{y}_{1,1}} \left\{ \frac{\rho}{(k_{\rho_2,n}^{TM})^2 - (k_{\rho_1,m}^{TM})^2} \right. \right. \\
 & \quad \times \left[ k_{\rho_1,m}^{TM} Z_1(k_{\rho_2,n}^{TM} \rho) Z_0(k_{\rho_1,m}^{TM} \rho) - k_{\rho_2,n}^{TM} Z_1(k_{\rho_1,m}^{TM} \rho) Z_0(k_{\rho_2,n}^{TM} \rho) \right] \right\}_{a_1}^{b_1} \\
 & \quad + \frac{k_{\rho_2,m}^{TM} k_{\rho_2,n}^{TM}}{\hat{y}_{2,1}} \left\{ \frac{\rho}{(k_{\rho_2,n}^{TM})^2 - (k_{\rho_2,m}^{TM})^2} \right. \\
 & \quad \times \left[ k_{\rho_2,m}^{TM} Z_1(k_{\rho_2,n}^{TM} \rho) Z_0(k_{\rho_2,m}^{TM} \rho) - k_{\rho_2,n}^{TM} Z_1(k_{\rho_2,m}^{TM} \rho) Z_0(k_{\rho_2,n}^{TM} \rho) \right] \right\}_{b_1}^{c_1} \Bigg\} \\
 &= 2\pi j k_{z,m}^{TM} \left\{ \frac{k_{\rho_1,m}^{TM} k_{\rho_2,n}^{TM}}{\hat{y}_{1,1}} \left\{ \frac{b_1}{(k_{\rho_2,n}^{TM})^2 - (k_{\rho_1,m}^{TM})^2} \right. \right. \\
 & \quad \times \left[ k_{\rho_1,m}^{TM} Z_1(b_1 k_{\rho_2,n}^{TM}) Z_0(b_1 k_{\rho_1,m}^{TM}) - k_{\rho_2,n}^{TM} Z_1(b_1 k_{\rho_1,m}^{TM}) Z_0(b_1 k_{\rho_2,n}^{TM}) \right] - \frac{a_1}{(k_{\rho_2,n}^{TM})^2 - (k_{\rho_1,m}^{TM})^2} \\
 & \quad \times \left[ k_{\rho_1,m}^{TM} Z_1(a_1 k_{\rho_2,n}^{TM}) Z_0(a_1 k_{\rho_1,m}^{TM}) - k_{\rho_2,n}^{TM} Z_1(a_1 k_{\rho_1,m}^{TM}) Z_0(a_1 k_{\rho_2,n}^{TM}) \right] \Bigg\} \\
 & \quad + \frac{k_{\rho_2,m}^{TM} k_{\rho_2,n}^{TM}}{\hat{y}_{2,1}} \left\{ \frac{c_1}{(k_{\rho_2,n}^{TM})^2 - (k_{\rho_2,m}^{TM})^2} \right. \\
 & \quad \times \left[ k_{\rho_2,m}^{TM} Z_1(c_1 k_{\rho_2,n}^{TM}) Z_0(c_1 k_{\rho_2,m}^{TM}) - k_{\rho_2,n}^{TM} Z_1(c_1 k_{\rho_2,m}^{TM}) Z_0(c_1 k_{\rho_2,n}^{TM}) \right] - \frac{b_1}{(k_{\rho_2,n}^{TM})^2 - (k_{\rho_2,m}^{TM})^2} \\
 & \quad \times \left[ k_{\rho_2,m}^{TM} Z_1(b_1 k_{\rho_2,n}^{TM}) Z_0(b_1 k_{\rho_2,m}^{TM}) - k_{\rho_2,n}^{TM} Z_1(b_1 k_{\rho_2,m}^{TM}) Z_0(b_1 k_{\rho_2,n}^{TM}) \right] \Bigg\} \Bigg\}, \text{ para } a_1 \geq b_2.
 \end{aligned}$$

Das condições de contorno, tem-se  $Z_0(a_1 k_{\rho 1, m}^{TM}) = Z_0(c_1 k_{\rho 2, m}^{TM}) = 0$ , que reduz a expressão acima para

$$\begin{aligned}
 P_{nm}^{TM \rightleftharpoons TM} = 2\pi j k_{z, m}^{TM} & \left\{ \frac{k_{\rho 1, m}^{TM} k_{\rho 2, n}^{TM}}{\hat{y}_{1, 1}} \frac{1}{(k_{\rho 2, n}^{TM})^2 - (k_{\rho 1, m}^{TM})^2} \right. \\
 & \times \left\{ b_1 \left[ k_{\rho 1, m}^{TM} Z_1(b_1 k_{\rho 2, n}^{TM}) Z_0(b_1 k_{\rho 1, m}^{TM}) - k_{\rho 2, n}^{TM} Z_1(b_1 k_{\rho 1, m}^{TM}) Z_0(b_1 k_{\rho 2, n}^{TM}) \right] \right. \\
 & \quad \left. + a_1 k_{\rho 2, n}^{TM} Z_1(a_1 k_{\rho 1, m}^{TM}) Z_0(a_1 k_{\rho 2, n}^{TM}) \right\} \\
 & + \frac{k_{\rho 2, m}^{TM} k_{\rho 2, n}^{TM}}{\hat{y}_{2, 1}} \frac{1}{(k_{\rho 2, n}^{TM})^2 - (k_{\rho 2, m}^{TM})^2} \left\{ -c_1 k_{\rho 2, n}^{TM} Z_1(c_1 k_{\rho 2, m}^{TM}) Z_0(c_1 k_{\rho 2, n}^{TM}) \right. \\
 & \left. \left. - b_1 \left[ k_{\rho 2, m}^{TM} Z_1(b_1 k_{\rho 2, n}^{TM}) Z_0(b_1 k_{\rho 2, m}^{TM}) - k_{\rho 2, n}^{TM} Z_1(b_1 k_{\rho 2, m}^{TM}) Z_0(b_1 k_{\rho 2, n}^{TM}) \right] \right\} \right\}, \\
 & \text{para } a_1 \geq b_2. \quad (3-45)
 \end{aligned}$$

Os elementos  $P_{nm}^{TM \rightleftharpoons TM}$  para  $b_2 \geq c_1$  são dados por

$$\begin{aligned}
 P_{nm}^{TM \rightleftharpoons TM} = 2\pi j k_{z, m}^{TM} & \left\{ \frac{k_{\rho 1, m}^{TM} k_{\rho 1, n}^{TM}}{\hat{y}_{1, 1}} \frac{1}{(k_{\rho 1, n}^{TM})^2 - (k_{\rho 1, m}^{TM})^2} \right. \\
 & \times \left\{ b_1 \left[ k_{\rho 1, m}^{TM} Z_1(b_1 k_{\rho 1, n}^{TM}) Z_0(b_1 k_{\rho 1, m}^{TM}) - k_{\rho 1, n}^{TM} Z_1(b_1 k_{\rho 1, m}^{TM}) Z_0(b_1 k_{\rho 1, n}^{TM}) \right] \right. \\
 & \left. - a_1 \left[ k_{\rho 1, m}^{TM} Z_1(a_1 k_{\rho 1, n}^{TM}) Z_0(a_1 k_{\rho 1, m}^{TM}) - k_{\rho 1, n}^{TM} Z_1(a_1 k_{\rho 1, m}^{TM}) Z_0(a_1 k_{\rho 1, n}^{TM}) \right] \right\} \\
 & + \frac{k_{\rho 2, m}^{TM} k_{\rho 1, n}^{TM}}{\hat{y}_{2, 1}} \frac{1}{(k_{\rho 1, n}^{TM})^2 - (k_{\rho 2, m}^{TM})^2} \\
 & \times \left\{ c_1 \left[ k_{\rho 2, m}^{TM} Z_1(c_1 k_{\rho 1, n}^{TM}) Z_0(c_1 k_{\rho 2, m}^{TM}) - k_{\rho 1, n}^{TM} Z_1(c_1 k_{\rho 2, m}^{TM}) Z_0(c_1 k_{\rho 1, n}^{TM}) \right] \right. \\
 & \left. \left. - b_1 \left[ k_{\rho 2, m}^{TM} Z_1(b_1 k_{\rho 1, n}^{TM}) Z_0(b_1 k_{\rho 2, m}^{TM}) - k_{\rho 1, n}^{TM} Z_1(b_1 k_{\rho 2, m}^{TM}) Z_0(b_1 k_{\rho 1, n}^{TM}) \right] \right\} \right\}, \\
 & \text{para } b_2 \geq c_1.
 \end{aligned}$$

Das condições de contorno, tem-se  $Z_0(a_1 k_{\rho 1, m}^{TM}) = Z_0(c_1 k_{\rho 2, m}^{TM}) = 0$ , que reduz a

expressão anterior para

$$\begin{aligned}
 P_{nm}^{TM \rightleftharpoons TM} = & 2\pi j k_{z,m}^{TM} \left\{ \frac{k_{\rho 1,m}^{TM} k_{\rho 1,n}^{TM}}{\hat{y}_{1,1}} \frac{1}{(k_{\rho 1,n}^{TM})^2 - (k_{\rho 1,m}^{TM})^2} \right. \\
 & \times \left\{ b_1 \left[ k_{\rho 1,m}^{TM} Z_1(b_1 k_{\rho 1,n}^{TM}) Z_0(b_1 k_{\rho 1,m}^{TM}) - k_{\rho 1,n}^{TM} Z_1(b_1 k_{\rho 1,m}^{TM}) Z_0(b_1 k_{\rho 1,n}^{TM}) \right] \right. \\
 & \quad \left. + a_1 k_{\rho 1,n}^{TM} Z_1(a_1 k_{\rho 1,m}^{TM}) Z_0(a_1 k_{\rho 1,n}^{TM}) \right\} \\
 & + \frac{k_{\rho 2,m}^{TM} k_{\rho 1,n}^{TM}}{\hat{y}_{2,1}} \frac{1}{(k_{\rho 1,n}^{TM})^2 - (k_{\rho 2,m}^{TM})^2} \left\{ -c_1 k_{\rho 1,n}^{TM} Z_1(c_1 k_{\rho 2,m}^{TM}) Z_0(c_1 k_{\rho 1,n}^{TM}) \right. \\
 & \left. - b_1 \left[ k_{\rho 2,m}^{TM} Z_1(b_1 k_{\rho 1,n}^{TM}) Z_0(b_1 k_{\rho 2,m}^{TM}) - k_{\rho 1,n}^{TM} Z_1(b_1 k_{\rho 2,m}^{TM}) Z_0(b_1 k_{\rho 1,n}^{TM}) \right] \right\} \left. \right\}, \\
 & \text{para } b_2 \geq c_1. \quad (3-46)
 \end{aligned}$$

Os elementos  $P_{nm}^{TM \rightleftharpoons TM}$  para  $a_1 < b_2 < c_1$  e  $b_1 > b_2$  são dados por

$$\begin{aligned}
 P_{nm}^{TM \rightleftharpoons TM} = & 2\pi j k_{z,m}^{TM} \left\{ \frac{k_{\rho 1,m}^{TM} k_{\rho 1,n}^{TM}}{\hat{y}_{1,1}} \frac{1}{(k_{\rho 1,n}^{TM})^2 - (k_{\rho 1,m}^{TM})^2} \right. \\
 & \times \left\{ b_2 \left[ k_{\rho 1,m}^{TM} Z_1(b_2 k_{\rho 1,n}^{TM}) Z_0(b_2 k_{\rho 1,m}^{TM}) - k_{\rho 1,n}^{TM} Z_1(b_2 k_{\rho 1,m}^{TM}) Z_0(b_2 k_{\rho 1,n}^{TM}) \right] \right. \\
 & \left. - a_1 \left[ k_{\rho 1,m}^{TM} Z_1(a_1 k_{\rho 1,n}^{TM}) Z_0(a_1 k_{\rho 1,m}^{TM}) - k_{\rho 1,n}^{TM} Z_1(a_1 k_{\rho 1,m}^{TM}) Z_0(a_1 k_{\rho 1,n}^{TM}) \right] \right\} \\
 & + \frac{k_{\rho 1,m}^{TM} k_{\rho 2,n}^{TM}}{\hat{y}_{1,1}} \frac{1}{(k_{\rho 2,n}^{TM})^2 - (k_{\rho 1,m}^{TM})^2} \\
 & \times \left\{ b_1 \left[ k_{\rho 1,m}^{TM} Z_1(b_1 k_{\rho 2,n}^{TM}) Z_0(b_1 k_{\rho 1,m}^{TM}) - k_{\rho 2,n}^{TM} Z_1(b_1 k_{\rho 1,m}^{TM}) Z_0(b_1 k_{\rho 2,n}^{TM}) \right] \right. \\
 & \left. - b_2 \left[ k_{\rho 1,m}^{TM} Z_1(b_2 k_{\rho 2,n}^{TM}) Z_0(b_2 k_{\rho 1,m}^{TM}) - k_{\rho 2,n}^{TM} Z_1(b_2 k_{\rho 1,m}^{TM}) Z_0(b_2 k_{\rho 2,n}^{TM}) \right] \right\} \\
 & + \frac{k_{\rho 2,m}^{TM} k_{\rho 2,n}^{TM}}{\hat{y}_{2,1}} \frac{1}{(k_{\rho 2,n}^{TM})^2 - (k_{\rho 2,m}^{TM})^2} \\
 & \times \left\{ c_1 \left[ k_{\rho 2,m}^{TM} Z_1(c_1 k_{\rho 2,n}^{TM}) Z_0(c_1 k_{\rho 2,m}^{TM}) - k_{\rho 2,n}^{TM} Z_1(c_1 k_{\rho 2,m}^{TM}) Z_0(c_1 k_{\rho 2,n}^{TM}) \right] \right. \\
 & \left. - b_1 \left[ k_{\rho 2,m}^{TM} Z_1(b_1 k_{\rho 2,n}^{TM}) Z_0(b_1 k_{\rho 2,m}^{TM}) - k_{\rho 2,n}^{TM} Z_1(b_1 k_{\rho 2,m}^{TM}) Z_0(b_1 k_{\rho 2,n}^{TM}) \right] \right\} \left. \right\}, \\
 & \text{para } a_1 < b_2 < c_1 \text{ e } b_1 > b_2.
 \end{aligned}$$

Das condições de contorno, tem-se  $Z_0(a_1 k_{\rho 1,m}^{TM}) = Z_0(c_1 k_{\rho 2,m}^{TM}) = 0$ , que reduz a

expressão acima para

$$\begin{aligned}
 P_{nm}^{TM \rightleftharpoons TM} = & 2\pi j k_{z,m}^{TM} \left\{ \frac{k_{\rho 1,m}^{TM} k_{\rho 1,n}^{TM}}{\hat{y}_{1,1}} \frac{1}{(k_{\rho 1,n}^{TM})^2 - (k_{\rho 1,m}^{TM})^2} \right. \\
 & \times \left\{ b_2 \left[ k_{\rho 1,m}^{TM} Z_1(b_2 k_{\rho 1,n}^{TM}) Z_0(b_2 k_{\rho 1,m}^{TM}) - k_{\rho 1,n}^{TM} Z_1(b_2 k_{\rho 1,m}^{TM}) Z_0(b_2 k_{\rho 1,n}^{TM}) \right] \right. \\
 & + a_1 k_{\rho 1,n}^{TM} Z_1(a_1 k_{\rho 1,m}^{TM}) Z_0(a_1 k_{\rho 1,n}^{TM}) \left. \right\} + \frac{k_{\rho 1,m}^{TM} k_{\rho 2,n}^{TM}}{\hat{y}_{1,1}} \frac{1}{(k_{\rho 2,n}^{TM})^2 - (k_{\rho 1,m}^{TM})^2} \\
 & \times \left\{ b_1 \left[ k_{\rho 1,m}^{TM} Z_1(b_1 k_{\rho 2,n}^{TM}) Z_0(b_1 k_{\rho 1,m}^{TM}) - k_{\rho 2,n}^{TM} Z_1(b_1 k_{\rho 1,m}^{TM}) Z_0(b_1 k_{\rho 2,n}^{TM}) \right] \right. \\
 & - b_2 \left[ k_{\rho 1,m}^{TM} Z_1(b_2 k_{\rho 2,n}^{TM}) Z_0(b_2 k_{\rho 1,m}^{TM}) - k_{\rho 2,n}^{TM} Z_1(b_2 k_{\rho 1,m}^{TM}) Z_0(b_2 k_{\rho 2,n}^{TM}) \right] \left. \right\} \\
 & + \frac{k_{\rho 2,m}^{TM} k_{\rho 2,n}^{TM}}{\hat{y}_{2,1}} \frac{1}{(k_{\rho 2,n}^{TM})^2 - (k_{\rho 2,m}^{TM})^2} \left\{ -c_1 k_{\rho 2,n}^{TM} Z_1(c_1 k_{\rho 2,m}^{TM}) Z_0(c_1 k_{\rho 2,n}^{TM}) \right. \\
 & \left. \left. - b_1 \left[ k_{\rho 2,m}^{TM} Z_1(b_1 k_{\rho 2,n}^{TM}) Z_0(b_1 k_{\rho 2,m}^{TM}) - k_{\rho 2,n}^{TM} Z_1(b_1 k_{\rho 2,m}^{TM}) Z_0(b_1 k_{\rho 2,n}^{TM}) \right] \right\} \right\}, \\
 & \text{para } a_1 < b_2 < c_1 \text{ e } b_1 > b_2. \quad (3-47)
 \end{aligned}$$

Os elementos  $P_{nm}^{TM \rightleftharpoons TM}$  para  $a_1 < b_2 < c_1$  e  $b_1 < b_2$  são dados por

$$\begin{aligned}
 P_{nm}^{TM \rightleftharpoons TM} = & 2\pi j k_{z,m}^{TM} \left\{ \frac{k_{\rho 1,m}^{TM} k_{\rho 1,n}^{TM}}{\hat{y}_{1,1}} \frac{1}{(k_{\rho 1,n}^{TM})^2 - (k_{\rho 1,m}^{TM})^2} \right. \\
 & \times \left\{ b_1 \left[ k_{\rho 1,m}^{TM} Z_1(b_1 k_{\rho 1,n}^{TM}) Z_0(b_1 k_{\rho 1,m}^{TM}) - k_{\rho 1,n}^{TM} Z_1(b_1 k_{\rho 1,m}^{TM}) Z_0(b_1 k_{\rho 1,n}^{TM}) \right] \right. \\
 & - a_1 \left[ k_{\rho 1,m}^{TM} Z_1(a_1 k_{\rho 1,n}^{TM}) Z_0(a_1 k_{\rho 1,m}^{TM}) - k_{\rho 1,n}^{TM} Z_1(a_1 k_{\rho 1,m}^{TM}) Z_0(a_1 k_{\rho 1,n}^{TM}) \right] \left. \right\} \\
 & + \frac{k_{\rho 2,m}^{TM} k_{\rho 1,n}^{TM}}{\hat{y}_{2,1}} \frac{1}{(k_{\rho 1,n}^{TM})^2 - (k_{\rho 2,m}^{TM})^2} \\
 & \times \left\{ b_2 \left[ k_{\rho 2,m}^{TM} Z_1(b_2 k_{\rho 1,n}^{TM}) Z_0(b_2 k_{\rho 2,m}^{TM}) - k_{\rho 1,n}^{TM} Z_1(b_2 k_{\rho 2,m}^{TM}) Z_0(b_2 k_{\rho 1,n}^{TM}) \right] \right. \\
 & - b_1 \left[ k_{\rho 2,m}^{TM} Z_1(b_1 k_{\rho 1,n}^{TM}) Z_0(b_1 k_{\rho 2,m}^{TM}) - k_{\rho 1,n}^{TM} Z_1(b_1 k_{\rho 2,m}^{TM}) Z_0(b_1 k_{\rho 1,n}^{TM}) \right] \left. \right\} \\
 & + \frac{k_{\rho 2,m}^{TM} k_{\rho 2,n}^{TM}}{\hat{y}_{2,1}} \frac{1}{(k_{\rho 2,n}^{TM})^2 - (k_{\rho 2,m}^{TM})^2} \\
 & \times \left\{ c_1 \left[ k_{\rho 2,m}^{TM} Z_1(c_1 k_{\rho 2,n}^{TM}) Z_0(c_1 k_{\rho 2,m}^{TM}) - k_{\rho 2,n}^{TM} Z_1(c_1 k_{\rho 2,m}^{TM}) Z_0(c_1 k_{\rho 2,n}^{TM}) \right] \right. \\
 & \left. \left. - b_2 \left[ k_{\rho 2,m}^{TM} Z_1(b_2 k_{\rho 2,n}^{TM}) Z_0(b_2 k_{\rho 2,m}^{TM}) - k_{\rho 2,n}^{TM} Z_1(b_2 k_{\rho 2,m}^{TM}) Z_0(b_2 k_{\rho 2,n}^{TM}) \right] \right\} \right\}, \\
 & \text{para } a_1 < b_2 < c_1 \text{ e } b_1 < b_2.
 \end{aligned}$$

Das condições de contorno, tem-se  $Z_0(a_1 k_{\rho 1, m}^{TM}) = Z_0(c_1 k_{\rho 2, m}^{TM}) = 0$ , que reduz a expressão acima para

$$\begin{aligned}
 P_{nm}^{TM \rightleftharpoons TM} = 2\pi j k_{z, m}^{TM} & \left\{ \frac{k_{\rho 1, m}^{TM} k_{\rho 1, n}^{TM}}{\hat{y}_{1, 1}} \frac{1}{(k_{\rho 1, n}^{TM})^2 - (k_{\rho 1, m}^{TM})^2} \right. \\
 & \times \left\{ b_1 \left[ k_{\rho 1, m}^{TM} Z_1(b_1 k_{\rho 1, n}^{TM}) Z_0(b_1 k_{\rho 1, m}^{TM}) - k_{\rho 1, n}^{TM} Z_1(b_1 k_{\rho 1, m}^{TM}) Z_0(b_1 k_{\rho 1, n}^{TM}) \right] \right. \\
 & \quad \left. + a_1 k_{\rho 1, n}^{TM} Z_1(a_1 k_{\rho 1, m}^{TM}) Z_0(a_1 k_{\rho 1, n}^{TM}) \right\} \\
 & \quad + \frac{k_{\rho 2, m}^{TM} k_{\rho 1, n}^{TM}}{\hat{y}_{2, 1}} \frac{1}{(k_{\rho 1, n}^{TM})^2 - (k_{\rho 2, m}^{TM})^2} \\
 & \times \left\{ b_2 \left[ k_{\rho 2, m}^{TM} Z_1(b_2 k_{\rho 1, n}^{TM}) Z_0(b_2 k_{\rho 2, m}^{TM}) - k_{\rho 1, n}^{TM} Z_1(b_2 k_{\rho 2, m}^{TM}) Z_0(b_2 k_{\rho 1, n}^{TM}) \right] \right. \\
 & \quad \left. - b_1 \left[ k_{\rho 2, m}^{TM} Z_1(b_1 k_{\rho 1, n}^{TM}) Z_0(b_1 k_{\rho 2, m}^{TM}) - k_{\rho 1, n}^{TM} Z_1(b_1 k_{\rho 2, m}^{TM}) Z_0(b_1 k_{\rho 1, n}^{TM}) \right] \right\} \\
 & \quad + \frac{k_{\rho 2, m}^{TM} k_{\rho 2, n}^{TM}}{\hat{y}_{2, 1}} \frac{1}{(k_{\rho 2, n}^{TM})^2 - (k_{\rho 2, m}^{TM})^2} \left\{ -c_1 k_{\rho 2, n}^{TM} Z_1(c_1 k_{\rho 2, m}^{TM}) Z_0(c_1 k_{\rho 2, n}^{TM}) \right. \\
 & \quad \left. - b_2 \left[ k_{\rho 2, m}^{TM} Z_1(b_2 k_{\rho 2, n}^{TM}) Z_0(b_2 k_{\rho 2, m}^{TM}) - k_{\rho 2, n}^{TM} Z_1(b_2 k_{\rho 2, m}^{TM}) Z_0(b_2 k_{\rho 2, n}^{TM}) \right] \right\} \Bigg\}, \\
 & \text{para } a_1 < b_2 < c_1 \text{ e } b_1 < b_2. \quad (3-48)
 \end{aligned}$$

Os elementos  $P_{nm}^{TM \rightleftharpoons TM}$  para  $a_1 < b_1 < c_1$  em que  $b_1 = b_2$  são obtidos tanto de (3-47) quanto de (3-48), uma vez que as integrais de  $\int_{b_2}^{b_1}$  e  $\int_{b_1}^{b_2}$  são naturalmente nulas. Explicitando, tem-se

$$\begin{aligned}
 P_{nm}^{TM \rightleftharpoons TM} = 2\pi j k_{z, m}^{TM} & \left\{ \frac{k_{\rho 1, m}^{TM} k_{\rho 1, n}^{TM}}{\hat{y}_{1, 1}} \frac{1}{(k_{\rho 1, n}^{TM})^2 - (k_{\rho 1, m}^{TM})^2} \right. \\
 & \times \left\{ b_1 \left[ k_{\rho 1, m}^{TM} Z_1(b_1 k_{\rho 1, n}^{TM}) Z_0(b_1 k_{\rho 1, m}^{TM}) - k_{\rho 1, n}^{TM} Z_1(b_1 k_{\rho 1, m}^{TM}) Z_0(b_1 k_{\rho 1, n}^{TM}) \right] \right. \\
 & \quad \left. + a_1 k_{\rho 1, n}^{TM} Z_1(a_1 k_{\rho 1, m}^{TM}) Z_0(a_1 k_{\rho 1, n}^{TM}) \right\} \\
 & \quad + \frac{k_{\rho 2, m}^{TM} k_{\rho 2, n}^{TM}}{\hat{y}_{2, 1}} \frac{1}{(k_{\rho 2, n}^{TM})^2 - (k_{\rho 2, m}^{TM})^2} \left\{ -c_1 k_{\rho 2, n}^{TM} Z_1(c_1 k_{\rho 2, m}^{TM}) Z_0(c_1 k_{\rho 2, n}^{TM}) \right. \\
 & \quad \left. - b_2 \left[ k_{\rho 2, m}^{TM} Z_1(b_2 k_{\rho 2, n}^{TM}) Z_0(b_2 k_{\rho 2, m}^{TM}) - k_{\rho 2, n}^{TM} Z_1(b_2 k_{\rho 2, m}^{TM}) Z_0(b_2 k_{\rho 2, n}^{TM}) \right] \right\} \Bigg\}, \\
 & \text{para } a_1 < b_2 < c_1 \text{ e } b_1 = b_2. \quad (3-49)
 \end{aligned}$$

Deve ser observado que o resultado das integrais de (3-38) apresenta termos do tipo  $1/(\alpha^2 - \beta^2)$ , em que  $\alpha$  e  $\beta$  podem ser  $k_{\rho 1, m}^{TM}$ ,  $k_{\rho 2, m}^{TM}$ ,  $k_{\rho 1, n}^{TM}$ , ou  $k_{\rho 2, n}^{TM}$ . Se  $\alpha$  e  $\beta$  forem iguais ocorre uma singularidade. Pode-se citar dois casos

em que isso pode acontecer. Primeiro caso: as regiões  $I$  e  $II$  são iguais, ou seja, compartilham os mesmos valores de  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $k_{\rho 1, m}^{TM}$ , etc. Este caso não apresenta descontinuidade física, e pode ser tratado facilmente considerando as duas regiões como apenas uma, com comprimento em  $z$  igual a soma do comprimentos de cada guia liso. Segundo caso: as regiões  $I$  e  $II$  têm dimensões e parâmetros dos meios arbitrários e descorrelatados, contudo, o valor numérico de um autovalor  $\alpha_m$  é igual a  $\beta_n$ . Na Fig. 3.5 tem-se as curvas dos autovalores  $k_\rho$  em função da frequência: neste exemplo, verifica-se que com apenas 3 modos ( $TM_{00}$ ,  $TM_{01}$  e  $TM_{02}$ ) existem 3 frequências ( $\sim 35$  GHz,  $\sim 46$  GHz e  $\sim 49$  GHz destacadas com o marcador  $\square$ ) em que os autovalores da região  $I$  (linhas horizontais) cruzam com as curvas dos autovalores da região  $II$  tais que  $\alpha_m = \beta_n$ . Nestas frequências ocorre singularidade na resolução supracitada. Como em geral é necessário empregar algumas dezenas de modos para a convergência do casamento de modos, o número de possíveis frequências singulares pode ser imenso.

Um caso particular do segundo caso é exemplificado pela junção de um guia coaxial homogêneo com raios dos condutores interno e externo  $a$  e  $c$  (guia  $I$ ), com um segundo guia homogêneo com os mesmos raios, contudo, preenchido por um material diferente daquele do primeiro trecho de guia de onda (guia  $II$ ). Neste exemplo, inspecionando a equação característica (2-101), verifica-se que os autovalores  $k_\rho^{TM}$  dependem apenas das dimensões  $a$  e  $c$  de cada guia. Dessa forma, tem-se que o  $m$ -ésimo autovalor do guia  $I$  é igual ao  $n$ -ésimo autovalor do guia  $II$  quando  $m = n$ , ou seja,  $k_{\rho 1, m}^{TM} = k_{\rho 2, m}^{TM} = k_{\rho 1, n}^{TM} = k_{\rho 2, n}^{TM}$ .

Para evitar a singularidade é necessário resolver as integrais de (3-39) considerando o caso particular em que  $\alpha \rightarrow \beta$ . De acordo com [28, p. 134], para  $\mathcal{C}_\nu(\alpha z)$  e  $\mathcal{D}_\nu(\alpha z)$  duas funções cilíndricas quaisquer de ordem  $\nu$ , tem-se que

$$\int_{z_1}^{z_2} z \mathcal{C}_\nu(\alpha z) \mathcal{D}_\nu(\alpha z) dz = \left\{ \frac{z^2}{4} [2 \mathcal{C}_\nu(\alpha z) \mathcal{D}_\nu(\alpha z) - \mathcal{C}_{\nu-1}(\alpha z) \mathcal{D}_{\nu+1}(\alpha z) - \mathcal{C}_{\nu+1}(\alpha z) \mathcal{D}_{\nu-1}(\alpha z)] \right\}_{z_1}^{z_2},$$

---

<sup>4</sup>Deve ser observado que apesar de  $k_{\rho 1, m}^{TM} = k_{\rho 1, n}^{TM}$ , etc., a constante de propagação em cada trecho de guia liso é diferente:  $k_z^{TM}$  da região  $I$  é diferente de  $k_z^{TM}$  da região  $II$ .

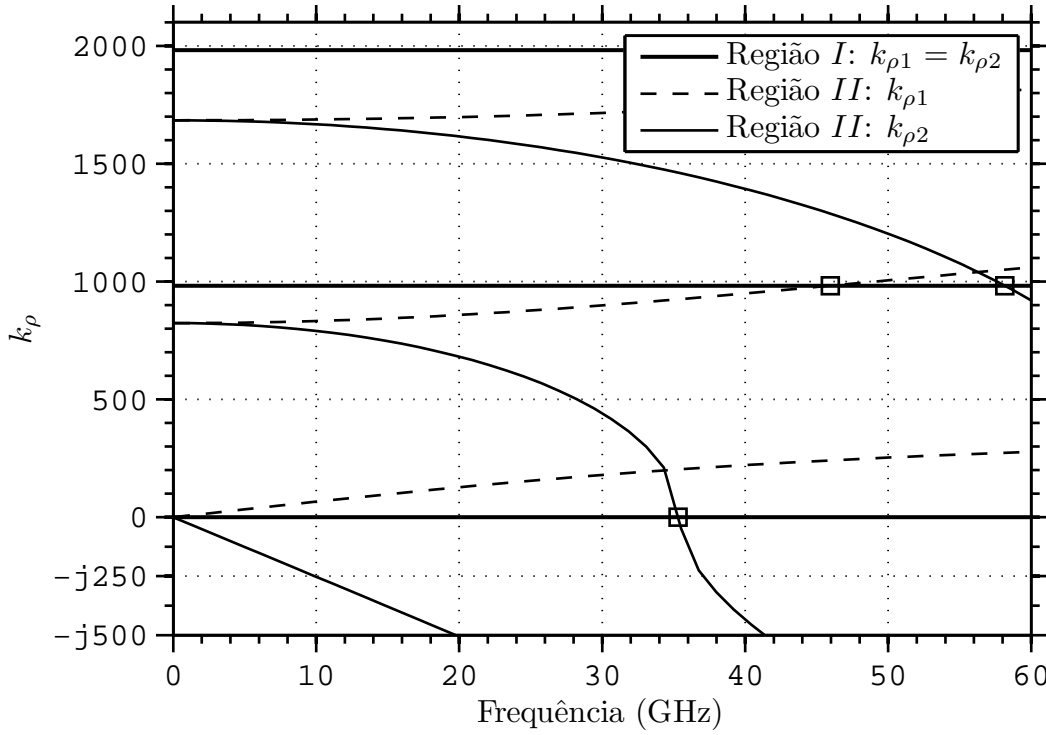


Figura 3.5: Valores de  $k_\rho$  para os 3 primeiros modos. A região *I* é um guia homogêneo com dimensões  $a_1 = 1,840$  mm e  $c_1 = 5,0$  mm preenchido por ar ( $\epsilon_r = \mu_r = 1,0$ ). A região *II* é um guia não homogêneo preenchido por um dielétrico ( $\epsilon_r = 2,550$ ) de  $a_2 = 1,50$  mm a  $b_2 = 4,840$  mm, e por ar de  $b_2 = 4,840$  mm a  $c_2 = 5,0$  mm. Pontos destacados com o marcador  $\square$  são as frequências em que  $(3-49)$  é singular.

que permite escrever

$$\begin{aligned}
 & \int_{\rho_1}^{\rho_2} \frac{j k_{z,m}^{TM} k_{\rho 1,m}^{TM} k_{\rho 1,n}^{TM}}{\hat{y}_{1,1}} Z_0'(k_{\rho 1,m}^{TM} \rho) Z_0'(k_{\rho 1,n}^{TM} \rho) \rho d\rho \\
 &= \frac{j k_{z,m}^{TM} (k_{\rho 1,m}^{TM})^2}{\hat{y}_{1,1}} \int_{\rho_1}^{\rho_2} Z_1(k_{\rho 1,m}^{TM} \rho) Z_1(k_{\rho 1,n}^{TM} \rho) \rho d\rho \\
 &= \frac{j k_{z,m}^{TM} (k_{\rho 1,m}^{TM})^2}{\hat{y}_{1,1}} \left\{ \frac{\rho^2}{4} \left[ 2 Z_1(k_{\rho 1,m}^{TM} \rho) Z_1(k_{\rho 1,n}^{TM} \rho) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - Z_0(k_{\rho 1,m}^{TM} \rho) Z_2(k_{\rho 1,n}^{TM} \rho) - Z_2(k_{\rho 1,m}^{TM} \rho) Z_0(k_{\rho 1,n}^{TM} \rho) \right] \right\}_{\rho_1}^{\rho_2}.
 \end{aligned}$$

Deve ser observado que mesmo que  $k_{\rho 1,m}^{TM} = k_{\rho 1,n}^{TM}$  as funções cilíndricas  $Z_1(k_{\rho 1,m}^{TM} \rho)$  e  $Z_1(k_{\rho 1,n}^{TM} \rho)$  são distintas. Como  $Z_2(z) = \frac{2}{z} Z_1(z) - Z_0(z)$ , pode-se escrever

$$\begin{aligned}
& \int_{\rho_1}^{\rho_2} \frac{j k_{z,m}^{TM} k_{\rho_1,m}^{TM} k_{\rho_1,n}^{TM}}{\hat{y}_{1,1}} Z_0'(k_{\rho_1,m}^{TM} \rho) Z_0'(k_{\rho_1,n}^{TM} \rho) \rho d\rho \\
&= \frac{j k_{z,m}^{TM} (k_{\rho_1,m}^{TM})^2}{\hat{y}_{1,1}} \left\{ \frac{\rho^2}{4} \left\{ 2 Z_1(k_{\rho_1,m}^{TM} \rho) Z_1(k_{\rho_1,n}^{TM} \rho) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - Z_0(k_{\rho_1,m}^{TM} \rho) \left[ \frac{2}{k_{\rho_1,m}^{TM} \rho} Z_1(k_{\rho_1,n}^{TM} \rho) - Z_0(k_{\rho_1,n}^{TM} \rho) \right] \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \left[ \frac{2}{k_{\rho_1,m}^{TM} \rho} Z_1(k_{\rho_1,m}^{TM} \rho) - Z_0(k_{\rho_1,m}^{TM} \rho) \right] Z_0(k_{\rho_1,n}^{TM} \rho) \right\} \right\}_{\rho_1}^{\rho_2} \\
&= \frac{j k_{z,m}^{TM} (k_{\rho_1,m}^{TM})^2}{\hat{y}_{1,1}} \left\{ \frac{\rho^2}{4} \left[ 2 Z_1(k_{\rho_1,m}^{TM} \rho) Z_1(k_{\rho_1,n}^{TM} \rho) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{2}{k_{\rho_1,m}^{TM} \rho} Z_0(k_{\rho_1,m}^{TM} \rho) Z_1(k_{\rho_1,n}^{TM} \rho) + Z_0(k_{\rho_1,m}^{TM} \rho) Z_0(k_{\rho_1,n}^{TM} \rho) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{2}{k_{\rho_1,m}^{TM} \rho} Z_1(k_{\rho_1,m}^{TM} \rho) Z_0(k_{\rho_1,n}^{TM} \rho) + Z_0(k_{\rho_1,m}^{TM} \rho) Z_0(k_{\rho_1,n}^{TM} \rho) \right] \right\}_{\rho_1}^{\rho_2} \\
&= \frac{j k_{z,m}^{TM} (k_{\rho_1,m}^{TM})^2}{\hat{y}_{1,1}} \left\{ \frac{\rho^2}{2} \left\{ Z_1(k_{\rho_1,m}^{TM} \rho) Z_1(k_{\rho_1,n}^{TM} \rho) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{1}{k_{\rho_1,m}^{TM} \rho} [Z_0(k_{\rho_1,m}^{TM} \rho) Z_1(k_{\rho_1,n}^{TM} \rho) + Z_1(k_{\rho_1,m}^{TM} \rho) Z_0(k_{\rho_1,n}^{TM} \rho)] \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + Z_0(k_{\rho_1,m}^{TM} \rho) Z_0(k_{\rho_1,n}^{TM} \rho) \right\} \right\}_{\rho_1}^{\rho_2}, \quad (3-50)
\end{aligned}$$

que vale quando os autovalores  $k_{\rho_1,m}^{TM}$  e  $k_{\rho_1,n}^{TM}$  são iguais. Usando o resultado acima, por analogia, pode-se obter todas as demais integrais de (3-38). Assim, os elementos  $P_{nm}^{TM \rightleftharpoons TM}$  para  $a_1 \geq b_2$  devem ser desenvolvidos para 3 situações: 1)  $k_{\rho_1,m}^{TM} = k_{\rho_2,n}^{TM}$ , 2)  $k_{\rho_2,m}^{TM} = k_{\rho_2,n}^{TM}$ , e 3) ambas condições. Usando resultados precedentes, pode-se escrever

$$P_{nm}^{TM \rightleftharpoons TM} = \text{Int}_1^a + \text{Int}_2^b, \text{ para } a_1 \geq b_2, \quad (3-51)$$

$$\begin{aligned}
\text{Int}_1^a &= \begin{cases} \text{Int}^{a*}, & \text{se } k_{\rho_1,m}^{TM} = k_{\rho_2,n}^{TM} \\ \text{Int}^a, & \text{se } k_{\rho_1,m}^{TM} \neq k_{\rho_2,n}^{TM} \end{cases}, \\
\text{Int}_2^b &= \begin{cases} \text{Int}^{b*}, & \text{se } k_{\rho_2,m}^{TM} = k_{\rho_2,n}^{TM} \\ \text{Int}^b, & \text{se } k_{\rho_2,m}^{TM} \neq k_{\rho_2,n}^{TM} \end{cases},
\end{aligned}$$

em que as integrais  $\text{Int}^a$  e  $\text{Int}^b$  foram desenvolvidas anteriormente no caso em



que  $k_{\rho 1, m}^{TM} \neq k_{\rho 2, n}^{TM}$  e  $k_{\rho 2, m}^{TM} \neq k_{\rho 2, n}^{TM}$ , e são dadas por

$$\begin{aligned} \text{Int}^a &= 2\pi j k_{z, m}^{TM} \frac{k_{\rho 1, m}^{TM} k_{\rho 2, n}^{TM}}{\hat{y}_{1, 1}} \left\{ \frac{b_1}{(k_{\rho 2, n}^{TM})^2 - (k_{\rho 1, m}^{TM})^2} \right. \\ &\times \left[ k_{\rho 1, m}^{TM} Z_1(b_1 k_{\rho 2, n}^{TM}) Z_0(b_1 k_{\rho 1, m}^{TM}) - k_{\rho 2, n}^{TM} Z_1(b_1 k_{\rho 1, m}^{TM}) Z_0(b_1 k_{\rho 2, n}^{TM}) \right] - \frac{a_1}{(k_{\rho 2, n}^{TM})^2 - (k_{\rho 1, m}^{TM})^2} \\ &\times \left[ k_{\rho 1, m}^{TM} Z_1(a_1 k_{\rho 2, n}^{TM}) Z_0(a_1 k_{\rho 1, m}^{TM}) - k_{\rho 2, n}^{TM} Z_1(a_1 k_{\rho 1, m}^{TM}) Z_0(a_1 k_{\rho 2, n}^{TM}) \right] \left. \right\}, \quad \text{e} \quad (3-52) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Int}^b &= 2\pi j k_{z, m}^{TM} \frac{k_{\rho 2, m}^{TM} k_{\rho 2, n}^{TM}}{\hat{y}_{2, 1}} \left\{ \frac{c_1}{(k_{\rho 2, n}^{TM})^2 - (k_{\rho 2, m}^{TM})^2} \right. \\ &\times \left[ k_{\rho 2, m}^{TM} Z_1(c_1 k_{\rho 2, n}^{TM}) Z_0(c_1 k_{\rho 2, m}^{TM}) - k_{\rho 2, n}^{TM} Z_1(c_1 k_{\rho 2, m}^{TM}) Z_0(c_1 k_{\rho 2, n}^{TM}) \right] - \frac{b_1}{(k_{\rho 2, n}^{TM})^2 - (k_{\rho 2, m}^{TM})^2} \\ &\times \left[ k_{\rho 2, m}^{TM} Z_1(b_1 k_{\rho 2, n}^{TM}) Z_0(b_1 k_{\rho 2, m}^{TM}) - k_{\rho 2, n}^{TM} Z_1(b_1 k_{\rho 2, m}^{TM}) Z_0(b_1 k_{\rho 2, n}^{TM}) \right] \left. \right\}. \quad (3-53) \end{aligned}$$

Usando o resultado de (3-50), por analogia, pode-se obter  $\text{Int}^{a*}$  e  $\text{Int}^{b*}$ , ou seja,

$$\begin{aligned} \text{Int}^{a*} &= 2\pi j k_{z, m}^{TM} \frac{(k_{\rho 1, m}^{TM})^2}{\hat{y}_{1, 1}} \left\{ \frac{\rho^2}{2} \left\{ Z_1(k_{\rho 1, m}^{TM} \rho) Z_1(k_{\rho 2, n}^{TM} \rho) \right. \right. \\ &\quad - \frac{1}{k_{\rho 1, m}^{TM} \rho} [Z_0(k_{\rho 1, m}^{TM} \rho) Z_1(k_{\rho 2, n}^{TM} \rho) + Z_1(k_{\rho 1, m}^{TM} \rho) Z_0(k_{\rho 2, n}^{TM} \rho)] \\ &\quad \left. \left. + Z_0(k_{\rho 1, m}^{TM} \rho) Z_0(k_{\rho 2, n}^{TM} \rho) \right\} \right\}_{a_1}^{b_1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Int}^{a*} &= 2\pi j k_{z, m}^{TM} \frac{(k_{\rho 1, m}^{TM})^2}{\hat{y}_{1, 1}} \left\{ \frac{b_1^2}{2} \left\{ Z_1(k_{\rho 1, m}^{TM} b_1) Z_1(k_{\rho 2, n}^{TM} b_1) \right. \right. \\ &\quad - \frac{1}{k_{\rho 1, m}^{TM} b_1} [Z_0(k_{\rho 1, m}^{TM} b_1) Z_1(k_{\rho 2, n}^{TM} b_1) + Z_1(k_{\rho 1, m}^{TM} b_1) Z_0(k_{\rho 2, n}^{TM} b_1)] + Z_0(k_{\rho 1, m}^{TM} b_1) Z_0(k_{\rho 2, n}^{TM} b_1) \left. \right\} \\ &\quad - \frac{a_1^2}{2} \left\{ Z_1(k_{\rho 1, m}^{TM} a_1) Z_1(k_{\rho 2, n}^{TM} a_1) \right. \\ &\quad - \frac{1}{k_{\rho 1, m}^{TM} a_1} [Z_0(k_{\rho 1, m}^{TM} a_1) Z_1(k_{\rho 2, n}^{TM} a_1) + Z_1(k_{\rho 1, m}^{TM} a_1) Z_0(k_{\rho 2, n}^{TM} a_1)] \\ &\quad \left. \left. + Z_0(k_{\rho 1, m}^{TM} a_1) Z_0(k_{\rho 2, n}^{TM} a_1) \right\} \right\}, \quad \text{e} \quad (3-54) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Int}^{b*} = & 2\pi j k_{z,m}^{TM} \frac{(k_{\rho 2,m}^{TM})^2}{\hat{y}_{2,1}} \left\{ \frac{c_1^2}{2} \left\{ Z_1(k_{\rho 2,m}^{TM} c_1) Z_1(k_{\rho 2,n}^{TM} c_1) \right. \right. \\
& - \frac{1}{k_{\rho 2,m}^{TM} c_1} [Z_0(k_{\rho 2,m}^{TM} c_1) Z_1(k_{\rho 2,n}^{TM} c_1) + Z_1(k_{\rho 2,m}^{TM} c_1) Z_0(k_{\rho 2,n}^{TM} c_1)] + Z_0(k_{\rho 2,m}^{TM} c_1) Z_0(k_{\rho 2,n}^{TM} c_1) \left. \right\} \\
& - \frac{b_1^2}{2} \left\{ Z_1(k_{\rho 2,m}^{TM} b_1) Z_1(k_{\rho 2,n}^{TM} b_1) \right. \\
& - \frac{1}{k_{\rho 2,m}^{TM} b_1} [Z_0(k_{\rho 2,m}^{TM} b_1) Z_1(k_{\rho 2,n}^{TM} b_1) + Z_1(k_{\rho 2,m}^{TM} b_1) Z_0(k_{\rho 2,n}^{TM} b_1)] \\
& \left. \left. + Z_0(k_{\rho 2,m}^{TM} b_1) Z_0(k_{\rho 2,n}^{TM} b_1) \right\} \right\}. \quad (3-55)
\end{aligned}$$

Os elementos  $P_{nm}^{TM \rightleftharpoons TM}$  para  $b_2 \geq c_1$  devem ser desenvolvidos para 3 situações: 1)  $k_{\rho 1,m}^{TM} = k_{\rho 1,n}^{TM}$ , 2)  $k_{\rho 2,m}^{TM} = k_{\rho 1,n}^{TM}$ , e 3) ambas condições. Usando resultados precedentes, pode-se escrever

$$P_{nm}^{TM \rightleftharpoons TM} = \text{Int}_1^c + \text{Int}_2^d, \text{ para } b_2 \geq c_1, \quad (3-56)$$

$$\begin{aligned}
\text{Int}_1^c &= \begin{cases} \text{Int}^{c*}, & \text{se } k_{\rho 1,m}^{TM} = k_{\rho 1,n}^{TM} \\ \text{Int}^c, & \text{se } k_{\rho 1,m}^{TM} \neq k_{\rho 1,n}^{TM} \end{cases}, \\
\text{Int}_2^d &= \begin{cases} \text{Int}^{d*}, & \text{se } k_{\rho 2,m}^{TM} = k_{\rho 1,n}^{TM} \\ \text{Int}^d, & \text{se } k_{\rho 2,m}^{TM} \neq k_{\rho 1,n}^{TM} \end{cases},
\end{aligned}$$

em que as integrais  $\text{Int}^c$  e  $\text{Int}^d$  foram desenvolvidas anteriormente no caso em que  $k_{\rho 1,m}^{TM} \neq k_{\rho 1,n}^{TM}$  e  $k_{\rho 2,m}^{TM} \neq k_{\rho 1,n}^{TM}$ , e são dadas por

$$\begin{aligned}
\text{Int}^c = & 2\pi j k_{z,m}^{TM} \frac{k_{\rho 1,m}^{TM} k_{\rho 1,n}^{TM}}{\hat{y}_{1,1}} \frac{1}{(k_{\rho 1,n}^{TM})^2 - (k_{\rho 1,m}^{TM})^2} \\
& \times \left\{ b_1 \left[ k_{\rho 1,m}^{TM} Z_1(b_1 k_{\rho 1,n}^{TM}) Z_0(b_1 k_{\rho 1,m}^{TM}) - k_{\rho 1,n}^{TM} Z_1(b_1 k_{\rho 1,m}^{TM}) Z_0(b_1 k_{\rho 1,n}^{TM}) \right] \right. \\
& \left. - a_1 \left[ k_{\rho 1,m}^{TM} Z_1(a_1 k_{\rho 1,n}^{TM}) Z_0(a_1 k_{\rho 1,m}^{TM}) - k_{\rho 1,n}^{TM} Z_1(a_1 k_{\rho 1,m}^{TM}) Z_0(a_1 k_{\rho 1,n}^{TM}) \right] \right\}, \text{ e} \quad (3-57)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Int}^d = & 2\pi j k_{z,m}^{TM} \frac{k_{\rho 2,m}^{TM} k_{\rho 1,n}^{TM}}{\hat{y}_{2,1}} \frac{1}{(k_{\rho 1,n}^{TM})^2 - (k_{\rho 2,m}^{TM})^2} \\ & \times \left\{ c_1 \left[ k_{\rho 2,m}^{TM} Z_1(c_1 k_{\rho 1,n}^{TM}) Z_0(c_1 k_{\rho 2,m}^{TM}) - k_{\rho 1,n}^{TM} Z_1(c_1 k_{\rho 2,m}^{TM}) Z_0(c_1 k_{\rho 1,n}^{TM}) \right] \right. \\ & \left. - b_1 \left[ k_{\rho 2,m}^{TM} Z_1(b_1 k_{\rho 1,n}^{TM}) Z_0(b_1 k_{\rho 2,m}^{TM}) - k_{\rho 1,n}^{TM} Z_1(b_1 k_{\rho 2,m}^{TM}) Z_0(b_1 k_{\rho 1,n}^{TM}) \right] \right\}. \quad (3-58) \end{aligned}$$

Usando o resultado de (3-50), por analogia, pode-se obter  $\text{Int}^{c*}$  e  $\text{Int}^{d*}$ , ou seja,

$$\begin{aligned} \text{Int}^{c*} = & 2\pi j k_{z,m}^{TM} \frac{(k_{\rho 1,m}^{TM})^2}{\hat{y}_{1,1}} \left\{ \frac{b_1^2}{2} \left\{ Z_1(k_{\rho 1,m}^{TM} b_1) Z_1(k_{\rho 1,n}^{TM} b_1) \right. \right. \\ & - \frac{1}{k_{\rho 1,m}^{TM} b_1} [Z_0(k_{\rho 1,m}^{TM} b_1) Z_1(k_{\rho 1,n}^{TM} b_1) + Z_1(k_{\rho 1,m}^{TM} b_1) Z_0(k_{\rho 1,n}^{TM} b_1)] + Z_0(k_{\rho 1,m}^{TM} b_1) Z_0(k_{\rho 1,n}^{TM} b_1) \Big\} \\ & - \frac{a_1^2}{2} \left\{ Z_1(k_{\rho 1,m}^{TM} a_1) Z_1(k_{\rho 1,n}^{TM} a_1) \right. \\ & - \frac{1}{k_{\rho 1,m}^{TM} a_1} [Z_0(k_{\rho 1,m}^{TM} a_1) Z_1(k_{\rho 1,n}^{TM} a_1) + Z_1(k_{\rho 1,m}^{TM} a_1) Z_0(k_{\rho 1,n}^{TM} a_1)] \\ & \left. \left. + Z_0(k_{\rho 1,m}^{TM} a_1) Z_0(k_{\rho 1,n}^{TM} a_1) \right\} \right\}, \text{ e} \quad (3-59) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Int}^{d*} = & 2\pi j k_{z,m}^{TM} \frac{(k_{\rho 2,m}^{TM})^2}{\hat{y}_{2,1}} \left\{ \frac{c_1^2}{2} \left\{ Z_1(k_{\rho 2,m}^{TM} c_1) Z_1(k_{\rho 1,n}^{TM} c_1) \right. \right. \\ & - \frac{1}{k_{\rho 2,m}^{TM} c_1} [Z_0(k_{\rho 2,m}^{TM} c_1) Z_1(k_{\rho 1,n}^{TM} c_1) + Z_1(k_{\rho 2,m}^{TM} c_1) Z_0(k_{\rho 1,n}^{TM} c_1)] + Z_0(k_{\rho 2,m}^{TM} c_1) Z_0(k_{\rho 1,n}^{TM} c_1) \Big\} \\ & - \frac{b_1^2}{2} \left\{ Z_1(k_{\rho 2,m}^{TM} b_1) Z_1(k_{\rho 1,n}^{TM} b_1) \right. \\ & - \frac{1}{k_{\rho 2,m}^{TM} b_1} [Z_0(k_{\rho 2,m}^{TM} b_1) Z_1(k_{\rho 1,n}^{TM} b_1) + Z_1(k_{\rho 2,m}^{TM} b_1) Z_0(k_{\rho 1,n}^{TM} b_1)] \\ & \left. \left. + Z_0(k_{\rho 2,m}^{TM} b_1) Z_0(k_{\rho 1,n}^{TM} b_1) \right\} \right\}. \quad (3-60) \end{aligned}$$

Os elementos  $P_{nm}^{TM \rightleftharpoons TM}$  para  $a_1 < b_2 < c_1$  e  $b_1 > b_2$  devem ser desenvolvidos para 3 situações: 1)  $k_{\rho 1,m}^{TM} = k_{\rho 1,n}^{TM}$ , 2)  $k_{\rho 1,m}^{TM} = k_{\rho 2,n}^{TM}$ , e 3)  $k_{\rho 2,m}^{TM} = k_{\rho 2,n}^{TM}$ . Usando resultados precedentes, pode-se escrever

$$P_{nm}^{TM \rightleftharpoons TM} = \text{Int}_1^e + \text{Int}_2^f + \text{Int}_3^g, \text{ para } a_1 < b_2 < c_1 \text{ e } b_1 > b_2, \quad (3-61)$$

$$\begin{aligned} \text{Int}_1^e &= \begin{cases} \text{Int}^{e*}, & \text{se } k_{\rho 1, m}^{TM} = k_{\rho 1, n}^{TM} \\ \text{Int}^e, & \text{se } k_{\rho 1, m}^{TM} \neq k_{\rho 1, n}^{TM} \end{cases}, \\ \text{Int}_2^f &= \begin{cases} \text{Int}^{f*}, & \text{se } k_{\rho 1, m}^{TM} = k_{\rho 2, n}^{TM} \\ \text{Int}^f, & \text{se } k_{\rho 1, m}^{TM} \neq k_{\rho 2, n}^{TM} \end{cases}, \\ \text{Int}_3^g &= \text{Int}_2^b, \end{aligned}$$

em que as integrais  $\text{Int}^e$  e  $\text{Int}^f$  foram desenvolvidas anteriormente no caso em que  $k_{\rho 1, m}^{TM} \neq k_{\rho 1, n}^{TM}$  e  $k_{\rho 1, m}^{TM} \neq k_{\rho 2, n}^{TM}$ , e são dadas por

$$\begin{aligned} \text{Int}^e &= 2\pi j k_{z, m}^{TM} \frac{k_{\rho 1, m}^{TM} k_{\rho 1, n}^{TM}}{\hat{y}_{1, 1}} \frac{1}{(k_{\rho 1, n}^{TM})^2 - (k_{\rho 1, m}^{TM})^2} \\ &\times \left\{ b_2 \left[ k_{\rho 1, m}^{TM} Z_1(b_2 k_{\rho 1, n}^{TM}) Z_0(b_2 k_{\rho 1, m}^{TM}) - k_{\rho 1, n}^{TM} Z_1(b_2 k_{\rho 1, m}^{TM}) Z_0(b_2 k_{\rho 1, n}^{TM}) \right] \right. \\ &\left. - a_1 \left[ k_{\rho 1, m}^{TM} Z_1(a_1 k_{\rho 1, n}^{TM}) Z_0(a_1 k_{\rho 1, m}^{TM}) - k_{\rho 1, n}^{TM} Z_1(a_1 k_{\rho 1, m}^{TM}) Z_0(a_1 k_{\rho 1, n}^{TM}) \right] \right\}, \text{ e } \quad (3-62) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Int}^f &= 2\pi j k_{z, m}^{TM} \frac{k_{\rho 1, m}^{TM} k_{\rho 2, n}^{TM}}{\hat{y}_{1, 1}} \frac{1}{(k_{\rho 2, n}^{TM})^2 - (k_{\rho 1, m}^{TM})^2} \\ &\times \left\{ b_1 \left[ k_{\rho 1, m}^{TM} Z_1(b_1 k_{\rho 2, n}^{TM}) Z_0(b_1 k_{\rho 1, m}^{TM}) - k_{\rho 2, n}^{TM} Z_1(b_1 k_{\rho 1, m}^{TM}) Z_0(b_1 k_{\rho 2, n}^{TM}) \right] \right. \\ &\left. - b_2 \left[ k_{\rho 1, m}^{TM} Z_1(b_2 k_{\rho 2, n}^{TM}) Z_0(b_2 k_{\rho 1, m}^{TM}) - k_{\rho 2, n}^{TM} Z_1(b_2 k_{\rho 1, m}^{TM}) Z_0(b_2 k_{\rho 2, n}^{TM}) \right] \right\}. \quad (3-63) \end{aligned}$$

Usando o resultado de (3-50), por analogia, pode-se obter  $\text{Int}^{e*}$  e  $\text{Int}^{f*}$ , ou seja,

$$\begin{aligned} \text{Int}^{e*} &= 2\pi j k_{z, m}^{TM} \frac{(k_{\rho 1, m}^{TM})^2}{\hat{y}_{1, 1}} \left\{ \frac{b_2^2}{2} \left\{ Z_1(k_{\rho 1, m}^{TM} b_2) Z_1(k_{\rho 1, n}^{TM} b_2) \right. \right. \\ &\left. - \frac{1}{k_{\rho 1, m}^{TM} b_2} [Z_0(k_{\rho 1, m}^{TM} b_2) Z_1(k_{\rho 1, n}^{TM} b_2) + Z_1(k_{\rho 1, m}^{TM} b_2) Z_0(k_{\rho 1, n}^{TM} b_2)] + Z_0(k_{\rho 1, m}^{TM} b_2) Z_0(k_{\rho 1, n}^{TM} b_2) \right\} \\ &\quad - \frac{a_1^2}{2} \left\{ Z_1(k_{\rho 1, m}^{TM} a_1) Z_1(k_{\rho 1, n}^{TM} a_1) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{k_{\rho 1, m}^{TM} a_1} [Z_0(k_{\rho 1, m}^{TM} a_1) Z_1(k_{\rho 1, n}^{TM} a_1) + Z_1(k_{\rho 1, m}^{TM} a_1) Z_0(k_{\rho 1, n}^{TM} a_1)] \right. \\ &\quad \left. \left. + Z_0(k_{\rho 1, m}^{TM} a_1) Z_0(k_{\rho 1, n}^{TM} a_1) \right\} \right\}, \text{ e } \quad (3-64) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Int}^{f*} = & 2\pi j k_{z,m}^{TM} \frac{(k_{\rho 1,m}^{TM})^2}{\hat{y}_{1,1}} \left\{ \frac{b_1^2}{2} \left\{ Z_1(k_{\rho 1,m}^{TM} b_1) Z_1(k_{\rho 2,n}^{TM} b_1) \right. \right. \\
& - \frac{1}{k_{\rho 1,m}^{TM} b_1} [Z_0(k_{\rho 1,m}^{TM} b_1) Z_1(k_{\rho 2,n}^{TM} b_1) + Z_1(k_{\rho 1,m}^{TM} b_1) Z_0(k_{\rho 2,n}^{TM} b_1)] + Z_0(k_{\rho 1,m}^{TM} b_1) Z_0(k_{\rho 2,n}^{TM} b_1) \left. \right\} \\
& - \frac{b_2^2}{2} \left\{ Z_1(k_{\rho 1,m}^{TM} b_2) Z_1(k_{\rho 2,n}^{TM} b_2) \right. \\
& - \frac{1}{k_{\rho 1,m}^{TM} b_2} [Z_0(k_{\rho 1,m}^{TM} b_2) Z_1(k_{\rho 2,n}^{TM} b_2) + Z_1(k_{\rho 1,m}^{TM} b_2) Z_0(k_{\rho 2,n}^{TM} b_2)] \\
& \left. \left. + Z_0(k_{\rho 1,m}^{TM} b_2) Z_0(k_{\rho 2,n}^{TM} b_2) \right\} \right\}, \text{ e } \quad (3-65)
\end{aligned}$$

Os elementos  $P_{nm}^{TM \rightleftharpoons TM}$  para  $a_1 < b_2 < c_1$  e  $b_1 < b_2$  devem ser desenvolvidos para 3 situações: 1)  $k_{\rho 1,m}^{TM} = k_{\rho 1,n}^{TM}$ , 2)  $k_{\rho 2,m}^{TM} = k_{\rho 1,n}^{TM}$ , e 3)  $k_{\rho 2,m}^{TM} = k_{\rho 2,n}^{TM}$ . Usando resultados precedentes, pode-se escrever

$$P_{nm}^{TM \rightleftharpoons TM} = \text{Int}_1^h + \text{Int}_2^i + \text{Int}_3^j, \text{ para } a_1 < b_2 < c_1 \text{ e } b_1 < b_2, \quad (3-66)$$

$$\begin{aligned}
\text{Int}_1^h &= \text{Int}_1^c, \\
\text{Int}_2^i &= \begin{cases} \text{Int}^{i*}, & \text{se } k_{\rho 2,m}^{TM} = k_{\rho 1,n}^{TM} \\ \text{Int}^i, & \text{se } k_{\rho 2,m}^{TM} \neq k_{\rho 1,n}^{TM} \end{cases}, \\
\text{Int}_3^j &= \begin{cases} \text{Int}^{j*}, & \text{se } k_{\rho 1,m}^{TM} = k_{\rho 2,n}^{TM} \\ \text{Int}^j, & \text{se } k_{\rho 1,m}^{TM} \neq k_{\rho 2,n}^{TM} \end{cases},
\end{aligned}$$

em que as integrais  $\text{Int}^i$  e  $\text{Int}^j$  foram desenvolvidas anteriormente no caso em que  $k_{\rho 2,m}^{TM} \neq k_{\rho 1,n}^{TM}$  e  $k_{\rho 1,m}^{TM} \neq k_{\rho 2,n}^{TM}$ , e são dadas por

$$\begin{aligned}
\text{Int}^i &= 2\pi j k_{z,m}^{TM} \frac{k_{\rho 2,m}^{TM} k_{\rho 1,n}^{TM}}{\hat{y}_{2,1}} \frac{1}{(k_{\rho 1,n}^{TM})^2 - (k_{\rho 2,m}^{TM})^2} \\
&\times \left\{ b_2 \left[ k_{\rho 2,m}^{TM} Z_1(b_2 k_{\rho 1,n}^{TM}) Z_0(b_2 k_{\rho 2,m}^{TM}) - k_{\rho 1,n}^{TM} Z_1(b_2 k_{\rho 2,m}^{TM}) Z_0(b_2 k_{\rho 1,n}^{TM}) \right] \right. \\
&\left. - b_1 \left[ k_{\rho 2,m}^{TM} Z_1(b_1 k_{\rho 1,n}^{TM}) Z_0(b_1 k_{\rho 2,m}^{TM}) - k_{\rho 1,n}^{TM} Z_1(b_1 k_{\rho 2,m}^{TM}) Z_0(b_1 k_{\rho 1,n}^{TM}) \right] \right\}, \text{ e } \quad (3-67)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Int}^j = & 2\pi j k_{z,m}^{TM} \frac{k_{\rho 2,m}^{TM} k_{\rho 2,n}^{TM}}{\hat{y}_{2,1}} \frac{1}{(k_{\rho 2,n}^{TM})^2 - (k_{\rho 2,m}^{TM})^2} \\ & \times \left\{ c_1 \left[ k_{\rho 2,m}^{TM} Z_1(c_1 k_{\rho 2,n}^{TM}) Z_0(c_1 k_{\rho 2,m}^{TM}) - k_{\rho 2,n}^{TM} Z_1(c_1 k_{\rho 2,m}^{TM}) Z_0(c_1 k_{\rho 2,n}^{TM}) \right] \right. \\ & \left. - b_2 \left[ k_{\rho 2,m}^{TM} Z_1(b_2 k_{\rho 2,n}^{TM}) Z_0(b_2 k_{\rho 2,m}^{TM}) - k_{\rho 2,n}^{TM} Z_1(b_2 k_{\rho 2,m}^{TM}) Z_0(b_2 k_{\rho 2,n}^{TM}) \right] \right\}. \quad (3-68) \end{aligned}$$

Usando o resultado de (3-50), por analogia, pode-se obter  $\text{Int}^{i*}$  e  $\text{Int}^{j*}$ , ou seja,

$$\begin{aligned} \text{Int}^{i*} = & 2\pi j k_{z,m}^{TM} \frac{(k_{\rho 2,m}^{TM})^2}{\hat{y}_{2,1}} \left\{ \frac{b_2^2}{2} \left\{ Z_1(k_{\rho 2,m}^{TM} b_2) Z_1(k_{\rho 1,n}^{TM} b_2) \right. \right. \\ & - \frac{1}{k_{\rho 2,m}^{TM} b_2} [Z_0(k_{\rho 2,m}^{TM} b_2) Z_1(k_{\rho 1,n}^{TM} b_2) + Z_1(k_{\rho 2,m}^{TM} b_2) Z_0(k_{\rho 1,n}^{TM} b_2)] + Z_0(k_{\rho 2,m}^{TM} b_2) Z_0(k_{\rho 1,n}^{TM} b_2) \Big\} \\ & - \frac{b_1^2}{2} \left\{ Z_1(k_{\rho 2,m}^{TM} b_1) Z_1(k_{\rho 1,n}^{TM} b_1) \right. \\ & - \frac{1}{k_{\rho 2,m}^{TM} b_1} [Z_0(k_{\rho 2,m}^{TM} b_1) Z_1(k_{\rho 1,n}^{TM} b_1) + Z_1(k_{\rho 2,m}^{TM} b_1) Z_0(k_{\rho 1,n}^{TM} b_1)] \\ & \left. \left. + Z_0(k_{\rho 2,m}^{TM} b_1) Z_0(k_{\rho 1,n}^{TM} b_1) \right\} \right\}, \text{ e} \quad (3-69) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Int}^{j*} = & 2\pi j k_{z,m}^{TM} \frac{(k_{\rho 2,m}^{TM})^2}{\hat{y}_{2,1}} \left\{ \frac{c_1^2}{2} \left\{ Z_1(k_{\rho 2,m}^{TM} c_1) Z_1(k_{\rho 2,n}^{TM} c_1) \right. \right. \\ & - \frac{1}{k_{\rho 2,m}^{TM} c_1} [Z_0(k_{\rho 2,m}^{TM} c_1) Z_1(k_{\rho 2,n}^{TM} c_1) + Z_1(k_{\rho 2,m}^{TM} c_1) Z_0(k_{\rho 2,n}^{TM} c_1)] + Z_0(k_{\rho 2,m}^{TM} c_1) Z_0(k_{\rho 2,n}^{TM} c_1) \Big\} \\ & - \frac{b_2^2}{2} \left\{ Z_1(k_{\rho 2,m}^{TM} b_2) Z_1(k_{\rho 2,n}^{TM} b_2) \right. \\ & - \frac{1}{k_{\rho 2,m}^{TM} b_2} [Z_0(k_{\rho 2,m}^{TM} b_2) Z_1(k_{\rho 2,n}^{TM} b_2) + Z_1(k_{\rho 2,m}^{TM} b_2) Z_0(k_{\rho 2,n}^{TM} b_2)] \\ & \left. \left. + Z_0(k_{\rho 2,m}^{TM} b_2) Z_0(k_{\rho 2,n}^{TM} b_2) \right\} \right\}, \text{ e} \quad (3-70) \end{aligned}$$

Os elementos  $P_{nm}^{TM \rightleftharpoons TM}$  para  $a_1 < b_2 < c_1$  e  $b_1 = b_2$  é um caso especial de (3-61) e (3-66), e usando resultados precedentes, pode-se escrever

$$P_{nm}^{TM \rightleftharpoons TM} = \text{Int}_1^c + \text{Int}_2^b, \text{ para } a_1 < b_2 < c_1 \text{ e } b_1 = b_2. \quad (3-71)$$

Empregando as expressões (3-51), (3-56), (3-61), (3-66) e (3-71) resolve-se (3-38) mesmo quando um autovalor  $\alpha_m$  é igual a  $\beta_n$ . Dessa forma, com a formulação supracitada pode-se calcular os elementos  $P_{nm}^{TM \rightleftharpoons TM}$  de forma analítica e livre de singularidades. Quando  $\alpha_m \neq \beta_n$  emprega-se (3-45), (3-46),

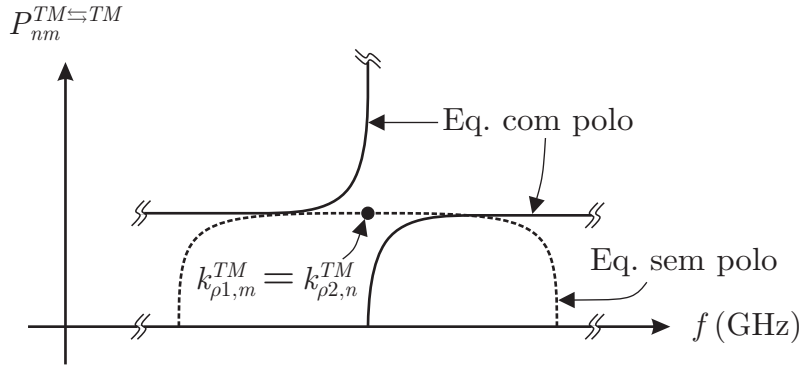


Figura 3.6: Representação das equações de  $P_{nm}^{TM \rightleftharpoons TM}$  (3-45) e (3-51) a medida que  $k_{\rho 1, m} \simeq k_{\rho 2, n}$ .

(3-47), (3-48) e (3-49).

Verifica-se que em geral as expressões de  $P_{nm}^{TM \rightleftharpoons TM}$  recaem inevitavelmente em casos apresentando  $\alpha_m \neq \beta_n$ . A ocorrência de  $\alpha_m = \beta_n$  é devido principalmente a junção de dois guias de onda com mesmos raios  $a$  e  $c$ , e, mais raramente, pode ocorrer para guias com dimensões quaisquer. Observando as curvas de  $k_\rho$  da Fig. 3.5 tem-se que em  $\sim 35$  GHz as curvas de  $k_{\rho 1}$  do modo  $TEM^z$  da região  $I$  cruza com a curva de  $k_{\rho 2}$  do modo  $TM_{01}$  da região  $II$ . Neste caso, a condição  $\alpha_m = \beta_n$  ocorre estritamente para uma frequência bem determinada na qual os valores numéricos dos autovalores são iguais. Entretanto, a medida que  $\alpha_m \rightarrow \beta_n$  a expressão de (3-45) eventualmente torna-se instável nas frequências muito próximas ao polo, ver representação da Fig. 3.6. Para evitar uma indeterminação numérica, admite-se que pode-se usar a equação sem polos (3-51) quando  $\text{Abs}(k_{\rho 1, m} - k_{\rho 2, n}) < \delta$ . O valor  $\delta = 1 \times 10^{-8}$  foi assumido como razoável para as simulações apresentadas nesta Dissertação. A mesma consideração foi assumida para todas as demais integrais que podem ser singulares.

### Elementos $P_{n0}^{TM \rightleftharpoons TM}$

Substituindo as expressões dos campos na expressão de  $P_{nm}$  que relaciona o cruzamento do modo  $TM_{00}^z$  da região  $I$  com os modos  $TM^z$  da região  $II$  pode-se obter os elementos  $P_{n0}^{TM \rightleftharpoons TM}$ . Em um guia com as camadas 1 e 2 homogêneas admite-se o modo  $TEM^z$ . Dessa forma, é conveniente avaliar os elementos  $P_{n0}^{TM \rightleftharpoons TM}$  de acordo com as combinações de regiões (homogêneas ou não homogêneas, ou ambas) da Tabela 3.1. Caso a região  $I$  seja não homogênea as expressões para  $P_{nm}^{TM \rightleftharpoons TM}$  com  $m = 0$  desenvolvidas anteriormente podem ser empregadas. Contudo, caso a região  $I$  seja homogênea, pode-se escrever para  $z = 0$

$$e_{\rho m I}^{TEM} = \frac{1}{\rho}, \text{ e}$$

Region I	Region II	$P_{n0}^{TM}$
Het.	Het./Hom.	$P_{nm}^{TM \rightleftharpoons TM}$ com $m = 0$
Hom.	Het./Hom.	$P_{n0}^{TEM \rightleftharpoons TM}$

Tabela 3.1:  $P_{n0}^{TM \rightleftharpoons TM}$  em função das combinações de regiões.

$$h_{\phi_{nII}}^{TM} = \begin{cases} -k_{\rho 1,n}^{TM} [A_{0,n} J'_0(k_{\rho 1,n}^{TM} \rho) + B_{0,n} Y'_0(k_{\rho 1,n}^{TM} \rho)], & \text{para } a_2 < \rho < b_2 \\ -k_{\rho 2,n}^{TM} [C_{0,n} J'_0(k_{\rho 2,n}^{TM} \rho) + D_{0,n} Y'_0(k_{\rho 2,n}^{TM} \rho)], & \text{para } b_2 < \rho < c_2 \end{cases},$$

e portanto

$$P_{n0}^{TEM \rightleftharpoons TM} = \int_0^{2\pi} \left\{ \begin{array}{l} \int_{a_1}^{c_1} e_{\rho_{mI}}^{TEM} h_{\phi_{2,nII}}^{TM} \rho d\rho \\ \int_{a_1}^{c_1} e_{\rho_{mI}}^{TEM} h_{\phi_{1,nII}}^{TM} \rho d\rho \\ \int_{a_1}^{b_2} e_{\rho_{mI}}^{TEM} h_{\phi_{1,nII}}^{TM} \rho d\rho + \int_{b_2}^{c_1} e_{\rho_{mI}}^{TEM} h_{\phi_{2,nII}}^{TM} \rho d\rho \end{array} \right\} d\phi, \quad \begin{cases} \text{se } a_1 \geq b_2 \\ \text{se } b_2 \geq c_1 \\ \text{se } a_1 < b_2 < c_1 \end{cases}, \quad (3-72)$$

que é suficientemente geral para resolver a matriz  $P_{n0}^{TM \rightleftharpoons TM}$  para as descontinuidades da seção transversal entre guias coaxiais da Fig. 3.3.

Notando que  $e_{\rho}^{TEM}$  e  $h_{\phi}^{TM}$  independem de  $\phi$ , a integral em termos de  $\phi$  em (3-72) é determinada. Dessa forma, as integrais restantes em (3-72) são descritas de forma genérica por

$$\int -k_{\rho 1,n}^{TM} Z'_0(k_{\rho 1,n}^{TM} \rho) d\rho \quad \text{e} \quad \int -k_{\rho 2,n}^{TM} Z'_0(k_{\rho 2,n}^{TM} \rho) d\rho, \quad (3-73)$$

em que foi usada a notação abreviada

$$Z'_0(k_{\rho 1,n}^{TM} \rho) = A_{0,n} J'_0(k_{\rho 1,n}^{TM} \rho) + B_{0,n} Y'_0(k_{\rho 1,n}^{TM} \rho), \text{ e} \quad (3-74)$$

$$Z'_0(k_{\rho 2,n}^{TM} \rho) = C_{0,n} J'_0(k_{\rho 2,n}^{TM} \rho) + D_{0,n} Y'_0(k_{\rho 2,n}^{TM} \rho). \quad (3-75)$$

Como  $Z'_0(z) = -Z_1(z)$ , e como  $\int Z_1(z) dz = -Z_0(z)$  [27, p. 142], pode-se escrever

$$\begin{aligned} \int_{\rho_1}^{\rho_2} k_{\rho 1,n}^{TM} Z_1(k_{\rho 1,n}^{TM} \rho) d\rho &= -k_{\rho 1,n}^{TM} \frac{1}{k_{\rho 1,n}^{TM}} [Z_0(k_{\rho 1,n}^{TM} \rho)]_{\rho_1}^{\rho_2} \\ &= -[Z_0(k_{\rho 1,n}^{TM} \rho)]_{\rho_1}^{\rho_2}. \end{aligned}$$



Por analogia a outra integral de (3-73) é facilmente encontrada. Assim, pode-se escrever (3-72) como

$$\begin{aligned}
 P_{n0}^{TEM \rightleftharpoons TM} &= 2\pi \left\{ \begin{array}{l} - [Z_0(k_{\rho 2,n}^{TM} \rho)]_{a_1}^{c_1} \\ - [Z_0(k_{\rho 1,n}^{TM} \rho)]_{a_1}^{c_1} \\ - [Z_0(k_{\rho 1,n}^{TM} \rho)]_{a_1}^{b_2} - [Z_0(k_{\rho 2,n}^{TM} \rho)]_{b_2}^{c_1} \end{array} \right\}, \\
 &= 2\pi \left\{ \begin{array}{l} Z_0(a_1 k_{\rho 2,n}^{TM}) - Z_0(c_1 k_{\rho 2,n}^{TM}) \\ Z_0(a_1 k_{\rho 1,n}^{TM}) - Z_0(c_1 k_{\rho 1,n}^{TM}) \\ Z_0(a_1 k_{\rho 1,n}^{TM}) - Z_0(b_2 k_{\rho 1,n}^{TM}) + Z_0(b_2 k_{\rho 2,n}^{TM}) - Z_0(c_1 k_{\rho 2,n}^{TM}) \end{array} \right\} \\
 &\quad \left\{ \begin{array}{l} \text{se } a_1 \geq b_2 \\ \text{se } b_2 \geq c_1 \\ \text{se } a_1 < b_2 < c_1 \end{array} \right. \quad . \quad (3-76)
 \end{aligned}$$

Deve ser observado que para o caso em que a região *II* for homogênea, tem-se que o termo  $[-Z_0(b_2 k_{\rho 1,n}^{TM}) + Z_0(b_2 k_{\rho 2,n}^{TM})]$  torna-se nulo, e simplifica (3-76). Naturalmente, se o raio do condutor interno do guia coaxial da região *I* for igual ao da região *II*, isto é,  $a_1 = a_2$ , o termo  $[Z_0(a_1 k_{\rho 2,n}^{TM})]$  recai na condição de contorno de campo elétrico transversal nulo no condutor, (2-27). Para o caso em que  $c_1 = c_2$ , por analogia tem-se que o termo  $[Z_0(c_1 k_{\rho 2,n}^{TM})]$  também é nulo.

### Elementos $P_{0m}^{TM \rightleftharpoons TM}$

Substituindo as expressões dos campos na expressão de  $P_{nm}$  que relaciona o cruzamento dos modos  $TM^z$  da região *I* com o modo  $TM_{00}^z$  da região *II* pode-se obter os elementos  $P_{0m}^{TM \rightleftharpoons TM}$ . É conveniente avaliar os elementos  $P_{0m}^{TM \rightleftharpoons TM}$  de acordo com as combinações de regiões da Tabela 3.2. Caso a região *II* seja não homogênea as expressões para  $P_{nm}^{TM \rightleftharpoons TM}$  com  $n = 0$  desenvolvidas anteriormente podem ser empregadas. Contudo, caso a região *II* seja homogênea, pode-se escrever para  $z = 0$

$$e_{\rho m I}^{TM} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{-jk_{z,m}^{TM} k_{\rho 1,m}^{TM}}{\hat{y}_{1,1}} [A_{0,m} J'_0(k_{\rho 1,m}^{TM} \rho) + B_{0,m} Y'_0(k_{\rho 1,m}^{TM} \rho)], \quad \text{para } a_1 < \rho < b_1 \\ \frac{-jk_{z,m}^{TM} k_{\rho 2,m}^{TM}}{\hat{y}_{2,1}} [C_{0,m} J'_0(k_{\rho 2,m}^{TM} \rho) + D_{0,m} Y'_0(k_{\rho 2,m}^{TM} \rho)], \quad \text{para } b_1 < \rho < c_1 \end{array} \right\}, \text{ e}$$

$$h_{\phi n II}^{TEM} = \frac{1}{\eta_2 \rho},$$

Region I	Region II	$P_{0m}^{TM}$
Hom./Het.	Het.	$P_{nm}^{TM \rightleftharpoons TM}$ com $n = 0$
Hom./Het.	Hom.	$P_{0m}^{TM \rightleftharpoons TEM}$

Tabela 3.2:  $P_{0m}^{TM \rightleftharpoons TM}$  em função das combinações de regiões.

e portanto

$$P_{0m}^{TM \rightleftharpoons TEM} = \int_0^{2\pi} \left[ \int_{a_1}^{b_1} e_{\rho 1, m I}^{TM} h_{\phi n II}^{TEM} \rho d\rho + \int_{b_1}^{c_1} e_{\rho 2, m I}^{TM} h_{\phi n II}^{TEM} \rho d\rho \right] d\phi, \quad (3-77)$$

que é suficientemente geral para resolver a matriz  $P_{0m}^{TM \rightleftharpoons TEM}$  para as descontinuidades da seção transversal entre guias coaxiais não homogêneos da Fig. 3.3a,c,e,f. O parâmetro  $\hat{y}_{1,1}$  representa a admitividade do meio na região I em  $a_1 < \rho < b_1$ , enquanto  $\hat{y}_{2,1}$  representa a admitividade desta região para  $b_1 < \rho < c_1$ .

Notando que  $e_{\rho}^{TEM}$  e  $h_{\phi}^{TM}$  independem de  $\phi$ , a integral em termos de  $\phi$  em (3-77) é determinada. Dessa forma, as integrais restantes em (3-77) são descritas de forma genérica por

$$\int \frac{-jk_{z,m}^{TM} k_{\rho 1, m}^{TM}}{\hat{y}_{1,1} \eta_2} Z'_0(k_{\rho 1, m}^{TM} \rho) d\rho \quad \text{e} \quad \int \frac{-jk_{z,m}^{TM} k_{\rho 2, m}^{TM}}{\hat{y}_{2,1} \eta_2} Z'_0(k_{\rho 2, m}^{TM} \rho) d\rho, \quad (3-78)$$

em que foi usada a notação abreviada

$$Z'_0(k_{\rho 1, m}^{TM} \rho) = A_{0,m} J'_0(k_{\rho 1, m}^{TM} \rho) + B_{0,m} Y'_0(k_{\rho 1, m}^{TM} \rho), \quad \text{e} \quad (3-79)$$

$$Z'_0(k_{\rho 2, m}^{TM} \rho) = C_{0,m} J'_0(k_{\rho 2, m}^{TM} \rho) + D_{0,m} Y'_0(k_{\rho 2, m}^{TM} \rho). \quad (3-80)$$

Usando resultados precedentes, por analogia tem-se

$$\int_{\rho_1}^{\rho_2} \frac{jk_{z,m}^{TM} k_{\rho 1, m}^{TM}}{\hat{y}_{1,1} \eta_2} Z_1(k_{\rho 1, m}^{TM} \rho) d\rho = \frac{-jk_{z,m}^{TM}}{\hat{y}_{1,1} \eta_2} [Z_0(k_{\rho 1, m}^{TM} \rho)]_{\rho_1}^{\rho_2}.$$

Assim, pode-se escrever (3-77) como

$$\begin{aligned} P_{0m}^{TM \rightleftharpoons TEM} &= 2\pi \frac{jk_{z,m}^{TM}}{\eta_2} \left\{ -\frac{1}{\hat{y}_{1,1}} [Z_0(k_{\rho 1, m}^{TM} \rho)]_{a_1}^{b_1} - \frac{1}{\hat{y}_{2,1}} [Z_0(k_{\rho 2, m}^{TM} \rho)]_{b_1}^{c_1} \right\} \\ &= 2\pi \frac{jk_{z,m}^{TM}}{\eta_2} \left\{ \frac{1}{\hat{y}_{1,1}} [Z_0(k_{\rho 1, m}^{TM} a_1) - Z_0(k_{\rho 1, m}^{TM} b_1)] + \frac{1}{\hat{y}_{1,2}} [Z_0(k_{\rho 2, m}^{TM} b_1) - Z_0(k_{\rho 2, m}^{TM} c_1)] \right\}. \end{aligned}$$

Deve ser observado que  $Z_0(k_{\rho 1, m}^{TM} a_1) = 0$  da condição de contorno (2-27), da mesma forma que  $Z_0(k_{\rho 2, m}^{TM} c_1) = 0$ , pois é a condição de contorno (2-29). Assim,  $P_{0m}^{TM \rightleftharpoons TEM}$  se reduz para

Region <i>I</i>	Region <i>II</i>	$P_{0m}^{TM}$
Het.	Het.	$P_{nm}^{TM \rightleftharpoons TM}$ com $m = n = 0$
Het.	Hom.	$P_{0m}^{TM \rightleftharpoons TM}$ com $m = 0$
Hom.	Het.	$P_{n0}^{TM \rightleftharpoons TM}$ com $n = 0$
Hom.	Hom.	$P_{00}^{TEM \rightleftharpoons TEM}$

Tabela 3.3:  $P_{0m}^{TM \rightleftharpoons TM}$  em função das combinações de regiões.

$$P_{0m}^{TM \rightleftharpoons TEM} = 2\pi \frac{jk_{z,m}^{TM}}{\eta_2} \left[ -\frac{1}{\hat{y}_{1,1}} Z_0(k_{\rho 1,m}^{TM} b_1) + \frac{1}{\hat{y}_{1,2}} Z_0(k_{\rho 2,m}^{TM} b_1) \right]. \quad (3-81)$$

Para o caso em que a região *I* é homogênea; da mesma forma que a região *II*, pois esta suporta o modo  $TEM^z$ , tem-se  $P_{0m}^{TM \rightleftharpoons TEM} = 0$ .

### Elementos $P_{00}^{TM \rightleftharpoons TM}$

Substituindo as expressões dos campos na expressão de  $P_{nm}$  que relaciona o cruzamento do modo  $TM_{00}^z$  da região *I* com o modo  $TM_{00}^z$  da região *II*, pode-se obter os elementos  $P_{00}^{TM \rightleftharpoons TM}$  de acordo com as condições da Tabela 3.3. Caso as regiões *I* e *II* sejam homogêneas, pode-se escrever para  $z = 0$

$$e_{\rho_{mI}}^{TEM} = \frac{1}{\rho}, \text{ e}$$

$$h_{\phi_{nII}}^{TEM} = \frac{1}{\eta_2 \rho},$$

e portanto

$$\begin{aligned} P_{00}^{TEM \rightleftharpoons TEM} &= \int_0^{2\pi} \int_{a_1}^{c_1} \frac{1}{\rho} \frac{1}{\eta_2 \rho} \rho d\rho d\phi \\ &= \frac{2\pi}{\eta_2} \int_{a_1}^{c_1} \frac{1}{\rho} d\rho = \frac{2\pi}{\eta_2} \log \left( \frac{c_1}{a_1} \right), \end{aligned} \quad (3-82)$$

em que  $\eta_2$  é a impedância intrínseca da região *II*, e  $\log$  representa função logaritmo natural.

### 3.2.5

#### Elementos da Matriz $\bar{\bar{R}}$

Aqui são determinados os elementos da matriz  $\bar{\bar{R}}$  supondo que um guia coaxial homogêneo é excitado com o modo  $TEM^z$  sem dependência azimutal. Assume-se que possam ocorrer descontinuidades na seção transversal deste guia de onda, como ilustra a Fig. 3.2. Os elementos da matriz  $\bar{\bar{R}}$  são dados por (3-17), ou seja,

$$R_{mm} = \int_{sI} (\mathbf{e}_{mI} \times \mathbf{h}_{mI}) \cdot d\mathbf{s},$$

e seguindo um raciocínio análogo ao usado na determinação de  $P_{nm}$ , pode-se mostrar que

$$R_{mm} = \int_0^{2\pi} \int_{a_1}^{c_1} (e_{\rho_{mI}} h_{\phi_{mII}} - e_{\phi_{mI}} h_{\rho_{mII}}) \rho d\rho d\phi.$$

Os modos  $TE_{0p}^z$  nas regiões  $I$  e  $II$  não têm componentes  $e_\rho$  e  $h_\phi$ . Portanto, torna-se nulo o produto  $(e_\rho h_\phi)$  de todos os cruzamentos entre os modos  $TE_{0p}^z$  nas regiões  $I$  e  $II$  com os modos  $TEM^z$  e  $TM_{0p}^z$  nas regiões  $I$  e  $II$ . Considerando que é de interesse avaliar o cascadeamento de vários trechos de guias de onda coaxial com descontinuidades da seção transversal, determina-se os elementos  $R_{mm}$  de forma generalizada. Pode-se ter os seguintes cruzamentos de modos em  $z = 0$ :

$$R_{00}^{TM} = \int_0^{2\pi} \int_{a_1}^{c_1} e_{\rho_{mI}}^{TM} h_{\phi_{mI}}^{TM} \rho d\rho d\phi, \text{ e}$$

$$R_{mm}^{TM} = \int_0^{2\pi} \int_{a_1}^{c_1} e_{\rho_{mI}}^{TM} h_{\phi_{mI}}^{TM} \rho d\rho d\phi.$$

Como o modo  $TE_{0p}^z$  não acopla com os outros modos, não tem influência nos parâmetros de reflexão e transmissão associados a matriz de acoplamento. Dessa forma, a matriz diagonal  $\bar{\bar{R}}$  é montada apenas com os cruzamentos dos modos  $TM_{0p}^z$ , da maneira mostrada a seguir:

$$\begin{bmatrix} R_{00}^{TM} & & & & & \\ & R_{11}^{TM} & & & & \\ & & R_{22}^{TM} & & & \\ & & & R_{33}^{TM} & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & R_{mm}^{TM} \end{bmatrix}.$$

### Elementos $R_{mm}^{TM}$

Substituindo as expressões dos campos na expressão de  $R_{mm}$  relacionada ao modo  $TM^z$  da região  $I$ , pode-se escrever para  $z = 0$

$$e_{\rho m I}^{TM} = \begin{cases} \frac{1}{\hat{y}_{1,1}} (-jk_{z,m}^{TM} k_{\rho 1,m}^{TM}) [A_{0,m} J'_0(k_{\rho 1,m}^{TM} \rho) + B_{0,m} Y'_0(k_{\rho 1,m}^{TM} \rho)] \\ \frac{1}{\hat{y}_{2,1}} (-jk_{z,m}^{TM} k_{\rho 2,m}^{TM}) [C_{0,m} J'_0(k_{\rho 2,m}^{TM} \rho) + D_{0,m} Y'_0(k_{\rho 2,m}^{TM} \rho)] \end{cases} \begin{cases} \text{para } a_1 < \rho < b_1 \\ \text{para } b_1 < \rho < c_1 \end{cases}, \text{ e } \quad (3-83)$$

$$h_{\phi m I}^{TM} = \begin{cases} -k_{\rho 1,m}^{TM} [A_{0,m} J'_0(k_{\rho 1,m}^{TM} \rho) + B_{0,m} Y'_0(k_{\rho 1,m}^{TM} \rho)], & \text{para } a_1 < \rho < b_1 \\ -k_{\rho 2,m}^{TM} [C_{0,m} J'_0(k_{\rho 2,m}^{TM} \rho) + D_{0,m} Y'_0(k_{\rho 2,m}^{TM} \rho)], & \text{para } b_1 < \rho < c_1 \end{cases}, \quad (3-84)$$

e portanto

$$R_{mm}^{TM} = 2\pi j k_{z,m}^{TM} \left\{ \frac{1}{\hat{y}_{1,1}} (k_{\rho 1,m}^{TM})^2 \int_{a_1}^{b_1} [A_{0,m} J'_0(k_{\rho 1,m}^{TM} \rho) + B_{0,m} Y'_0(k_{\rho 1,m}^{TM} \rho)]^2 \rho d\rho \right. \\ \left. + \frac{1}{\hat{y}_{2,1}} (k_{\rho 2,m}^{TM})^2 \int_{b_1}^{c_1} [C_{0,m} J'_0(k_{\rho 2,m}^{TM} \rho) + D_{0,m} Y'_0(k_{\rho 2,m}^{TM} \rho)]^2 \rho d\rho \right\}.$$

Fazendo

$$Z'_0(k_{\rho 1,m}^{TM} \rho) = -Z_1(k_{\rho 1,m}^{TM} \rho) = A_{0,m} J'_0(k_{\rho 1,m}^{TM} \rho) + B_{0,m} Y'_0(k_{\rho 1,m}^{TM} \rho), \text{ e } \quad (3-85)$$

$$Z'_0(k_{\rho 2,m}^{TM} \rho) = -Z_1(k_{\rho 2,m}^{TM} \rho) = C_{0,m} J'_0(k_{\rho 2,m}^{TM} \rho) + D_{0,m} Y'_0(k_{\rho 2,m}^{TM} \rho), \quad (3-86)$$

tem-se

$$R_{mm}^{TM} = 2\pi j k_{z,m}^{TM} \left[ \frac{(k_{\rho 1,m}^{TM})^2}{\hat{y}_{1,1}} \int_{a_1}^{b_1} Z_1^2(k_{\rho 1,m}^{TM} \rho) \rho d\rho \right. \\ \left. + \frac{(k_{\rho 2,m}^{TM})^2}{\hat{y}_{2,1}} \int_{b_1}^{c_1} Z_1^2(k_{\rho 2,m}^{TM} \rho) \rho d\rho \right].$$

De acordo com [28, p. 135], para  $\mathcal{C}_\nu(z)$  uma função cilíndrica de ordem  $\nu$ , pode-se mostrar que

$$\int_{z_1}^{z_2} \mathcal{C}_\nu^2(\alpha z) z dz = \left\{ \frac{z^2}{2} [\mathcal{C}_\nu^2(\alpha z) - \mathcal{C}_{\nu-1}(\alpha z) \mathcal{C}_{\nu+1}(\alpha z)] \right\}_{z_1}^{z_2} \\ = \left\{ \frac{z^2}{2} \left[ \left( 1 - \frac{\nu^2}{(\alpha z)^2} \right) \mathcal{C}_\nu^2(\alpha z) + \mathcal{C}_\nu'^2(\alpha z) \right] \right\}_{z_1}^{z_2}, \quad (3-87)$$

que permite escrever  $R_{mm}^{TM}$  como

$$R_{mm}^{TM} = 2\pi j k_{z,m}^{TM} \times \left\{ \frac{(k_{\rho 1,m}^{TM})^2}{\hat{y}_{1,1}} \left\{ \frac{\rho^2}{2} \left[ \left( 1 - \frac{1}{(k_{\rho 1,m}^{TM})^2} \right) Z_1^2(k_{\rho 1,m}^{TM}\rho) + Z_1'^2(k_{\rho 1,m}^{TM}\rho) \right] \right\}_{a_1}^{b_1} + \frac{(k_{\rho 2,m}^{TM})^2}{\hat{y}_{2,1}} \left\{ \frac{\rho^2}{2} \left[ \left( 1 - \frac{1}{(k_{\rho 2,m}^{TM})^2} \right) Z_1^2(k_{\rho 2,m}^{TM}\rho) + Z_1'^2(k_{\rho 2,m}^{TM}\rho) \right] \right\}_{b_1}^{c_1} \right\}.$$

Como  $Z_1'(z) = Z_0(z) - Z_1(z)/z$ , pode-se escrever

$$R_{mm}^{TM} = 2\pi j k_{z,m}^{TM} \left\{ \frac{(k_{\rho 1,m}^{TM})^2}{\hat{y}_{1,1}} \left\{ \frac{\rho^2}{2} \left[ Z_1^2(k_{\rho 1,m}^{TM}\rho) - \frac{Z_1^2(k_{\rho 1,m}^{TM}\rho)}{(k_{\rho 1,m}^{TM})^2} + Z_0^2(k_{\rho 1,m}^{TM}\rho) - 2 \frac{Z_0(k_{\rho 1,m}^{TM}\rho)Z_1(k_{\rho 1,m}^{TM}\rho)}{k_{\rho 1,m}^{TM}\rho} + \frac{Z_1^2(k_{\rho 1,m}^{TM}\rho)}{(k_{\rho 1,m}^{TM})^2} \right] \right\}_{a_1}^{b_1} + \frac{(k_{\rho 2,m}^{TM})^2}{\hat{y}_{2,1}} \left\{ \frac{\rho^2}{2} \left[ Z_1^2(k_{\rho 2,m}^{TM}\rho) - \frac{Z_1^2(k_{\rho 2,m}^{TM}\rho)}{(k_{\rho 2,m}^{TM})^2} + Z_0^2(k_{\rho 2,m}^{TM}\rho) - 2 \frac{Z_0(k_{\rho 2,m}^{TM}\rho)Z_1(k_{\rho 2,m}^{TM}\rho)}{k_{\rho 2,m}^{TM}\rho} + \frac{Z_1^2(k_{\rho 2,m}^{TM}\rho)}{(k_{\rho 2,m}^{TM})^2} \right] \right\}_{b_1}^{c_1} \right\}$$

$$R_{mm}^{TM} = 2\pi j k_{z,m}^{TM} \left\{ \frac{(k_{\rho 1,m}^{TM})^2}{\hat{y}_{1,1}} \left\{ \frac{\rho^2}{2} \left[ Z_1^2(k_{\rho 1,m}^{TM}\rho) + Z_0^2(k_{\rho 1,m}^{TM}\rho) - 2 \frac{Z_0(k_{\rho 1,m}^{TM}\rho)Z_1(k_{\rho 1,m}^{TM}\rho)}{k_{\rho 1,m}^{TM}\rho} \right] \right\}_{a_1}^{b_1} + \frac{(k_{\rho 2,m}^{TM})^2}{\hat{y}_{2,1}} \left\{ \frac{\rho^2}{2} \left[ Z_1^2(k_{\rho 2,m}^{TM}\rho) + Z_0^2(k_{\rho 2,m}^{TM}\rho) - 2 \frac{Z_0(k_{\rho 2,m}^{TM}\rho)Z_1(k_{\rho 2,m}^{TM}\rho)}{k_{\rho 2,m}^{TM}\rho} \right] \right\}_{b_1}^{c_1} \right\}.$$

Substituindo os limites de integração da expressão anterior, pode-se escrever

$$\begin{aligned}
 R_{mm}^{TM} &= 2\pi j k_{z,m}^{TM} \\
 &\times \left\{ \frac{(k_{\rho 1,m}^{TM})^2}{\hat{y}_{1,1}} \left\{ \frac{b_1^2}{2} \left[ Z_1^2(k_{\rho 1,m}^{TM} b_1) + Z_0^2(k_{\rho 1,m}^{TM} b_1) - 2 \frac{Z_0(k_{\rho 1,m}^{TM} b_1) Z_1(k_{\rho 1,m}^{TM} b_1)}{k_{\rho 1,m}^{TM} b_1} \right] \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \frac{a_1^2}{2} \left[ Z_1^2(k_{\rho 1,m}^{TM} a_1) + Z_0^2(k_{\rho 1,m}^{TM} a_1) - 2 \frac{Z_0(k_{\rho 1,m}^{TM} a_1) Z_1(k_{\rho 1,m}^{TM} a_1)}{k_{\rho 1,m}^{TM} a_1} \right] \right\} \right. \\
 &+ \frac{(k_{\rho 2,m}^{TM})^2}{\hat{y}_{2,1}} \left\{ \frac{c_1^2}{2} \left[ Z_1^2(k_{\rho 2,m}^{TM} c_1) + Z_0^2(k_{\rho 2,m}^{TM} c_1) - 2 \frac{Z_0(k_{\rho 2,m}^{TM} c_1) Z_1(k_{\rho 2,m}^{TM} c_1)}{k_{\rho 2,m}^{TM} c_1} \right] \right. \\
 &\quad \left. \left. - \frac{b_1^2}{2} \left[ Z_1^2(k_{\rho 2,m}^{TM} b_1) + Z_0^2(k_{\rho 2,m}^{TM} b_1) - 2 \frac{Z_0(k_{\rho 2,m}^{TM} b_1) Z_1(k_{\rho 2,m}^{TM} b_1)}{k_{\rho 2,m}^{TM} b_1} \right] \right\} \right\}. \quad (3-88)
 \end{aligned}$$

Das condições de contorno, tem-se  $Z_0(a_1 k_{\rho 1,m}^{TM}) = Z_0(c_1 k_{\rho 2,m}^{TM}) = 0$ , que reduz a expressão anterior para

$$\begin{aligned}
 R_{mm}^{TM} &= 2\pi j k_{z,m}^{TM} \\
 &\times \left\{ \frac{(k_{\rho 1,m}^{TM})^2}{\hat{y}_{1,1}} \left\{ \frac{b_1^2}{2} \left[ Z_1^2(k_{\rho 1,m}^{TM} b_1) + Z_0^2(k_{\rho 1,m}^{TM} b_1) - 2 \frac{Z_0(k_{\rho 1,m}^{TM} b_1) Z_1(k_{\rho 1,m}^{TM} b_1)}{k_{\rho 1,m}^{TM} b_1} \right] \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \frac{a_1^2}{2} Z_1^2(k_{\rho 1,m}^{TM} a_1) \right\} + \frac{(k_{\rho 2,m}^{TM})^2}{\hat{y}_{2,1}} \left\{ \frac{c_1^2}{2} Z_1^2(k_{\rho 2,m}^{TM} c_1) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \frac{b_1^2}{2} \left[ Z_1^2(k_{\rho 2,m}^{TM} b_1) + Z_0^2(k_{\rho 2,m}^{TM} b_1) - 2 \frac{Z_0(k_{\rho 2,m}^{TM} b_1) Z_1(k_{\rho 2,m}^{TM} b_1)}{k_{\rho 2,m}^{TM} b_1} \right] \right\} \right\}. \quad (3-89)
 \end{aligned}$$

Para um guia homogêneo, tem-se  $\hat{y}_1 = \hat{y}_{1,1} = \hat{y}_{2,1}$ ,  $k_{\rho,m}^{TM} = k_{\rho 1,m}^{TM} = k_{\rho 2,m}^{TM}$ , e a expressão de  $R_{mm}^{TM}$  se reduz para

$$R_{mm}^{TM} = 2\pi j k_{z,m}^{TM} \frac{(k_{\rho,m}^{TM})^2}{\hat{y}_1} \left[ -\frac{a_1^2}{2} Z_1^2(k_{\rho,m}^{TM} a_1) + \frac{c_1^2}{2} Z_1^2(k_{\rho,m}^{TM} c_1) \right]. \quad (3-90)$$

### Elementos $R_{00}^{TM}$

Substituindo as expressões dos campos na expressão de  $R_{mm}$  relacionada ao modo  $TM_{00}^z$  da região  $I$ , verifica-se que é conveniente avaliar  $R_{00}^{TM}$  de acordo com a Tabela 3.4, Caso a região  $I$  seja homogênea, pode-se escrever para  $z = 0$

$$e_{\rho m I}^{TEM} = \frac{1}{\rho}, \quad e \quad (3-91)$$

$$h_{\phi m I}^{TEM} = \frac{1}{\eta_1 \rho}, \quad (3-92)$$

Region $I$	$R_{00}^{TM}$
Het.	$R_{mm}^{TM}$ com $m = 0$
Hom.	$R_{00}^{TEM}$

Tabela 3.4:  $R_{00}^{TM}$  em função das combinações de regiões.

e portanto

$$\begin{aligned}
 R_{00}^{TEM} &= \int_0^{2\pi} \int_{a_1}^{c_1} \frac{1}{\rho} \frac{1}{\eta_1 \rho} \rho d\rho d\phi \\
 &= \frac{2\pi}{\eta_1} \int_{a_1}^{c_1} \frac{1}{\rho} \rho d\rho
 \end{aligned} \tag{3-93}$$

$$= \frac{2\pi}{\eta_1} (\log c_1 - \log a_1) = \frac{2\pi}{\eta_1} \log \left( \frac{c_1}{a_1} \right), \tag{3-94}$$

em que  $\log$  representa a função logaritmo natural.

### 3.2.6

#### Elementos da Matriz $\bar{\bar{Q}}$

O cálculo dos elementos da matriz  $\bar{\bar{Q}}$  é análogo ao realizado para a matriz  $\bar{\bar{R}}$ , contudo, as integrais de 3-14 são realizadas na região a direita da descontinuidade, no guia de seção transversal  $s_{II}$ , para  $z = 0$ . Esta integral representa a potência associada a cada modo excitado nesse guia. Pode-se ter os seguintes cruzamentos de modos em  $z = 0$ :

$$\begin{aligned}
 Q_{00}^{TM} &= \int_0^{2\pi} \int_{a_2}^{c_2} e_{\rho_{nII}}^{TM} h_{\phi_{nII}}^{TM} \rho d\rho d\phi, \text{ e} \\
 Q_{nn}^{TM} &= \int_0^{2\pi} \int_{a_2}^{c_2} e_{\rho_{nII}}^{TM} h_{\phi_{nII}}^{TM} \rho d\rho d\phi.
 \end{aligned}$$

Como o modo  $TE_{0p}^z$  não acopla com os outros modos, não tem influência nos parâmetros de reflexão e transmissão associados a matriz de acoplamento. Desse forma, a matriz diagonal  $\bar{\bar{Q}}$  é montada apenas com os cruzamentos dos modos  $TM_{0p}^z$ , da maneira mostrada a seguir:

$$\begin{bmatrix}
 Q_{00}^{TM} & & & & & \\
 & Q_{11}^{TM} & & & & \\
 & & Q_{22}^{TM} & & & \\
 & & & Q_{33}^{TM} & & \\
 & & & & \ddots & \\
 & & & & & Q_{nn}^{TM}
 \end{bmatrix}.$$



**Elementos  $Q_{nn}^{TM}$** 

A integral em termos de  $\rho$  da expressão de  $Q_{nn}^{TM}$  é dual a calculada para  $R_{mm}^{TM}$ . Dessa forma, com a simples substituição de subscritos das variáveis de (3-88), tem-se que

$$Q_{nn}^{TM} = 2\pi j k_{z,n}^{TM} \times \left\{ \frac{(k_{\rho 1,n}^{TM})^2}{\hat{y}_{1,2}} \left\{ \frac{b_2^2}{2} \left[ Z_1^2(k_{\rho 1,n}^{TM} b_2) + Z_0^2(k_{\rho 1,n}^{TM} b_2) - 2 \frac{Z_0(k_{\rho 1,n}^{TM} b_2) Z_1(k_{\rho 1,n}^{TM} b_2)}{k_{\rho 1,n}^{TM} b_2} \right] - \frac{a_2^2}{2} Z_1^2(k_{\rho 1,n}^{TM} a_2) \right\} + \frac{(k_{\rho 2,n}^{TM})^2}{\hat{y}_{2,2}} \left\{ \frac{c_2^2}{2} Z_1^2(k_{\rho 2,n}^{TM} c_2) - \frac{b_2^2}{2} \left[ Z_1^2(k_{\rho 2,n}^{TM} b_2) + Z_0^2(k_{\rho 2,n}^{TM} b_2) - 2 \frac{Z_0(k_{\rho 2,n}^{TM} b_2) Z_1(k_{\rho 2,n}^{TM} b_2)}{k_{\rho 2,n}^{TM} b_2} \right] \right\} \right\}, \quad (3-95)$$

em que

$$Z'_0(k_{\rho 1,n}^{TM} \rho) = -Z_1(k_{\rho 1,n}^{TM} \rho) = A_{0,n} J'_0(k_{\rho 1,n}^{TM} \rho) + B_{0,n} Y'_0(k_{\rho 1,n}^{TM} \rho), \quad (3-96)$$

$$Z'_0(k_{\rho 2,n}^{TM} \rho) = -Z_1(k_{\rho 2,n}^{TM} \rho) = C_{0,n} J'_0(k_{\rho 2,n}^{TM} \rho) + D_{0,n} Y'_0(k_{\rho 2,n}^{TM} \rho), \quad (3-97)$$

$$Z_0(k_{\rho 1,n}^{TM} \rho) = A_{0,n} J_0(k_{\rho 1,n}^{TM} \rho) + B_{0,n} Y_0(k_{\rho 1,n}^{TM} \rho), \text{ e} \quad (3-98)$$

$$Z_0(k_{\rho 2,n}^{TM} \rho) = C_{0,n} J_0(k_{\rho 2,n}^{TM} \rho) + D_{0,n} Y_0(k_{\rho 2,n}^{TM} \rho). \quad (3-99)$$

Para um guia homogêneo, tem-se  $\hat{y}_2 = \hat{y}_{1,2} = \hat{y}_{2,2}$ ,  $k_{\rho,n}^{TM} = k_{\rho 1,n}^{TM} = k_{\rho 2,n}^{TM}$ , e

$$Q_{nn}^{TM} = 2\pi j k_{z,n}^{TM} \frac{(k_{\rho,n}^{TM})^2}{\hat{y}_2} \left[ -\frac{a_2^2}{2} Z_1^2(k_{\rho,n}^{TM} a_2) + \frac{c_2^2}{2} Z_1^2(k_{\rho,n}^{TM} c_2) \right]. \quad (3-100)$$

**Elementos  $Q_{00}^{TM}$** 

Substituindo as expressões dos campos na expressão de  $Q_{nn}$  relacionada ao modo  $TM_{00}^z$  da região  $II$ , verifica-se que é conveniente avaliar  $Q_{00}^{TM}$  de acordo com a Tabela 3.5. Caso a região  $II$  seja homogênea, pode-se escrever para  $z = 0$

$$e_{\rho n II}^{TEM} = \frac{1}{\rho}, \text{ e} \quad (3-101)$$

$$h_{\phi n II}^{TEM} = \frac{1}{\eta_2 \rho}, \quad (3-102)$$

e portanto

$$Q_{00}^{TEM} = \frac{2\pi}{\eta_2} \log \left( \frac{c_2}{a_2} \right).$$

Region <i>II</i>	$Q_{00}^{TM}$
Het.	$Q_{nn}^{TM}$ com $n = 0$
Hom.	$Q_{00}^{TEM}$

Tabela 3.5:  $Q_{00}^{TM}$  em função das combinações de regiões.

### 3.2.7

#### Normalização das Matrizes de Espalhamento

A formulação supracitada é válida para campos normalizados para a potência unitária. Essa normalização pode ser aplicada aos campos empregados na obtenção das matrizes  $\bar{P}_{nm}$ ,  $\bar{Q}_{nn}$  e  $\bar{R}_{mm}$ , ou diretamente na matriz de espalhamento. A matriz de espalhamento da descontinuidades entre duas regiões deve ser normalizada da seguinte forma:

$$(S_{11}^{nor})_{m\tilde{m}} = (S_{11})_{m\tilde{m}} \sqrt{\frac{R_{mm}}{R_{\tilde{m}\tilde{m}}}}, \quad (3-103a)$$

$$(S_{12}^{nor})_{mn} = (S_{12})_{mn} \sqrt{\frac{R_{mm}}{Q_{nn}}}, \quad (3-103b)$$

$$(S_{21}^{nor})_{nm} = (S_{21})_{nm} \sqrt{\frac{Q_{nn}}{R_{mm}}}, \text{ e} \quad (3-103c)$$

$$(S_{22}^{nor})_{n\tilde{n}} = (S_{22})_{n\tilde{n}} \sqrt{\frac{Q_{nn}}{Q_{\tilde{n}\tilde{n}}}}. \quad (3-103d)$$

A motivação para a normalização pela auto-reação é explicada em detalhes no Apêndice B, e usando esta normalização algumas propriedades da matriz de espalhamento generalizada são obtidas – como verificado no Apêndice C.

### 3.2.8

#### Perda de Retorno do Modo TEM<sup>z</sup>

Assumindo que uma onda TEM<sup>z</sup> com potência unitária se propaga no guia de entrada da estrutura da Fig. 3.1, e assumindo que ambos primeiro e último guias têm comprimento infinitos (ou terminam em cargas casadas), seguindo a notação de (3-21), tem-se que o primeiro elemento do sub-vetor  $\bar{A}$  na região *I*, correspondente ao modo TM<sub>00</sub><sup>z</sup> vale 1, ao passo que os demais elementos são nulos. Como o guia da região *I* termina em uma carga casada, todos elementos do sub-vetor  $\bar{A}$  na região *II* são nulos. De forma compacta, tem-se

$$A_{1I} = 1, \quad A_{mI} = 0 \text{ para } m > 1, \text{ e } \bar{A}_{II} = \bar{0}. \quad (3-104)$$

Fazendo a matriz de espalhamento total de todas as descontinuidades  $\bar{S}^0$ , tem-se que os modos refletidos para o guia de onda de excitação são dados

por  $\bar{B}_I = \bar{S}_{11}^0 \bar{A}_I$ . Os modos transmitidos para o último trecho de guia de onda são dados por  $\bar{B}_{II} = \bar{S}_{21}^0 \bar{A}_I$ . Finalmente, a perda retorno do modo TEM<sup>z</sup> de excitação expressa em decibéis pode ser facilmente computada a partir do primeiro elemento do vetor  $\bar{B}_I$ , ou seja,  $-20 \log\{\text{Abs}[B_I(0,0)]\}$ .

### 3.3

#### Validação da Formulação e do Algoritmo Numérico

A partir da formulação supracitada foi implementado um algoritmo em FORTRAN. A fim de verificar a correta implementação do programa e da formulação supracitada, algumas verificações foram realizadas. Inicialmente foram verificadas as propriedades da matriz GSM calculada. Em seguida, usando dados disponíveis na literatura ([9], [4]) foi realizada a validação do algoritmo para junção de guias homogêneos. Duas referências ([5],[10]) foram usadas para a verificações da junção de guias não homogêneos. Entretanto, as estruturas não homogêneas encontradas na literatura não permitiram a validação de forma generalizada da formulação. A partir daí, o programa *software Computer Simulation Technology Microwave Studio* (CST MWS, por comodidade designado apenas por CST) foi utilizada para a validação do algoritmo implementado.

#### 3.3.1

##### Propriedades da Matriz GSM

A matriz de espalhamento generalizada  $\bar{\bar{S}}$  resultante na junção de dois guias pelo método do casamento de modos satisfaz as seguintes propriedades [24, p. 1900], [26, p. 161]

$$\text{Simetria ou reciprocidade: } \bar{\bar{S}}^T = \bar{\bar{S}}, \text{ e} \quad (3-105a)$$

$$\text{Ortogonalidade: } \bar{\bar{S}}^T \bar{\bar{S}} = \bar{\bar{I}}. \quad (3-105b)$$

Em [26, p. 161] é salientado que a matriz de espalhamento convencional ainda satisfaz  $\bar{\bar{S}}_c^\dagger = \bar{\bar{S}}_c$ , ou seja,  $\bar{\bar{S}}_c$  é igual a sua transposta conjugada, e é dita unitária.

As propriedades de (3-105) foram deduzidas em [24, p. 1990], [26, p. 161], e [29, p. 3481]. Contudo, a formulação empregada por esses autores foi feita a partir da conservação potência complexa na abertura comum da junção de dois guias de onda. Na formulação supracitada foi empregado a conservação da auto-reação. No trabalho de [24] foi demonstrado que ambas formulações, tanto da conservação da potência complexa como a da reação, são equivalentes para estruturas sem perdas. Entretanto, as propriedades de (3-105) não podem

ser aplicada diretamente na formulação supracitada pois uma normalização adicional a matriz  $\bar{\bar{S}}$  é necessária. No Apêndice C é verificado que a matriz GSM obtida pela conservação da auto-reação e usando a normalização de (3-103) satisfaz

$$\bar{\bar{S}}\bar{\bar{S}} = \bar{\bar{I}}. \quad (3-106)$$

A relação de (3-106) é útil para verificar se a construção de  $\bar{\bar{S}}$  está correta, contudo, é apenas *necessária*. Em outras palavras, essa verificação não é *suficiente* para garantir que toda formulação está correta.

A fim de verificar as propriedades da matriz GSM, considera-se algumas estruturas de junção de dois guias coaxiais. A interpretação de alguns fenômenos interessantes é feita paralelamente a verificação das propriedades na matriz  $\bar{\bar{S}}$ .

Um primeiro caso avaliado é a junção entre dois guias coaxiais homogêneos. Seja o modo TEM<sup>z</sup> a excitação do guia *I*, caracterizado por  $a_1 = 1,840$  mm e  $c_1 = 5,0$  mm preenchido com ar. Este guia é acoplado ao guia *II*, caracterizado por  $a_2 = 1,50$  mm e  $c_2 = 5,0$  mm preenchido com ar. O MMT descrito anteriormente foi aplicado para analisar esta estrutura, resultando na perda de retorno<sup>5</sup> para o modo fundamental mostrada na Fig. 3.7. Foram considerando 20 modos em cada guia. Adicionalmente as curvas de dispersão dos primeiros modos são mostradas na mesma figura. Duas assíntotas verticais destacam as frequências em que os modos TM<sub>01</sub> dos guias *I* e *II* tornam-se propagantes. Fica claro que a perda de retorno, Abs( $S_{11}$ ), tem um comportamento bem definido, mas é perturbada com a entrada dos modos superiores. A parte real da matriz  $\bar{\bar{S}}$  é plotada na Fig. 3.8. O eixo indicado por *m* está para as linhas de  $\bar{\bar{S}}$  ao passo que o eixo indicado por *n* está para as colunas de  $\bar{\bar{S}}$ . A matriz GSM obtida é predominantemente real, de modo que a parte imaginária dos elementos de  $\bar{\bar{S}}$  não é mostrada. Considerando a matriz complexa  $\bar{\bar{S}}$ , na Fig. 3.8 verifica-se que a propriedade (3-106) para a frequência de 3 GHz é satisfeita. O mesmo é verificado nas figuras 3.9 e 3.10 para as frequências de 44 GHz e 50 GHz, respectivamente. As frequências selecionadas abrangem situações em que o modo TM<sub>01</sub> nas regiões *I* e *II* não são propagantes (3 GHz), em que esse modo se torna propagante na região *II* (44 GHz), e finalmente em uma frequência em que o modo TM<sub>01</sub> é propagante em ambas regiões (50 GHz).

<sup>5</sup>Os gráficos com a perda de retorno são identificados com “Abs( $S_{11}$ ) (dB)”. Entretanto, por comodidade, o sinal negativo foi mantido junto ao valor da perda de retorno ( $RL$ ). Como  $RL = -20 \log\{\text{Abs}[B_I(0,0)]\}$ , e o coeficiente de reflexão em dispositivos passivos é menor que 1,  $RL$  sempre tem valor positivo. Dessa forma, as curvas indicadas por “Abs( $S_{11}$ ) (dB)” na verdade se tratam do valor do coeficiente de reflexão em decibel, de acordo com a definição de [30].

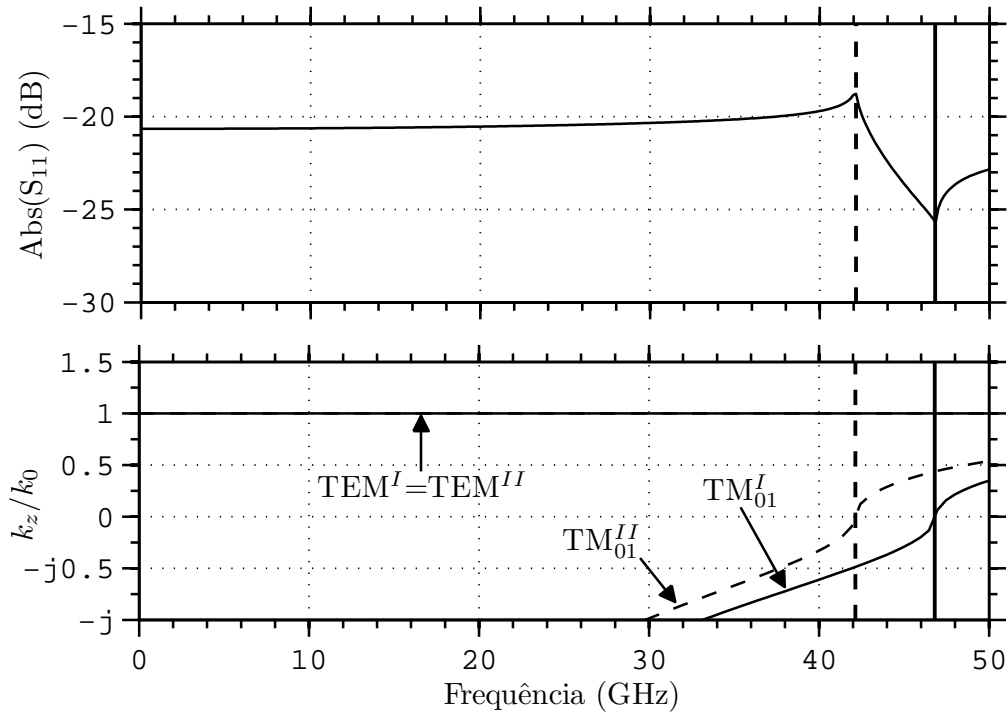


Figura 3.7: Perda de retorno e curvas de dispersão para a junção de dois guias homogêneos. Guia *I*:  $a_1 = 1,840$  mm,  $c_1 = 5,0$  mm preenchido com ar. Guia *II*:  $a_2 = 1,50$  mm,  $c_2 = 5,0$  mm preenchido com ar.

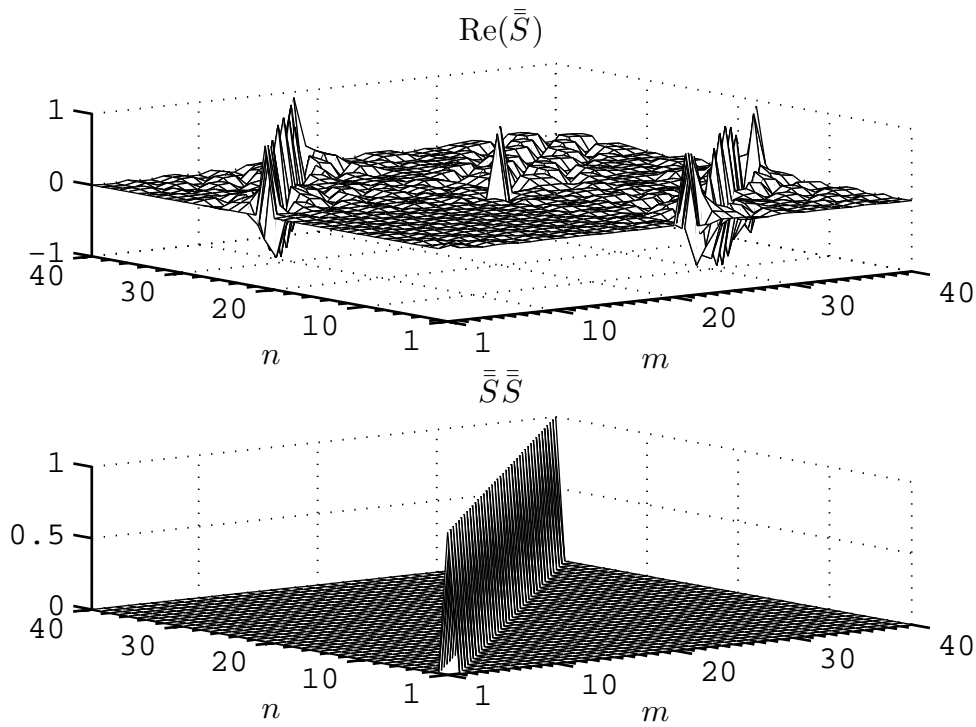


Figura 3.8: Matrizes para 3,0 GHz. Superior: Parte real da matriz GSM do junção dos guias descritos da Fig. 3.7. Inferior: Verificação da propriedade da matriz GSM.

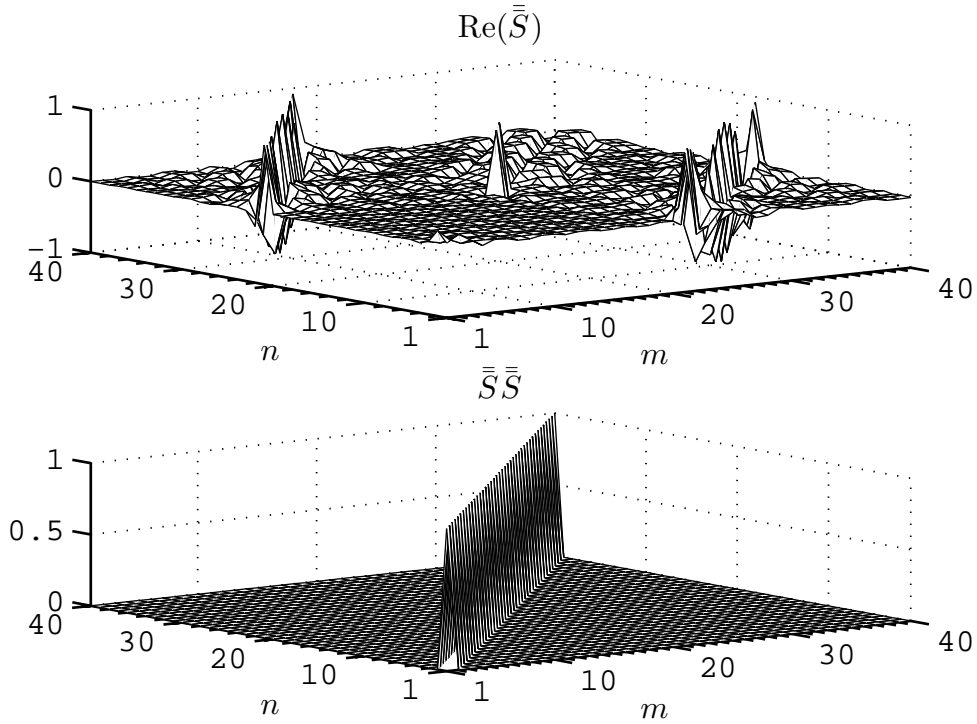


Figura 3.9: Matrizes para 44,0 GHz. Superior: Parte real da matriz GSM do junção dos guias descritos da Fig. 3.7. Inferior: Verificação da propriedade da matriz GSM.

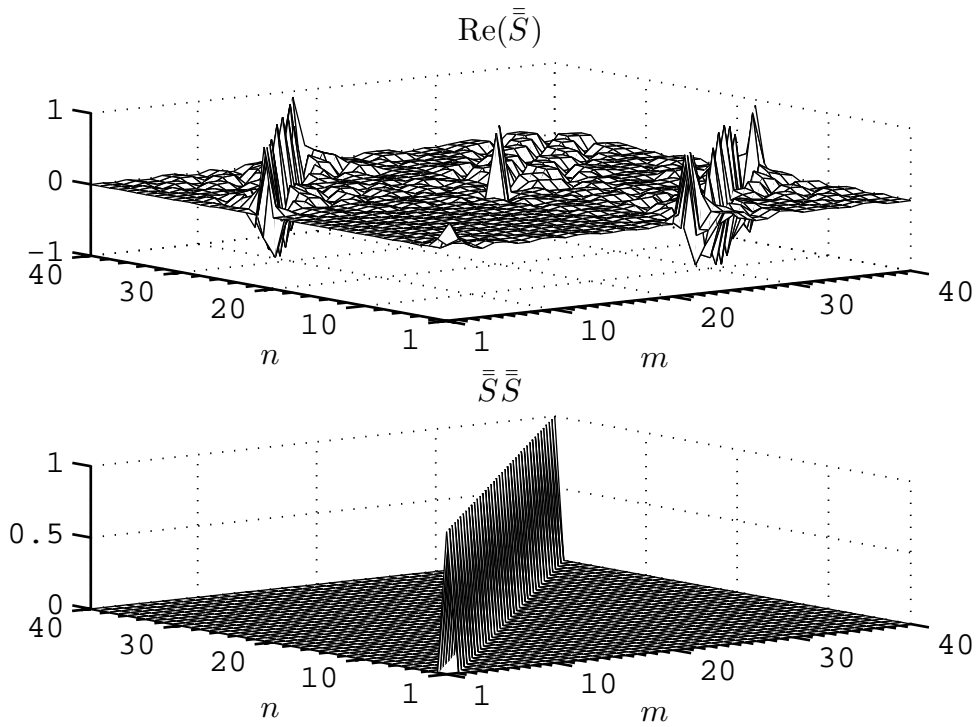


Figura 3.10: Matrizes para 50,0 GHz. Superior: Parte real da matriz GSM do junção dos guias descritos da Fig. 3.7. Inferior: Verificação da propriedade da matriz GSM.

Considera-se um segundo caso: a junção entre um guia coaxial homogêneo com um guia coaxial não homogêneo. O modo fundamental é a excitação do guia  $I$ , caracterizado por  $a_1 = 1,840$  mm e  $c_1 = 5,0$  mm preenchido com ar. Este guia é acoplado ao guia  $II$ , caracterizado por  $a_2 = 1,50$  mm,  $b_2 = 4,84$  mm,  $c_2 = 5,0$  mm preenchido por um dielétrico com  $\epsilon_{r1} = 2,550$  em  $a_2 < \rho < b_2$ , e por ar em  $b_2 < \rho < c_2$ . Essa estrutura foi simulada de acordo com a formulação supracitada, usando 20 modos em cada guia. Na Fig. 3.11 são mostradas a perda de retorno e as curvas de dispersão dos primeiros modos. Conclusões semelhantes ao caso da junção entre guias homogêneos são obtidas desta figura. A parte real da matriz  $\bar{\bar{S}}$  é plotada nas figuras 3.12, 3.13 e 3.14. Novamente, o eixo indicado por  $m$  está para as linhas de  $\bar{\bar{S}}$  e o eixo indicado por  $n$  está para as colunas de  $\bar{\bar{S}}$ .

Verifica-se, portanto, que a matriz resultante de  $\bar{\bar{S}}\bar{\bar{S}}$  é a identidade, indicando que a construção das matrizes de espalhamento está correta<sup>6</sup>.

Uma característica interessante é observada no segundo caso quando a estrutura é espelhada com respeito ao eixo  $\rho$ ; ou seja, o guia  $I$  passa a ser o

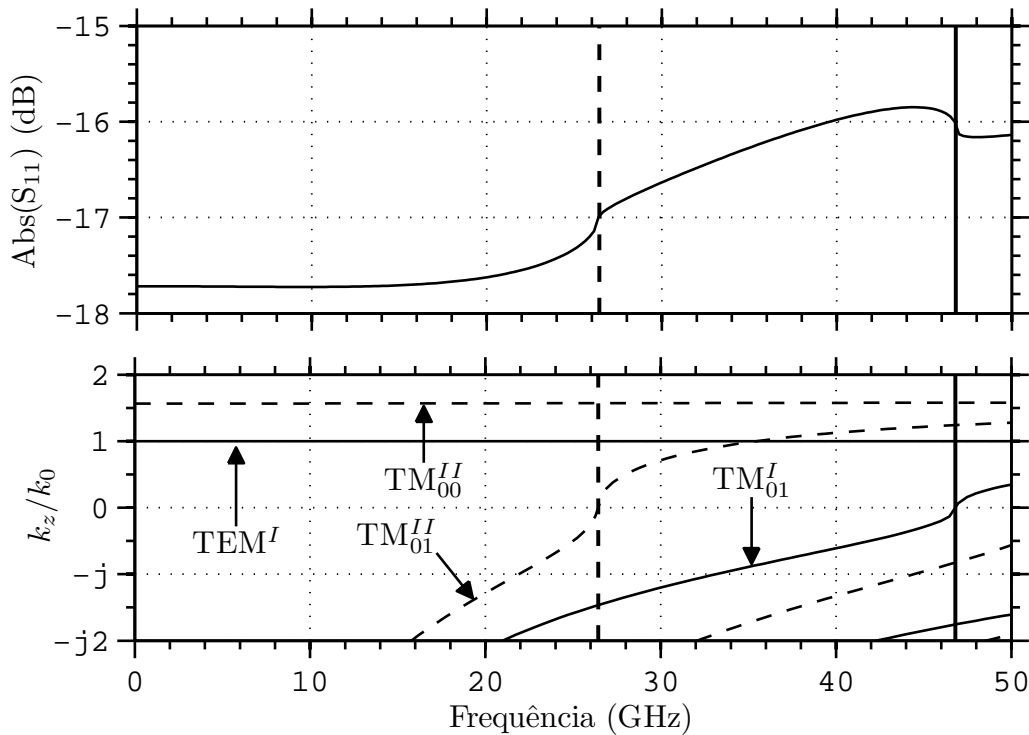


Figura 3.11: Perda de retorno e curvas de dispersão para a junção um guia homogêneo ( $I$ ) com um guia não homogêneo ( $II$ ). Guia  $I$ :  $a_1 = 1,840$  mm,  $c_1 = 5,0$  mm preenchido com ar. Guia  $II$ :  $a_2 = 1,50$  mm,  $b_2 = 4,84$  mm,  $c_2 = 5,0$  mm preenchido por um dielétrico com  $\epsilon_{r1} = 2,550$  em  $a_2 < \rho < b_2$ , e por ar em  $b_2 < \rho < c_2$ .

<sup>6</sup>Apesar das propriedades da matriz GSM serem satisfeitas, ainda é preciso validar a formulação do acoplamento modal do MMT.



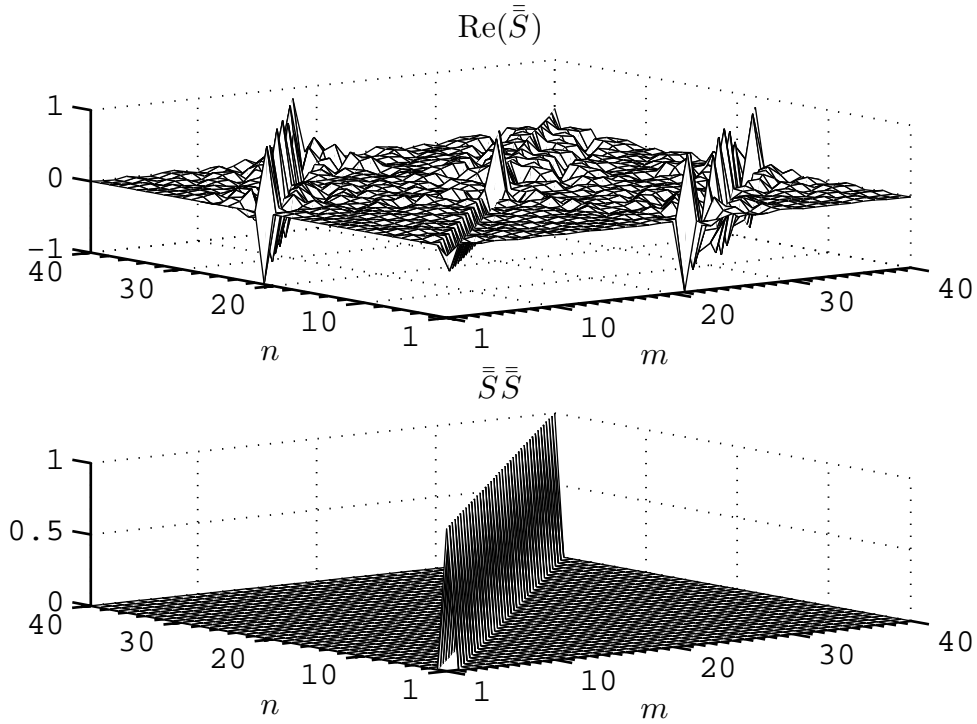


Figura 3.12: Matrizes para 3,0 GHz. Superior: Parte real da matriz GSM do junção dos guias descritos da Fig. 3.11. Inferior: Verificação da propriedade da matriz GSM.

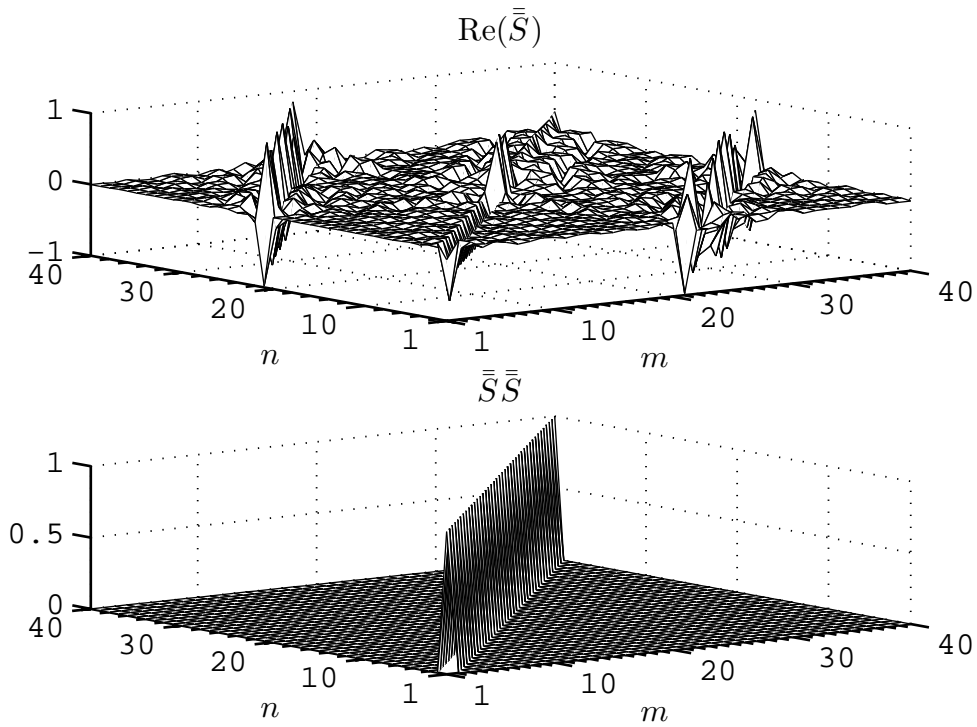


Figura 3.13: Matrizes para 30,0 GHz. Superior: Parte real da matriz GSM do junção dos guias descritos da Fig. 3.11. Inferior: Verificação da propriedade da matriz GSM.



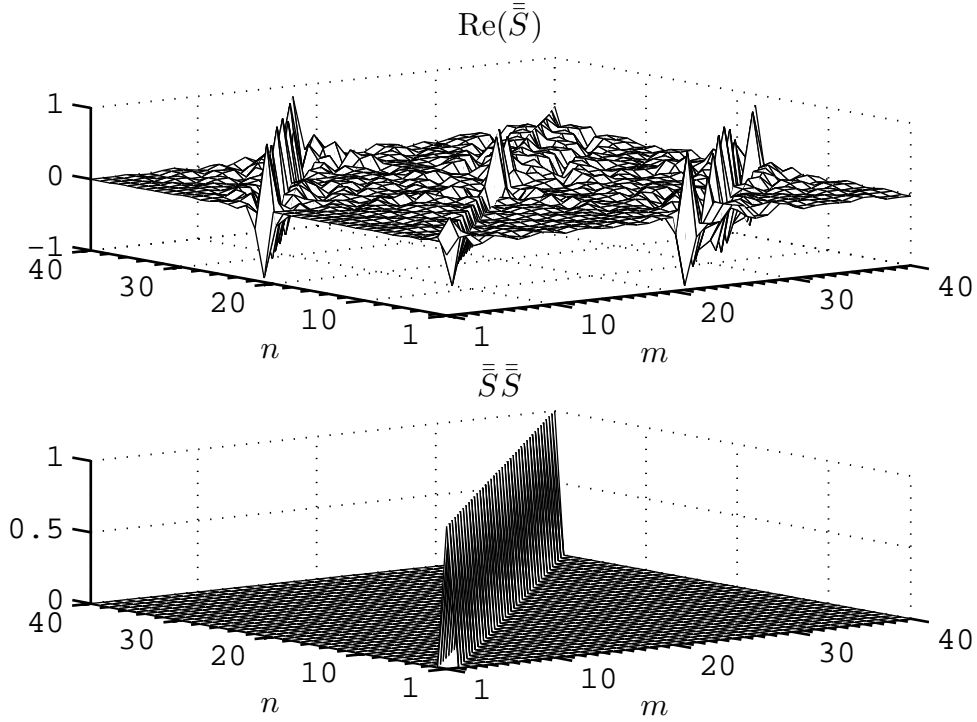


Figura 3.14: Matrizes para 50,0 GHz. Superior: Parte real da matriz GSM do junção dos guias descritos da Fig. 3.11. Inferior: Verificação da propriedade da matriz GSM.

guia *II*, e o segundo guia vira o primeiro. Na Fig. 3.15 tem-se os resultados da perda de retorno e curvas de dispersão desta estrutura. As frequências de entrada dos modos superiores são as mesmas do segundo caso, contudo, essa estrutura é excitada pelo modo fundamental do guia não homogêneo, ou seja, o modo  $TM_{00}$ . Combinando os resultados das duas perdas de retorno; da segunda estrutura e dela invertida; tem-se o que é mostrado na Fig. 3.16. Fica claro que até a entrada do modo  $TM_{01}$  tanto na junção Hom.  $\rightarrow$  Het. como Het.  $\rightarrow$  Hom. dessas estruturas apresentam a mesma perda de retorno para o modo fundamental de excitação. É só a partir da entrada de modos superiores que a perda de retorno das duas estruturas torna-se diferente.

Uma verificação adicional da GSM pode ser feita em termos da conservação de energia. A soma do quadrado da magnitude dos coeficientes de espalhamento da primeira coluna de  $\bar{S}$  é igual a unidade. Por exemplo, para um guia excitado pelo modo fundamental, tem-se

$$\text{Abs}[S_{11}(0,0)]^2 + \text{Abs}[S_{21}(0,0)]^2 = 1,$$

ou seja, o coeficiente de reflexão ao quadrado do modo fundamental  $[S_{11}(0,0)]^2$  somado ao coeficiente de transmissão ao quadrado deste modo  $[S_{21}(0,0)]^2$  necessariamente é igual 1. A expressão acima é válida apenas se o modos

fundamental for propagante. De forma generalizada, para uma rede de  $N$ -portas sem perdas, tem-se [31, p. 544]

$$\sum_{n=1}^N \text{Abs}[S(n, p)]^2 = \sum_{n=1}^N S(n, p) S(n, p)^* = 1$$

para qualquer coluna  $p$  da matriz GSM, variando de 1 a  $N$ . A conservação da energia na junção observada na Fig. 3.11 é mostrada em termos da contribuição de cada modo na Fig. 3.17. Verifica-se que toda energia do modo TEM do guia de excitação é transferida ao modo  $\text{TM}_{00}$  do guia  $II$  até  $\sim 26$  GHz. A partir dessa frequência o modo  $\text{TM}_{01}$  é propagante na região  $II$ , e uma parcela da energia da excitação é transferida a este modo. Outro ponto interessante é que em  $\sim 47$  GHz o modo  $\text{TM}_{01}$  pode existir no guia  $I$ . É importante salientar que a excitação é apenas do modo fundamental, e o segundo modo passa a existir pois a descontinuidade entre os guias excita infinitos modos, entre eles, o modo  $\text{TM}_{01}$  da região  $I$ . A conservação da energia é verificada pela soma da energia do primeiro modo com o segundo modo, como é mostrado na Fig. 3.17.

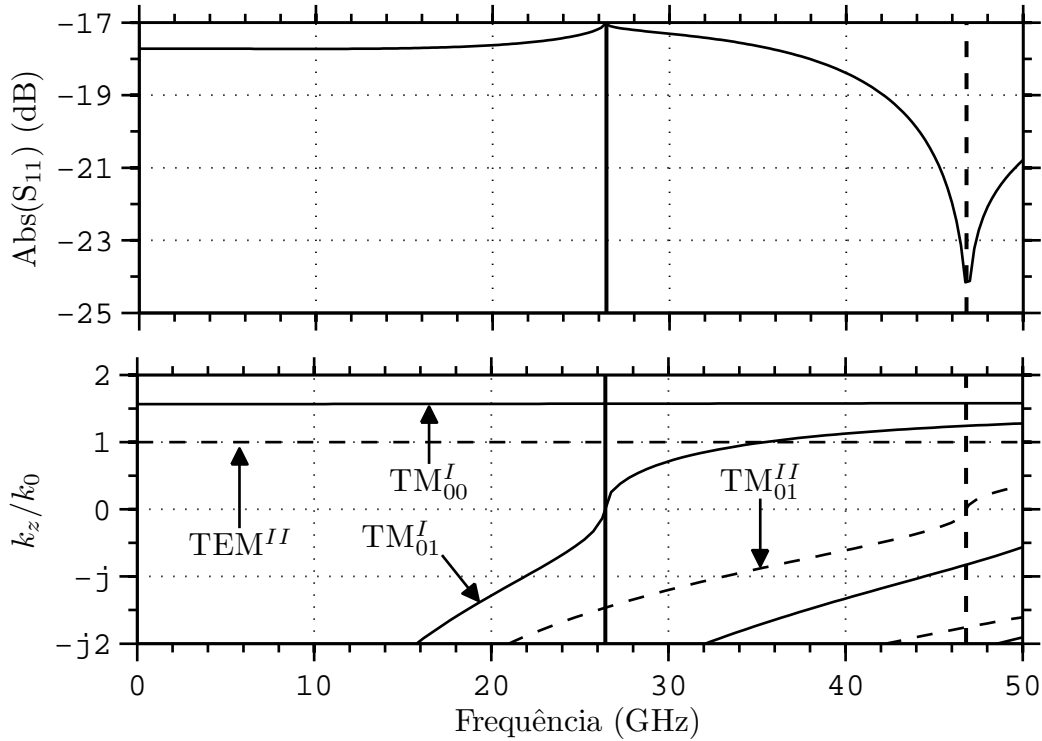


Figura 3.15: Perda de retorno e curvas de dispersão para a junção um guia não homogêneo ( $I$ ) com um guia homogêneo ( $II$ ). Guia  $I$ :  $a_1 = 1,50$  mm,  $b_1 = 4,84$  mm,  $c_1 = 5,0$  mm,  $\epsilon_{r1} = 2,550$  e  $\epsilon_{r1} = 1,0$ . Guia  $II$ :  $a_2 = 1,840$  mm,  $b_2 = 2,0$  mm,  $c_1 = 5,0$  mm e  $\epsilon_{r1} = \epsilon_{r2} = 1,0$ .

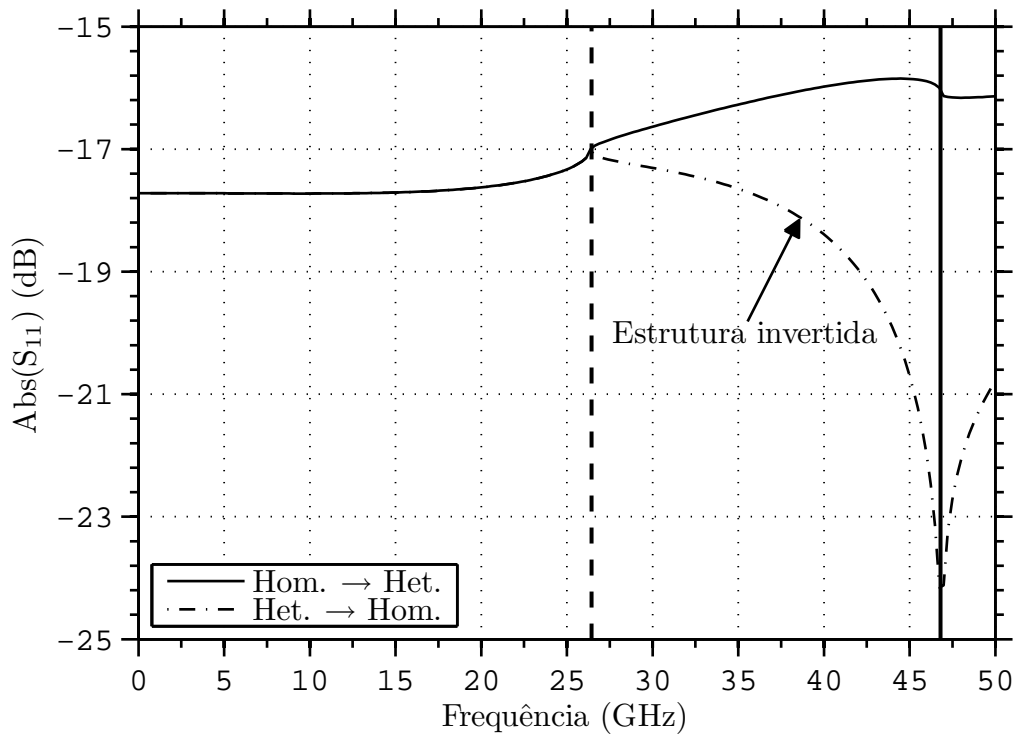


Figura 3.16: Perdas de retorno das estruturas descritas nas figuras 3.11 e 3.15.

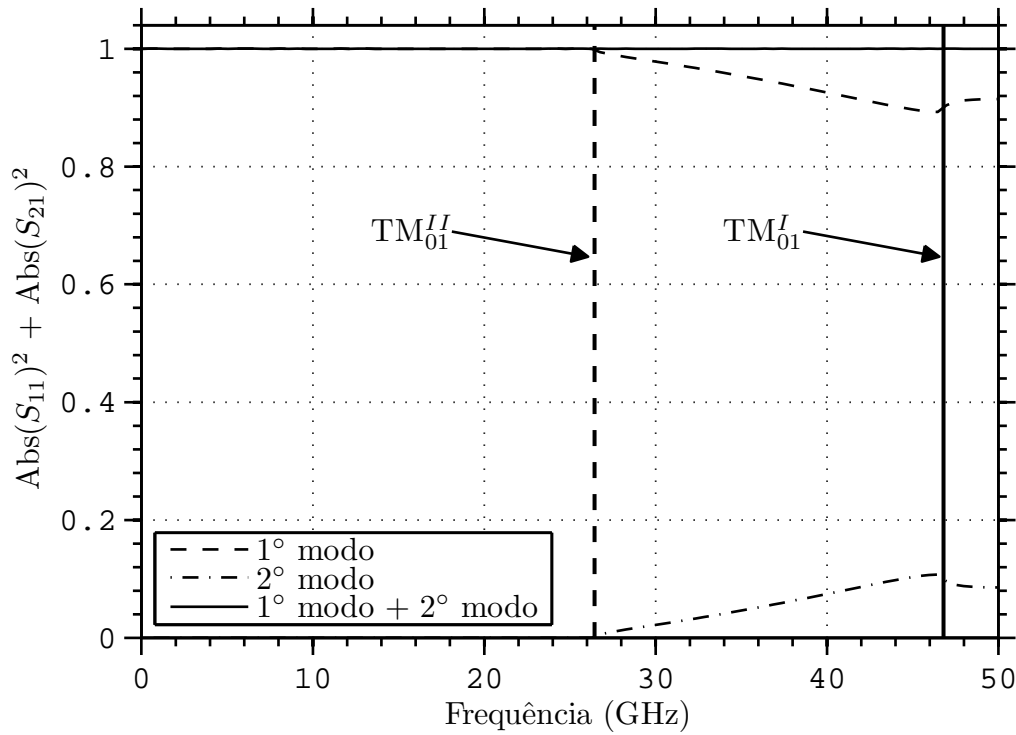


Figura 3.17: Balanço de energia da junção do guia homogêneo com não homogêneo descrito na Fig. 3.11.

### 3.3.2

#### MMT em Guias Homogêneos

O primeiro caso de comparação é uma estrutura coaxial construída para acoplar dois guias de onda de  $60\ \Omega$  (preenchidos com ar,  $\epsilon_r = 1,0$ ), com dimensões distintas, ilustrada na Fig. 3.18; as dimensões da estrutura são mostradas na Tabela 3.6. Essa estrutura, cuja excitação do guia da região *I* é o modo TEM foi simulada considerando 21 modos em cada região, da mesma forma como especificado em [9, p. 63]. Na Fig. 3.19 estão os resultados do valor absoluto do coeficiente de reflexão obtidos em [9, p. 65] e os obtidos pelo algoritmo implementando a formulação dos Capítulos precedentes. Observa-se que os resultados apresentam concordância<sup>7</sup>.

Um segundo caso de comparação foi a estrutura coaxial mostrada na Fig. 3.20, com dimensões na Tabela 3.7. Essa estrutura acopla dois guias de onda de  $60\ \Omega$  com dimensões iguais, e usa um anel dielétrico (camadas em cinza na Fig. 3.20) para operar na faixa de 1 - 11 GHz. De forma análoga as simulações de [9], foram considerados 21 modos em cada trecho de guia liso para a estrutura excitada pelo modo fundamental. Na Fig. 3.21 estão os resultados obtidos em [9, p. 67] e os obtidos pela presente formulação. Observa-se que os resultados apresentam concordância.

A simulações de guias homogêneos são um caso particular da formulação, em que as camadas 1 e 2 são preenchidas pelo mesmo material. O raio intermediário  $b$  pode ser qualquer valor entre  $a < \rho < c$ . A fim de verificar se todas condições para o valor do raio intermediário estão corretas, na Fig. 3.22 as variações do valor de  $b$  são investigadas. As dimensões dos raios interno e externo da estrutura (Fig. 3.21) foram mantidos, apenas os raios intermediários foram alterados. Apenas os valores de  $b$  para os trechos de guias da regiões *I*, *II* e *III* foram investigados, uma vez que a estrutura da Fig. 3.21 é simétrica com respeito ao trecho de guia central. Como era de se esperar, independente do valor do raio intermediário, todas as curvas de  $\text{Abs}(S_{11})$  convergem para o mesmo valor em função da frequência. Isso permite concluir que a formulação e o algoritmo implementado estão corretos para junções entre guias homogêneos.

Um problema de descontinuidade mista (mostrada inicialmente na Fig. 3.4) é a estrutura de acoplamento mostrada na Fig. 3.23, e com dimensões e parâmetros listados na Tabela 3.8. A técnica do MMT desenvolvida anteriormente não abrange essa estrutura, pois a área da abertura comum da junção de dois guias não é igual a área da seção transversal do menor guia.

<sup>7</sup>Os dados das referências mostrados nos gráficos que seguem foram obtidos a partir da digitalização das curvas das publicações. Contudo, os dados de comparação das referências [9] e [13] foram obtidos diretamente com os autores.

	$a$ (mm)	$b$ (mm)	$c$ (mm)	$\epsilon_{r1}$	$\epsilon_{r2}$	$L$ (mm)
Região <i>I</i>	1,840	2,0	5,0	1,0	1,0	$\infty$
Região <i>II</i>	0,660	1,0	5,0	1,0	1,0	1,290
Região <i>III</i>	0,660	1,0	1,810	1,0	1,0	$\infty$

Tabela 3.6: Dimensões e parâmetros dos guias usados na simulação da Fig. 3.18.

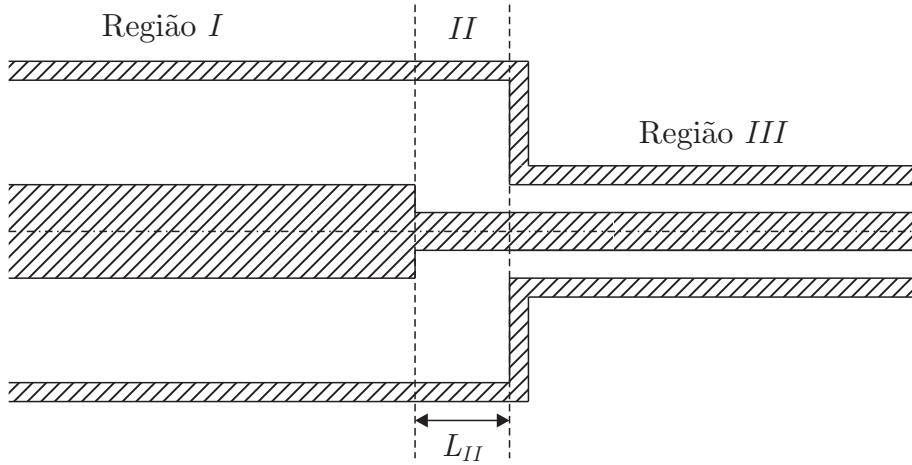


Figura 3.18: Estrutura de acoplador para dois guias de onda coaxiais com dimensões distintas.

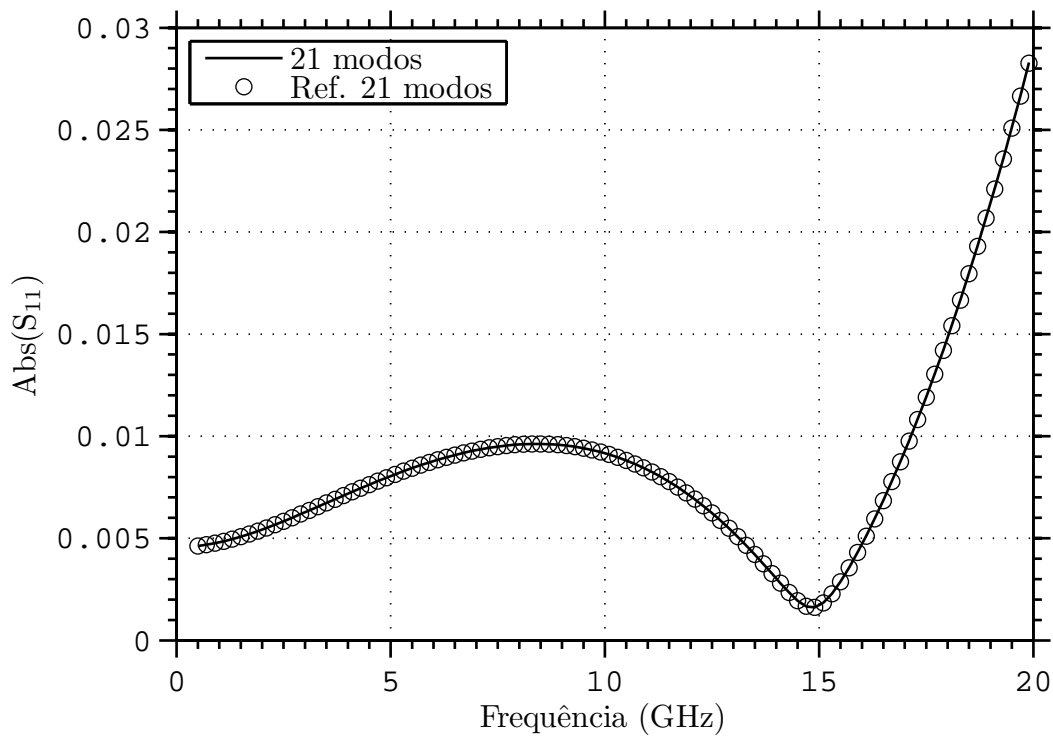


Figura 3.19: Comparação entre o módulo do coeficiente de reflexão simulado e o obtido em [9, p. 65].

	$a$ (mm)	$b$ (mm)	$c$ (mm)	$\epsilon_{r1}$	$\epsilon_{r2}$	$L$ (mm)
Região I	1,840	3,0	5,0	1,0	1,0	$\infty$
Região II	0,860	3,0	5,0	1,0	1,0	1,0
Região III	1,840	3,0	5,0	2,550	2,550	1,0
Região IV	0,860	3,0	5,0	1,0	1,0	1,0
Região V	1,840	3,0	5,0	1,0	1,0	$\infty$

Tabela 3.7: Dimensões e parâmetros dos guias usados na simulação da Fig. 3.20.

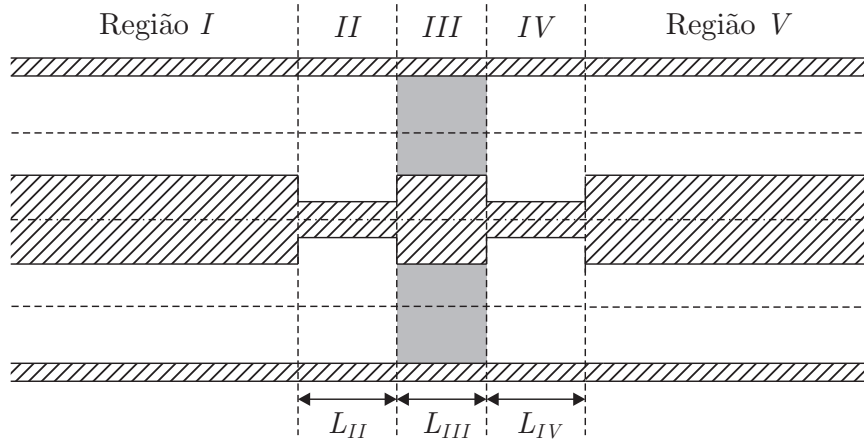


Figura 3.20: Estrutura de acoplador para dois guias de onda coaxiais com carregamento dielétrico. O dielétrico é representado pelo preenchimento em cinza na região III.

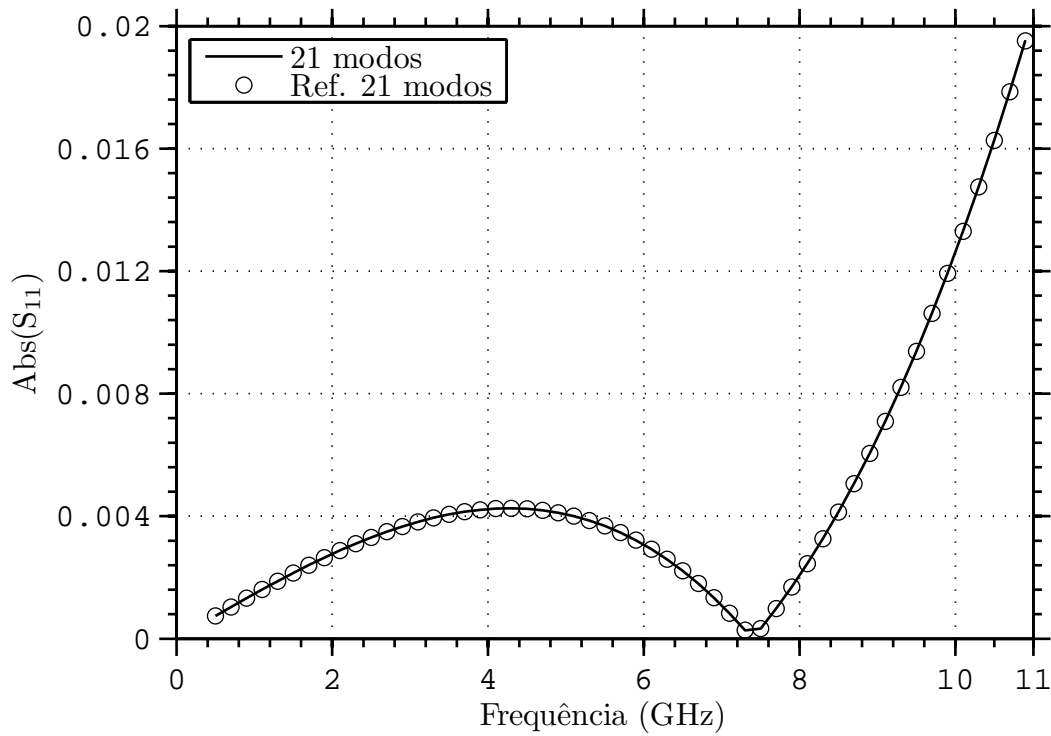


Figura 3.21: Comparação entre o módulo do coeficiente de reflexão simulado e o obtido em [9, p. 67].

	$a$ (mm)	$b$ (mm)	$c$ (mm)	$\epsilon_{r1}$	$\epsilon_{r2}$	$L$ (mm)
Região I	1,60	3,0	3,70	1,0	1,0	$\infty$
Região II	2,0	3,0	4,60	1,0	1,0	10,0
Região III	2,50	3,0	5,750	1,0	1,0	10,0
Região IV	3,10	3,0	7,30	1,0	1,0	$\infty$

Tabela 3.8: Dimensões e parâmetros dos guias usados na simulação da Fig. 3.23.

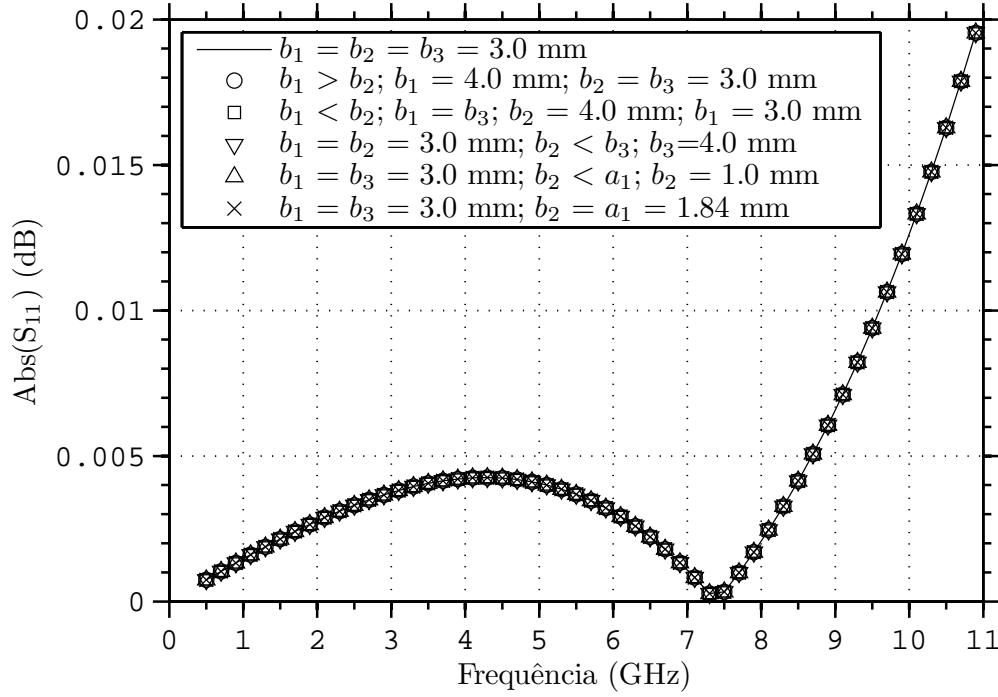


Figura 3.22: Comparação entre o módulo do coeficiente de reflexão simulado e o obtido por [9, p. 67] usando várias configurações para os raios  $b_1$ ,  $b_2$  e  $b_3$ .

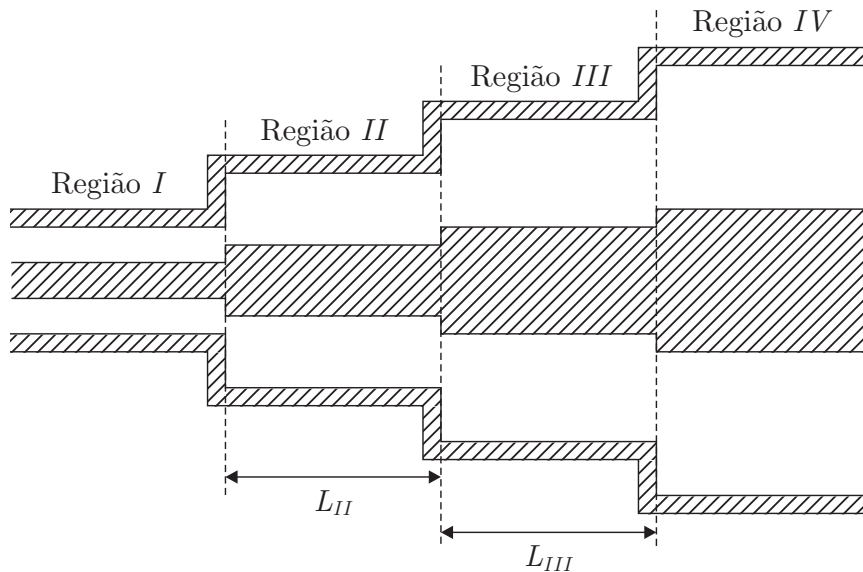


Figura 3.23: Estrutura de acoplamento entre guias coaxiais.

Entretanto, essa junção pode ser aproximada pelos problemas equivalentes mostrados nas figuras 3.24 e 3.25: em que o condutor central do guia coaxial é deslocado de  $\ell$  para a direita e para a esquerda, respectivamente. A perda de retorno das estruturas equivalentes em função do comprimento  $\ell$  e do número de modos é mostrada na Fig. 3.26 para a frequência de 3,0 GHz. É interessante observar que quando menor for  $\ell$  mais próximo estão os problemas equivalentes da estrutura real. Contudo, a medida que  $\ell$  torna-se pequeno são necessários mais modos para representar os campos.

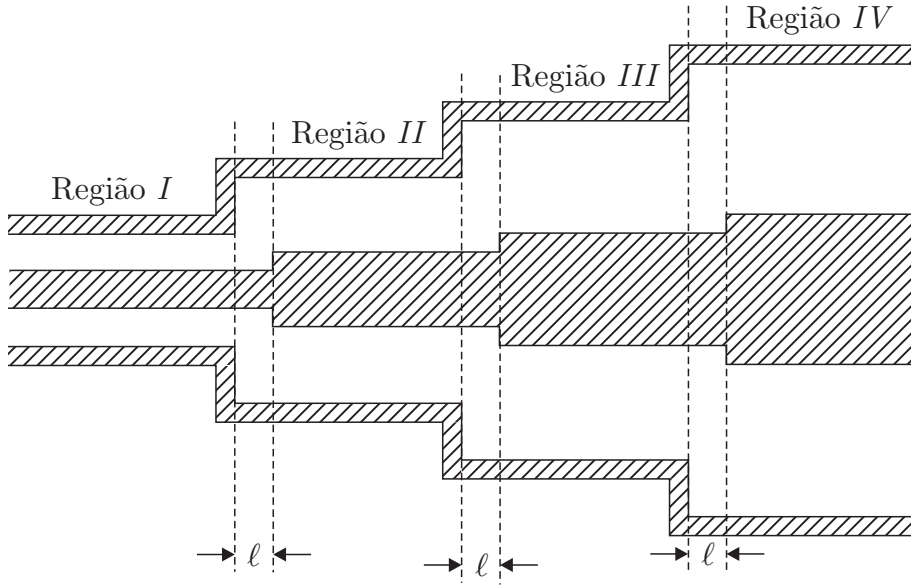


Figura 3.24: Estrutura de acoplamento da Fig. 3.23 com deslocamento do cilindro central para a direita.

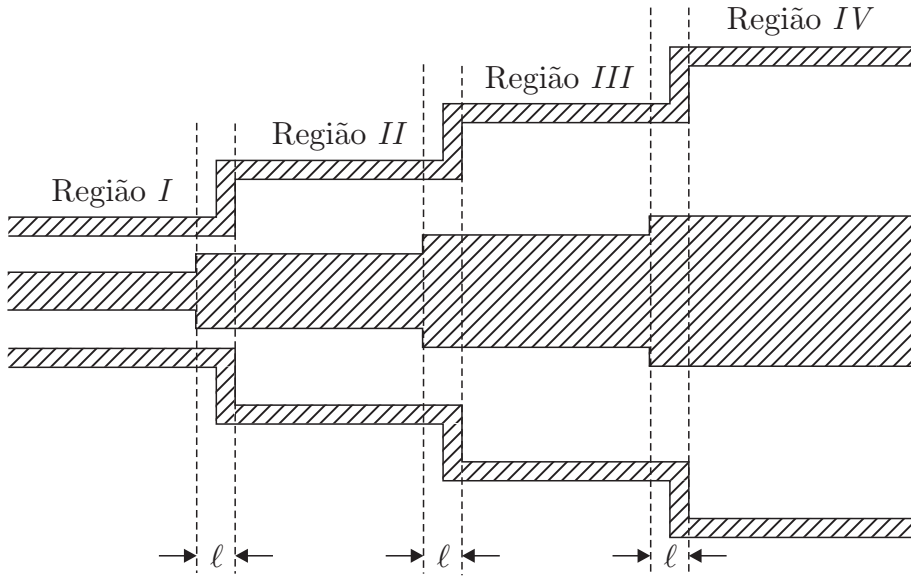


Figura 3.25: Estrutura de acoplamento da Fig. 3.23 com deslocamento do cilindro central para a esquerda.



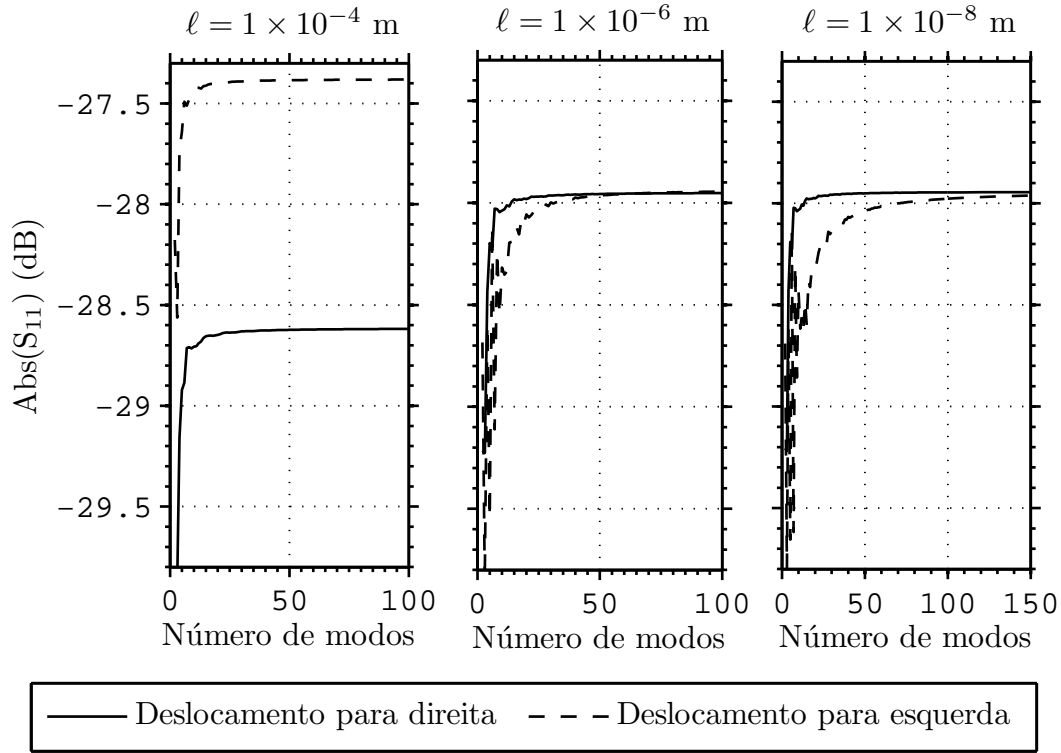


Figura 3.26: Perda de retorno das estrutura das figuras 3.24 e 3.25 em função do número de modos considerados para 3 GHz.

A descontinuidade excita infinitos modos na junção. Em geral, a maior parte desses modos são evanescentes, contudo, em distancias próximas a junção esses modos ainda não se atenuaram o suficiente para serem desprezados. Isso é verificado nos resultados da Fig. 3.26: usando  $\ell = 1 \times 10^{-6}$  m as curvas do deslocamento para a direita e para esquerda convergem para um valor de  $\sim -28$  dB com 50 modos.

Usando  $\ell = 1 \times 10^{-8}$  m, a convergência das estruturas equivalentes é alcançada apenas com mais de 150 modos. Em geral, usando  $\ell = 1 \times 10^{-6}$  m com 20-50 modos tem-se que o problema equivalente representa bem a estrutura com descontinuidade mista. As diferenças para o valor de  $abs(S_{11})$  do deslocamento para a direita e para esquerda são de 0,07460 dB com 20 modos e 0,00580 dB com 50 modos. Conclusões semelhantes foram obtidas por [13, apen. B]. Diferenças não excedendo 0,120 dB são observadas até 45,0 GHz, como ilustram os resultados das figuras 3.27 e 3.28.

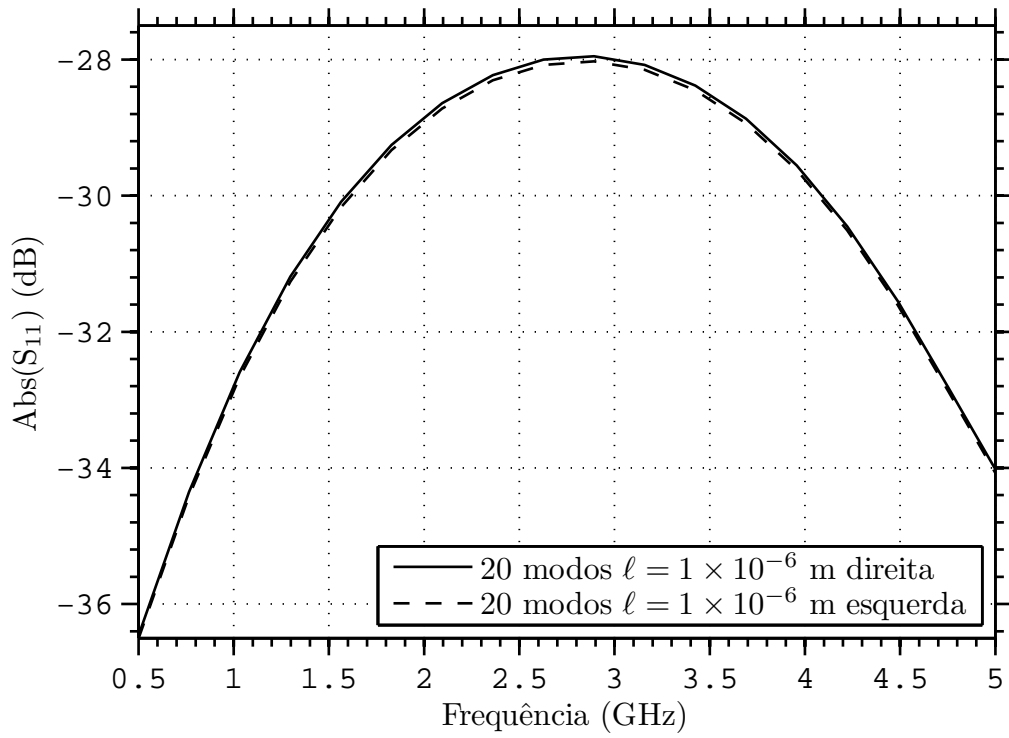


Figura 3.27: Perda de retorno das estrutura das figuras 3.24 e 3.25 para um deslocamento  $\ell = 1 \times 10^{-6}$  m com 20 modos.

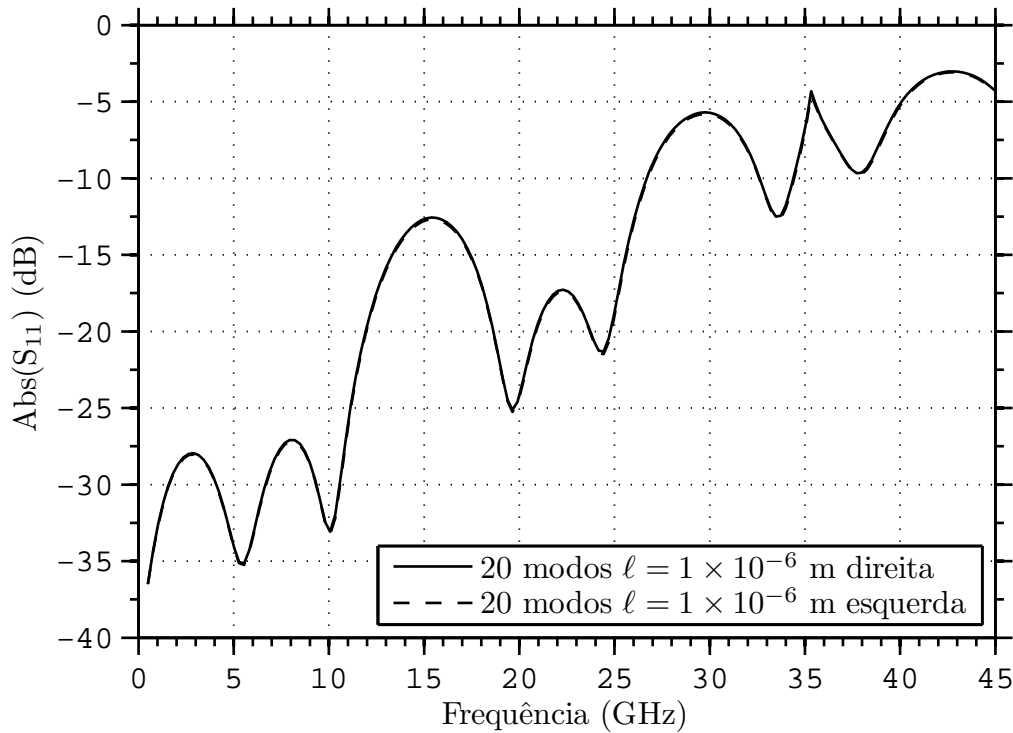


Figura 3.28: Perda de retorno das estrutura das figuras 3.24 e 3.25 para um deslocamento  $\ell = 1 \times 10^{-6}$  m com 20 modos.

### 3.3.3

#### MMT em Guias não Homogêneos

O método dos elementos finitos (MEF) foi utilizado em [5] na análise de estruturas coaxiais. Nesta referência foi determinada a perda de retorno do acoplador mostrado na Fig. 3.29 e com dimensões dada pelas Tabela 3.9. As regiões *II* e *IV* desta estrutura são guias coaxiais circulares não homogêneos. A estrutura de acoplamento foi simulada de acordo com o MMT e os resultados obtidos para a perda de retorno são mostrados na Fig. 3.30, junto aos valores encontrados [5, p. 87]. A diferença entre os valores obtidos pelo MMT e pelo MEF não ultrapassam 4 dB. Desta figura verifica-se que os resultados são razoáveis, uma vez que são comparados métodos diferentes.

### 3.3.4

#### Computer Simulation Technology Microwave Studio

O *software Computer Simulation Technology Microwave Studio* (CST MWS) é uma ferramenta especializada de simulação eletromagnética rigorosa. O CST MWS permite simulações em seis módulos [22]:

- Transitório (TD), Matrix de linha de transmissão no domínio do tempo
- Domínio da frequência (FD)
- Autovalores
- Ressonante
- Equação Integral
- Assintótico

Os módulos nos domínios do tempo (TD) e frequência (FD) foram utilizados nas simulações de algumas estruturas coaxiais consideradas a seguir.

### 3.3.5

#### Comparações entre os Resultados do MMT e do CST MWS

Nessa seção, a fim de validar a simulações de estruturas de guias coaxiais não homogêneos com descontinuidades e preenchimentos menos convencionais que as encontradas na literatura, o *software* (CST MWS) foi empregado. Salvo onde indicado contrário, as simulações no CST foram realizadas no domínio do tempo usando malha hexaédrica. A permeabilidade magnética empregada nas simulações dessa seção usaram permeabilidade magnética relativa unitária em todos os materiais simulados. Na formulação pelo MMT o primeiro e o último trecho de guia de onda são considerados com comprimento infinito. Em todas as no CST esse valor foi limitado a 20 mm. No MMT foram usados 20 modos

	$a$ (mm)	$b$ (mm)	$c$ (mm)	$\epsilon_{r1}$	$\epsilon_{r2}$	$L$ (mm)
Região I	1,50	3,0	3,50	1,0	1,0	$\infty$
Região II	1,50	5,750	6,640	1,0	2,080	1,0
Região III	2,0	3,0	6,640	2,080	2,080	9,930
Região IV	2,50	5,750	6,640	1,0	2,080	1,0
Região V	2,50	3,0	5,750	1,0	1,0	$\infty$

Tabela 3.9: Dimensões e parâmetros dos guias usados na simulação da Fig. 3.29.

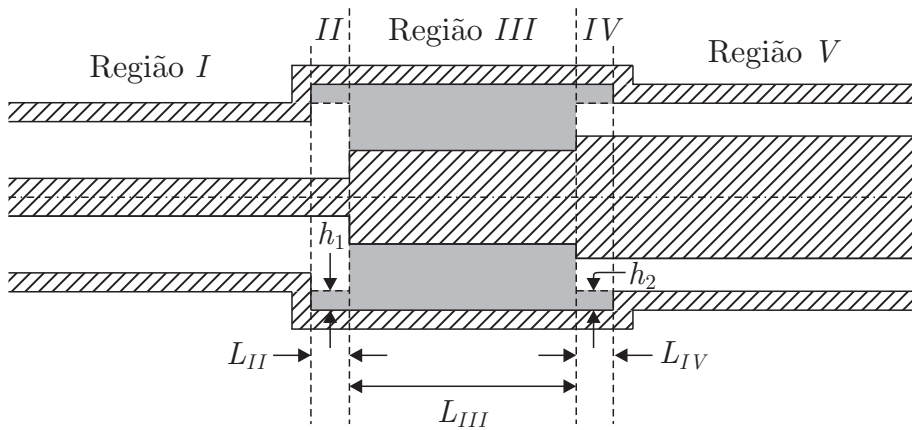


Figura 3.29: Estrutura de acoplador com trecho de guia não homogêneo.

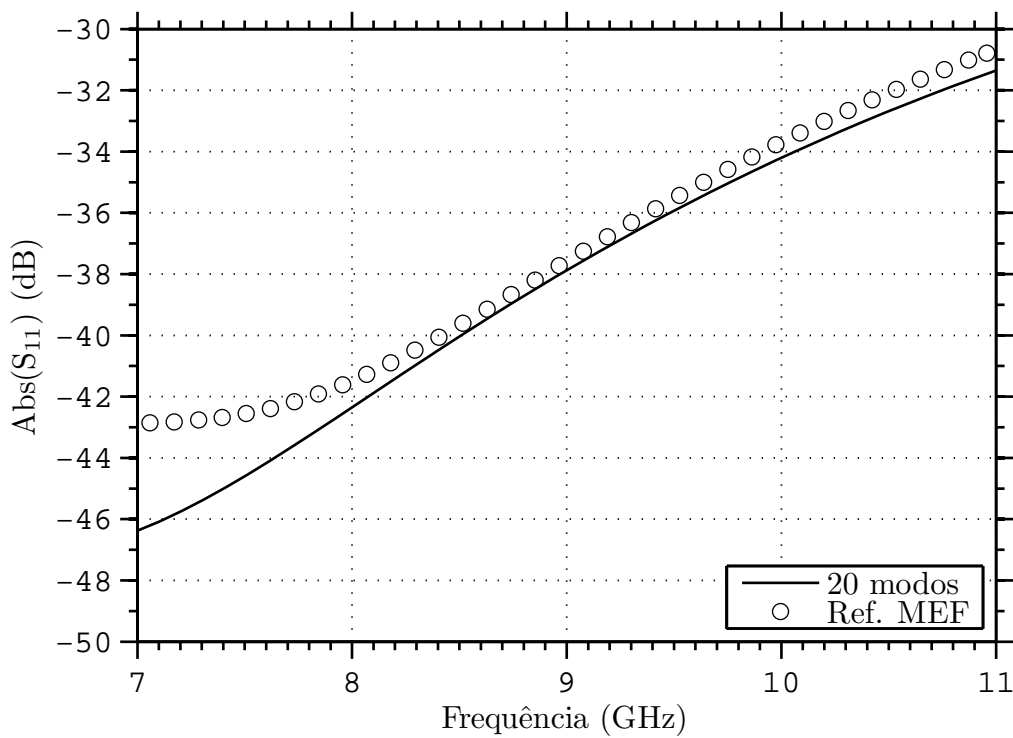


Figura 3.30: Comparação entre o módulo do coeficiente de reflexão simulado com o MMT e o obtido em [5, p. 87] com o MEF.

em cada trecho de guia. O número de células da malha usada pelo CST para cada estrutura é colocado na legenda dos gráficos das figuras com simulações.

A seguir são comparados os resultados obtidos no CST para 8 estruturas, com dimensões e preenchimentos não homogêneos gerais o suficientes para validar a formulação pelo MMT supracitada.

### Estrutura 1

A primeira estrutura avaliada é a junção de 3 guias coaxiais. Esta estrutura é mostrada na Fig. 3.31, com dimensões dadas na Tabela 3.10. O guia da região *I* é homogêneo, seguido de um não homogêneo e o guia da região *III* é novamente homogêneo. O guia coaxial não homogêneo considerado possui um anel dielétrico fino envolto no condutor central do guia da região *II*. Os resultados da simulação do CST e os obtidos pelo MMT são comparados na Fig. 3.32. Verifica-se uma certa concordância entre os resultados, contudo diferenças de  $\sim 1$  dB são encontradas entre os resultados de perda de retorno do CST e do MMT. Em vias disso, o número de células da grade do CST foi aumentado 5 vezes. Apesar das diferenças entre o CST e MMT tornarem-se menores com o aumento da malha do CST, diferenças da ordem de 0,5 dB ainda são verificadas nos resultados da Fig. 3.33. Adicionalmente, foi determinado  $\text{Abs}(S_{11})$  para algumas frequências usando o domínio da frequência no CST (FD). Os resultados mostrados na Fig. 3.32 são um indício de que os valores de perda de retorno obtidos no MMT e no CST apresentam concordância.

É interessante notar que apesar de ser bastante fino, o anel dielétrico elevou a perda de retorno em algumas frequências para até  $\sim 32$  dB. Adicionalmente, as frequências de zero,  $\sim 14$  GHz,  $\sim 28$  GHz e  $\sim 43$  GHz são praticamente invariantes a presença do dielétrico. Como apenas um modo é propagante nos guias *I* e *II* até  $\sim 47$  GHz (ver curvas de dispersão da Fig. 3.7) a estrutura avaliada tem ressonâncias a cada  $\sim 14$  GHz.

	$a$ (mm)	$b$ (mm)	$c$ (mm)	$\epsilon_{r1}$	$\epsilon_{r2}$	$L$ (mm)
Região I	1,840	2,0	5,0	1,0	1,0	$\infty$
Região II	1,840	2,0	5,0	2,550	1,0	10,0
Região III	1,840	2,0	5,0	1,0	1,0	$\infty$

Tabela 3.10: Dimensões e parâmetros dos guias usados na simulação da Fig. 3.32.

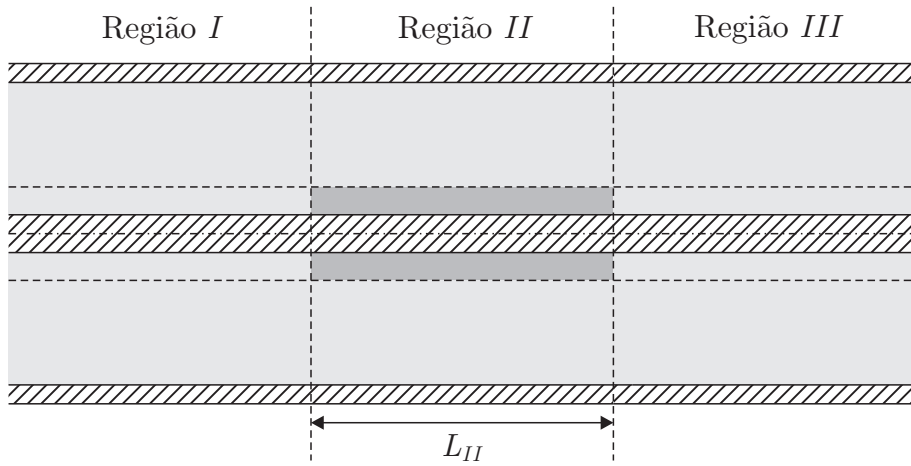


Figura 3.31: Estrutura 1.

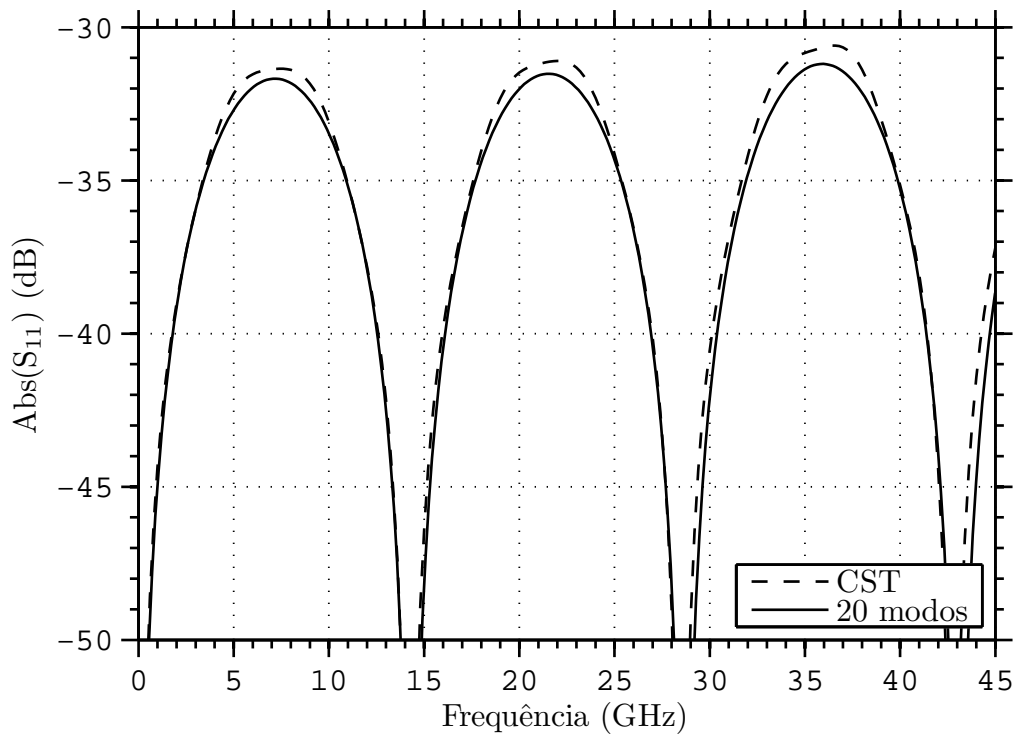


Figura 3.32: Comparação entre a perda de retorno simulada no CST com os valores obtidos pelo MMT para a configuração dada na Tabela 3.10. Número de células da grade do CST: 3158028.

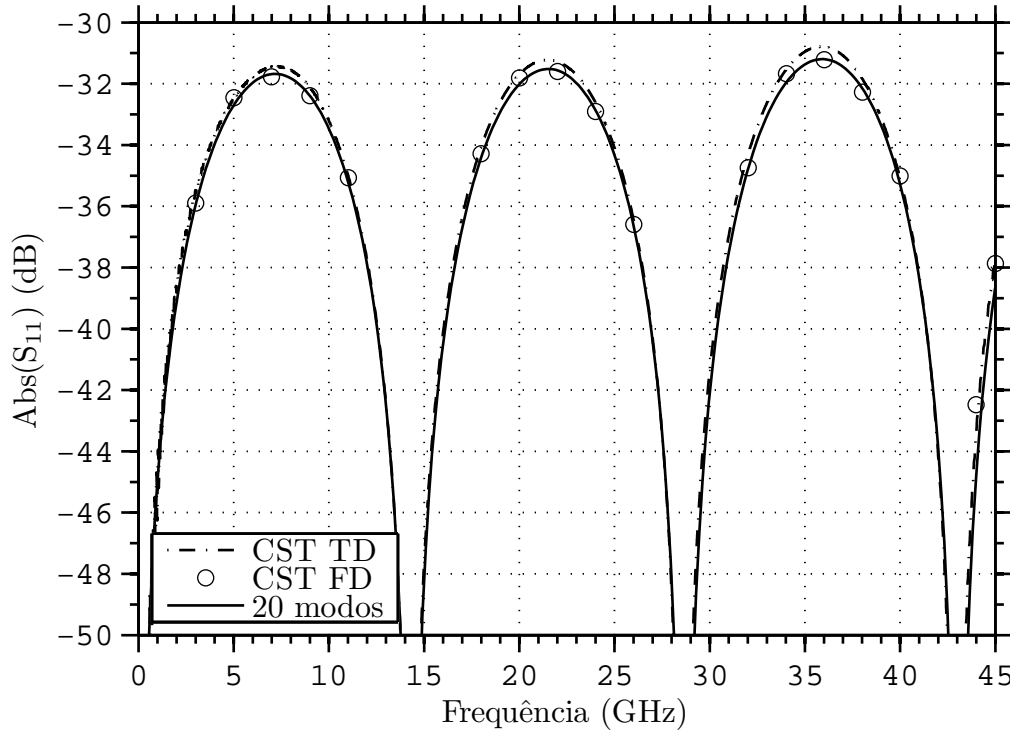


Figura 3.33: Comparação entre a perda de retorno simulada no CST com os valores obtidos pelo MMT para a configuração dada na Tabela 3.10. Número de células da grade do CST: 16241800 hexaedros para o TD e 1649382 tetraedros para o FD.

## Estrutura 2

A segunda estrutura avaliada é semelhante a primeira, mas agora o anel dielétrico da região *II* ocupa grande parte da seção transversal do guia não homogêneo. A estrutura é mostrada na Fig. 3.34 e suas dimensões são dadas pela Tabela 3.11. Os resultados obtidos pelo CST são comparados com os obtidos pelo MMT na Fig. 3.35. Da figura tem-se que taxas de variação elevadas acima de 30 GHz não foram obtidos nos resultados do CST. A grade de células do CST foi aumentada, e o número de pontos da *discrete fourier transform* (DFT) igualmente foi elevado. Os novos resultados do CST são mostrados na Fig. 3.36. Como uma variação rápida do valor da perda de retorno em respeito a frequência ocorria em 45 GHz, os novos resultados do CST são comparados até 60 GHz. Adicionalmente, na Fig. 3.37 é mostrados o *zoom* nos arredores das frequências mais críticas para a comparação. Verifica-se a concordância entre os resultados do CST e do MMT.

É interessante observar que a perda de retorno é praticamente invariante nas frequências de  $\sim 10$  GHz,  $\sim 20$  GHz,  $\sim 29$  GHz, etc. Ou seja, a estrutura avaliada tem ressonâncias a cada  $\sim 10$  GHz. Para a Estrutura 1, que tinha um

	$a$ (mm)	$b$ (mm)	$c$ (mm)	$\epsilon_{r1}$	$\epsilon_{r2}$	$L$ (mm)
Região <i>I</i>	1,840	2,0	5,0	1,0	1,0	$\infty$
Região <i>II</i>	1,840	4,840	5,0	2,550	1,0	10,0
Região <i>III</i>	1,840	2,0	5,0	1,0	1,0	$\infty$

Tabela 3.11: Dimensões e parâmetros dos guias usados na simulação da Fig. 3.35.

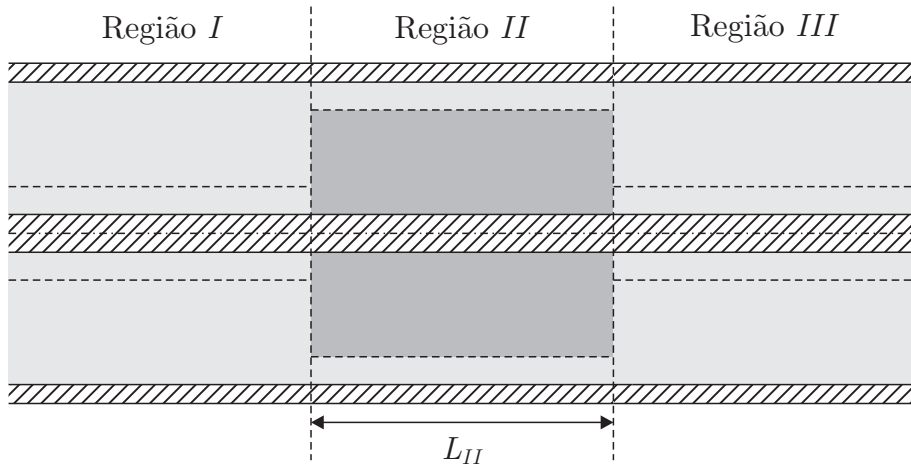


Figura 3.34: Estrutura 2.

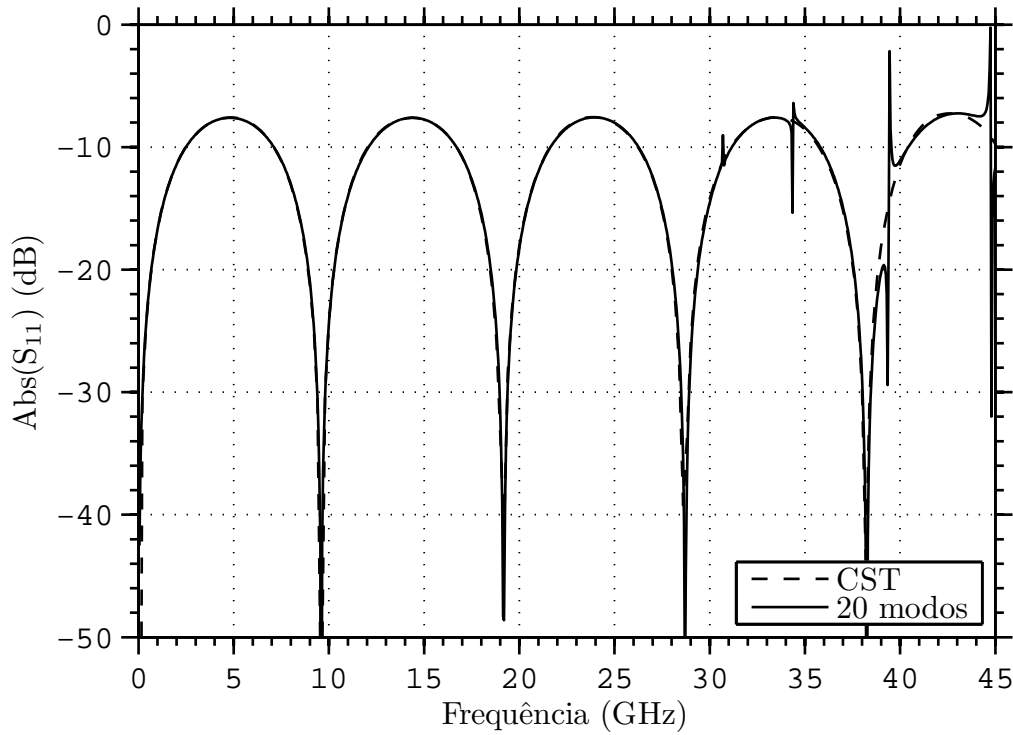


Figura 3.35: Comparação entre a perda de retorno simulada no CST com os valores obtidos pelo MMT para a configuração dada na Tabela 3.11. Número de células da grade do CST: 4363308.



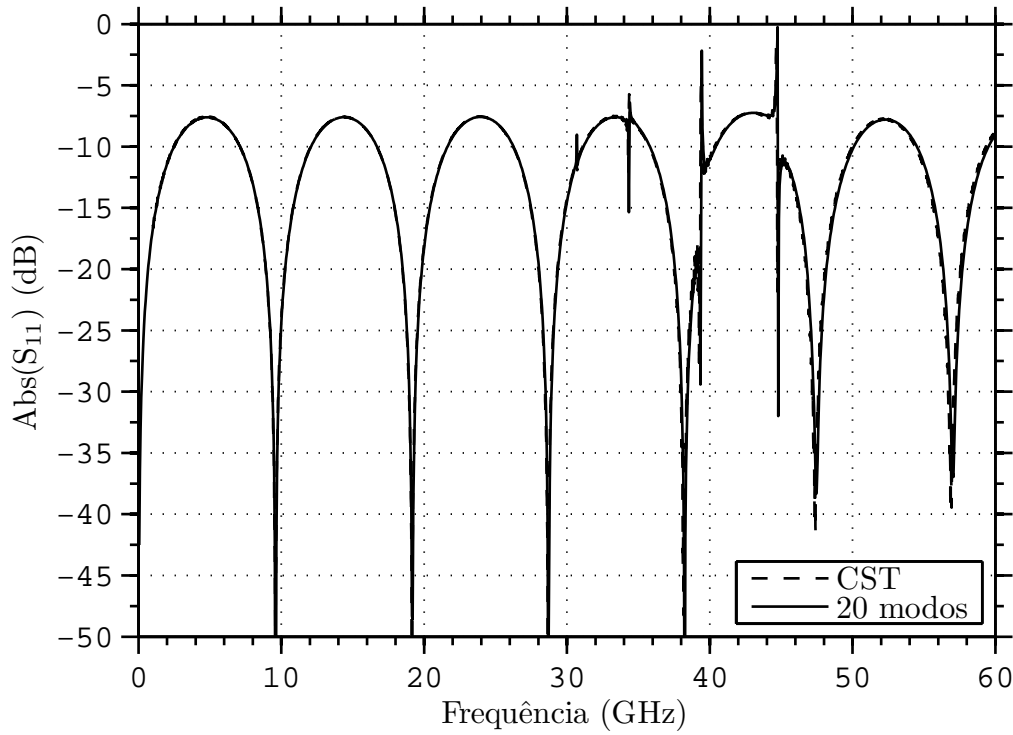


Figura 3.36: Comparação entre a perda de retorno simulada no CST com os valores obtidos pelo MMT para a configuração dada na Tabela 3.11. Número de células da grade do CST: 4881600.

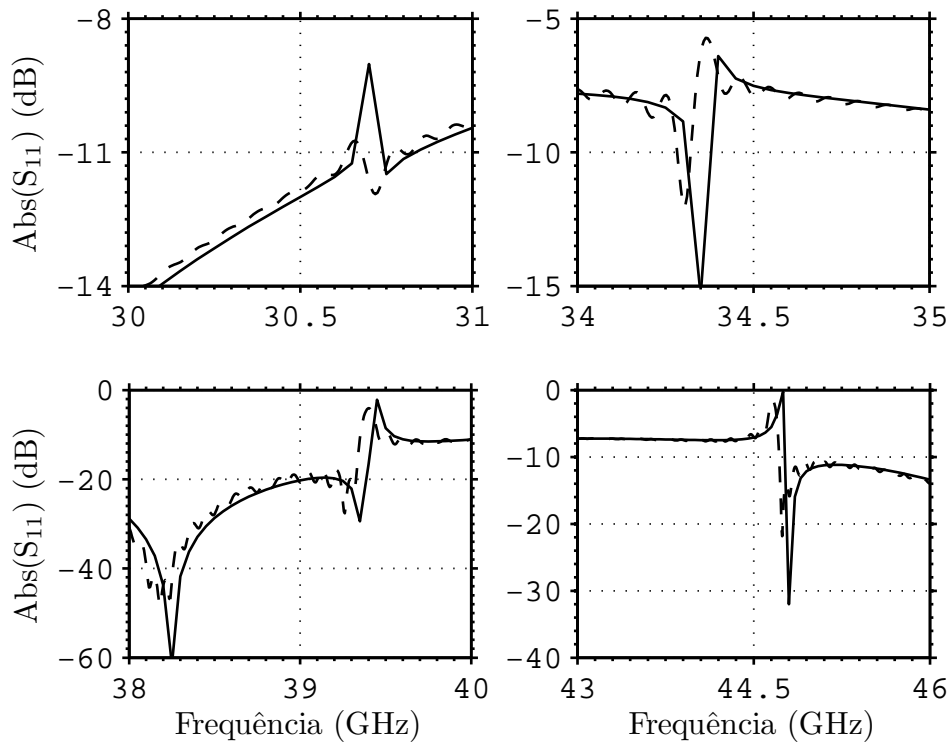


Figura 3.37: Comparação entre a perda de retorno simulada no CST (---) com os valores obtidos pelo MMT (—) para a configuração dada na Tabela 3.11. Número de células da grade do CST: 4881600.

anel dielétrico fino na região *II*, a ressonâncias ocorriam a cada  $\sim 14$  GHz. Outro ponto em relação as Estruturas 1 e 2, é que enquanto a Estrutura 1 tinha picos de perda de retorno de  $\sim -31$  dB, na Estrutura 2 o descasamento foi muito maior.

### Estrutura 3

Considera-se uma estrutura coaxial mostrada na Fig. 3.38 e dimensões dadas na Tabela 3.12. Essa estrutura, em relação as anteriores, apresenta a região *II* com raio do condutor externo maior que as demais regiões e uma fina camada dielétrica. Os resultados obtidos pelo CST e pelo MMT são similares, como verifica-se na Fig. 3.39.

### Estrutura 4

Considera-se uma estrutura coaxial mostrada na Fig. 3.40 e dimensões dadas na Tabela 3.13. Essa estrutura, em relação a anterior, tem apenas um anel dielétrico mais espesso na região *II*. Os resultados obtidos pelo CST e pelo MMT são similares, como verifica-se na Fig. 3.41.

### Estrutura 5

Considera-se uma estrutura coaxial mostrada na Fig. 3.42 e dimensões dadas na Tabela 3.14. Essa estrutura, tem as mesmas dimensões a estrutura anterior, mas o dielétrico da camada *II* está próximo do condutor externo. Os resultados obtidos pelo CST e pelo MMT são similares, como verifica-se na Fig. 3.43.

### Estrutura 6

Considera-se uma estrutura coaxial mostrada na Fig. 3.44 e dimensões dadas na Tabela 3.15. Essa estrutura mantém o raio externo da região *I* nas duas regiões seguintes. Contudo, o raio do condutor interno da região *II* é menor que o das demais regiões. A região *II* possui um anel dielétrico espesso na parte mais interna do guia. Os resultados obtidos pelo CST e pelo MMT são similares, como verifica-se na Fig. 3.45.

Na frequência de  $\sim 31$  GHz o valor da perda de retorno varia muito rapidamente em respeito a frequência, como fica claro da Fig. 3.46. Os valores obtidos pelo MMT foram recalculados para mais frequências no intervalo de 31-32 GHz, e deixam claro que entre as frequências de  $\sim 31,554$  GHz e  $\sim 31,558$  GHz o coeficiente de reflexão varia praticamente de 0 a 1. A DFT do CST não conseguiu representar corretamente esta variação rápida.

Apesar dos resultados do CST e do MMT parecerem razoáveis, quando o modo  $TM_{01}$  torna-se propagante no guia de excitação ( $\sim 47$  GHz ver curvas de dispersão da Fig. 3.7) a curva de perda de retorno obtida no CST é muito diferente a obtida pelo MMT do algoritmo proposto, como fica claro na Fig. 3.47. Essas diferenças persistiram mesmo com o aumento substancial do número de células da grade CST.

Esse é um caso interessante: a excitação do guia da região *I* é uma onda  $TEM^z$ . Devido a descontinuidade na seção transversal na junção com o guia *II* infinitos modos são excitados na descontinuidade. Contudo, até a frequência de  $\sim 47$  GHz apenas o modo fundamental é propagante na região *I* e retorna ao guia *I*. Acima desta frequência o modo  $TM_{01}$  torna-se propagante e também retorna ao guia de excitação. Dessa forma, apesar de apenas o modo principal ser excitado, o segundo modo do guia *I* existe devido a descontinuidade na junção com o guia *II*.

As simulações do CST até então consideraram apenas 2 modos. Em vistas das diferenças dos resultados, o número de modos na porta de excitação do CST foi incrementado para 20. Os resultados dessa simulação estão na Fig. 3.48 junto aos valores obtidos pelo MMT mostrados anteriormente. Deve ser observado (ver legenda da Fig. 3.48) que o número de células da grade do CST foi significativamente reduzido devido ao elevado tempo de simulação considerando 20 modos na porta de excitação. Verifica-se que os resultados obtidos pelo CST e pelo MMT são similares.

A perda de retorno mostrada na Fig. 3.48 apresenta variações rápidas em  $\sim 31$  GHz e  $\sim 54$  GHz. O *zoom* em torno dessas frequências é mostrado na Fig. 3.49, e verifica-se que tanto a formulação pelo MMT como os resultados do CST têm comportamento análogo.

## Estrutura 7

Considera-se uma estrutura coaxial mostrada na Fig. 3.50 e dimensões dadas na Tabela 3.16. Essa estrutura contém uma descontinuidade mista na junção das regiões *I* com *II* e *II* com *III*. No MMT de acordo com a formulação supracitada, no problema equivalente, foi usado o deslocamento do condutor central para direita entre as regiões *I* e *II* e deslocamento para a esquerda entre as regiões *II* e *III*. Ambos deslocamentos foram de  $1,0 \times 10^{-3}$  mm, e no problema equivalente as regiões consideradas entre *I* e *II* e entre *II* e *III* foram preenchidas com ar. Da mesma forma que as demais estruturas anteriores, considera-se 20 modos em cada região. Na Estrutura 7 a região *II* possui um anel dielétrico na parte mais externa do guia. Os resultados obtidos pelo CST e pelo MMT são similares, como verifica-se na Fig. 3.51.

### Estrutura 8

Considera-se uma estrutura coaxial mostrada na Fig. 3.52 e dimensões dadas na Tabela 3.17. Essa estrutura é similar a Estrutura 7, contudo, contém dois anéis dielétricos na região *II*. O anel dielétrico mais interno é formado por um material com permissividade elétrica relativa maior que o anel externo.

Os resultados obtidos pelo CST e pelo MMT para a Estrutura 8 são mostrados na Fig. 3.51. Em geral, os resultados são similares, mas apresentam divergências, ou um deslocamento horizontal nos valores da perda de retorno. Deve ser observado que nas frequências de  $\sim 20$  GHz,  $\sim 25$  GHz e  $\sim 30$  GHz a perda de retorno obtida no CST foi superior a 0 dB; o que não é razoável para uma estrutura passiva.

Na Fig. 3.54 as diferenças citadas anteriormente são exploradas em detalhes: a estrutura foi resimulada no FD do CST para algumas frequências pontuais. Verifica-se que as diferenças entre os resultados do CST no FD comparadas com o MMT são menores que as do TD. Isso é mais um indício de que a formulação de MMT supracitada neste Capítulo está correta.

	$a$ (mm)	$b$ (mm)	$c$ (mm)	$\epsilon_{r1}$	$\epsilon_{r2}$	$L$ (mm)
Região <i>I</i>	1,840	2,0	5,0	1,0	1,0	$\infty$
Região <i>II</i>	1,840	2,0	6,0	2,550	1,0	10,0
Região <i>III</i>	1,840	2,0	5,0	1,0	1,0	$\infty$

Tabela 3.12: Dimensões e parâmetros dos guias usados na simulação da Fig. 3.39.

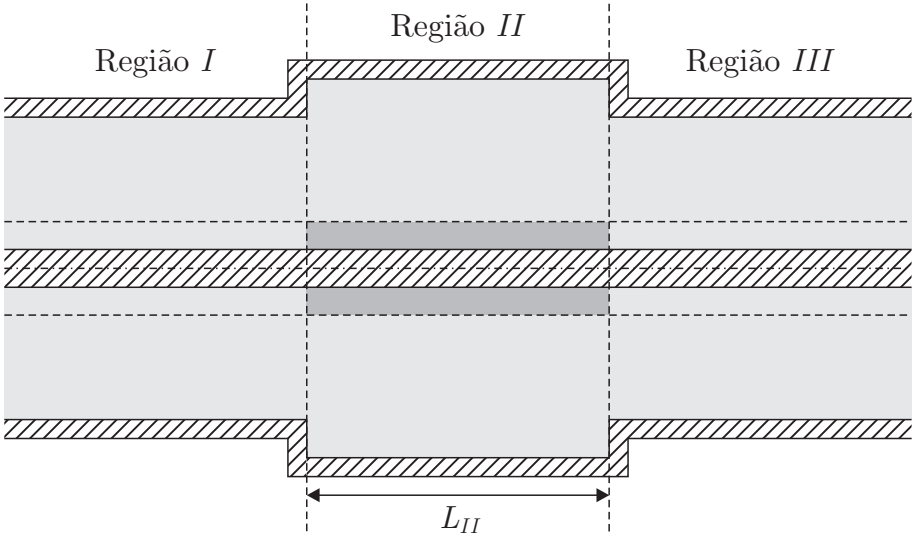


Figura 3.38: Estrutura 3.

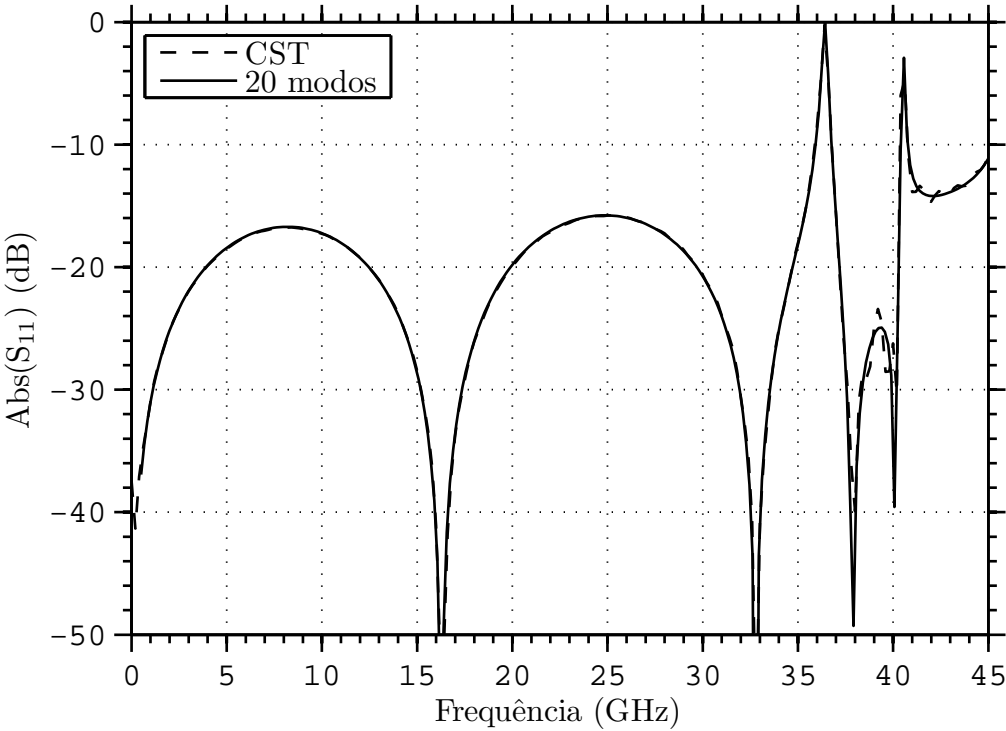


Figura 3.39: Comparação entre a perda de retorno simulada no CST com os valores obtidos pelo MMT para a configuração dada na Tabela 3.12. Número de células da grade do CST: 5913648.

	$a$ (mm)	$b$ (mm)	$c$ (mm)	$\epsilon_{r1}$	$\epsilon_{r2}$	$L$ (mm)
Região I	1,840	2,0	5,0	1,0	1,0	$\infty$
Região II	1,840	4,0	6,0	2,550	1,0	10,0
Região III	1,840	2,0	5,0	1,0	1,0	$\infty$

Tabela 3.13: Dimensões e parâmetros dos guias usados na simulação da Fig. 3.41.

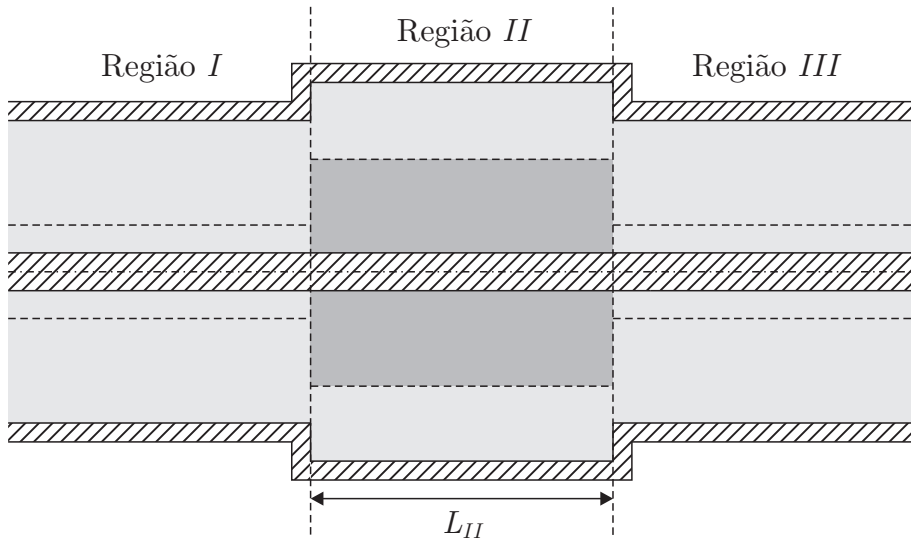


Figura 3.40: Estrutura 4

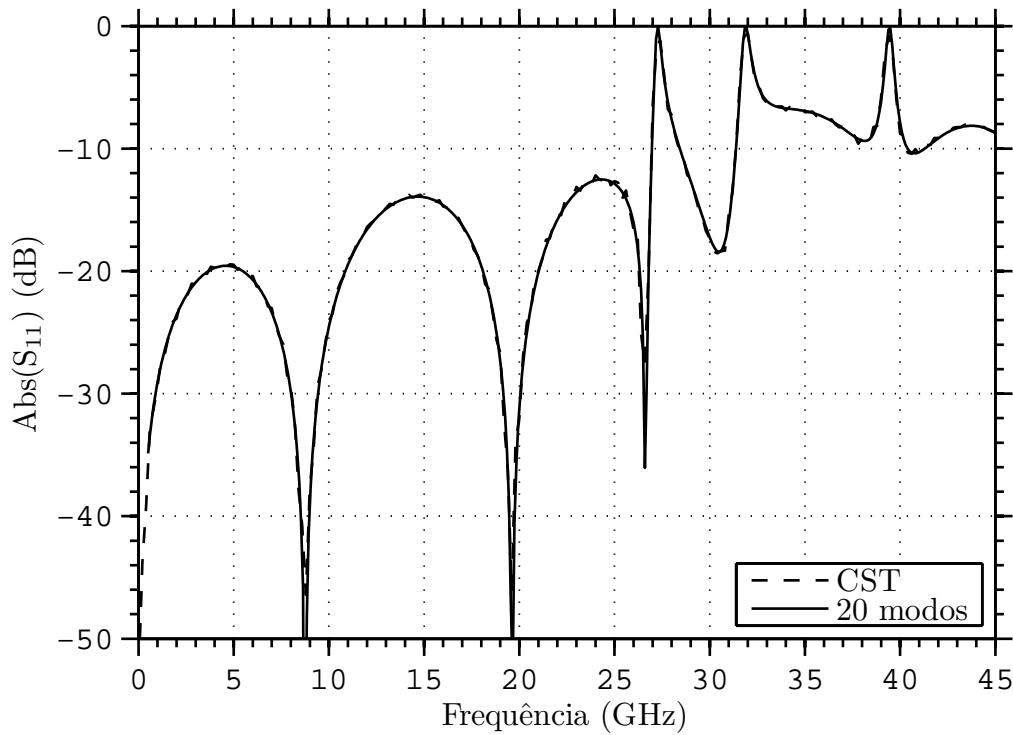


Figura 3.41: Comparação entre a perda de retorno simulada no CST com os valores obtidos pelo MMT para a configuração dada na Tabela 3.13. Número de células da grade do CST: 5913648.

	$a$ (mm)	$b$ (mm)	$c$ (mm)	$\epsilon_{r1}$	$\epsilon_{r2}$	$L$ (mm)
Região <i>I</i>	1,840	2,0	5,0	1,0	1,0	$\infty$
Região <i>II</i>	1,840	4,0	6,0	1,0	2,550	10,0
Região <i>III</i>	1,840	2,0	5,0	1,0	1,0	$\infty$

Tabela 3.14: Dimensões e parâmetros dos guias usados na simulação da Fig. 3.43.

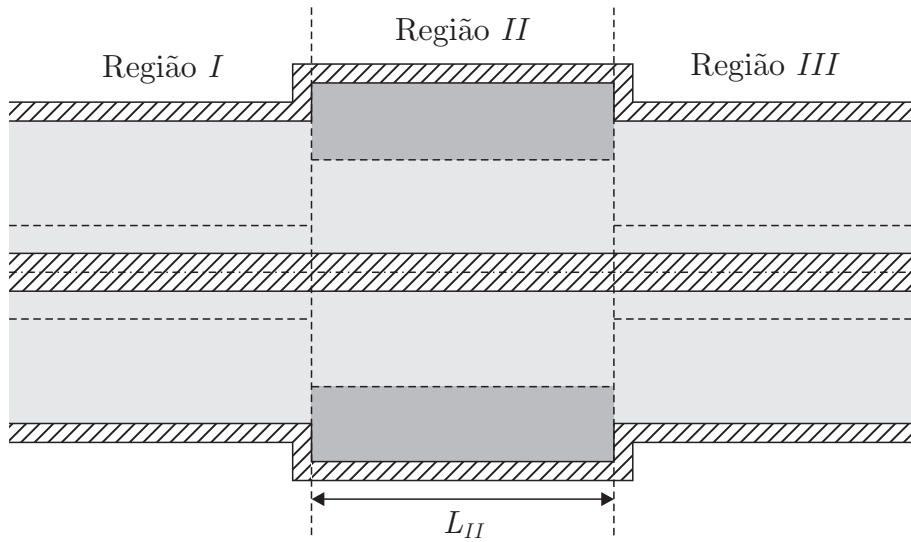


Figura 3.42: Estrutura 5.

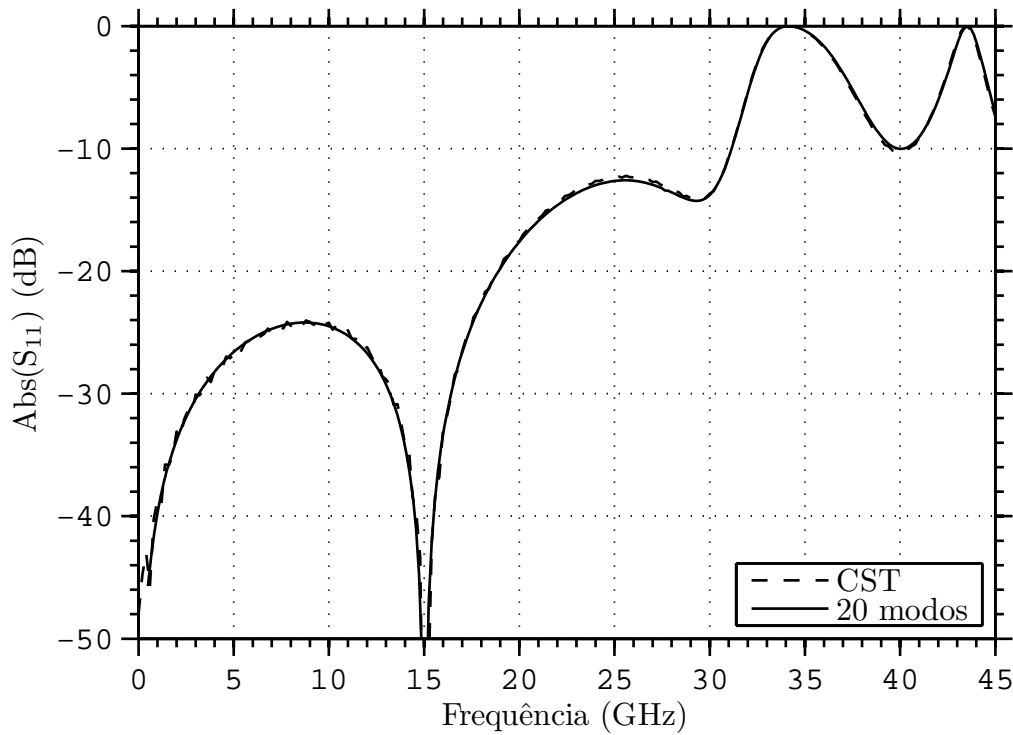


Figura 3.43: Comparação entre a perda de retorno simulada no CST com os valores obtidos pelo MMT para a configuração dada na Tabela 3.14. Número de células da grade do CST: 6220800.

	$a$ (mm)	$b$ (mm)	$c$ (mm)	$\epsilon_{r1}$	$\epsilon_{r2}$	$L$ (mm)
Região <i>I</i>	1,840	2,0	5,0	1,0	1,0	$\infty$
Região <i>II</i>	1,50	4,84	5,0	2,550	1,0	10,0
Região <i>III</i>	1,840	2,0	5,0	1,0	1,0	$\infty$

Tabela 3.15: Dimensões e parâmetros dos guias usados na simulação da Fig. 3.45.

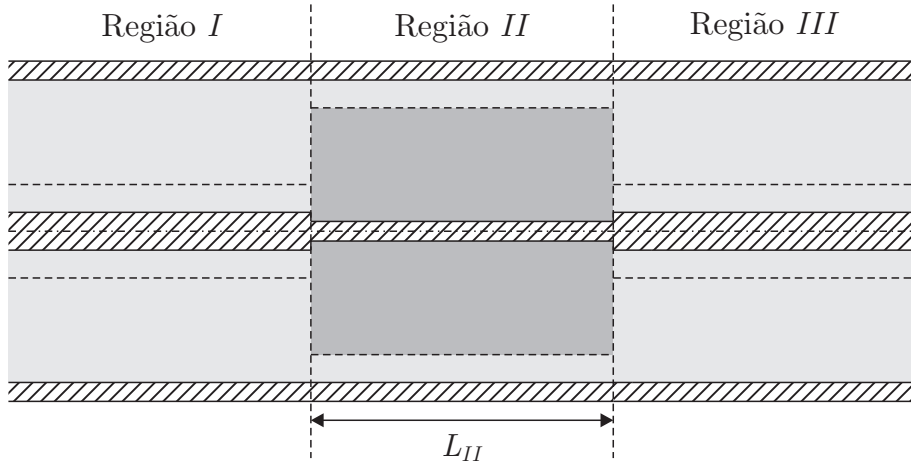


Figura 3.44: Estrutura 6.

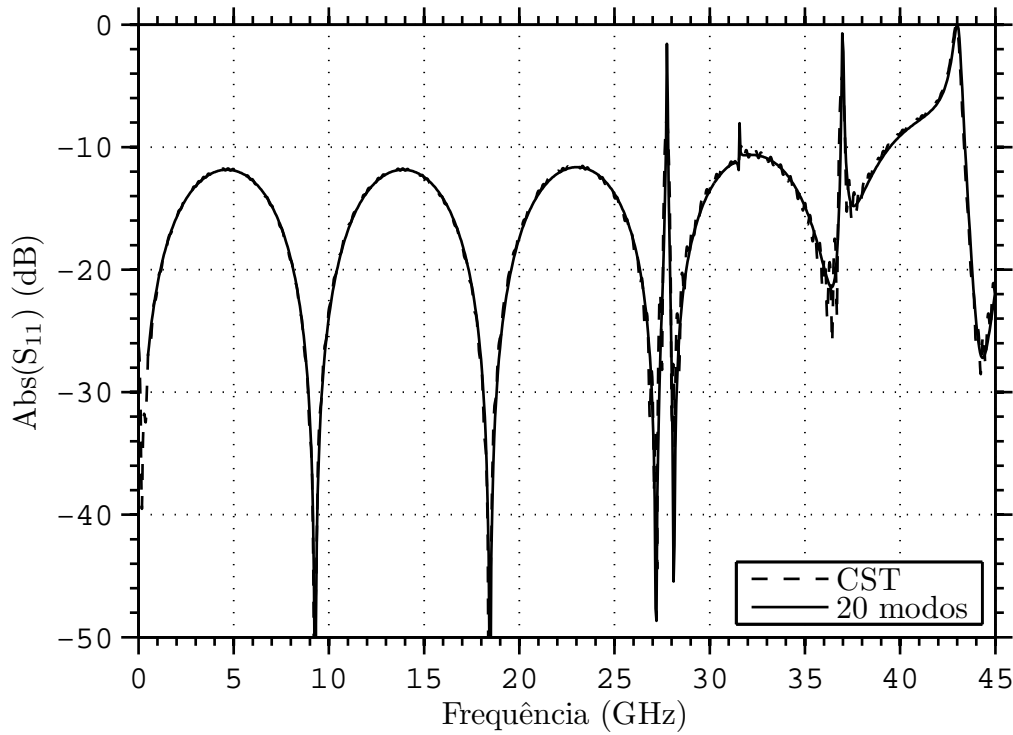


Figura 3.45: Comparação entre a perda de retorno simulada no CST com os valores obtidos pelo MMT para a configuração dada na Tabela 3.15. Número de células da grade do CST: 14480000.



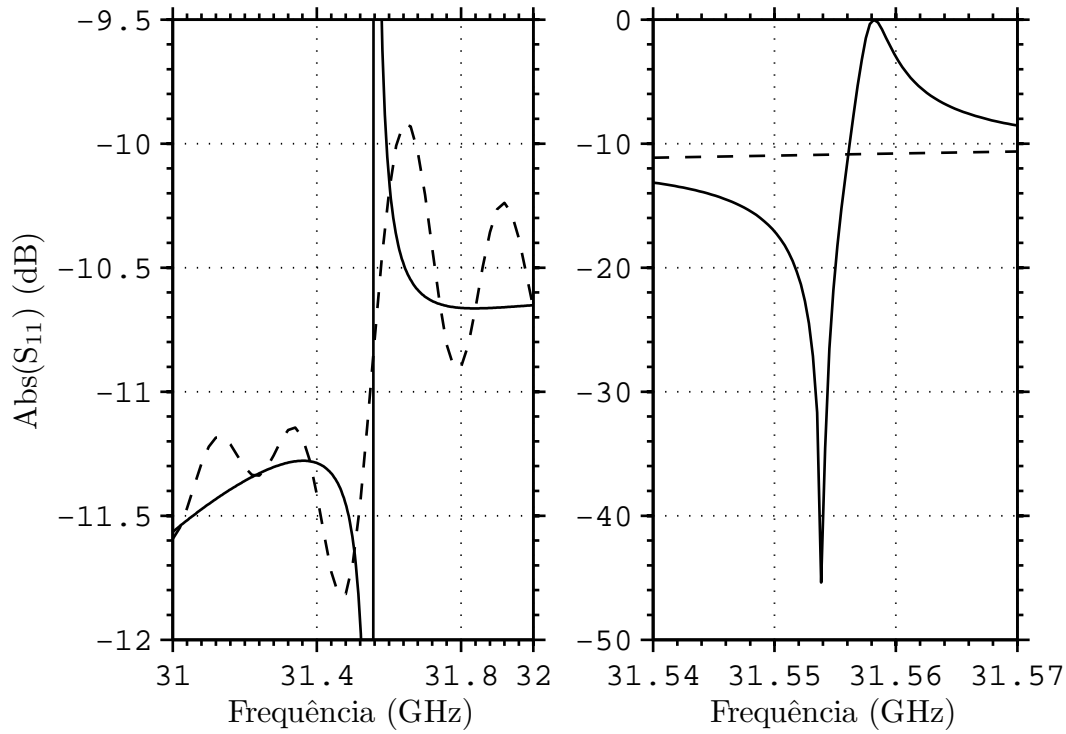


Figura 3.46: Comparação entre a perda de retorno simulada no CST (— —) com os valores obtidos pelo MMT (—) para a configuração dada na Tabela 3.15. Número de células da grade do CST: 14480000.

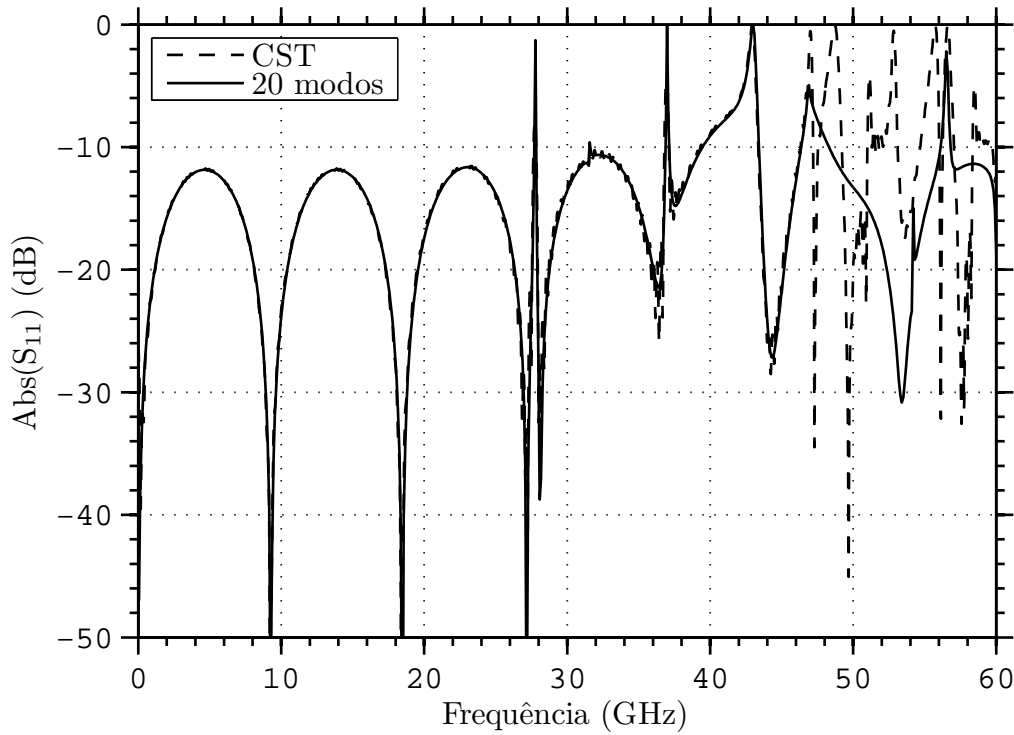


Figura 3.47: Comparação entre a perda de retorno simulada no CST com os valores obtidos pelo MMT para a configuração dada na Tabela 3.15. Número de células da grade do CST: 14480000.

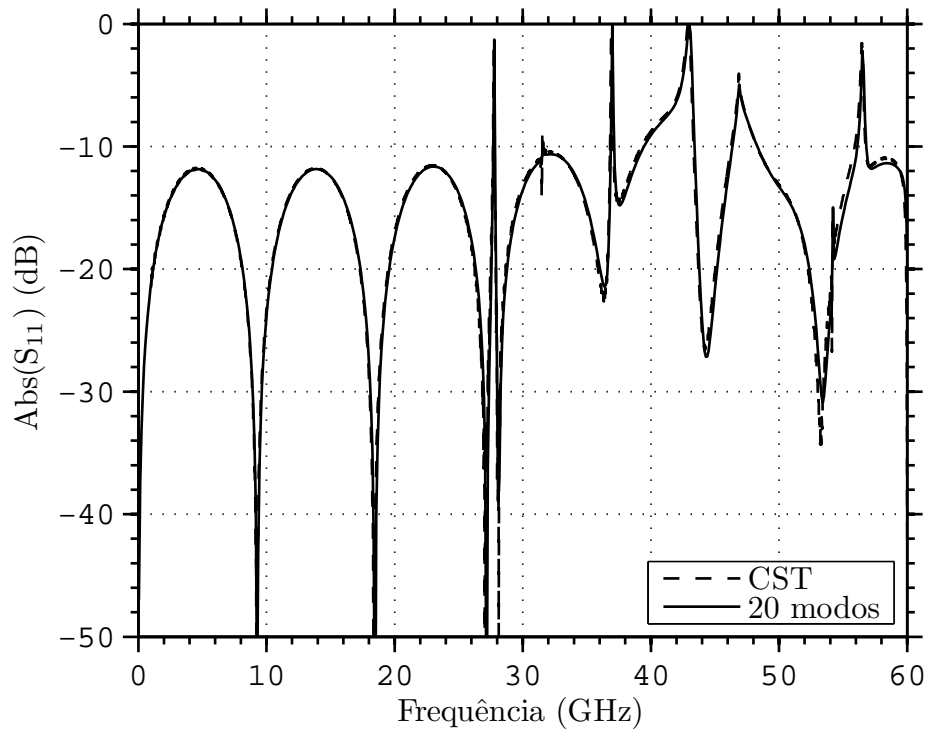


Figura 3.48: Comparação entre a perda de retorno simulada no CST com os valores obtidos pelo MMT para a configuração dada na Tabela 3.15. Número de células da grade do CST: 4881600.

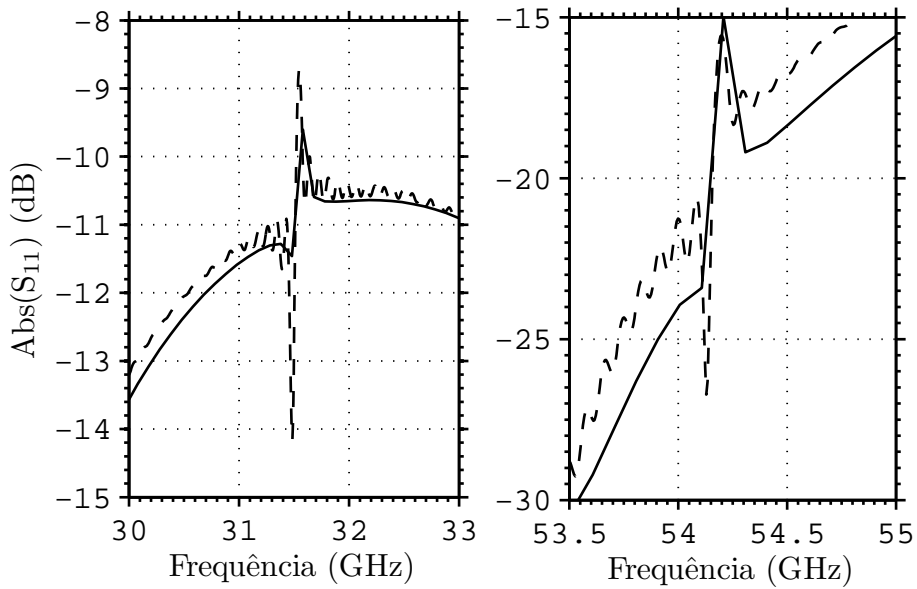


Figura 3.49: Comparação entre a perda de retorno simulada no CST (---) com os valores obtidos pelo MMT (—) para a configuração dada na Tabela 3.15. Número de células da grade do CST: 4881600.

	$a$ (mm)	$b$ (mm)	$c$ (mm)	$\epsilon_{r1}$	$\epsilon_{r2}$	$L$ (mm)
Região I	1,840	2,0	5,0	1,0	1,0	$\infty$
Região II	3,0	5,0	6,0	1,0	2,550	10,0
Região III	1,840	2,0	5,0	1,0	1,0	$\infty$

Tabela 3.16: Dimensões e parâmetros dos guias usados na simulação da Fig. 3.51.

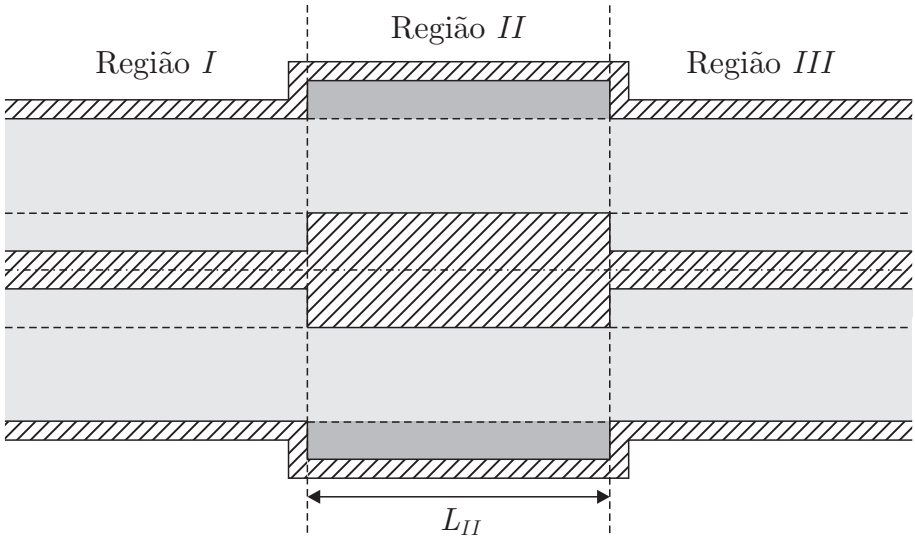


Figura 3.50: Estrutura 7.

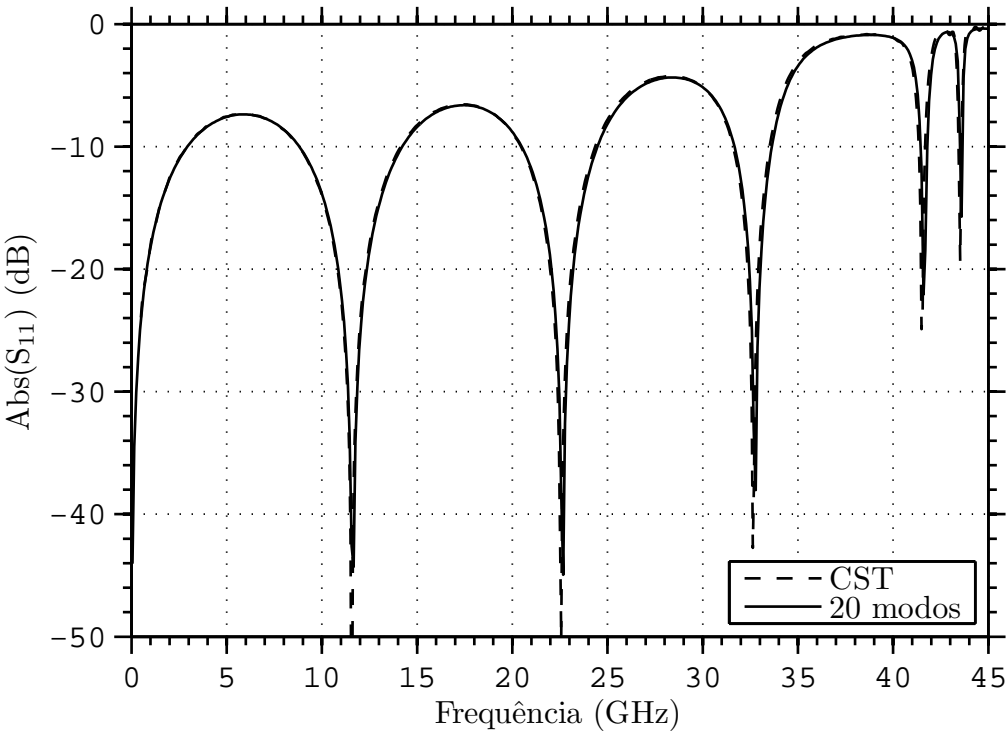


Figura 3.51: Comparação entre a perda de retorno simulada no CST com os valores obtidos pelo MMT para a configuração dada na Tabela 3.16. Número de células da grade do CST: 2092032.

	$a$ (mm)	$b$ (mm)	$c$ (mm)	$\epsilon_{r1}$	$\epsilon_{r2}$	$L$ (mm)
Região <i>I</i>	1,840	2,0	5,0	1,0	1,0	$\infty$
Região <i>II</i>	3,0	5,0	6,0	10,0	2,550	10,0
Região <i>III</i>	1,840	2,0	5,0	1,0	1,0	$\infty$

Tabela 3.17: Dimensões e parâmetros dos guias usados na simulação da Fig. 3.53.

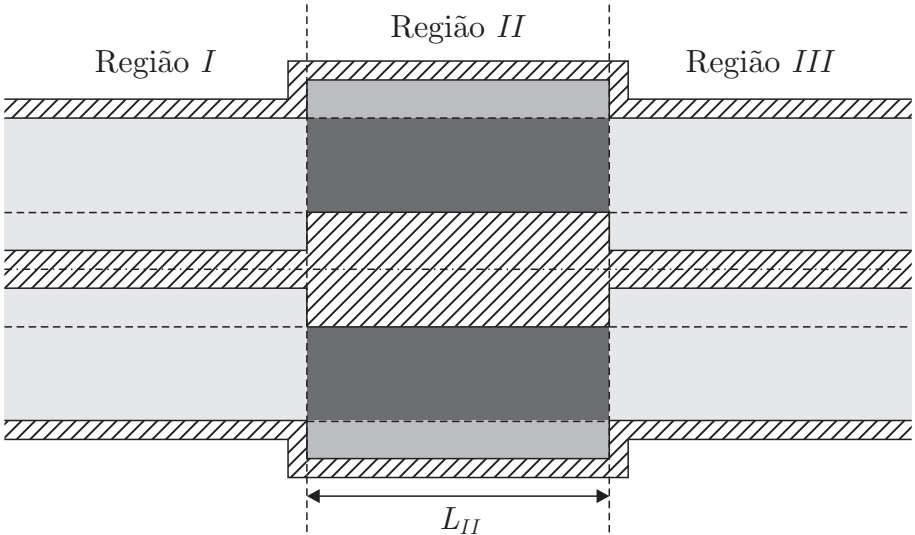


Figura 3.52: Estrutura 8

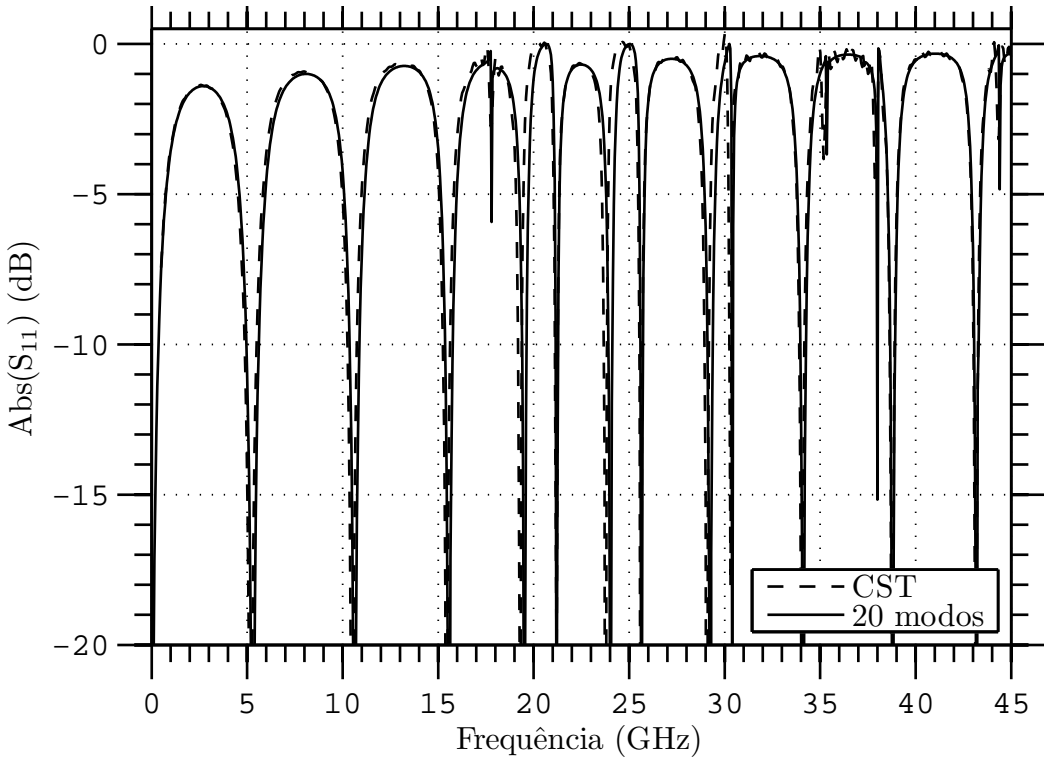


Figura 3.53: Comparação entre a perda de retorno simulada no CST com os valores obtidos pelo MMT para a configuração dada na Tabela 3.17. Número de células da grade do CST: 19783872.

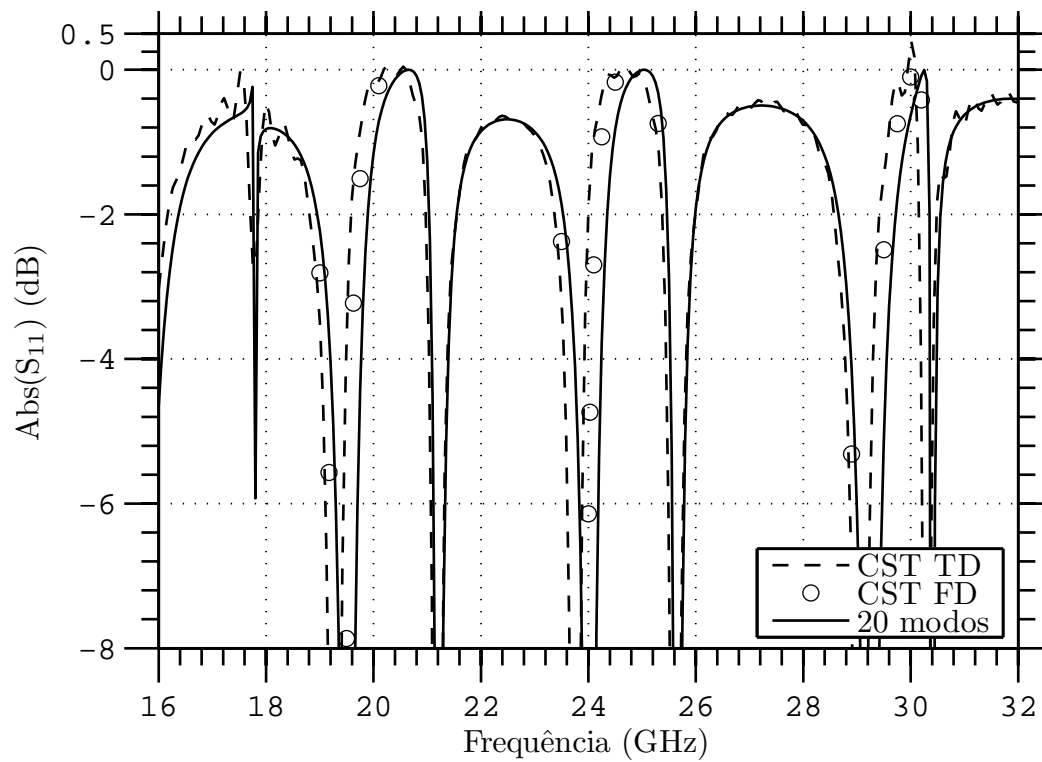


Figura 3.54: Comparação entre a perda de retorno simulada no CST com os valores obtidos pelo MMT para a configuração dada na Tabela 3.16. Número de células da grade do CST: 19783872 hexaedros para o TD e 877211 tetraedros para o FD.

## 4

# Aplicação do MMT à Estruturas Radiantes com Carregamento Dielétrico

### 4.1

#### Introdução

Em circuitos de microondas inevitavelmente existem junções entre guias de ondas. Certas discontinuidades podem ser inseridas longitudinalmente em um guia de onda com o propósito de acoplar dois níveis desiguais de impedância. Além disso, essas discontinuidades podem ter função de filtragem e conversão modal. Neste Capítulo o MMT é usado para analisar uma estrutura de acoplamento entre um conector tipo N e uma corneta coaxial. Analisa-se, também, a influência do duplo carregamento dielétrico da estrutura formada pelo conector de RF, acoplador e corneta cascadeados.

### 4.2

#### Estrutura de Acoplamento da Corneta Coaxial

Na referência [13] foi abordado o projeto de antenas omnidirecionais de duplorefletores. A antena é composta de refletores circularmente simétricos e com mesmo eixo de simetria que são alimentados por uma corneta cônica coaxial. Uma visão da corneta coaxial estudada em [13] é mostrada nas figuras 4.1 e 4.2. Nesta estrutura, foi utilizado um conector padrão do tipo N, seguido de uma estrutura de acoplamento com carregamento dielétrico homogêneo até a entrada da corneta coaxial.

A estrutura de acoplamento com carregamento dielétrico além de fazer a transição com baixas perdas de retorno, tem um papel fundamental na manutenção da rigidez mecânica da estrutura, mantendo centralizado o condutor elétrico central e evitando o aparecimento de modos superiores devido a assimetrias axiais que afetariam o diagrama de radiação e o controle da perda de retorno [13].

Na construção do dispositivo foi necessário introduzir dois apoios dielétricos para assegurar o posicionamento correto das diversas partes da transição. Elas foram introduzidas nas regiões *II* e *IV* do acoplador e têm alturas  $h_1$  e  $h_2$  conforme descrito na Fig. 4.3. Entretanto, a presença destes apoios tornam as regiões *II* e *IV* não homogêneas.

O acoplador considerado por [13] é formado por seções de guias coaxiais com preenchimento homogêneo, e considera-se por instante  $h_1 = h_2 = 0$  no acoplador coaxial mostrado da Fig. 4.3. O resultado para perda de retorno

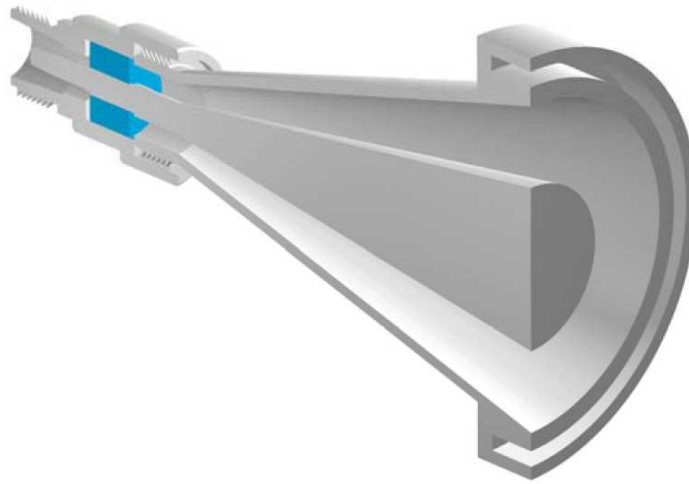


Figura 4.1: Visão tridimensional da corneta coaxial apresentada por [12]. Imagem obtida em [13, p. 229].

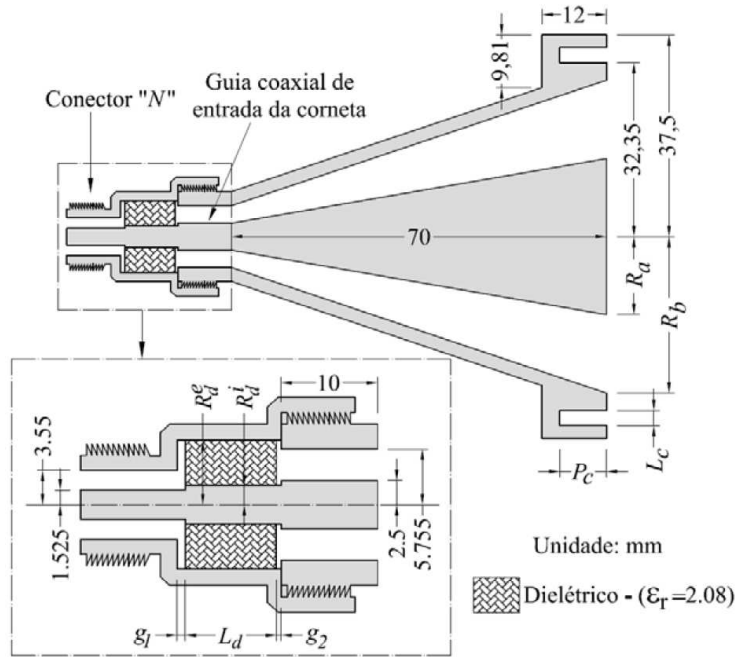


Figura 4.2: Dimensões da corneta coaxial apresentada por [12]. Imagem obtida em [13, p. 229].

obtido em [13] usando o método do casamento de modos está mostrados da Fig. 4.4, e são comparados com os resultados obtidos pelo algoritmo implementado neste trabalho. Ambas análises consideram 51 modos em cada região, e verifica-se boa concordância entre os resultados.

Os apoios dielétricos de alturas  $h_1$  e  $h_2$  não foram considerados em [13]. A influência deste apoios sobre a perda de retorno do acoplador é avaliada pela formulação do MMT para seções não homogêneas formulada precedentemente. Para avaliar a influência destes apoios, considera-se inicialmente, somente as

	$a$ (mm)	$b$ (mm)	$c$ (mm)	$\epsilon_{r1}$	$\epsilon_{r2}$	$L$ (mm)
Região I	1,5250	2,0	3,550	1,0	1,0	$\infty$
Região II	1,5250	5,0	6,670	1,0	1,0	0,840
Região III	2,0	5,0	6,670	2,080	2,080	9,450
Região IV	2,0	5,0	6,670	1,0	1,0	0,480
Região V	2,50	5,0	5,7550	1,0	1,0	$\infty$

Tabela 4.1: Dimensões e parâmetros do acoplador coaxial proposto em [13, pp. 229-230] .

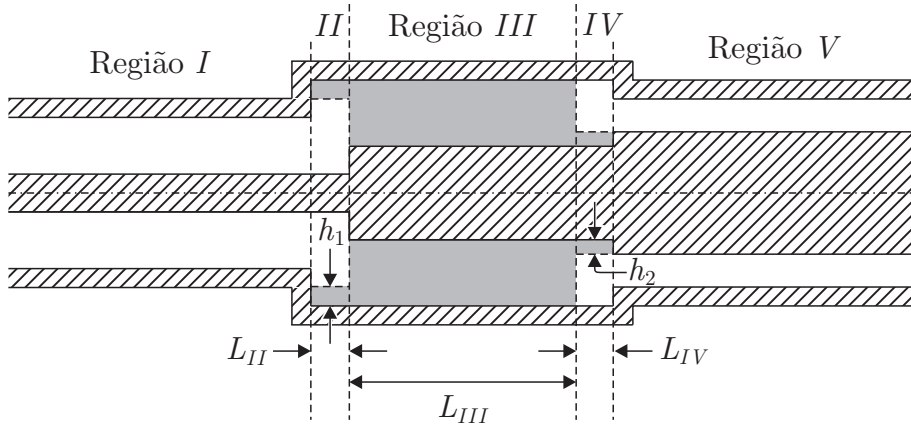


Figura 4.3: Acoplador coaxial proposto em [13, p. 230] adicionalmente usando regiões não homogêneas II e IV.

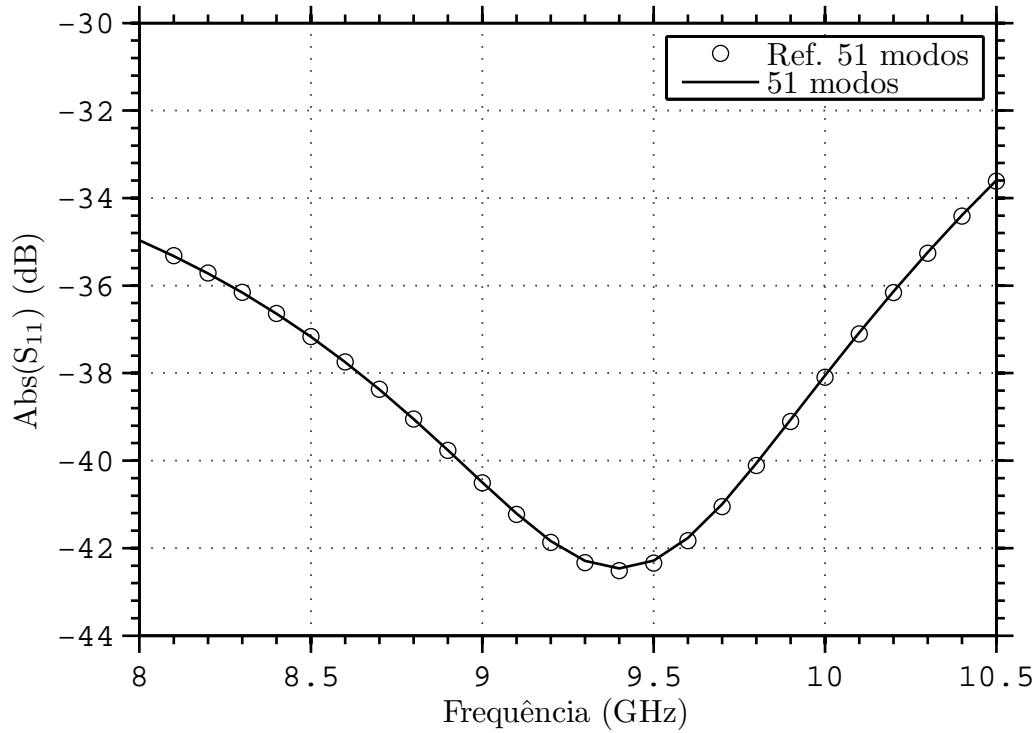


Figura 4.4: Comparação entre a perda de retorno simulada obtida em [13, p. 231] com os valores obtidos pelo MMT.



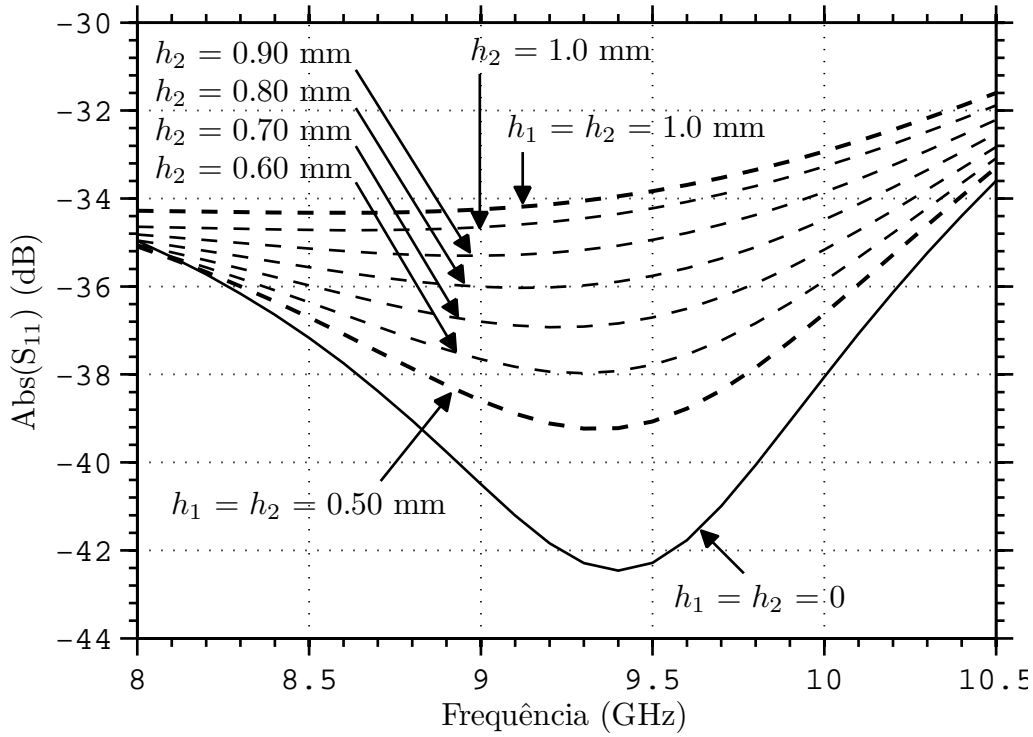


Figura 4.5: Comparação entre a perda de retorno obtida pelo MMT para várias configurações de  $h_1$  e  $h_2$ .

seções associadas ao acoplador descrito da Fig. 4.3.

Considera-se que as alturas dos apoios dielétricos possa variar de 0,50 mm a 1,0 mm. Em um primeiro caso, a perda de retorno para  $h_1$  fixo em 0,50 mm e  $h_2$  variando apresenta a perda de retorno mostrada na Fig. 4.5. A os resultados para  $h_1 = h_2 = 0$  são repetidos no gráfico. Adicionalmente, é considerado o caso em que  $h_2$  é fixado em 0,50 mm, e  $h_1$  é variado entre 0,50 mm e 1,0 mm. Os resultados obtidos são mostrados na Fig. 4.6. São destacadas as curvas com extremas observadas com  $h_1 = h_2 = 0,50$  mm e  $h_1 = h_2 = 1,0$  mm.

Com base nos resultados das figuras 4.5 e 4.6, é observado que com apoios dielétricos menores pode-se ter uma diferença de até 3 dB com relação ao caso homogêneo (sem apoios). No caso em que  $h_1 = h_2 = 1,0$  mm, essa diferença pode exceder 8 dB.

Em [13], o acoplador foi otimizado para a redução da perda de retorno. As dimensões do acoplador otimizado são listadas na Tabela 4.2. Os resultados mostrados em [13] são comparados aos obtidos pela formulação não homogênea, para o caso em que  $h_1 = h_2 = 0$ , e são mostrados na Fig. 4.7, em que verifica-se a concordância entre os resultados. Entretanto, algumas diferenças são observadas próximas a ressonância em 9,6 GHz, e estão associadas a precisão na localização dos autovalores, em função da tolerância numérica na solução da equação transcendental.

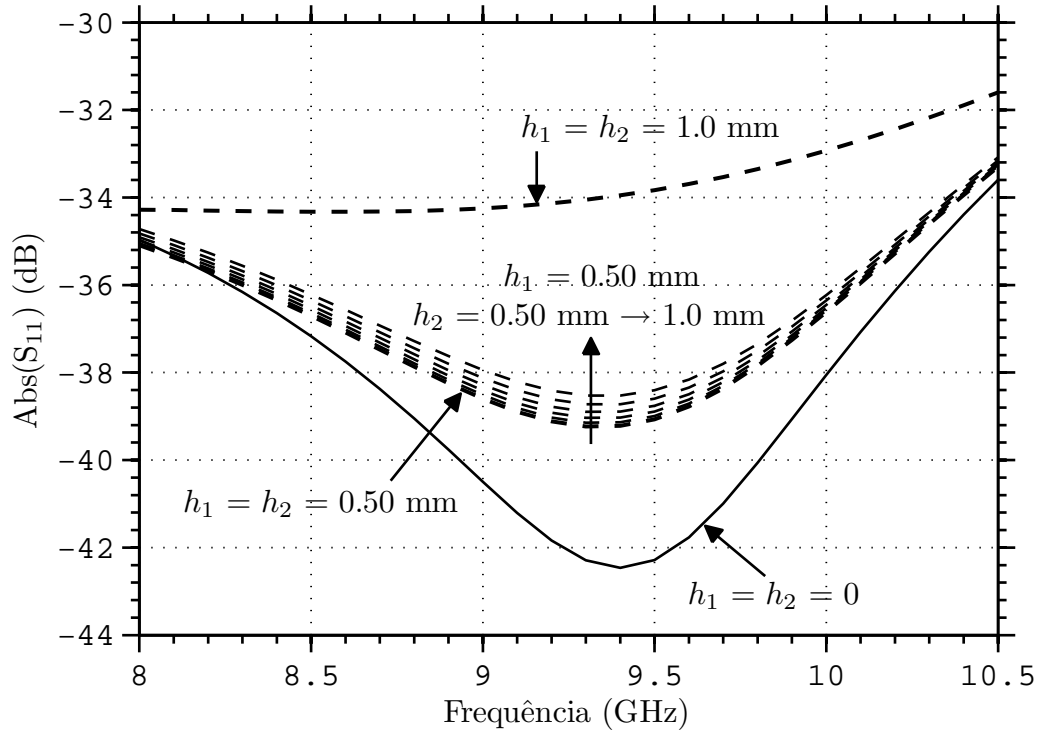


Figura 4.6: Comparação entre a perda de retorno obtida pelo MMT para várias configurações de  $h_1$  e  $h_2$ .

	$a$ (mm)	$b$ (mm)	$c$ (mm)	$\epsilon_{r1}$	$\epsilon_{r2}$	$L$ (mm)
Região I	1,5250	2,0	3,550	1,0	1,0	$\infty$
Região II	1,5250	5,0	6,5850	1,0	1,0	1,0
Região III	2,0	5,0	6,5850	2,080	2,080	6,110
Região IV	2,0	5,0	6,670	1,0	1,0	0,390
Região V	2,50	5,0	5,7550	1,0	1,0	$\infty$

Tabela 4.2: Dimensões e parâmetros do acoplador coaxial otimizado em [13, p. 229-230] .

Para avaliar os efeitos dos apoios no acoplador otimizado, considerou-se os casos em que  $h_1 = h_2 = 0,50$  mm e  $h_1 = h_2 = 1,0$  mm, cujos resultados são mostrados na Fig. 4.7. Desta figura verifica-se que a presença dos apoios dielétricos pode afetar a perda de retorno do acoplador otimizado.

Na corneta construída e analisada nos trabalhos [12], [13] (ver Fig. 4.1) foram empregados dois apoios dielétricos com alturas  $h_1 = 1,0$  mm e  $h_2 = 0,550$  mm no acoplador que precede a corneta (ver Fig. 4.3). Na seção anterior verificou-se que a influência dos apoios dielétricos pode ser significativa para a perda de retorno do acoplador. A seguir é investigado o grau de influência dos apoios dielétrico na perda de retorno da corneta completa.

O MMT formulado considera que o primeiro e último trecho de guias

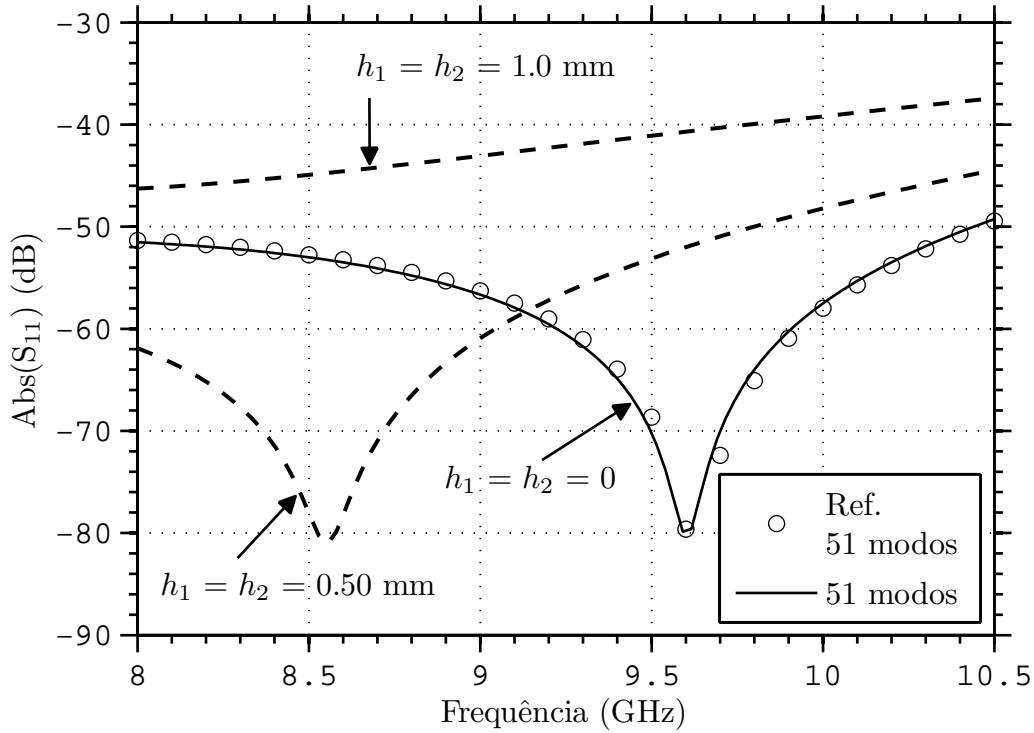


Figura 4.7: Comparação entre a perda de retorno obtida em [13, p. 231] com os valores obtidos pelo MMT para o alimentador otimizado. Adicionalmente, é mostrada a perda de retorno obtida para os valores extremos de  $h_1$  e  $h_2$ .

de onda ou terminem em carga casada ou sejam infinitos. Em uma estrutura radiante, não é considerado o descasamento de impedância entre a última seção de guia e o espaço livre. Dessa forma, a fim de obter uma solução rigorosa para o acoplamento entre a abertura da corneta e o espaço livre, a implementação da formulação não homogênea foi integrada ao método dos momentos – *method of moments* (MoM) – para determinar os efeitos da parte externa da corneta.

Em [13], a solução eletromagnética rigorosa da corneta foi realizada por um método numérico híbrido, usando o MMT e o MoM. Para a aplicação deste método híbrido a estrutura interna composta pela cadeia de alimentação e corneta são analisada via MMT e o espalhamento eletromagnético da saída da corneta para o espaço livre é tratado via MoM aplicado na solução das equações integrais de campo elétrico e magnético, formuladas em termos das correntes induzidas eternamente a antenna e em função da amplitude dos modos na abertura da corneta, como ilustrado na Fig. 4.8. Um aspecto importante nesta abordagem é o tratamento integrado de todas as partes que constituem a antenna (cadeia de alimentação, corneta radiante), considerando os efeitos de espalhamento e acoplamento entre todas essas estruturas.

O algoritmo do MMT para guias coaxiais não homogêneos desenvolvido neste trabalho foi integrado ao programa desenvolvido pelos autores da re-

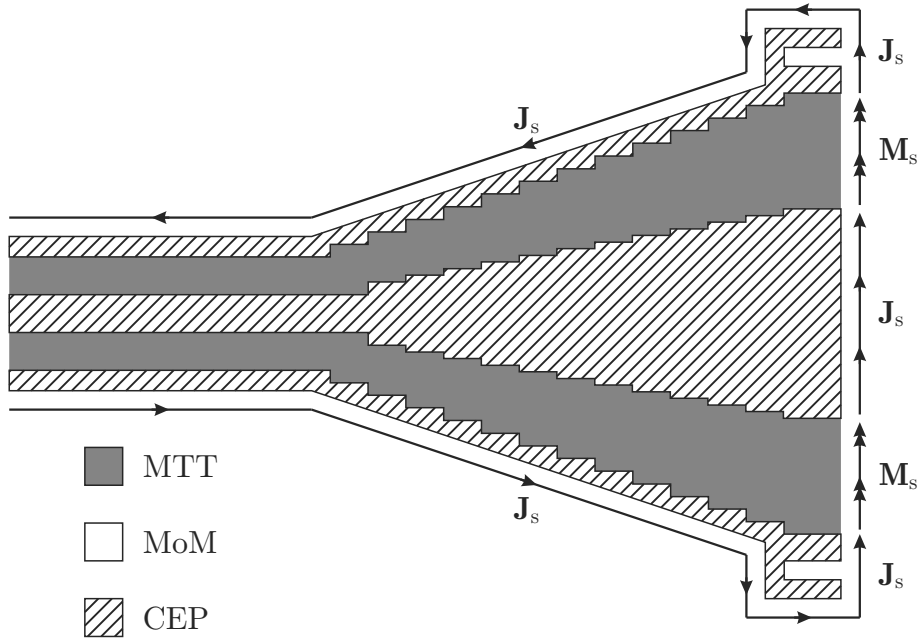


Figura 4.8: Ilustração das regiões em que o MMT e o MoM são empregados no método híbrido de análise usado em [13].

ferência [13]. A integração foi feita da seguinte forma: o programa desenvolvido determina as matrizes de espalhamento da estrutura completa da corneta não homogênea, e essas matrizes são cascadeadas com as matrizes do método híbrido empregado no programa de [13].

Os resultados obtidos para a perda de retorno da corneta coaxial com apoios dielétricos tais que  $h_1 = 1,0$  mm e  $h_2 = 0,550$  mm são comparados com o caso em que os apoios são negligenciados ( $h_1 = h_2 = 0$ ) e com os valores medidos na Fig. 4.9. Verifica-se que a influencia dos apoios é pequena na característica da perda de retorno. Contudo, é importante mencionar que para os valores de maior descasamento de impedância da corneta, a curva de  $\text{Abs}(S_{11})$  considerando os apoios dielétricos se aproxima da curva medida.

O carregamento dielétrico em cornetas cônicas excitadas pelo modo  $\text{TE}_{11}$  na década de 1980 para simular o efeito de corrugações [32], [33]. Cornetas corrugadas suportam o modo híbrido  $\text{HE}_{11}$ , que radia com baixa polarização cruzada e pode ser projetado para produzir baixos lóbulos laterais. A introdução de um cone dielétrico com um *airgap* em uma corneta lisa, também pode suportar modos híbridos e melhorar performance de polarização cruzada e nível de lóbulos laterais.

A corneta coaxial empregada descrita na Fig. 4.1 e excitada pelo modo TEM não apresenta polarização cruzada, pois é excitada com modos puros. Contudo, a pequena dimensão da abertura (diâmetro de  $1,8\lambda$ ) torna o comportamento do diagrama de radiação da corneta fortemente dependente

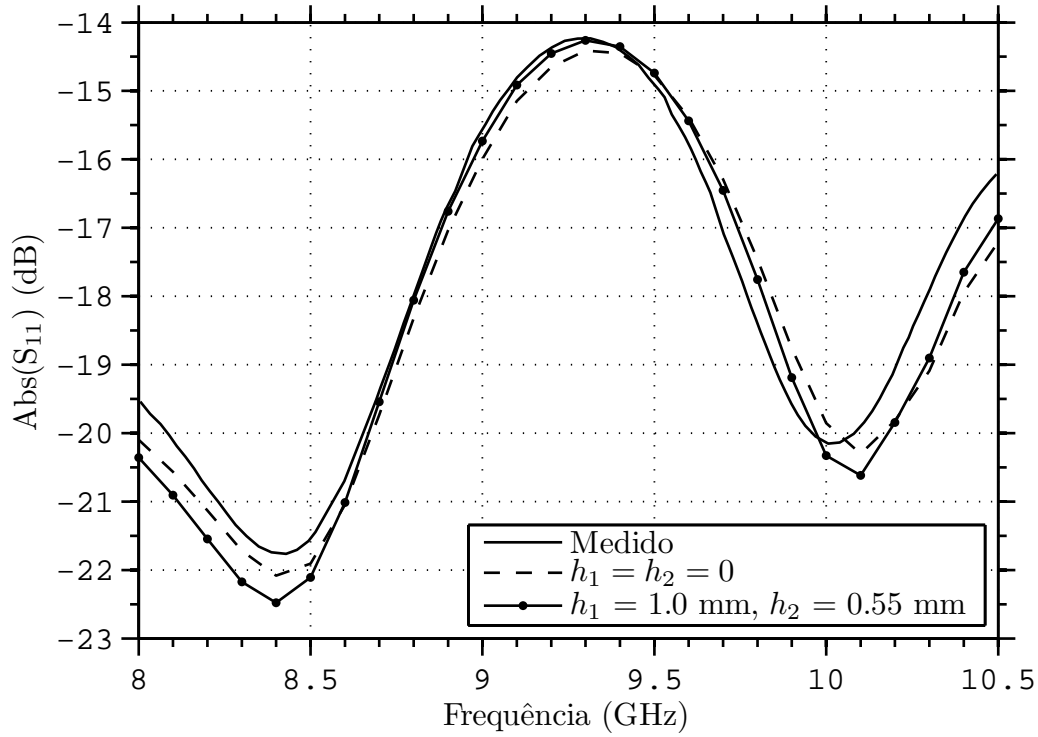


Figura 4.9: Comparação das medidas de perda de retorno com o caso  $h_1 = h_2 = 0$  e com o caso  $h_1 = 1,0$  mm e  $h_2 = 0,55$  mm.

da frequência, como ilustra a Fig. 4.10.

Em [13] foi observado que a excitação do modo  $TM_{01}$  na abertura de uma corneta coaxial permite que o diagrama de radiação em alta frequência não seja muito diferente do diagrama em baixa frequência. A inclusão do modo  $TM_{01}$  foi obtida em [13] com o aumento da área da abertura da corneta coaxial.

No Capítulo 2 foi verificado que com um carregamento dielétrico não homogêneo é possível tornar modos superiores propagantes em frequências mais baixas se comparadas com a frequência de corte para o guia homogêneo. Motivado por isso, a seguir, investiga-se o emprego de uma capa dielétrica na corneta coaxial, com o intuito de controlar o diagrama de radiação para as frequências mais altas.

A corneta original é ilustrada na Fig. 4.16, e é identificada por *Caso 1*. Nos esboços o *chock* mostrado nas figuras 4.1 e 4.2 não é representado, mas é considerado nas simulações. O diagrama de radiação desta corneta é mostrado em 4.10. Destaca-se na figura o diagrama de 9,30 GHz, que é a frequência central de operação da corneta descrita.

Inicialmente, investiga-se duas formas de carregamento dielétrico: os caso 2 e 3 mostrados na Fig. 4.16. No caso 2, uma capa dielétrica é inserida junto ao condutor interno. O dielétrico empregado em todos os caso é o mesmo do acoplador, ou seja, Teflon com  $\epsilon_r = 2,080$ . No caso 3, a capa dielétrica

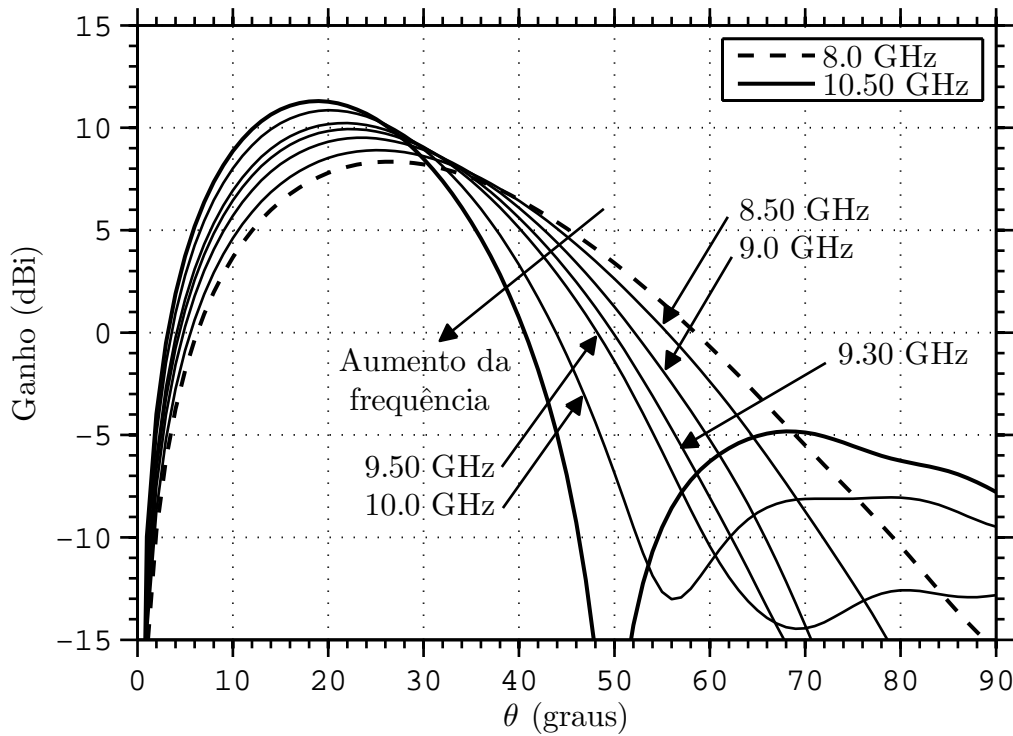


Figura 4.10: Caso 1, corneta com preenchimento homogêneo proposta em [13, pp. 229-231] – Diagramas de radiação em função da frequência.

é inserida junto ao condutor externo da corneta coaxial. Os diagramas de radiação obtidos para esses dois caso são mostrados nas figuras 4.11 e 4.12.

Do diagrama de radiação da Fig. 4.11 verifica-se que com a inserção da capa dielétrica foi possível alargar o diagrama na frequência de 10,50 GHz. Com o aumento da frequência, a tendência natural era do diagrama de radiação do lóbulo principal se estreitar, contudo, a presença da capa dielétrica forçou a propagação do segundo modo na saída da corneta. A presença do segundo modo alargou o diagrama de radiação.

A capa dielétrica inserida no guia do caso 3, no qual o dielétrico fica próximo do condutor externo da corneta coaxial, teve como resultado um diagrama de radiação em 10,50 GHz com lóbulo principal mais estreito se comparado com a corneta original (caso 1). Da mesma forma que no caso 2, no caso 3 a presença do dielétrico permite que o segundo modo seja propagante na última seção de guia coaxial usado para aproximar a corneta. Entretanto, como o campo eletromagnético dos modos propagantes se concentra principalmente no dielétrico, no caso 3, o campo é intensificado na região próxima do condutor externo. Em comparação a uma corneta sem carregamento dielétrico, o mesmo aconteceria caso a abertura da saída da cornetas fosse maior. Neste caso, o lóbulo principal do diagrama de radiação se estreita.

Em suma, o efeito do carregamento dielétrico de uma capa dielétrica

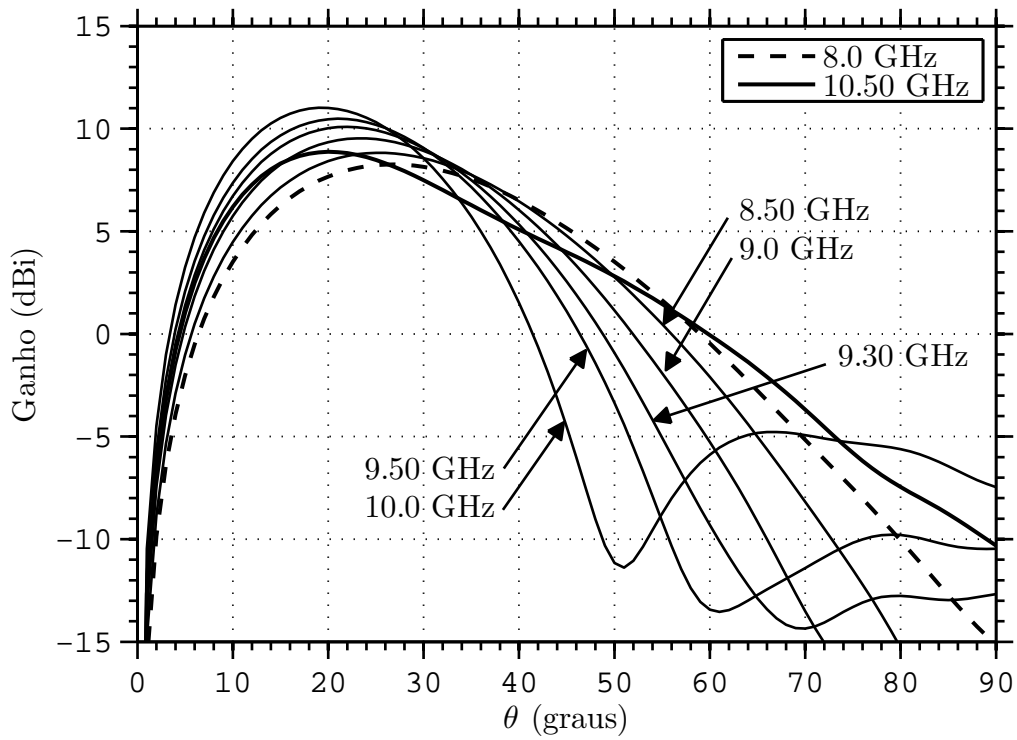


Figura 4.11: Caso 2 – Diagramas de radiação em função da frequência.

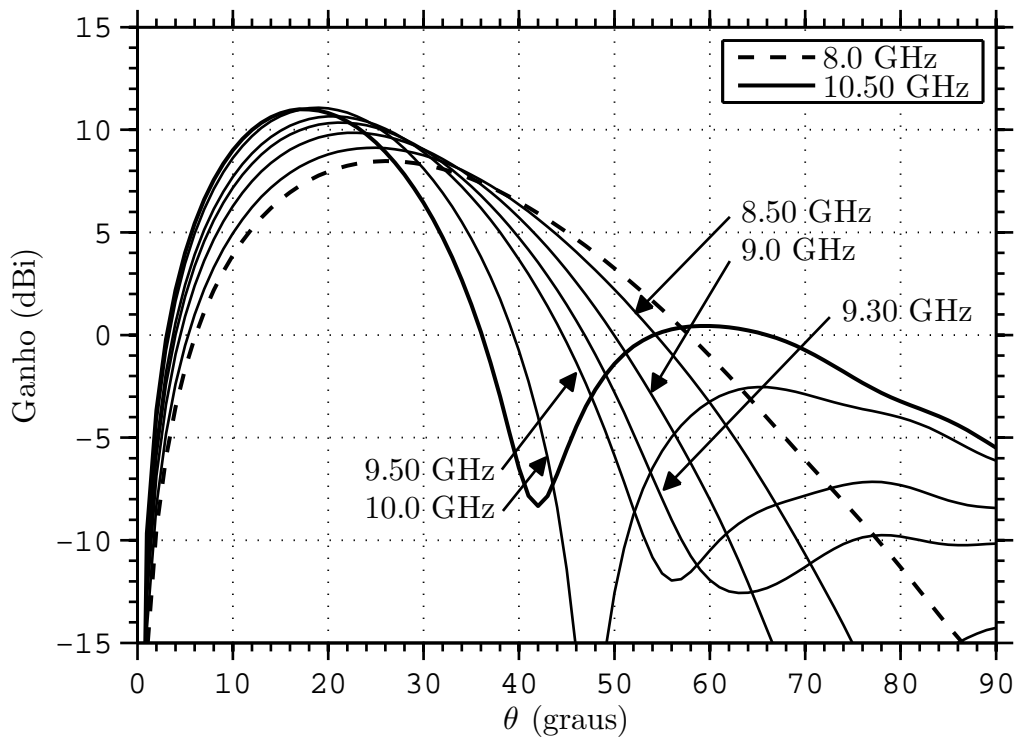


Figura 4.12: Caso 3 – Diagramas de radiação em função da frequência.

junto ao condutor externo equivale ao efeito de uma abertura maior em uma corneta sem carregamento dielétrico. O efeito da entrada de modos superiores com o carregamento dielétrico junto ao condutor interno, por sua vez, equivale a se ter uma abertura menor em uma corneta sem carregamento.

Apesar do efeito interessante obtido no diagrama de radiação, a inserção de carregamento dielétrico afeta também a perda de retorno da corneta, como é mostrado na Fig. 4.13. A perda de retorno da corneta do caso 2 foi bastante afetada: a inserção do dielétrico aumentou o descasamento de impedância entre a saída da corneta e o espaço livre. A fim de evitar este inconveniente, e ao mesmo tempo buscar um certo controle sobre o diagrama de radiação por meio da inserção de carregamento dielétrico, a corneta do caso 4, mostrada na Fig. 4.16, foi otimizada a fim de minimizar a perda de retorno ao longo da banda de 8,0 GHz – 10,50 GHz e também minimizar as diferenças entre os diagramas para as frequências deste intervalo. O resultado obtido para o caso 4 é mostrado na figura 4.14. A perda de retorno do caso 4 é comparada na Fig. 4.15, junto a perda de retorno da corneta original. Verifica-se que em geral a perda de retorno das cornetas com carregamento dielétrico piorou se comparado ao caso 1. Os diagramas de radiação para estes casos apresentam um alargamento do lóbulo principal para as frequências mais altas, contudo, as diferenças entre o diagrama de radiação da frequência central ainda são

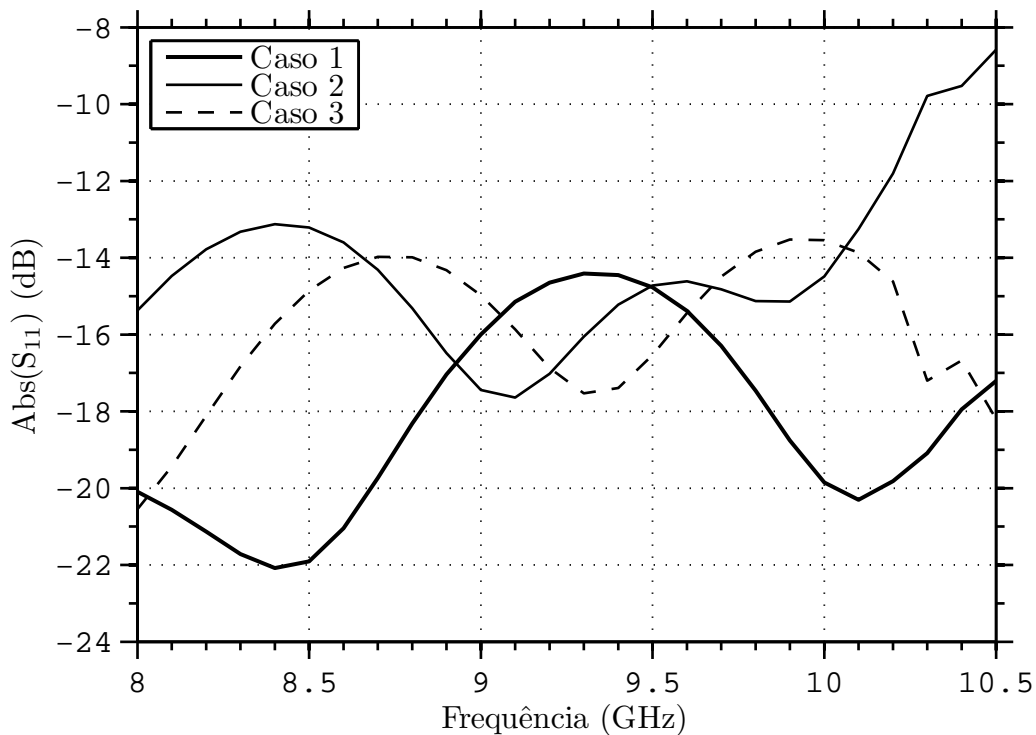


Figura 4.13: Comparação entre perdas de retorno para os casos 1, 2 e 3.



grandes.

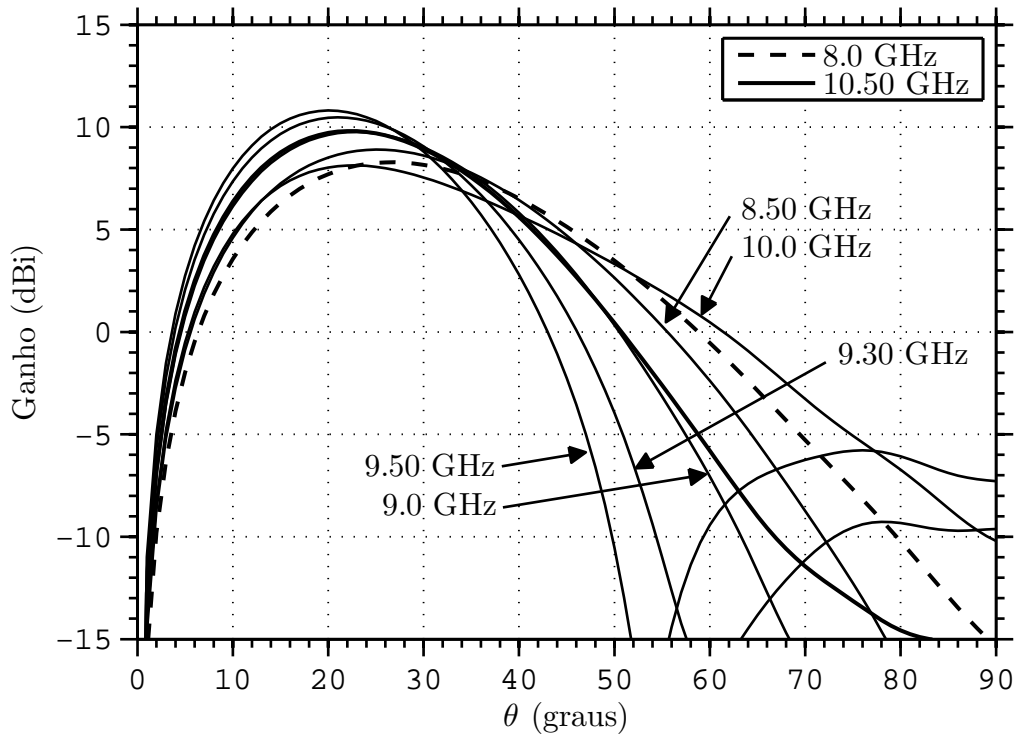


Figura 4.14: Caso 4 – Diagramas de radiação em função da frequência.

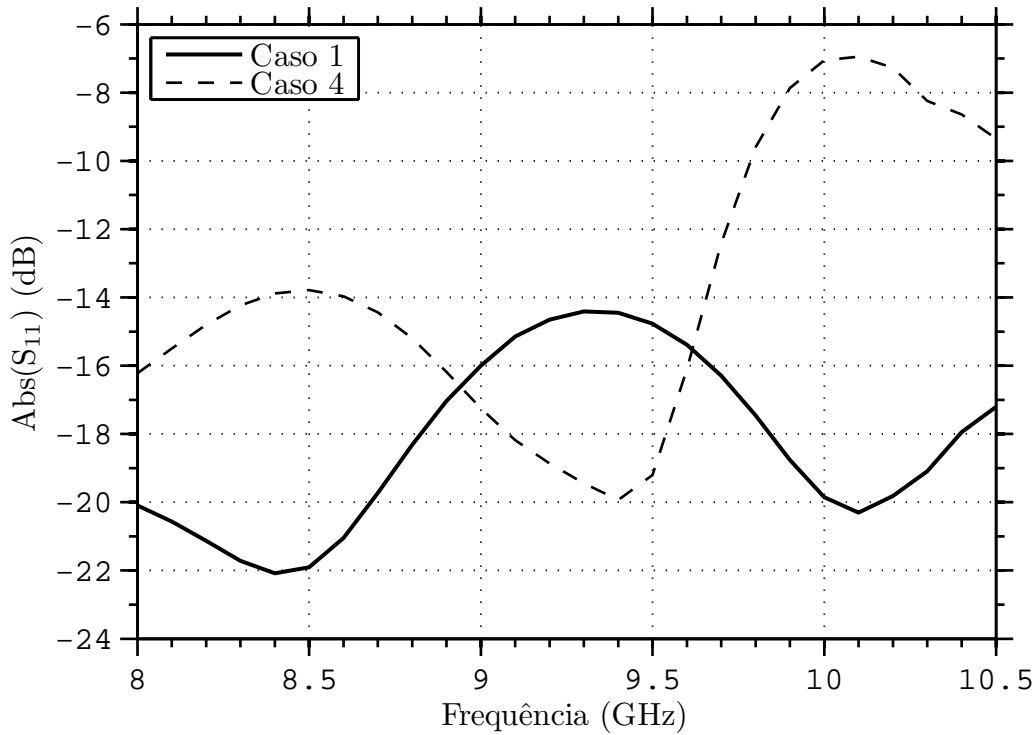


Figura 4.15: Comparação entre perdas de retorno para os casos 1 e 4.

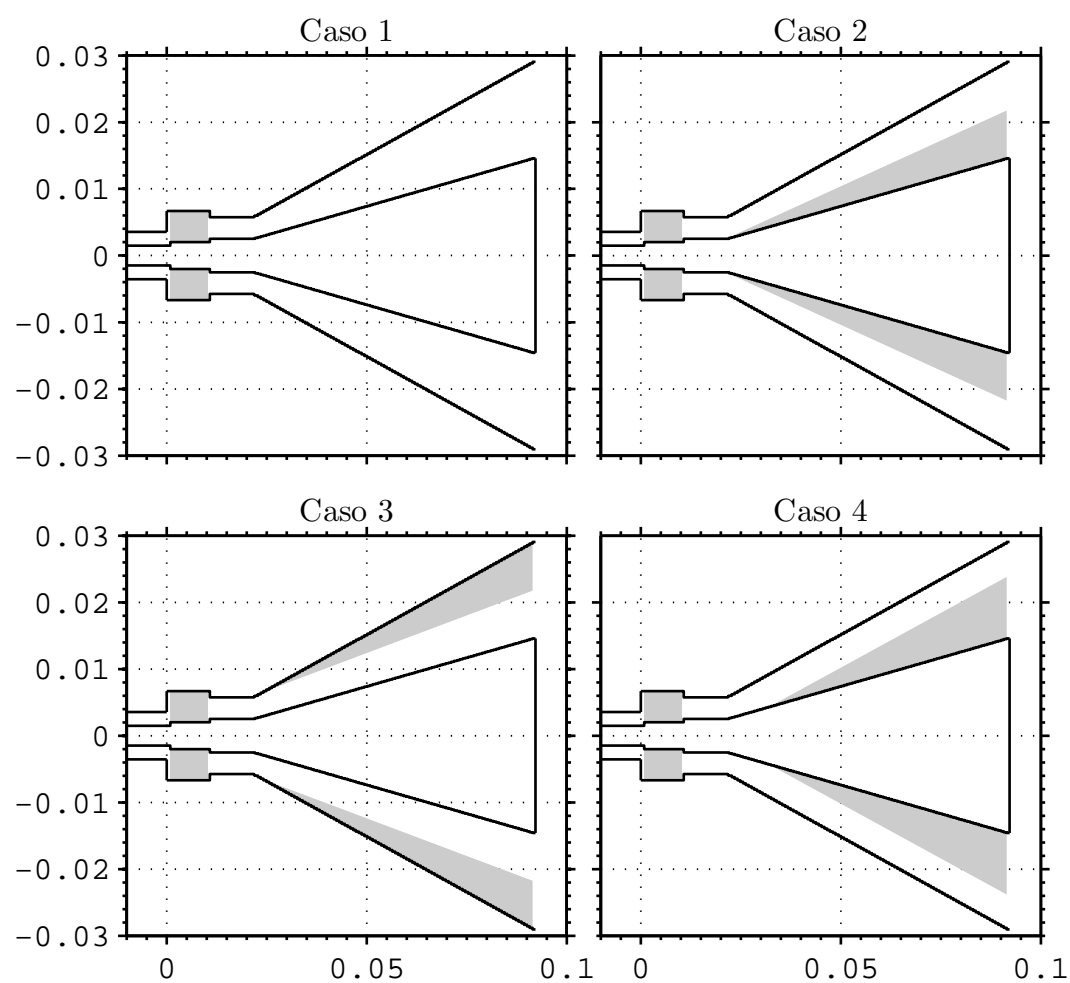


Figura 4.16: Esboço das cornetas dos casos 1 a 4. As unidades dos gráficos estão em metros.

## 5

### Aplicação do MMT à Estruturas com Perdas

#### 5.1

##### Introdução

O método do casamento de modos foi desenvolvido e validado no Capítulo 3 para a junção de guias coaxiais com preenchimento não homogêneos sem perdas. Neste capítulo a formulação precedente é generalizada para meios com perdas.<sup>1</sup>

A formulação de um método do MMT usada para analisar descontinuidades em guias de ondas não homogêneos com perdas também pode ser utilizada para a simulação da telemetria sem fio em poços de petróleo. O monitoramento e controle dos sensores em um poço de petróleo são classicamente realizados por cabos elétricos, que conectam sensores e atuadores no fundo do poço com a estação de superfície. Em poços ultra-profundos, as técnicas clássicas de telemetria apresentam aspectos críticos [15], e em alguns casos sua utilização é inviável. Isso motiva a investigação de métodos de telemetria sem fio. Neste Capítulo, o problema de propagação é modelado pelo MMT, e sua viabilidade é analisada.

No Capítulo 3, a admitividade  $\hat{y}$  e a impeditividade  $\hat{z}$  eram ambos parâmetros imaginários puros. Em outras palavras: a condutividade  $\sigma$  dos meios considerados era nula, e a permissividade e a permeabilidade eram valores reais puros. Um meio é dito com perdas se  $\hat{y}$  ou  $\hat{z}$  são parâmetros complexos. No MMT descrito no Capítulo 3 os campos eletromagnéticos foram normalizados pela auto-reação. Para melhor compreensão, a normalização da amplitude dos campos modais é repetida a seguir. As relações de ortogonalidade e normalização para os campos modais usadas foram

$$\int_s (\mathbf{e}_m \times \mathbf{h}_n) \cdot d\mathbf{s} = \delta_{mn}, \quad (5-1)$$

em que  $\delta_{mn}$  é o delta de Kronecker, tal que:  $\delta_{mn} = 0$  para  $m \neq n$ , e  $\delta_{mn} = 1$  para  $m = n$ .

Os campos  $\mathbf{e}_m$  e  $\mathbf{h}_m$  são normalizados para que a esta integral reproduza a condição acima.

---

<sup>1</sup>É importante deixar claro que os meios com perdas estão preenchendo o guia coaxial. As paredes condutoras do guia coaxial são consideradas CEP, e as perdas por condução nestes condutores são negligenciadas.

É importante lembrar que (5-1) não é uma condição de normalização de potência. Pode ser verificado que essa normalização só tem sentido quando os meios são sem perdas [34, p. 866]. Para meios sem perdas a condição anterior significa que as expressões para os modos foram normalizados para que a potência seja 1.

Para meios com perdas a expressão anterior não significa que a potência seja unitária, somente que as expressões modais dos campos foram normalizadas para que a integral acima seja unitária. A relação de ortogonalidade (5-1) foi usada em (3-11) e também para simplificar as matrizes  $\bar{\bar{Q}}$  e  $\bar{\bar{R}}$ , que, devido a ortogonalidade entre os modos, são matrizes diagonais.

Feitas estas observações, tem-se que a formulação do MMT descrita no Capítulo 3 pode ser aplicada para resolver o problema da junção entre guias coaxiais não homogêneos com perdas. Um problema adicional é a localização dos autovalores. No caso sem perdas é possível prever pela equação característica do modo  $TM^z$  que os números de onda radial  $k_{\rho 1}$  (ou  $k_{\rho 2}$ ) são puramente reais ou puramente imaginários.

Em guias homogêneos com perdas, verifica-se que as raízes são reais. Contudo, apesar de  $k_{\rho 1} = k_{\rho 2}$  ser real, a constante de propagação é complexa.

Em meios não homogêneos com perdas tem-se que os autovalores  $k_{\rho 1}$  e  $k_{\rho 2}$  são complexos. Os autovalores estão, portanto, distribuídos no plano complexo, requerendo uma busca de zeros da equação característica em duas dimensões. Além de localizar os autovalores, é necessário saber se, em uma dada região do plano complexo, *todos* os autovalores foram encontrados.

No Apêndice E o problema de autovalores do guia coaxial não homogêneo é generalizado para a heterogeneidade de  $N$  camadas radiais com perdas. Neste apêndice é descrita uma formulação pelo método do *winding number*, que permite determinar *todos* os autovalores em um caminho fechado no plano complexo  $k_{\rho 1}$ . Essa formulação é geral, ou seja, permite determinar os autovalores para regiões com perdas elevadas, bem como é uniforme para o limite em que as perdas tendem a zero. Um ponto crítico desta formulação implementada é o tempo computacional elevado se comparado a técnicas de buscas de zero como Newton ou Muller. Além disso, as técnicas de buscas de zero de Newton e Muller servem apenas para localizar o autovalor mais próximo a um dado valor inicial aproximado, e não asseguram a determinação de todos os autovalores.

A partir da aproximação assintótica da equação característica (2-72), foi observado que a equação característica pode ser aproximada pela combinação de duas funções harmônicas com dois períodos distintos, que são definidos pelas dimensões e pelos preenchimentos do guia coaxial não homogêneo. Para

o limite em que as perdas tendem a zero, pode-se usar os zeros da equação característica sem perdas como aproximação inicial para o método de Muller buscando zeros da equação característica do caso com perdas. Verificou-se que em geral esse procedimento é computacionalmente mais rápido se comparado a implementação do *winding number*.

A fim de verificar a correta implementação do algoritmo, foram selecionados duas estruturas coaxiais para validação, ambas excitados pelo modo TEM<sup>z</sup>. O primeiro é a estrutura coaxial caracterizada pelos dados da Tabela 5.1 e a Fig. 5.1. Esta estrutura que serve para a caracterização eletromagnética dos materiais da camada mais externa da região *III*, foi simulada em [10]. Como mostrado na figura, um líquido é colocado através de um orifício, e fica confinado entre a estrutura de teflon e o condutor externo do guia coaxial. Os resultados reportados por [10] estão mostrados nas figuras 5.2 e 5.3 junto com os obtidos pelo MMT (identificados pela legenda *20 modos*). Verifica-se boa concordância entre os resultados.

Apesar da concordância entre os resultados, é importante mencionar que as perdas no teflon e no líquido são baixas:  $\tan \delta \approx 0,23 \times 10^{-4}$ , e  $\tan \delta \approx 0,23$ , respectivamente. Para um segundo teste de validação, utilizou-se o CST para analisar a estrutura mostrada na Fig. 5.4 e com dimensões e parâmetros eletromagnéticos listados na Tabela 5.2. Na Fig. 5.5 os valores de perda de retorno fornecidos pelo CST são comparados com os obtidos pelo algoritmo do MMT. Para a adequada representação dos campos, a simulação do CST utilizou 32371200 células na grade no TD, e o MMT utilizou 20 modos. Novamente observa-se a concordância dos resultados.

A fim de verificar o comportamento da perda de retorno em função da condutividade da camada 2 da região *II*, outras simulações foram realizadas pelo MMT, como mostrado da Fig. 5.6. Deve ser observado que o valor do coeficiente de reflexão diminuir com o aumento da condutividade, e o coeficiente de transmissão também diminui. Ou seja,  $\text{Abs}(S_{11})^2 + \text{Abs}(S_{21})^2 < 1$ .

## 5.2

### Classificação dos Modos de Propagação

Antes de continuar a análise do MMT em estruturas com perdas é pertinente fazer algumas observações sobre os modos de propagação. De forma sucinta, na decomposição modal usada anteriormente deseja-se a propagação no sentido de  $+z$ . Sem perda de generalidade, caso o problema fosse formulado em termos da propagação para  $-z$  as mesmas expressões para as matrizes de acoplamento do MMT seriam encontradas. Os modos de propagação para  $+z$

Região	$a$ (mm)	$b$ (mm)	$c$ (mm)	$\hat{\epsilon}_{r1}$	$\hat{\epsilon}_{r2}$	$L$ (mm)
<i>I</i>	1,520	2,50	3,50	1,0	1,0	$\infty$
<i>II</i>	1,520	2,50	3,50	$2,310(1 - j10^{-4})$	$2,310(1 - j10^{-4})$	2,0
<i>III</i>	1,520	2,50	3,50	$2,310(1 - j10^{-4})$	$30,890 - j7,130$	10,0
<i>IV</i>	1,520	2,50	3,50	$2,310(1 - j10^{-4})$	$2,310(1 - j10^{-4})$	2,0
<i>V</i>	1,520	2,50	3,50	1,0	1,0	$\infty$

Tabela 5.1: Dimensões e parâmetros da estrutura da Fig. 5.1.

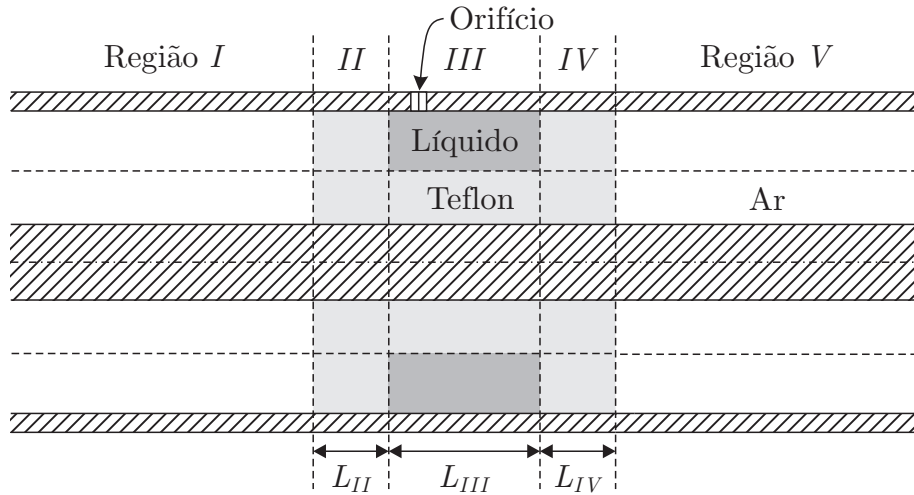
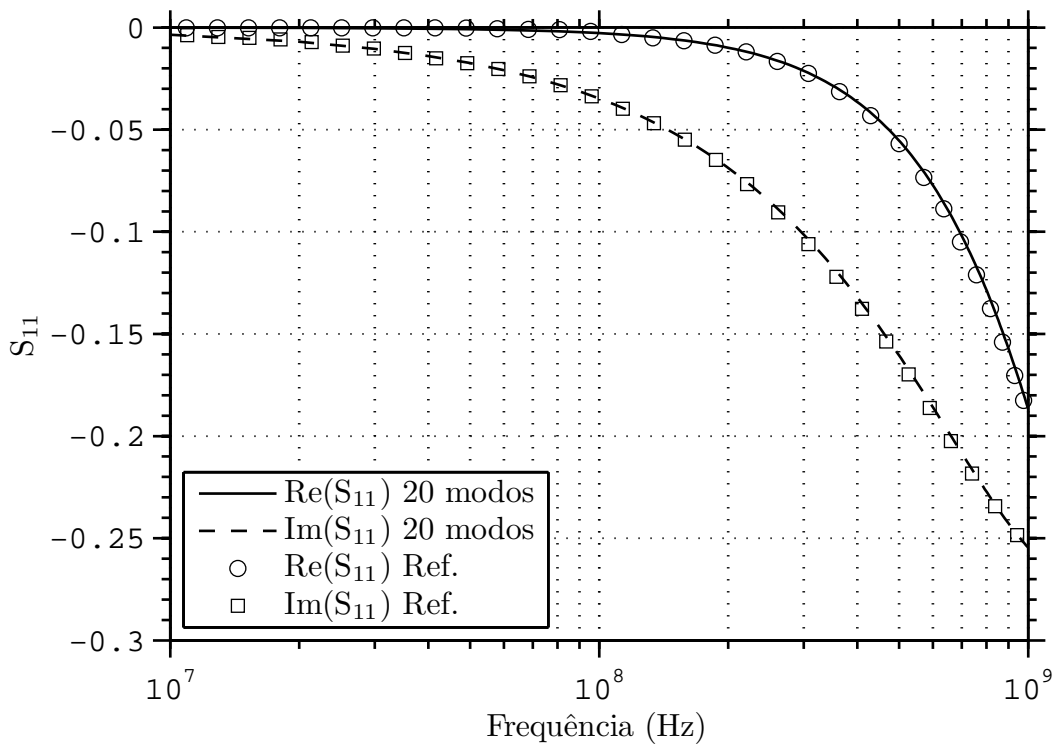


Figura 5.1: Estrutura com descontinuidades coaxiais usada em [10] para caracterização eletromagnética de materiais.

Figura 5.2: Comparação do coeficiente de reflexão  $S_{11}$  simulado e o obtido em [10, p. 227].

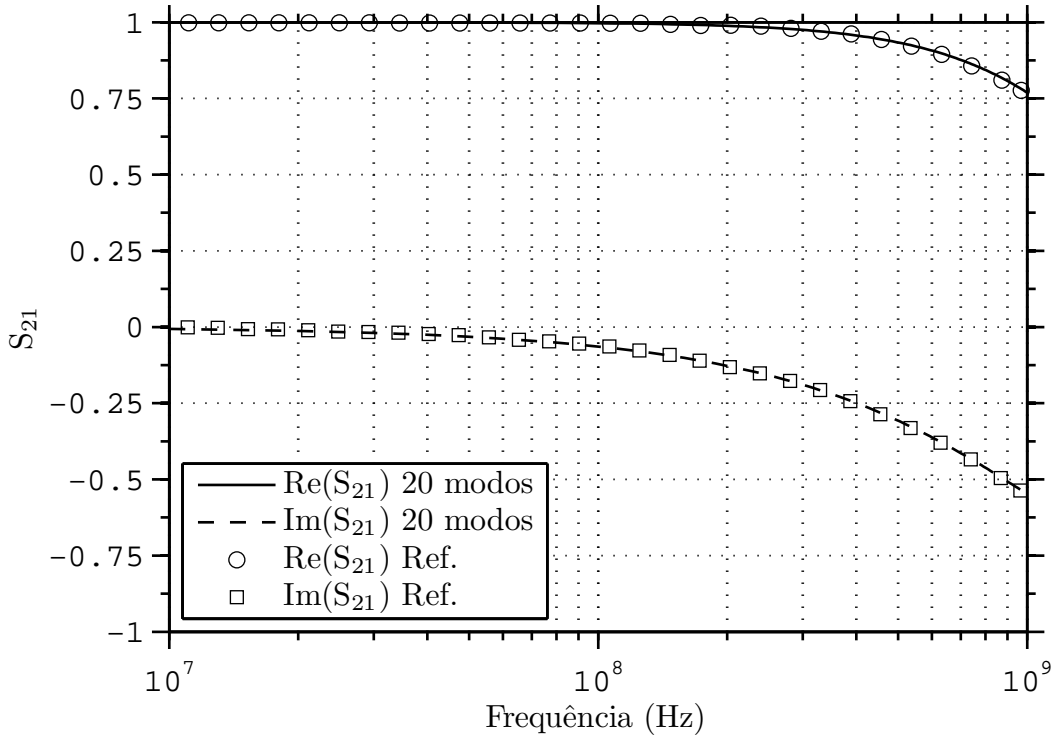


Figura 5.3: Comparação do coeficiente de transmissão  $S_{21}$  com os dados em [10].

e  $-z$  são ondas *forward* e *backward*, respectivamente.

No Capítulo 2 verificou-se que para meios sem perdas, o guia coaxial não homogêneo admite modos com  $k_\rho$  real e imaginário. Para  $k_\rho \in \mathbb{R}$ , tem-se  $k_z$  real, e maior que o número de onda do meio; por exemplo,  $k_z > k$ . Os modos com  $k_\rho \in \mathbb{I}$  são *slow waves*, uma vez que sua velocidade de fase é inferior a velocidade de fase da luz no meio.

Em meios homogêneos, os modos puros  $\text{TM}^z$  e  $\text{TE}^z$  do guia coaxial sempre são *fast waves*. O caso particular é do modo  $\text{TM}_{00}$ , que se degenera em um modo TEM e apresenta  $k_z = k$ . Em um guia coaxial não homogêneo sem perdas, os modos podem ser *fast waves* e *slow waves*, tanto para a propagação para  $+z$  como para  $-z$ .

Uma outras classe de modos de propagação mais peculiar é encontrada em guias de onda sem perdas: as *complex waves*. De forma contraintuitiva, modos com constantes de propagação complexas são encontrados em estruturas guiadas sem perdas, como verificaram [35], [36], [37]. *Complex waves* sempre ocorrem aos pares, em que a constante de propagação de um modo é o complexo conjugado do outro modo. Apesar da quantidade de potência de um único modo complexo não ser zero, o par conjugado de modos não carrega potência, e dessa forma não ocorre dissipação [37]. Esses modos não contribuem para o transporte de potência em um guia de onda, mas em [38] foi mostrado que

	$a$ (mm)	$b$ (mm)	$c$ (mm)	$\epsilon_{r1}$	$\sigma_2$ (S/m)	$\epsilon_{r2}$	$L$ (mm)
Região I	1,840	3,0	5,0	1,0	0	1,0	$\infty$
Região II	3,0	4,0	6,0	10,0	1,0	2,550	10,0
Região III	1,840	3,0	5,0	1,0	0	1,0	$\infty$

Tabela 5.2: Dimensões e parâmetros dos guias usados na simulação da Fig. 5.4.

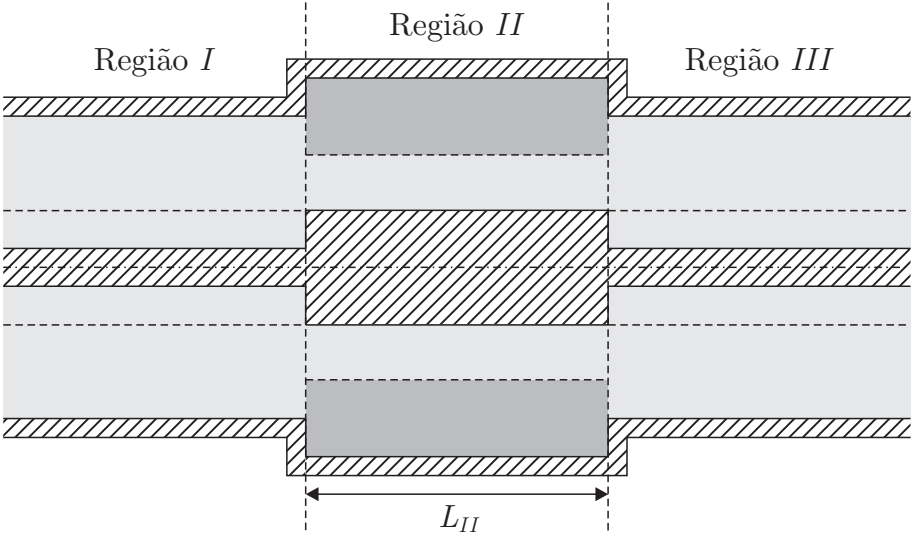


Figura 5.4: Estrutura coaxial com material com perdas.

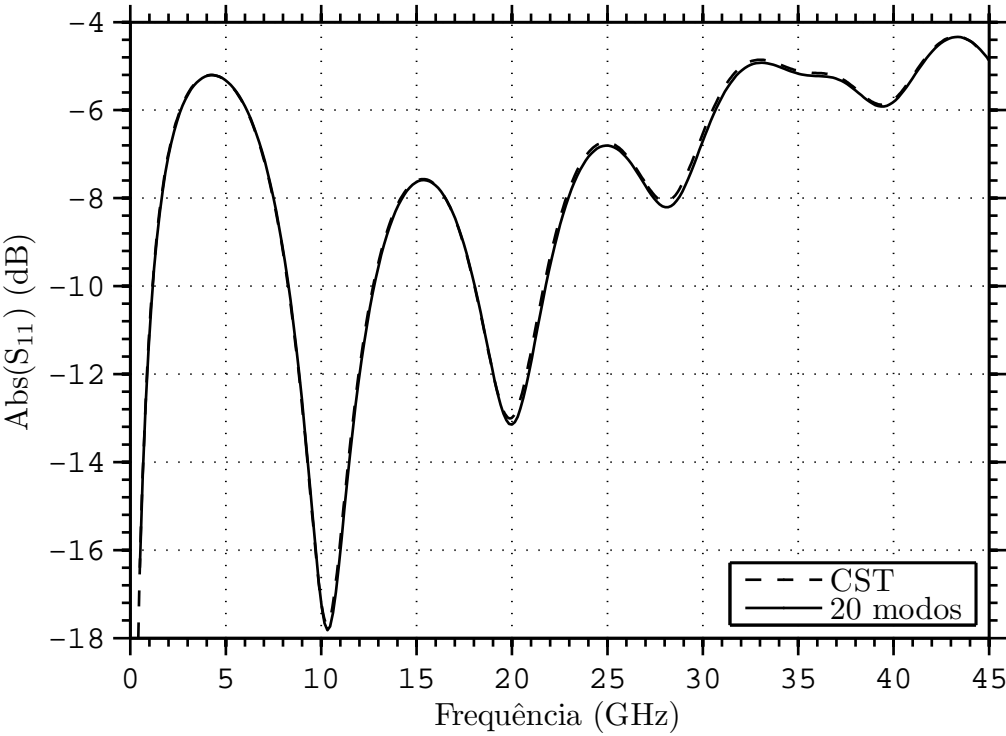


Figura 5.5: Comparação entre a perda de retorno simulada no CST com os valores obtidos pelo MMT para a configuração dada na Tabela 5.2. Número de células da grade do CST: 32371200.



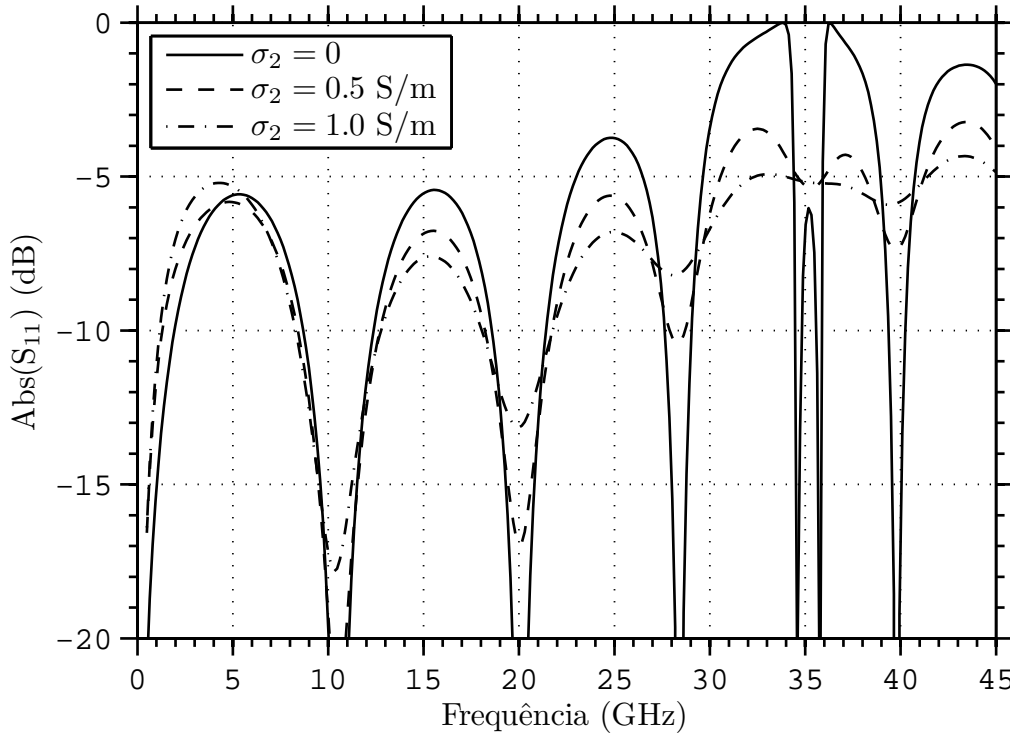


Figura 5.6: Comparação entre a perda de retorno para a configuração dada na Tabela 5.2, em que a condutividade da camada 2 da região II  $\sigma_2$  é variada. Foram usados 20 modos em todas as regiões e configurações de condutividade.

sua presença deve ser reconhecida e incluída sempre aos pares conjugados na análise de descontinuidades em guias de ondas. Em geral, na literatura as *complex waves* são encontradas em modos híbridos. Nessa Dissertação, o MMT implementado necessitou apenas de modos  $TM^z$  puros, sendo que não foram encontradas *complex waves* nos modos sem simetria azimutal ( $n = 0$ ).

As *complex waves* são peculiares: para um par de *complex waves*, com constantes de propagação  $\gamma_2 = \alpha \pm j\beta$ , tem-se que a onda associada a  $\gamma_1$  se propaga para  $+z$ ; uma *forward wave*; ao passo que  $\gamma_2$  se propaga para  $-z$ ; ou seja, é uma *backward wave*. Assim, a potência que se propaga para frente com  $\gamma_1$  é compensada pela potência que se propaga para atrás com  $\gamma_2$ . É interessante observar que  $\gamma_2$  é obtido através do problema de contorno *forward*. Por causa disso, algumas referências chamam  $\gamma_2$  de *complex backward wave*. Apesar de tudo, tanto  $\gamma_1$  como  $\gamma_2$  satisfazem a condição de radiação, ou seja,  $\alpha > 0$ .

Em estruturas não homogêneas não confinadas, por exemplo, o guia coaxial da Fig. 2.2 com o raio  $c = \infty$ , ocorre outro tipo de modo associado a radiação da região guiada para a camada não confinada. Para guias não confinados, a expansão modal só é completa com a soma dos campos dos modos discretos (ou guiados) com os campos dos modos radiantes (ou contínuos). Por exemplo, o campo elétrico transversal pode ser expandido como [39, p. 334],

[40]

$$E = \sum_{m=0}^{\infty} a_m e_{gm} e^{-jk_{gz}z} + \int_0^{\infty} q(k_{lz}) e_l(k_{lz}) e^{-jk_{lz}z} dk_{lz}, \quad (5-2)$$

em que  $e_{gm}$  e  $e_l$  são os campos normalizados para o  $m$ -ésimo modo guiado e o modo radiante, respectivamente. Os valores  $a_m$  e  $q(k_{lz})$  são respectivamente as amplitudes associadas aos campos a serem expandidos.

Alguns modos discretos, que são encontrados pela equação característica do problema de contorno em guias não confinados, não têm características de modos guiados. A literatura internacional denomina estes modos como *leak waves* ou *leak modes*.

Tipicamente a contribuição de uma *leak wave* decresce exponencialmente, e sua contribuição em termos de campos distante é por esse motivo desprezível a menos que o autovalor da *leak wave* esteja situado muito próximo ao eixo real de  $k_\rho$  [41, p. 542].

### 5.3

#### MMT em Sistemas de Telemetria de Poços Petrolíferos

A exploração de petróleo em águas ultra-profundas requer o desenvolvimento de novas tecnologias para viabilizar a utilização de novos campos de petróleo. Nessas condições, os poços contém dutos que são muito longos, como o Campo petrolífero de Tupi, que está localizado na bacia de Santos, no Rio de Janeiro [15].

As referências [42] e [43] descrevem sistemas de comunicação e métodos para aplicação em poços no solo, para o caso particular em que o poço é confinado em um tubo de metal condutor. Este sistema de comunicação é montado dentro do tubo, na região chamada *annulus*, preenchido com lama na ilustração da Fig. 5.7. O *annulus* em geral é um meio multifásico, formado por trechos com lama, água, petróleo, ar, gás, entre outros. Essa região é limitada pelo tubo central da coluna de produção (tubo interno) até a parede do condutor que envolve o poço (tubo externo). Os benefícios da comunicação sem fio no interior de um poço de petróleo são muitos, como destacado em [15]. A tecnologia clássica faz uso conexões com cabos elétricos e umbilicais para poços ultra-profundos apresenta aspectos críticos, podendo se tornar inviável [15].

Esta seção apresenta o modelamento dos campos eletromagnéticos entre uma estação de superfície com sensores e atuadores no fundo de uma coluna de produção em poço de petróleo. A vista em corte de um poço de produção de petróleo utilizando telemetria sem fio é mostrado na Fig. 5.7. Nesse sistema, antenas transmissoras e receptoras são montadas dentro do *annulus*, que

	Diâmetro int. (cm)	Espessura (cm)	$\sigma$ (S/m)	$\mu_r$	$\epsilon_r$
Tubo interno	7,30250	0,6350	$4,50 \times 10^6$	500,0	1,0
Tubo externo	13,970	0,95250	$4,50 \times 10^6$	500,0	1,0
Óleo			2,9850	1,0	14,0
Lama			$5,0 \times 10^{-4}$	1,0	14,0
Formação			$3,50 \times 10^{-2}$	1,0	1,0

Tabela 5.3: Dimensões e parâmetros dos guias usados na simulação da Fig. 5.4.

geralmente é preenchido por meios com perdas. O tipo de fonte que será utilizado gerará campos com dependência azimutal  $n = 0$ .

As dimensões e parâmetros de um poço como o mostrado na Fig. 5.7 estão listadas na Tabela 5.3. Esses valores foram obtidos em [44], e correspondem a uma plataforma de teste. Simula-se os um guia com 5 camadas radiais, formado por: um tubo interno preenchido com óleo, um tubo externo preenchido com lama, e uma formação de solo, de acordo com os parâmetros da Tabela 5.3. Os autovalores para o modo  $TM^z$  obtido pelo algoritmo descrito no Apêndice E são mostrados na Fig. 5.8 para 10 Hz. Compara-se esses autovalores  $k_{\rho 1}$  com os obtidos para um guia circular (quando a condutividade do tubo interno é feita  $\sigma = \infty$ ), e para um guia coaxial (quando a condutividade do tubo interno e externo são feitas  $\sigma = \infty$ ). Como o número de onda da camada 1 (óleo) é muito pequeno ( $k_1 = 0,0109 - j0,0109$ ), e como  $\gamma = jk_z = j(k_1^2 - k_{\rho 1}^2)^{1/2}$ , a posição das constantes de propagação no plano  $\gamma$  são praticamente iguais as do plano  $k_{\rho 1}$ . Assim,  $\alpha \approx \text{Re}(k_{\rho 1})$  e  $\beta \approx \text{Im}(k_{\rho 1})$ .

Os modos guiados no poço estão distribuídos ao longo do eixo real. Formalmente eles não estão exatamente sobre o eixo real. Verifica-se que os modos guiados são muito parecidos com os modos que ocorrem em um guia circular e em um coaxial, como destaca a Fig. 5.8. Um *zoom* em torno do eixo real revela que os modos mais parecido com os do guia circular sofrem maior atenuação que os modos semelhantes aos do guia coaxial, como é mostrado na Fig. 5.9.

É importante mencionar que, mesmo podendo se propagar, os modos semelhantes aos do guia circular (cujos campos se concentram no tubo interno) não são excitados, pois as fontes estão no *annulus*.

A mesma estrutura de poço descrita na Tabela 5.3 é avaliada para diversas configurações de condutividade elétrica dos tubos. Os resultados dos primeiros autovalores estão mostrados na Fig. 5.10. Verifica-se que com o aumento da condutividade os *branch points* se afastam da origem, e os modos *leaky* são mais atenuados. Os modos guiados, por sua vez, se aproximam do eixo real com o aumento da condutividade elétrica dos tubos.

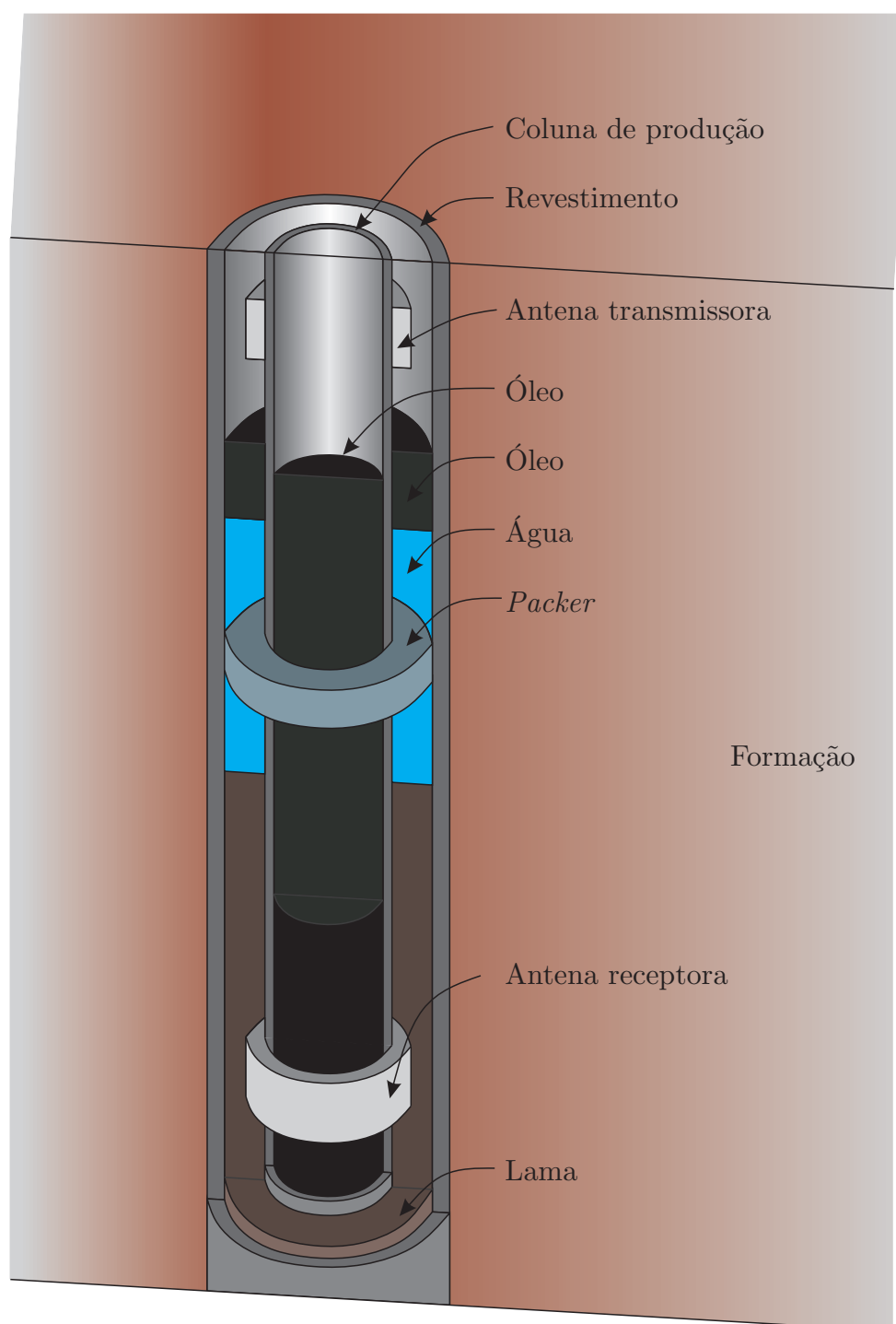


Figura 5.7: Vista em corte de um poço de produção de petróleo utilizando telemetria sem fio.

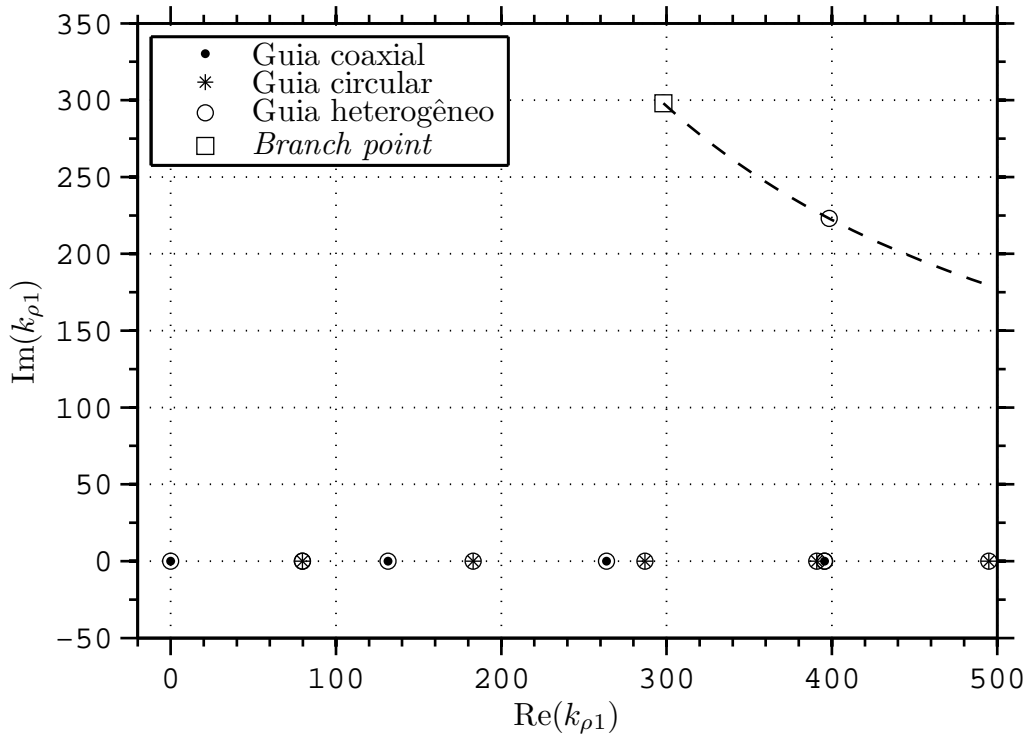


Figura 5.8: Autovalores  $k_{\rho 1}^{TM}$  para a estrutura de um poço de petróleo. Os resultados são para a frequência de 10 Hz, considerando-se os parâmetros listados na Tabela 5.3. O *branch cut*  $\text{Im}(k_{\rho 2})=0$  é representado pela linha tracejada.

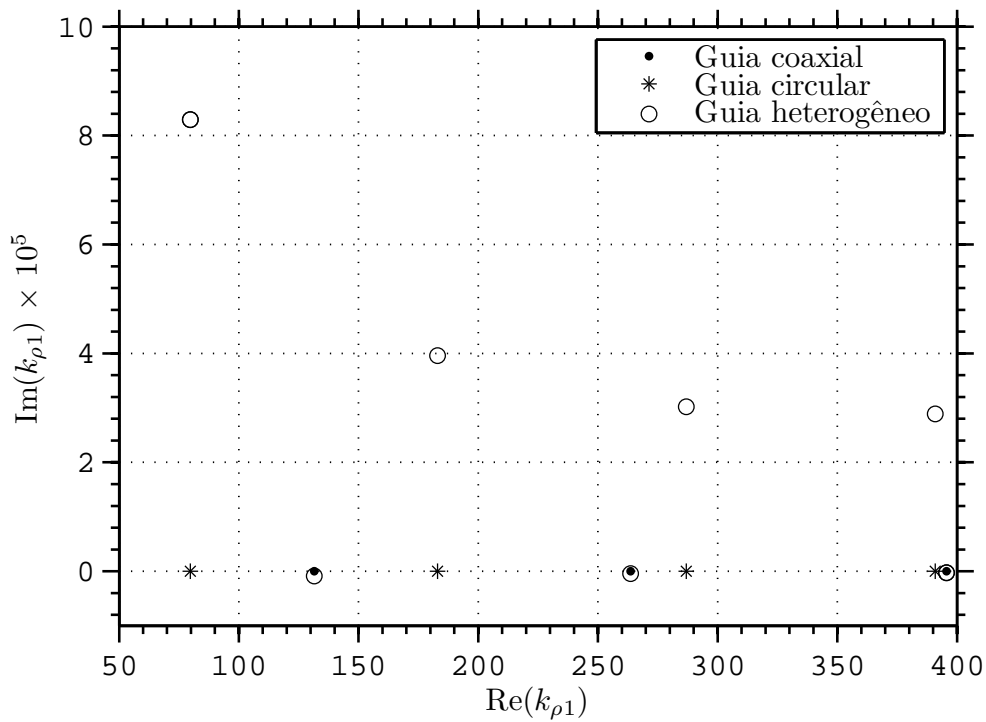


Figura 5.9: *Zoom* nos arredores de alguns modos guiados da Fig. 5.8. Compare-se os resultados com os autovalores do guia circular (tubo interno) e coaxial (tubo interno + externo).

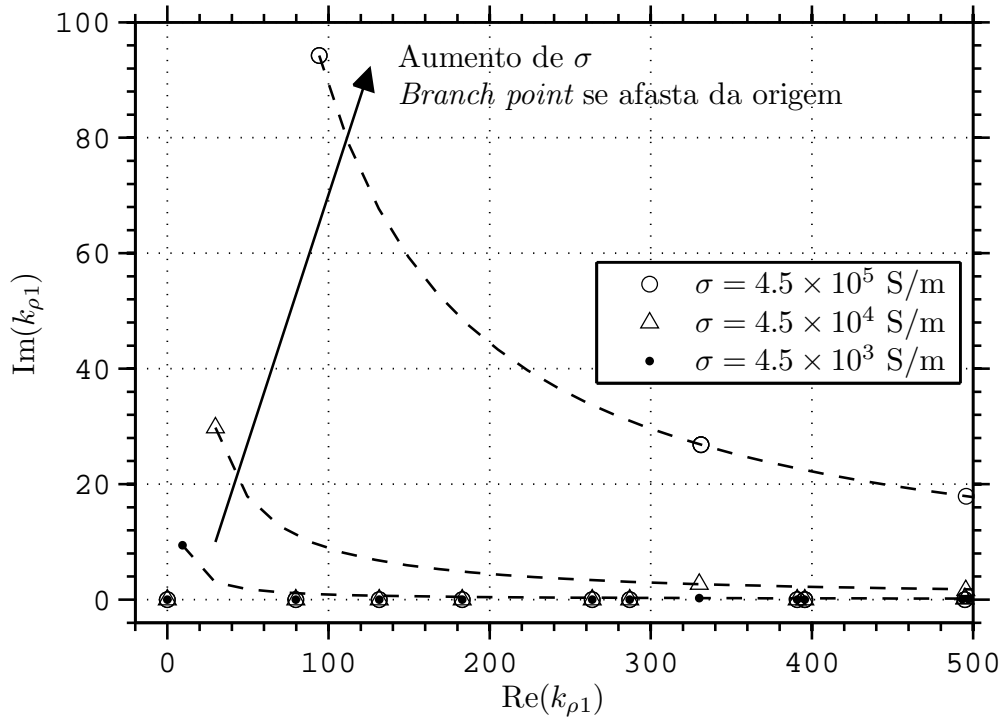


Figura 5.10: Autovalores  $TM^z$  do guia descrito na Tabela 5.3 para diversas configurações de condutividade dos tubos. Os *branch cuts* de cada caso são representados por linhas tracejadas.

As observações anteriores sugerem que o poço da Fig. 5.7 e características da Tabela 5.3 pode ser modelado de forma aproximada por um guia coaxial preenchido com lama. A seguir é realizada uma análise detalhada sobre os autovalores dos modos  $TM^z$  que podem existir no poço e sua equivalência com o modelo de guia coaxial.

### 5.3.1

#### Modelo Aproximado

O poço mostrado na Fig. 5.7 possui a camada da formação (solo) que se estende desde o tubo externo até o infinito. Nesta configuração, as antenas de transmissão e recepção estão na região do *annulus* e portanto, é de se esperar que os campos eletromagnéticos confinados nesta região sejam mais intensos do que os capos no tubo interno (coluna de produção) ou mesmo na formação.

Os modos no guia cilíndrico, mesmo que excitados, estariam abaixo do corte – seriam evanescentes – e são severamente atenuados. Além disso, estando a fonte na região do *annulus*, estes modos seriam pouco excitados devido a presença do tubo metálico interno entre a região circular e as fontes.

O poço mostrado da Fig. 5.7 foi simulado usando o algoritmo descrito no Apêndice E, e foi modelado como um guia formado pelas seguintes camadas:

1) óleo do interior do tubo interno, 2) metal condutor para modelar o tubo interno, 3) ar, água salgada, óleo ou lama para modelar o preenchimento do *annulus*, 4) metal condutor para modelar o tubo externo, e 5) solo para modelar a formação ao redor do poço. Os parâmetros eletromagnéticos empregados são listados na Tabela 5.3, e adicionalmente, a água salgada foi caracterizada por  $\sigma = 0,35$  e  $\epsilon_r = \mu_r = 1,0$ .

Para frequências elevadas os tubos condutores se comportam como um CEP. Devido a isso, a seguir os resultados apresentados são para a mais baixa frequência avaliada, ou seja, 1,0 Hz. Quando o *annulus* é preenchido com ar, os autovalores  $TM^z$  obtidos são os mostrados na Fig. 5.11. Adicionalmente, os modos para um guia coaxial (confinado com paredes de CEP) são mostrados, junto com os obtidos para o guia circular (confinado com paredes de CEP). Verifica-se similaridade entre a posição dos autovalores para os caso dos guias confinados com relação aos autovalores do guia com 5 camadas quando o *annulus* é preenchido com ar.

Um outro caso, em que o *annulus* é preenchido com água salgada é avaliado. Os autovalores  $TM^z$  obtidos são os mostrados na Fig. 5.12. Novamente, verifica-se similaridade entre a posição dos autovalores para os caso dos guias confinados com relação aos autovalores do guia com 5 camadas quando o *annulus* é preenchido com água salgada. Mais dois casos são avaliados: um em que o *annulus* é preenchido com lama, e outro cujo preenchimento é feito com óleo. Os resultados obtidos são mostrados nas figuras 5.13 e 5.14. Da mesma forma que para o preenchimento com ar e com água salgada, verifica-se que a posição dos autovalores dos guias coaxial e circular são similares aos autovalores do guia com 5 camadas.

Os modos de propagação mais afastados dos eixos que são mostrados nas figuras anteriores estão distribuídos no *branch cut*  $\text{Im}(k_{\rho 2})=0$  e ocorrem devido ao fato dos cilindros condutores do poço terem condutividade finita. Esses modos são severamente atenuados. Os resultados evidenciam que o poço pode ser modelado de forma apropriada por meio de um guia coaxial.

A telemetria sem fio em poços de petróleo foi abordada em [42], em que é sugerido o poço de petróleo pode ser modelado como um guia coaxial, com preenchimento homogêneo de lama com baixas perdas. Na referência [45] são mostrados resultados de medições de compostos baseados em lama e óleo, que podem ser usadas dentro da região do *annulus* em poços de petróleo. Os valores de resistividade elétrica e permissividade elétrica relativa medidos em [45] são mostrados nas figuras 5.15 e 5.16.

Considera-se a região do *annulus* limitada por  $\rho = 5,0$  cm e  $\rho = 10,0$  cm, como proposto em [46]. Para um poço com 1000 m preenchido com os materiais

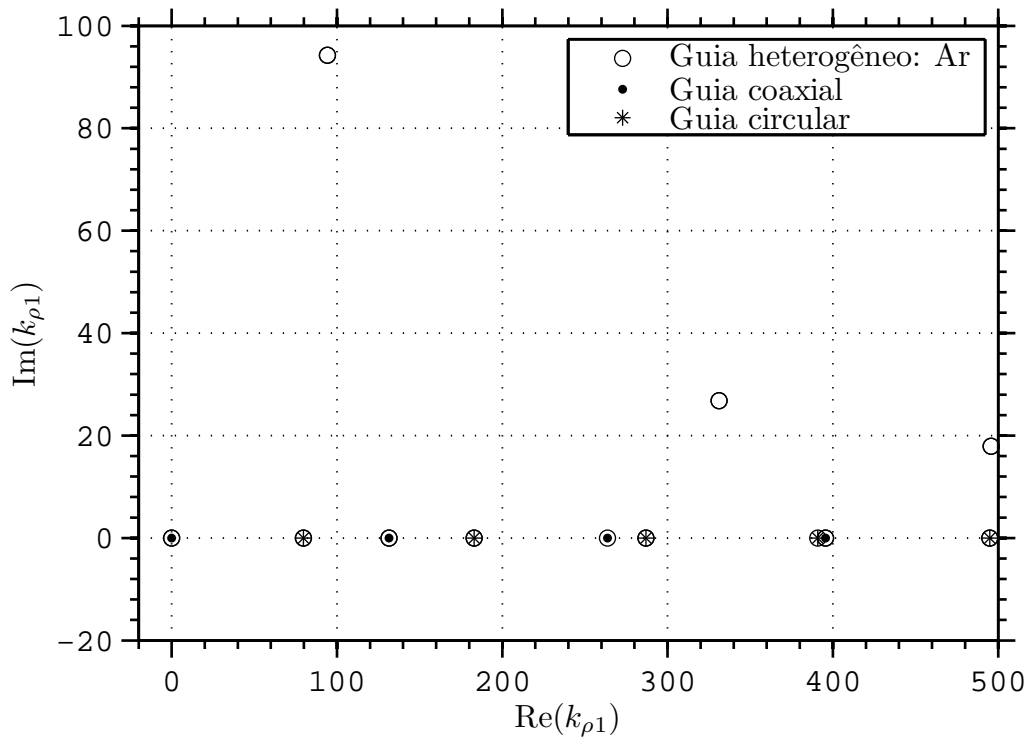


Figura 5.11: Autovalores para várias configurações de guias de onda em 1 Hz.

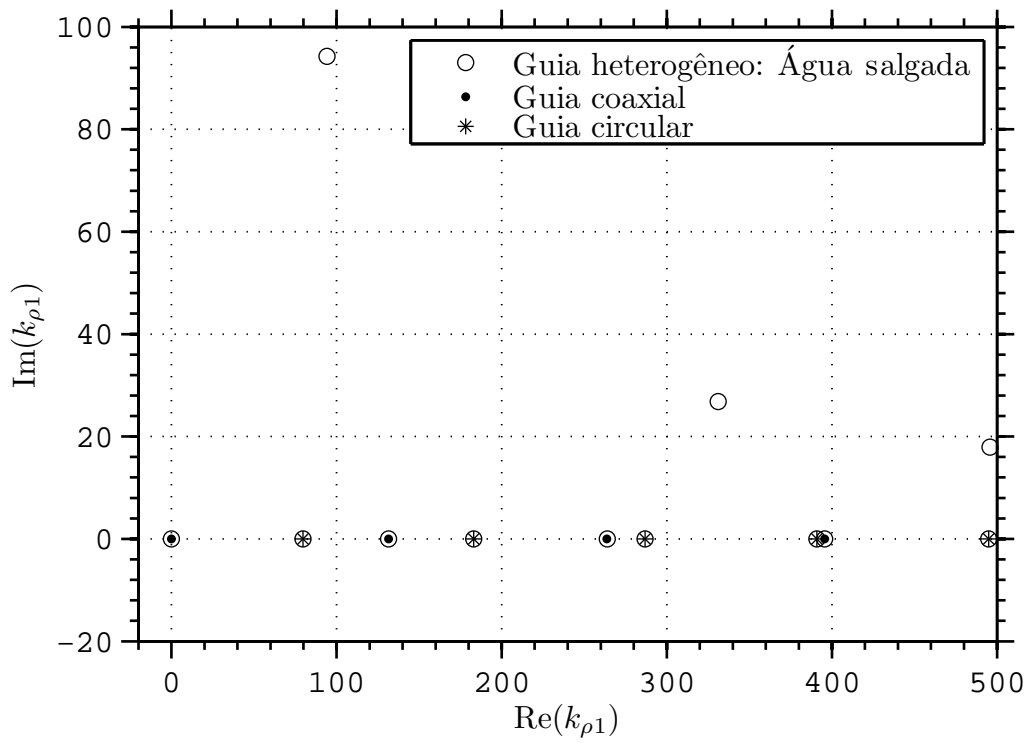


Figura 5.12: Autovalores para várias configurações de guias de onda em 1 Hz.



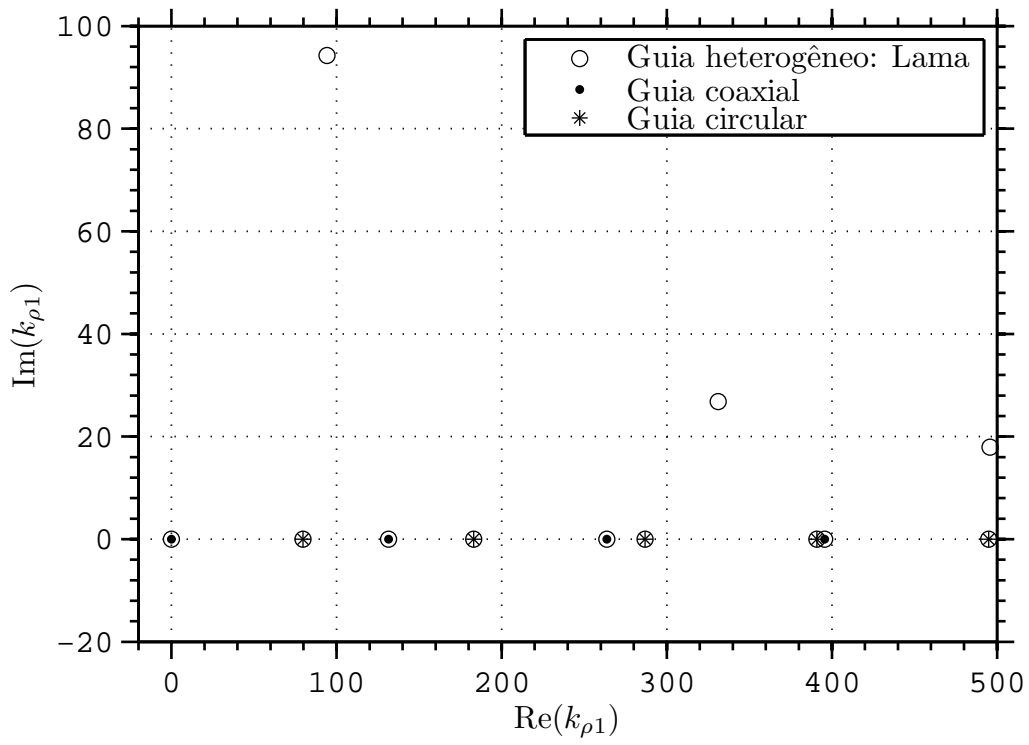


Figura 5.13: Autovalores para várias configurações de guias de onda em 1 Hz.

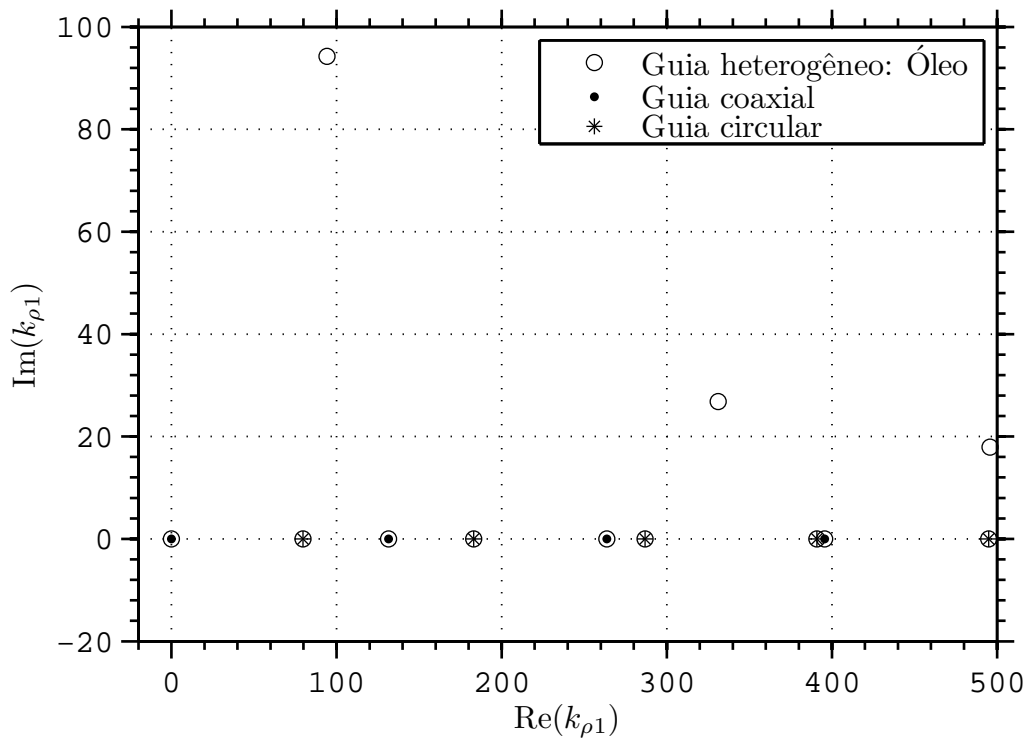


Figura 5.14: Autovalores para várias configurações de guias de onda em 1 Hz.

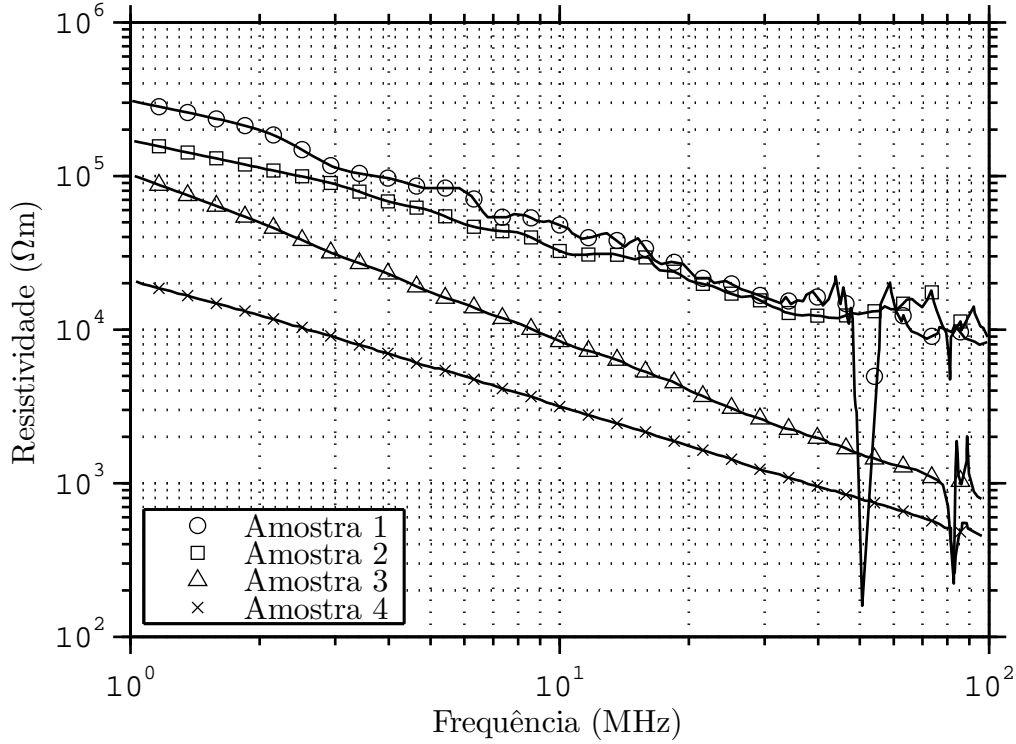


Figura 5.15: Resistividade de 4 amostras de lama medidas em [45].

das amostras 1 a 4, calculou-se o coeficiente de transmissão mostrado na Fig. 5.17. Foram usados 20 modos no MMT para modelar a seção de guia coaxial equivalente ao poço, contudo, os resultados obtidos com apenas 1 modo são muito similares aos mostrados na Fig. 5.17. Isso se deve ao fato de apenas o modo TEM ser propagante, e adicionalmente, ao fato do guia não ter descontinuidades na seção transversal.

O poço modelado por [46] considera um caso bastante otimista, em que as perdas da lama são muito baixas mesmo para frequências da ordem de Megahertz. Da Fig. 5.17 verifica-se que a atenuação do campo elétrico em um poço com 1000 m de extensão é de apenas  $\sim 2$  dB para a amostra 1 em 1,0 MHz.

### 5.3.2

#### Modelo de Packer para Baixas Frequência

Para modelar os packers, uma aproximação de corrente contínua pode ser usada quando a frequência é muito baixa; em que assume-se que a corrente deve se espalhar uniformemente sobre o packer. Neste caso, a resistência do packer é dada por

$$R_p = \frac{\ell_p}{\sigma A_t}, \quad (5-3)$$

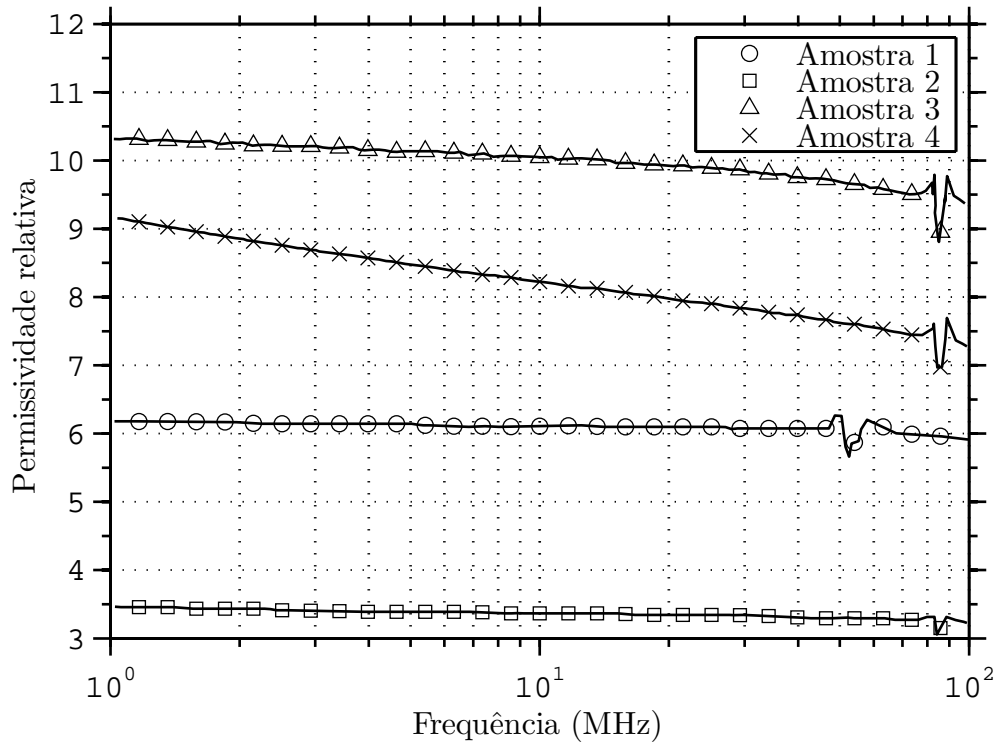


Figura 5.16: Permissividade relativa de 4 amostras de lama medidas em [45].

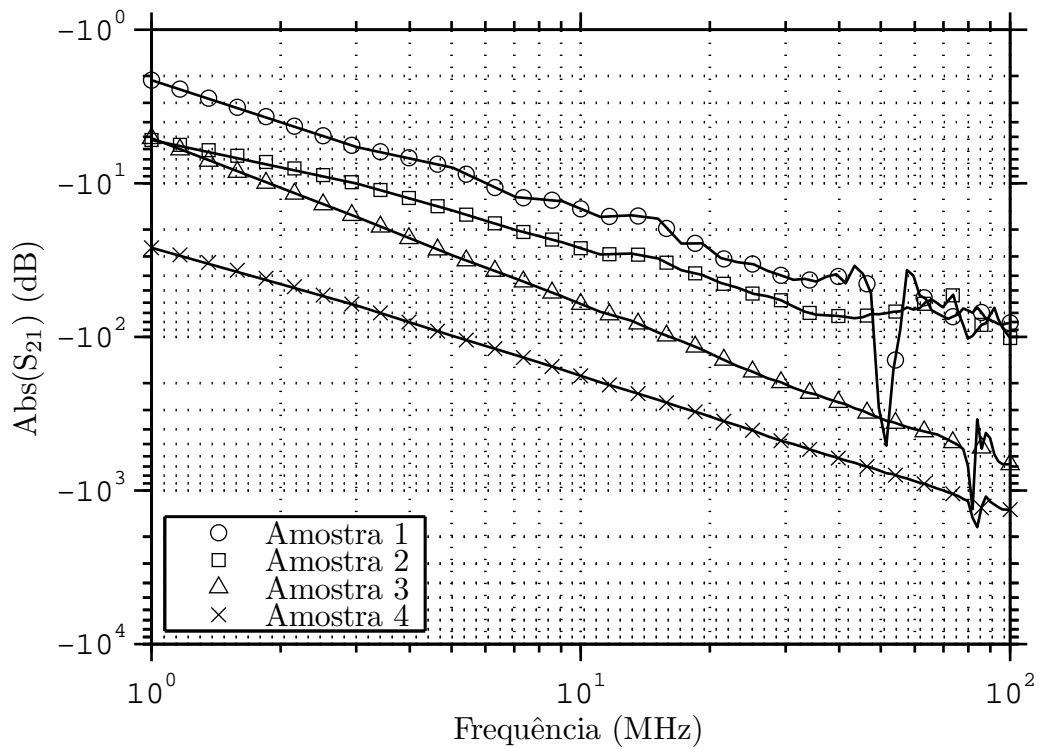


Figura 5.17: Coeficiente de transmissão em decibel para um poço coaxial alimentado pelo modo fundamental em 1000 m. O poço é considerado um guia coaxial homogêneo, preenchido pelos materiais das 4 amostras de lama.

	$\epsilon_r$	$Z_0$ ( $\Omega$ )	$S_{21}^p$ (dB)
Ar	1,0	30,1255	-145,7256
Água salgada	1,0	30,1255	-145,7256
Óleo	14,0	8.0514	-134,2643
Lama	14,0	8.0514	-134,2643

Tabela 5.4: Relação entre permissividade, impedância intrínseca do guia coaxial, e coeficiente de transmissão.

em que  $\ell$  é o comprimento axial do packer e  $A_t$  é a área da seção transversal do packer. Fazendo  $r_1$  e  $r_2$  os raios que definem a seção transversal do packer, pode-se escrever a impedância do packer como

$$Z_p = \frac{\ell_p}{\sigma\pi(r_2^2 - r_1^2)}, \quad (5-4)$$

e portanto os coeficientes de reflexão e transmissão visto por uma impedância  $Z_0$  na direção do packer são

$$S_{11}^p = \frac{Z_0 - Z_p}{Z_0 + Z_p}, \text{ e} \quad (5-5)$$

$$S_{21}^p = \frac{2Z_p}{Z_p + Z_0}. \quad (5-6)$$

A impedância característica de uma linha de transmissão coaxial sem perdas com diâmetros interno  $d$  e externo  $D$  é dada por

$$Z_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \log \frac{D}{d} \approx \frac{60}{\sqrt{\epsilon_r}} \log \frac{D}{d}. \quad (5-7)$$

Dessa forma, a matriz de espalhamento do packer pode ser escrita como

$$\bar{\bar{S}}^p = \begin{bmatrix} S_{11}^p & S_{21}^p \\ S_{21}^p & S_{11}^p \end{bmatrix}. \quad (5-8)$$

Usando os parâmetros eletromagnéticos do poço e dos materiais utilizados anteriormente, pode-se determinar

$$Z_p = 7,7915 \times 10^{-7} \Omega, \text{ e} \quad (5-9)$$

$$Z_0 = \frac{30,125}{\sqrt{\epsilon_r}} \Omega. \quad (5-10)$$

Usando as equações precedentes, pode-se estabelecer relações entre a permissividade elétrica e a impedância intrínseca do guia coaxial que precede o packer, em relação ao coeficiente de transmissão devido ao packer, como é listado na Tab. 5.4. A inclusão de apenas um packer em um trecho do guia coaxial implica em uma atenuação de no mínimo 134 dB.

## 5.3.3

## Modelagem de Poço Utilizando o MMT

A partir das considerações anteriores, o MMT pode ser utilizado para analisar o enlace de um sistema de telemetria em um poço de petróleo representado por um guia coaxial cujo preenchimento seja o mesmo da região do *annulus* do poço. Sem perda de generalidade, assume-se que a antena transmissora excite apenas o modo fundamental, e que a antena receptora responda apenas ao campo do modo fundamental.<sup>2</sup> A seguir alguns exemplos são explorados.

O coeficiente de transmissão em função da frequência para poços com 100 m (distância entre as antenas de transmissão e recepção) foi simulado para poços preenchidos com lama, água salgada e óleo, cujos resultados são mostrados na Fig. 5.18. Como era de se esperar, a atenuação é maior em materiais com maior condutividade elétrica.

Um segundo exemplo avaliado explora um poço com dois trechos, em que cada trecho é formado por um matricial diferente do outro. Para poços com 200 m, obteve-se os resultados que são mostrados nas figuras 5.19 e 5.20. A partir de curvas como estas é possível determinar uma frequência de operação

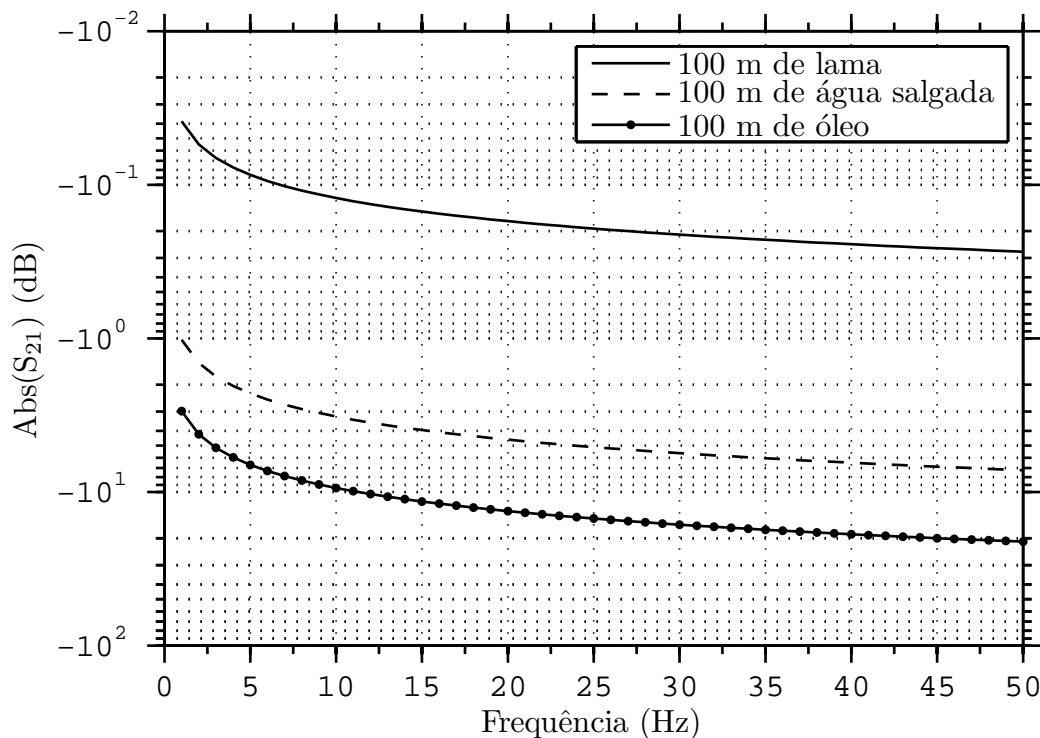


Figura 5.18: Coeficiente de transmissão em função da frequência para poços com 100 m.

<sup>2</sup>Uma modelagem mais realista, considerando a excitação e recepção de infinitos modos, é analisada no Apêndice G.

na qual haja a mínima atenuação. Por exemplo, 2,5 Hz para o poço com 100 m de ar e 100 m de óleo.

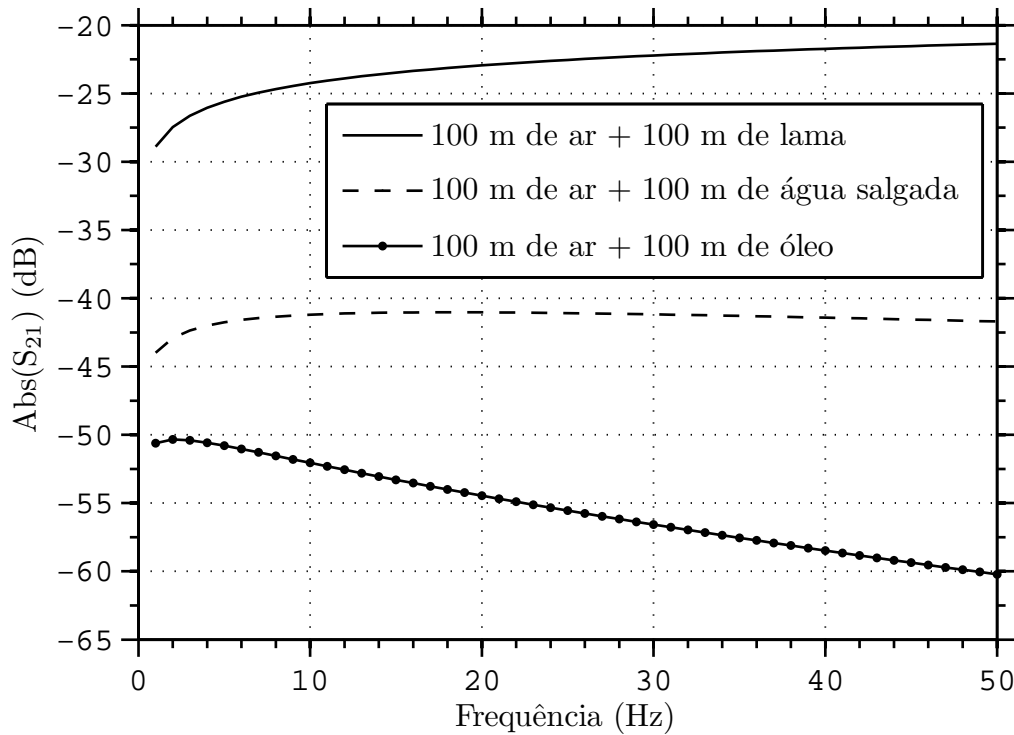


Figura 5.19: Coeficiente de transmissão em função da frequência para poços com 200 m e com dois preenchimentos.

Um caso de um poço composto por três trechos: 500 m de ar, 500 m de lama, e 100 m de óleo é simulado. Os resultados do coeficiente de transmissão em função da frequência para este poço são mostrados na Fig. 5.21. A princípio, a utilizar a frequência de 2,5 Hz resulta na menor atenuação. Caso exista um packer neste poço, essa influencia pode ser considerada somando-se a atenuação do packer de acordo com a Tab. 5.4.

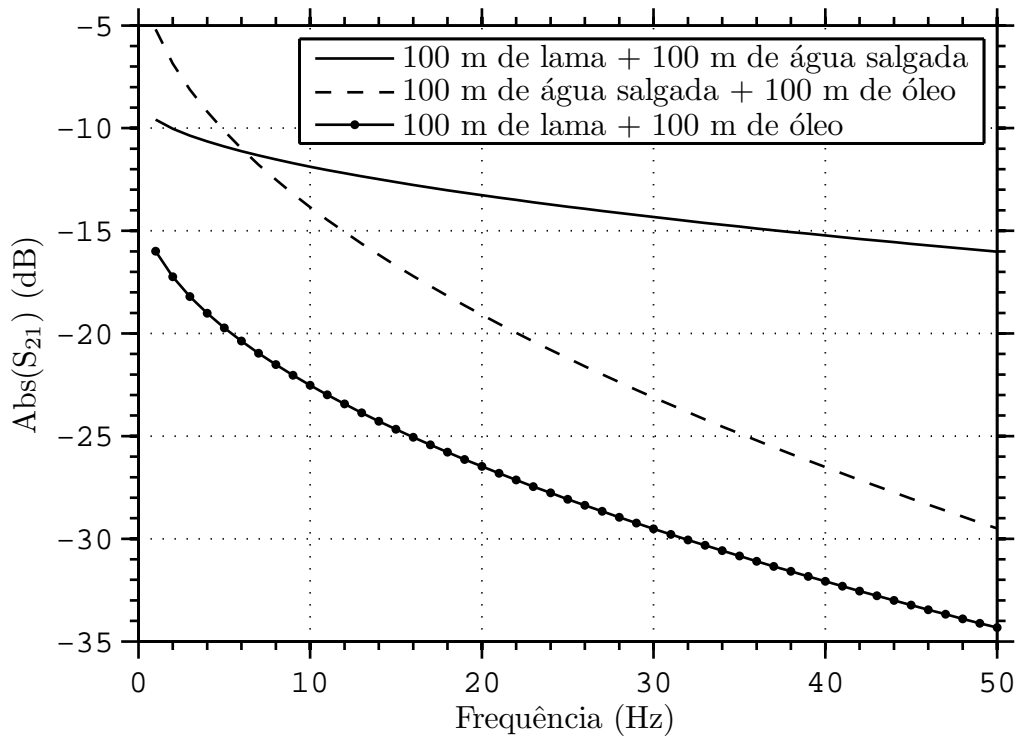


Figura 5.20: Coeficiente de transmissão em função da frequência para poços com 200 m e com dois preenchimentos.

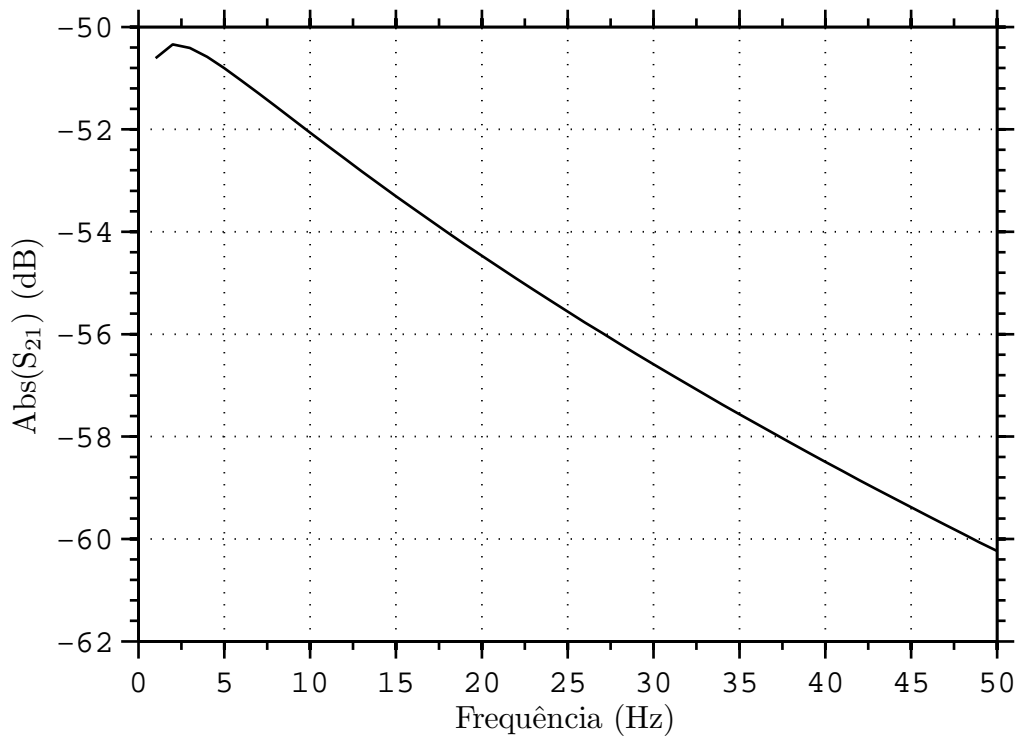


Figura 5.21: Coeficiente de transmissão em função da frequência para um poço formado por 500 m de ar, 500 m de lama, e 100 m de óleo.

Nesta Dissertação o método do casamento de modos foi formulado para descontinuidades entre guias de ondas coaxiais com duplo carregamento dielétrico radial.

A expansão modal dos campos eletromagnéticos em um guia coaxial com duas camadas radiais foi detalhadamente deduzida nos capítulos iniciais, e posteriormente a formulação foi generalizada para guias com multicamadas radiais no Anexo E. Para o guia com duas camadas radiais alguns fenômenos interessantes foram observados:

- O guia coaxial não homogêneo só admite modos puros quando não se tem dependência azimutal dos campos eletromagnéticos em termos de  $\phi$ . Para guias homogêneos, os modos puros podem existir mesmo em campos com dependência em termos de  $\phi$ .
- O modo  $TM_{00}$  é sempre o modo fundamental em guias coaxiais. Quando o guia é homogêneo, este modo se degenera em um modo TEM. Quando o guia é não homogêneo, o modo fundamental  $TM_{00}$  apresenta uma componente de campo  $E_z$ , que se torna zero a medida que a heterogeneidade diminui.
- O modo  $TM_{00}$  é sempre uma *slow wave*. A velocidade de fase do modo fundamental do guia coaxial não homogêneo é sempre menor que a velocidade de fase do meio com maior permissividade elétrica.
- A potência dos modos propagantes se concentra na camada com maior permissividade elétrica.

As constantes de propagação para guias homogêneos e não homogêneos sem perdas foram determinadas a partir da busca dos zeros da equação característica para o modo TM. Para os casos com perdas, o método do *winding number* foi empregado. Esse método garante que todos os autovalores possam ser encontrados. Uma alternativa para meios com perdas pequenas foi utilizada: o uso dos autovalores do caso sem perdas como valor inicial aproximado para a solução da equação característica com perdas. O uso da última abordagem é bastante vantajosa em termos de consumo de tempo computacional, contudo, se restringe a meio com perdas pequenas.

Como aplicação da formulação, implementou-se um algoritmo em FORTRAN. A formulação e algoritmo foram validadas através de informações numéricas disponíveis na literatura. Devido a ausência de bibliografias tratando



descontinuidades em guias coaxiais não homogêneos, o *software* CST MWS foi usado para validar a formulação. A Dissertação não focou na eficiência computacional, ou comparações entre métodos, mas é importante mencionar que nas simulações pelo CST o tempo computacional foi elevado.

O algoritmo do MMT implementado, mesmo para meios não homogêneos com perdas em múltiplas cascatas de guia de onda se mostrou muito mais rápido que o CST. Isso se deve ao fato de todas integrais de acoplamento modal das matrizes  $\bar{\bar{P}}$ ,  $\bar{\bar{Q}}$  e  $\bar{\bar{R}}$  serem analíticas. Deve ser observado que a ferramenta CST MWS é muito mais versátil e usando uma técnica de diferenças finitas, por exemplo, pode modelar geometrias complexas, as quais as função de ondas dos campos não são conhecidas, representando um empecilho para a aplicação do MMT.

O algoritmo implementado em FORTRAN foi acoplado ao programa de MoM dos autores de [13], permitindo uma análise rigorosa de estruturas radiantes. Esta integração permitiu avaliar a influência de apoios dielétricos usados na corneta construída pelos autores de [12] e [13].

Através de uma análise paramétrica, ficou claro que os apoios dielétricos usados no acoplador da corneta estudada influenciam bastante a perda de retorno do dispositivo. Contudo, foi verificado que essa influência é dominada pelo descasamento de impedância da corneta que segue o acoplador. Apesar de tudo, os valores obtidos pela formulação do MMT apresentaram boa concordância em comparação com os valores de perda de retorno da corneta medida.

A formulação foi aplicada na otimização de estruturas de acoplamento e cornetas radiantes com carregamento dielétrico não homogêneo. O preenchimento não homogêneo é empregado nas estruturas radiantes a fim de minimizar a perda de retorno, e principalmente controlar e melhorar o formato do diagrama de radiação para operação em banda larga. Os resultados obtidos são preliminares e basicamente didáticos: foi possível modelar o diagrama de radiação de uma corneta coaxial com a inclusão de uma capa dielétrica, entretanto, o controle do diagrama em banda larga e a baixas perdas de retorno ainda é um desafio.

A formulação desenvolvida nesta Dissertação foi utilizada para analisar a propagação eletromagnética em sistemas de telemetria sem fio para poços de petróleo. Poços de petróleo foram modelados de forma aproximada, e conclusões preliminares indicam que configurações realistas podem apresentar atenuação elevada quando são usados *packers* metálicos que ocupam toda seção coaxial do poço. Duas possibilidades de telemetria encontradas na literatura foram abordadas: uma operando na faixa de 1–100 MHz, e outra em frequências

de 1–50 Hz. A operação em faixas de frequências baixas é mais promissora, principalmente devido a menor atenuação.

O MMT é uma solução bastante adequada e conveniente para modelar a propagação em poços em relação a outros métodos. Os poços em geral têm trecho longos formados pela mesma seção transversal, que podem ser modeladas por uma matriz de espalhamento. Cada trecho do poço pode ser modelado por sua respectiva matriz de espalhamento, indiferente do comprimento de cada trecho. Com o cascadeamento de todas estas matrizes de espalhamento pode obter facilmente a atenuação do enlace dentro do poço. Como as frequências de operação dos poços devem ser baixas – para limitar a atenuação – geralmente apenas 1 modo é propagante. Dessa forma, um número reduzido de modos é necessário para a convergência do MMT, implicando em um tempo computacional baixo para a aplicação do MMT.

A contribuição científica deste trabalho diz respeito ao emprego de uma formulação do MMT para guias coaxiais com carregamento dielétrico não homogêneo cujos autovalores são determinados por expressões analíticas. Utilizando a formulação descrita neste trabalho não é necessário recorrer a métodos de diferenças finitas para encontrar as constantes de propagação de um guia como o usado em [10]. Não foram encontradas publicações na literatura que empregassem o método do *winding number* para estruturas coaxiais preenchidas com dielétricos (homogêneos ou não homogêneos) com perdas. A formulação empregada nesta dissertação também é adequada para tratar descontinuidades entre junções de guias coaxial→coaxial, coaxial→circular, circular→coaxial e circular→circular excitadas pelo modo TEM. No MMT empregado em [11] estes tipos de descontinuidades também podiam ser analisadas, contudo, apenas para guias homogêneos e preenchidos com dielétricos sem perdas.

## Referências Bibliográficas

- [1] N. Marcuvitz, *Waveguide handbook*. IEE electromagnetic waves series, New York: McGraw-Hill, 1951.
- [2] J. Whinnery and H. Jamieson, “Equivalent circuits for discontinuities in transmission lines,” *Proceedings of the IRE*, vol. 32, pp. 98–114, Feb. 1944.
- [3] J. Whinnery, H. Jamieson, and T. Robbins, “Coaxial-line discontinuities,” *Proceedings of the IRE*, vol. 32, pp. 695–709, Nov. 1944.
- [4] N. Y. Zhu and F. Landstorfer, “An efficient fem formulation for rotationally symmetric coaxial waveguides,” *Microwave Theory and Techniques, IEEE Transactions on*, vol. 43, pp. 410–415, Feb. 1995.
- [5] F. D. Alves, “Aplicação do método dos elementos finitos na análise e projetos de estruturas coaxiais,” dissertação de mestrado, PUC-Rio, Rio de Janeiro, Nov. 2006.
- [6] R. Huang, D. Zhang, and L. Li, “Analysis of axially symmetrical coaxial discontinuity structures by using two-dimensional nonuniform finite-difference frequency domain method,” *Magnetics, IEEE Transactions on*, vol. 44, pp. 1170–1173, Jun. 2008.
- [7] G. L. James, “Analysis and design of te<sub>11</sub>-to-he<sub>11</sub> corrugated cylindrical waveguide mode converters,” *Microwave Theory and Techniques, IEEE Transactions on*, vol. 29, pp. 1059 – 1066, Oct. 1981.
- [8] L. C. da Silva, “Estruturas de acoplamento entre guias lisos e alimentadores corrugados circulares,” tech. rep., CETUC, PUC-Rio, Rio de Janeiro, Feb. 1986.
- [9] S. R. Zang, “Aplicação do método do casamento de modos na análise e no projeto de estruturas coaxiais,” dissertação de mestrado, PUC-Rio, Rio de Janeiro, Sep. 2005.
- [10] R. Huang and D. Zhang, “Application of mode matching method to analysis of axisymmetric coaxial discontinuity structures used in permeability and/or permittivity measurement,” *Progress In Electromagnetics Research*, vol. 67, pp. 205–230, 2007.
- [11] A. Orfanidis, G. Kyriacou, and J. Sahalos, “A mode-matching technique for the study of circular and coaxial waveguide discontinuities based on

- closed-form coupling integrals,” *Microwave Theory and Techniques, IEEE Transactions on*, vol. 48, no. 5, pp. 880–883, 2000.
- [12] J. R. Bergmann and F. J. S. Moreira, “An omnidirectional ade reflector antenna,” *Microwave and Optical Technology Letters*, vol. 40, no. 3, pp. 250–254, 2004.
- [13] S. R. Zang, *Síntese e Análise Rigorosa de Antenas Omnidirecionais de Duplo-Refletores: O Caso do Refletor Principal com Geratriz Circular*. Tese de doutorado, Puc-Rio, Rio de Janeiro, Feb. 2010.
- [14] R. F. Harrington, *Time-harmonic electromagnetic fields*. McGraw-Hill electrical and electronic engineering series, New York: McGraw-Hill, 1961.
- [15] J. L. A. Vidal, *Sistema inteligente de comunicação e controle sem fio baseado em materiais com memória de forma*. Tese de doutorado, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, Apr. 2010.
- [16] R. E. Beam and D. A. Dobson, “Duo-dielectric coaxial waveguide,” *Proc. N.E.C.*, vol. 8, pp. 301–312, 1952.
- [17] A. Puzella and A. Palevsky, “Electromagnetic dispersion of a coaxial waveguide with an arbitrary radial dielectric profile,” *Electron Devices, IEEE Transactions on*, vol. 35, pp. 2048–2051, Nov. 1988.
- [18] C. A. Balanis, *Advanced Engineering Electromagnetics*. New York: Wiley, 1989.
- [19] M. Abramowitz and I. A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions: With Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*. Applied mathematics series, New York: Dover Publications, 1964.
- [20] G. B. Arfken and H. J. Weber, *Mathematical Methods for Physicists, Fifth Edition*. San Diego, CA: Academic Press, 2001.
- [21] R. McIntosh and L. Turgeon, “Propagation along transversely inhomogeneous coaxial transmission lines (short papers),” *Microwave Theory and Techniques, IEEE Transactions on*, vol. 21, pp. 139–142, Mar. 1973.
- [22] CST, *CST MICROWAVE STUDIO*. [online], Dec. 2012. Available: <http://www.cst.com/Content/Products/MWS/Solvers.aspx>.
- [23] M. Solano, J. Ipina, A. Gomez, A. Prieto, A. Vegas, A. Omar, and G. Eleftheriades, “Comments on ‘some important properties of waveguide junction generalized scattering matrices in the context of the mode

- matching technique' [with reply],” *Microwave Theory and Techniques, IEEE Transactions on*, vol. 49, pp. 1663–1664, Sep. 2001.
- [24] G. Eleftheriades, A. Omar, L. Katehi, and G. Rebeiz, “Some important properties of waveguide junction generalized scattering matrices in the context of the mode matching technique,” *Microwave Theory and Techniques, IEEE Transactions on*, vol. 42, pp. 1896–1903, Oct. 1994.
- [25] V. H. Rumsey, “Reaction concept in electromagnetic theory,” *Phys. Rev.*, vol. 95, pp. 1705–1705, Sep. 1954.
- [26] A. Morini and T. Rozzi, “On the definition of the generalized scattering matrix of a lossless multiport,” *Microwave Theory and Techniques, IEEE Transactions on*, vol. 49, pp. 160–165, Jan. 2001.
- [27] M. Spiegel, *Mathematical handbook of formulas and tables*. Schaum’s outline series, New York: McGraw-Hill, 1968.
- [28] G. Watson, *A Treatise on the Theory of Bessel Functions*. Cambridge: Cambridge University Press, 1922.
- [29] H. K. Liu and T. L. Dong, “Propagation characteristics for periodic waveguide based on generalized conservation of complex power technique,” *Microwave Theory and Techniques, IEEE Transactions on*, vol. 54, pp. 3479–3485, Sep. 2006.
- [30] T. S. Bird, “Definition and misuse of return loss [report of the transactions editor-in-chief],” *Antennas and Propagation Magazine, IEEE*, vol. 51, pp. 166–167, Apr. 2009.
- [31] P. Rizzi, *Microwave Engineering: Passive Circuits*. Prentice-Hall International editions, Englewood Cliffs: Prentice Hall, 1988.
- [32] P. Clarricoats, “Theoretical comparison of crosspolar performance of dielectric and corrugated feeds,” *Electronics Letters*, vol. 17, pp. 317–318, Apr. 1981.
- [33] E. Lier, “A dielectric hybrid mode antenna feed: A simple alternative to the corrugated horn,” *Antennas and Propagation, IEEE Transactions on*, vol. 34, pp. 21–29, Jan. 1986.
- [34] J. G. Van Bladel, *Electromagnetic Fields*. IEEE Press Series on Electromagnetic Wave Theory, Hoboken, NJ: John Wiley & Sons, second ed., 2007.

- [35] P. Clarricoats, “Circular-waveguide backward-wave structures,” *Electrical Engineers, Proceedings of the Institution of*, vol. 110, pp. 261–270, Feb. 1963.
- [36] A. Omar and K. Schunemann, “Complex and backward-wave modes in inhomogeneously and anisotropically filled waveguides,” *Microwave Theory and Techniques, IEEE Transactions on*, vol. 35, pp. 268–275, Mar. 1987.
- [37] F. Fernandez, Y. Lu, J. Davies, and S. Zhu, “Finite element analysis of complex modes in inhomogeneous waveguides,” *Magnetics, IEEE Transactions on*, vol. 29, pp. 1601–1604, Mar. 1993.
- [38] S.-W. Chen, C. Chen, and K. Zaki, “Role of complex modes in modeling discontinuities of dielectric loaded waveguides,” in *Microwave Symposium Digest, 1988., IEEE MTT-S International*, pp. 207–210 vol.1, May. 1988.
- [39] W. Chew, *Waves and Fields in Inhomogenous Media*. IEEE Press Series on Electromagnetic Waves, New York: John Wiley & Sons, 1995.
- [40] S.-L. Lee, Y. Chung, L. Coldren, and N. Dagli, “On leaky mode approximations for modal expansion in multilayer open waveguides,” *Quantum Electronics, IEEE Journal of*, vol. 31, pp. 1790–1802, Oct. 1995.
- [41] L. Felsen and N. Marcuvitz, *Radiation and Scattering of Waves*. IEEE Press series on electromagnetic waves, New York: Oxford University Press, USA, 1994.
- [42] K. A. Safinya *et al.*, “System and method for communicating signals in a cased borehole having tubing.” U.S. Patent 4839644, Jun. 13, 1989.
- [43] H. J. Vinegar *et al.*, “Permanent downhole, wireless, two-way telemetry backbone using redundant repeaters.” U.S. Patent 6958704 B2, Oct. 25, 2005.
- [44] P. K. Vong, D. Rodger, and A. Marshall, “Modeling an electromagnetic telemetry system for signal transmission in oil fields,” *Magnetics, IEEE Transactions on*, vol. 41, pp. 2008–2011, may 2005.
- [45] P. A. Patil *et al.*, “Experimental study of electrical properties of oil-based mud in the frequency range from 1 to 100 mhz,” *SPE Drilling and Completion*, vol. 25, pp. 380–390, Sep. 2010.

- [46] A. A. L. Cunha, “Análise da propagação eletromagnética através de poços de petróleo com auxílio de técnicas de apoio à decisão,” dissertação de mestrado, PUC-Rio, Rio de Janeiro, Jun. 2011.
- [47] R. E. Collin, *Field Theory of Guided Waves*. IEEE Press Series on Electromagnetic Wave Theory, New York: IEEE Press, 2nd. ed., 1991.
- [48] G. V. Eleftheriades, *Analysis and Design of Integrated-Circuit Horn Antennas for Millimeter and Submillimeter-Wave Applications*. Ph.d dissertation, University of Michigan. Radiation Laboratory, Ann Arbor, Jan. 1993.
- [49] Visual Numerics Inc., *IMSL Fortran Library User's Guide: MATH/LIBRARY.*, vol. 2. Visual Numerics, 2003.
- [50] C. Holloway, D. Hill, R. Dalke, and G. Hufford, “Radio wave propagation characteristics in lossy circular waveguides such as tunnels, mine shafts, and boreholes,” *Antennas and Propagation, IEEE Transactions on*, vol. 48, pp. 1354–1366, Sep. 2000.
- [51] B. K. Singaraju, D. V. Giri, and C. E. Baum, “Further developments in the application of contour integration to the evaluation of the zeros of analytic functions and relevant computer programs,” Mathematics Notes Note 42, Air Force Weapons Laboratory, Mar. 1976.
- [52] A. G. Tijhuis and R. M. van der Weiden, “Sem approach to transient scattering by a lossy, radially inhomogeneous dielectric circular cylinder,” *Wave Motion*, vol. 8, no. 1, pp. 43–63, 1986.
- [53] R. Moses and D. Cai, “Efficient numerical modal solutions for rf propagation in lossy circular waveguides,” *Antennas and Propagation, IEEE Transactions on*, vol. 58, pp. 525–530, Feb. 2010.
- [54] J. Brown and R. Churchill, *Complex Variables and Applications*. New York: McGrawHill, 7th ed., 2004.
- [55] L. M. Delves and J. N. Lyness, “A numerical method for locating the zeros of an analytic function,” *Mathematics of Computation*, vol. 21, pp. 543–560, Oct. 1967.
- [56] J. Magnus and H. Neudecker, *Matrix Differential Calculus with Applications in Statistics and Econometrics*. Wiley Series in Probability and Statistics, Chichester: John Wiley & Sons, third edition ed., 2007.

- [57] S. Lipschutz and M. Lipson, *Schaum's Outline of Linear Algebra*, 4ed. Schaum's Outline Series, McGraw-Hill, 2004.
- [58] Visual Numerics Inc., *IMSL Fortran Library User's Guide: MATH/LIBRARY.*, vol. 1. Visual Numerics, 2003.
- [59] M. Dellnitz, O. Schütze, and Q. Zheng, "Locating all the zeros of an analytic function in one complex variable," *J. Comput. Appl. Math.*, vol. 138, pp. 325–333, Jan. 2002.
- [60] J. A. Stratton, *Electromagnetic Theory*. IEEE Press Series on Electromagnetic Wave Theory, Hoboken, New Jersey: John Wiley & Sons, Inc., 2007.
- [61] D. M. Pozar, *Microwave Engineering*. Hoboken: John Wiley & Sons, Inc., 3rd. ed., 2005.



## A

### Solução da Equação de Onda de Helmholtz em Coordenadas Cilíndricas

#### A.1

##### Introdução

Neste Apêndice é deduzida a solução da equação de onda usando o sistema de coordenadas cilíndrico. A formulação deste Apêndice é fortemente influenciada pelo capítulo 5 de [14].

#### A.2

##### Equação de Helmholtz

A equação de onda escalar de Helmholtz

$$\nabla^2 \psi + k^2 \psi = 0 \quad (\text{A-1})$$

expandida em coordenadas cilíndricas é dada por

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial \psi}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + k^2 \psi = 0. \quad (\text{A-2})$$

Assume-se que a solução  $\psi$  é separável em um produto de funções que são dependentes de uma única coordenada. Dessa forma, usando o método da separação de variáveis, pode-se buscar soluções da forma

$$\psi = R(\rho)\Phi(\phi)Z(z). \quad (\text{A-3})$$

Substituindo (A-3) em (A-2), dividindo por  $\psi$ , e notando que as derivadas parciais tornam-se derivadas totais, tem-se

$$\frac{1}{\rho R} \frac{d}{d\rho} \left( \rho \frac{dR}{d\rho} \right) + \frac{1}{\rho^2 \Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} + \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} + k^2 = 0, \quad (\text{A-4})$$

em que o terceiro termo é explicitamente independente de  $\rho$  e  $\phi$ . Esse termo deve também ser independente de  $z$  se a equação é nula para todos  $\rho$ ,  $\phi$ ,  $z$ .

Dessa forma,

$$\frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} = -k_z^2, \quad (\text{A-5})$$

em que  $k_z$  é uma constante. Substituindo a última equação em (A-4) e multiplicando o resultado por  $\rho^2$  leva para

$$\frac{\rho}{R} \frac{d}{d\rho} \left( \rho \frac{dR}{d\rho} \right) + \frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} + (k^2 - k_z^2) \rho^2 = 0. \quad (\text{A-6})$$

Da última expressão tem-se que o segundo termo é independente de  $\rho$  e  $z$ , e os demais termos são independentes de  $\phi$ . Assim, pode-se escrever

$$\frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} = -n^2, \quad (\text{A-7})$$

em que  $n$  é uma constante. Dessa forma, usando (A-7) em (A-4) tem-se

$$\frac{\rho}{R} \frac{d}{d\rho} \left( \rho \frac{dR}{d\rho} \right) - n^2 + (k^2 - k_z^2) \rho^2 = 0, \quad (\text{A-8})$$

que é uma equação que depende apenas de  $\rho$ . Assim, em resumo, a equação de onda foi separada em

$$\rho \frac{d}{d\rho} \left( \rho \frac{dR}{d\rho} \right) + [(k_\rho \rho)^2 - n^2] R = 0, \quad (\text{A-9})$$

$$\frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} + n^2 \Phi = 0, \text{ e} \quad (\text{A-10})$$

$$\frac{d^2 Z}{dz^2} + k_z^2 Z = 0, \quad (\text{A-11})$$

em que foi definido

$$k^2 = k_\rho^2 + k_z^2. \quad (\text{A-12})$$

A equação (A-9) é a equação de Bessel de ordem  $n$ , cuja solução geral em geral é denotada por  $B_n(k_\rho \rho)$  tal que

$$B_n(k_\rho \rho) \sim J_n(k_\rho \rho), Y_n(k_\rho \rho), \text{ ou combinação linear dessas funções,}$$

em que  $J_n$  e  $Y_n$  são funções de Bessel de primeiro e segundo tipo, respectivamente, de ordem  $n$ . A solução das equações diferenciais (A-10) e (A-11),  $\Phi$  e  $Z$  respectivamente, são funções harmônicas. A solução geral dessas equações é escolhida de acordo com o problema. Para o caso particular de um guia de onda coaxial cujo eixo central situa-se ao longo do eixo  $z$ , as soluções mais naturais são

$$R(k_\rho \rho) = A J_n(k_\rho \rho) + B Y_n(k_\rho \rho), \quad (\text{A-13})$$

$$\Phi(n\phi) = C \cos(n\phi) + D \sin(n\phi), \text{ e} \quad (\text{A-14})$$

$$Z(k_z z) = E e^{-jk_z z} + F e^{jk_z z}, \quad (\text{A-15})$$

em que os termos com dependência exponencial em  $z$  descrevem a propagação na direção do eixo  $z$  e os termos com dependência em  $\phi$  descrevem variações azimutais dos campos ao redor do eixo  $z$ . As constantes  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ ,  $E$ , e  $F$  são determinadas pelas condições de contorno.

A partir das equações supracitadas, a solução para a equação de onda escalar de Helmholtz em coordenadas cilíndricas para um guia coaxial circular

é dada pela função de onda elementar

$$\psi_{k_\rho, n, k_z} = [AJ_n(k_\rho \rho) + BY_n(k_\rho \rho)] [C \cos(n\phi) + D \sin(n\phi)] [Ee^{-jk_z z} + Fe^{jk_z z}]. \quad (\text{A-16})$$

Deve ser observado que combinações lineares das funções de onda elementares também são solução para a equação de Helmholtz. Pode-se, portanto, somar todas as soluções de todos os valores possíveis (autovalores) de  $n$  e  $k_\rho$ , ou de  $n$  e  $k_z$ . Uma vez que  $k_z$  e  $k_\rho$  são interrelacionados por (A-12), eles são LD e sua soma não leva a solução completa.

A coordenada  $\phi$  é uma coordenada angular, e dessa forma, existem restrições para a escolha de  $\Phi(n\phi)$  e  $n$ . Por exemplo, para o guia coaxial abordado nessa Dissertação, os campos requerem necessariamente que  $\psi(\phi) = \psi(\phi + 2\pi)$  para  $\psi$  ser *single-valued*. Dessa forma,  $\Phi(n\phi)$  deve ser periódica em termos de  $\phi$  e  $n$  deve ser inteiro; justificando a escolha de funções cossenoidais para montar a solução de  $\Phi(n\phi)$ .

## B

### Teorema da Reciprocidade de Lorentz e Consequências

Neste Apêndice é verificado que a partir do Teorema da Reciprocidade de Lorentz pode-se obter a integral de *reação* que relaciona campos e fontes entres dois sistemas. Uma consequência adicional são as condições de ortogonalidade e normalização dos campos modais.

#### B.1

##### Teorema da Reciprocidade de Lorentz

Para uma região contendo fontes, o Teorema da reciprocidade de Lorentz é da forma

$$-\oint (\mathbf{E}^a \times \mathbf{H}^b - \mathbf{E}^b \times \mathbf{H}^a) \cdot d\mathbf{s} = \iiint (\mathbf{E}^a \cdot \mathbf{J}^b - \mathbf{H}^a \cdot \mathbf{M}^b - \mathbf{E}^b \cdot \mathbf{J}^a + \mathbf{H}^b \cdot \mathbf{M}^a) d\tau, \quad (\text{B-1})$$

que para meios sem fontes se reduz para

$$\oint (\mathbf{E}^a \times \mathbf{H}^b - \mathbf{E}^b \times \mathbf{H}^a) \cdot d\mathbf{s} = 0. \quad (\text{B-2})$$

Em geral a integral que aparece em (B-2) em geral não representar potência, desde que o conjugado não aparece no campo magnético [14, p. 118]. Esse tipo de integral é conhecida como *reação*. Por definição, a reação de um campo  $a$  em uma fonte  $b$  é da forma

$$\langle a, b \rangle = \iiint_V (\mathbf{E}^a \cdot \mathbf{J}^b - \mathbf{H}^a \cdot \mathbf{M}^b) dv. \quad (\text{B-3})$$

Nesta notação, o teorema da reciprocidade é

$$\langle a, b \rangle = \langle b, a \rangle. \quad (\text{B-4})$$

Se  $a$  é uma região sem fontes, e desde que  $b$  está confinado em uma abertura  $S$ , esta abertura pode ser representada por uma corrente magnética equivalente, então, fazendo

$$\mathbf{J}^b = 0, \text{ e} \quad (\text{B-5})$$

$$\mathbf{M}^b = -\mathbf{u}_z \times \mathbf{E}^b, \quad (\text{B-6})$$

a integral de volume se reduz a uma integral de superfície sobre a abertura de  $b$ , e pode-se escrever a reação dos campos de  $a$  em  $b$  da forma

$$\langle a, b \rangle = \int_S \mathbf{E}^a \times \mathbf{H}^b \cdot d\mathbf{s}. \quad (\text{B-7})$$

## B.2

### Ortogonalidade e Normalização Modal

Em [41, sec. 8.2] as equações de estado de Maxwell em um meio excitado por fontes, não homogêneo e anisotrópico são detalhadamente deduzidas. Para meios arbitrários, em geral, os modos guiados devem satisfazer a seguinte relação de ortogonalidade [41, p. 826], [47, p. 416-419]:

$$\iint_S (\mathbf{E}_{tm}^{\dagger*} \cdot \mathbf{H}_{tn} \times \mathbf{u}_z + \mathbf{H}_{tm}^{\dagger*} \cdot \mathbf{u}_z \times \mathbf{E}_{tn}) dS = 2N_m \delta_{mn}. \quad (\text{B-8})$$

Em (B-8), os campos transversais possuem os subscrito  $t$ , a integral se estende pela área  $S$ , que transversal a  $z$ ,  $\delta_{mn}$  é o delta de Kronecker que é igual a 1 se  $m = n$  e zero caso contrário, e  $N_m$  é a  $m$ -ésima constante de normalização modal.

A relação de ortogonalidade (B-8) é válida em geral para guias de onda uniformes. Essa relação de ortogonalidade pode ser simplificada significativamente para situações especiais, e inclusive pode ser usada para normalizar os campos modais:

$$\text{Meios isotrópicos: } \iint_S \mathbf{E}_{tm} \times \mathbf{H}_{tn} \cdot \mathbf{u}_z dS = N_m \delta_{mn}, \quad (\text{B-9})$$

$$\text{Meios isotrópicos sem perdas: } \iint_S \mathbf{E}_{tm} \times \mathbf{H}_{tn}^* \cdot \mathbf{u}_z dS = N_m \delta_{mn}. \quad (\text{B-10})$$

A escolha da constante de normalização é arbitrária [41, p. 834], e pode ser conveniente escolher para (B-9)

$$N_m = \iint_S \mathbf{e}_m \times \mathbf{h}_m \cdot \mathbf{u}_z dS, \quad (\text{B-11})$$

assim, para o  $m$ -ésimo modo, a normalização dos campos modais  $e_m$  e  $h_m$  pode ser feita da forma

$$e_m^{nor} = e_m \sqrt{N_m}, \text{ e} \quad (\text{B-12a})$$

$$h_m^{nor} = h_m \sqrt{N_m}. \quad (\text{B-12b})$$

A normalização dos campos por meio de (B-11) é uma normalização pela auto-reação, e é consequência direta do teorema da reciprocidade de Lorentz para meios sem fontes.

Caso os meios sejam sem perdas, é conveniente uma normalização de potência para (B-10) tal que

$$N_m = Y_m, \quad (\text{B-13})$$

em que  $Y_m$  é a admitância do  $m$ -ésimo modo.

## C

### Propriedades da Matriz de Espalhamento Generalizada

Este Apêndice visa demonstrar que a matriz de espalhamento generalizada desenvolvida na formulação desta Dissertação conserva a auto Reação na abertura comum da junção de dois guias de onda. As deduções a seguir são fortemente influenciadas por [48, cap. 2].

Antes de examinar as propriedades da matriz de espalhamento, avalia-se algumas propriedades das equações desenvolvidas no Capítulo 3.

#### C.1

##### Ortogonalidade, Normalização e Conservação da Reação

As relações de ortogonalidade e normalização para os campos modais usadas no Capítulo 3 são repetidas a seguir, para maior compreensão:

$$\begin{aligned} \text{Ortogonalidade : } \int_s (\mathbf{e}_m \times \mathbf{h}_n) \cdot d\mathbf{s} &= 0 \text{ para } m \neq n, \text{ e} \\ \text{Normalização : } \int_s (\mathbf{e}_m \times \mathbf{h}_n) \cdot d\mathbf{s} &= \delta_{mn}, \end{aligned}$$

em que  $\delta_{mn}$  é o delta de Kronecker, tal que:  $\delta_{mn} = 0$  para  $m \neq n$ , e  $\delta_{mn} = 1$  para  $m = n$ .

Os campos transversais  $\mathbf{E}_I$  e  $\mathbf{H}_I$  em  $z = 0$  são representados pela solução modal

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_I &= \sum_m^{\infty} (A_{mI} + B_{mI}) \mathbf{e}_{mI}, \\ \mathbf{H}_I &= \sum_m^{\infty} (A_{mI} - B_{mI}) \mathbf{h}_{mI}, \\ \mathbf{E}_{II} &= \sum_n^{\infty} (A_{nII} + B_{nII}) \mathbf{e}_{nII}, \text{ e} \\ \mathbf{H}_{II} &= \sum_n^{\infty} (A_{nII} - B_{nII}) \mathbf{h}_{nII}. \end{aligned}$$

A auto-reação da região  $I$  é tal que [14, pp. 340-345]

$$\begin{aligned} R_I &= \int_{s_I} (\mathbf{E}_I \times \mathbf{H}_I) \cdot \mathbf{u}_z ds_I \\ R_I &= \int_{s_I} \left[ \sum_m^{\infty} (A_{mI} + B_{mI}) \mathbf{e}_{mI} \times \sum_m^{\infty} (A_{mI} - B_{mI}) \mathbf{h}_{mI} \right] \cdot \mathbf{u}_z ds_I. \end{aligned}$$

Usando a relação de normalização, os produtos envolvendo  $\mathbf{e}_{mI}$  e  $\mathbf{h}_{mI}$  são unitários, restando apenas os produtos das amplitudes dos campos. Usando as matrizes  $\bar{A}_I$  e  $\bar{B}_I$  definidas no Capítulo 3, pode-se escrever a auto-reação do guia  $I$  na forma de um produto de vetores, ou seja,

$$R_I = \underbrace{(\bar{A}_I - \bar{B}_I)^T}_{\text{Campo } H_I} \underbrace{(\bar{A}_I + \bar{B}_I)}_{\text{Campo } E_I}.$$

A auto-reação da região  $II$  é obtida de forma similar:

$$\begin{aligned} R_{II} &= \int_{s_{II}} (\mathbf{E}_{II} \times \mathbf{H}_{II}) \cdot (-\mathbf{u}_z) ds_{II} \\ &= \underbrace{(\bar{A}_{II} - \bar{B}_{II})^T}_{\text{Campo } H_{II}} \underbrace{(\bar{A}_{II} + \bar{B}_{II})}_{\text{Campo } E_{II}}. \end{aligned}$$

As equações matriciais (3-12) e (3-16) satisfazem as continuidade dos campos eletromagnéticos na abertura comum entre os guias de ondas das regiões  $I$  e  $II$ . Estas equações são repetidas a seguir:

$$\bar{P}(\bar{A}_I + \bar{B}_I) = \bar{Q}(\bar{A}_{II} + \bar{B}_{II}), \text{ e} \quad (\text{C-1})$$

$$\bar{P}^T(\bar{B}_{II} - \bar{A}_{II}) = \bar{R}(\bar{A}_I - \bar{B}_I). \quad (\text{C-2})$$

Fazendo o transposto de (C-2) e multiplicando por (C-1), tem-se

$$\begin{aligned} (\bar{A}_I - \bar{B}_I)^T(\bar{A}_I + \bar{B}_I) &= (\bar{B}_{II} - \bar{A}_{II})^T(\bar{A}_{II} + \bar{B}_{II}) \\ R_I &= -R_{II}, \end{aligned} \quad (\text{C-3})$$

de onde é possível inferir que o MMT conserva a Reação da descontinuidade entre os guias  $I$  e  $II$ ; ou seja,  $R_I + R_{II} = 0$ . A conservação da Reação pode ser explorada para revelar uma interessante propriedade da matriz GSM da junção de dois guias.

## C.2

### Propriedades da Matriz GSM Associadas com a Conservação de Reação

A Reação em cada região do guia da Fig. 3.2 é definida por [14, pp. 340-345], [48, p. 25]

$$R_I = \int_{s_I} (\mathbf{E}_I \times \mathbf{H}_I) \cdot \mathbf{u}_z ds_I = (\bar{A}_I - \bar{B}_I)^T(\bar{A}_I + \bar{B}_I), \text{ e} \quad (\text{C-4})$$

$$R_{II} = \int_{s_{II}} (\mathbf{E}_{II} \times \mathbf{H}_{II}) \cdot (-\mathbf{u}_z) ds_{II} = (\bar{A}_{II} - \bar{B}_{II})^T(\bar{A}_{II} + \bar{B}_{II}). \quad (\text{C-5})$$

A conservação da Reação pode ser explorada para revelar uma interes-

sante propriedade da matriz GSM da junção de dois guias. Notando que a equação de conservação (C-3) pode ser simplificada para

$$\bar{A}_I^T \bar{A}_I + \bar{A}_{II}^T \bar{A}_{II} = \bar{B}_I^T \bar{B}_I + \bar{B}_{II}^T \bar{B}_{II},$$

de onde fica evidente que

$$\bar{A}^T \bar{A} = \bar{B}^T \bar{B}. \quad (\text{C-6})$$

Partindo da definição de matriz de espalhamento generalizada  $\bar{B} = \bar{\bar{S}} \bar{A}$ , multiplicando ambos os termos por  $\bar{B}^T$ , tem-se

$$\bar{B}^T \bar{B} = \bar{B}^T \bar{\bar{S}} \bar{A}.$$

Substituindo  $\bar{B}^T \bar{B}$  obtido de (C-6) no lado esquerdo da última expressão, pode-se escrever

$$\bar{A}^T \bar{A} = \bar{B}^T \bar{\bar{S}} \bar{A}.$$

Usando novamente a definição da matriz GSM para o vetor  $\bar{B}$ , tem-se

$$\begin{aligned} \bar{A}^T \bar{A} &= (\bar{\bar{S}} \bar{A})^T \bar{\bar{S}} \bar{A} \\ \bar{A}^T \bar{A} &= \bar{A}^T \bar{\bar{S}}^T \bar{\bar{S}} \bar{A}. \end{aligned} \quad (\text{C-7})$$

Usando a propriedade da simetria da matriz  $\bar{\bar{S}}$ , tem-se que  $\bar{A}^T (\bar{\bar{I}} - \bar{\bar{S}} \bar{\bar{S}}) \bar{A} = 0$ . Como o vetor de excitação  $\bar{A}$  é arbitrário, a seguinte propriedade da matriz GSM para descontinuidade da Fig. 3.2 pode ser estabelecida:

$$\bar{\bar{S}} \bar{\bar{S}} = \bar{\bar{I}}. \quad (\text{C-8})$$

Essa propriedade é uma consequência da conservação da Reação pela formulação do MMT, que de acordo com [48, p. 26], é válida tanto para a matriz GSM com infinitos modos quanto para a matriz truncada em um número finito de modos. O uso de (C-8) é uma forma simples de verificar a correta implementação do MMT.



## D

### Acoplamento entre Guias Coaxial→Circular/Circular→Coaxial

Este Apêndice visa avaliar uma solução modal para o acoplamento entre uma seção de guia coaxial com um guia circular, ou seja, é o caso particular em que o raio interno  $a = 0$  em um dos guias de onda.

#### D.1

##### Acoplamento entre Guias Coaxial→Circular

Para a descontinuidade entre um guia de onda coaxial para circular, ilustrado na Fig. D.1a, em que ambos guias são não homogêneos e passíveis a perdas, as funções de onda para a camada mais interna do guia não admitem a função de Bessel de segundo tipo. Dessa forma, as constantes  $B_n$  e  $F_n$  devem ser removidas das funções de onda para guias coaxiais (2-10). Por consequência, deve-se eliminar das matrizes  $\bar{P}$  e  $\bar{Q}$  do MMT os termos com as constantes  $B_n$ , e o raio interno do guia circular deve ser tal que  $a_2 = 0$ .

A equação característica dos modos  $TM^z$  para o guia circular não homogêneo pode ser obtida eliminando a segunda coluna da matriz  $\bar{Z}$  em (2-33). Essa coluna está associada a função de Bessel de segundo tipo, e por isso  $B_0$  também deve ser eliminado. Sem muito esforço, tem-se que a equação característica fica da forma

$$\det(\bar{Z}) = z_{13}z_{34}z_{41} + z_{14}z_{31}z_{43} - z_{14}z_{33}z_{41} - z_{44}z_{13}z_{31} = 0.$$

As constantes  $C_0$  e  $D_0$  pode ser expressas como combinação linear de  $A_0$ :

$$C_0 = -\frac{z_{31}}{z_{33} - (z_{34}z_{13})/z_{14}} A_0, \text{ e}$$

$$D_0 = -\frac{z_{13}}{z_{14}} A_0 C_0 = \frac{z_{13}}{z_{14}} \frac{z_{31}}{z_{33} - (z_{34}z_{13})/z_{14}} A_0.$$

Deve ser observado que o modo fundamental de um guia circular não homogêneo é o modo de mais baixa ordem  $n = 1$ , que se reduz ao modo  $TE_{11}^z$  quando o guia circular é homogêneo [14, p. 221]. O modo  $TEM^z$  não existe no guia circular homogêneo, e não tem-se o modo  $TM_{00}^z$  em estruturas não homogêneas como ocorre no guia coaxial.

#### D.2

##### Acoplamento entre Guias Circular→Coaxial

A descontinuidade entre um guia de onda circular para coaxial, ilustrado na Fig. D.1b, é tratada de forma análoga a descontinuidade anterior. Contudo, na formulação desenvolvida nesta Dissertação assume-se que sempre o guia de



Figura D.1: Acoplamento entre Guias Coaxial→Circular e entre Circular→Coaxial.

excitação é sempre coaxial, e o modo TEM (ou  $TM_{00}$ ) é propagante. Dessa forma, uma descontinuidade da forma mostrada na Fig. D.1b só é admissível a partir da segunda descontinuidade da seção transversal dos guias de ondas acoplados.

A descontinuidade mostrada na Fig. D.1b é decrescente, pois a seção transversal do guia coaxial está contida na seção do guia circular. De acordo com a formulação do Capítulo 3, é necessário inverter a estrutura da Fig. D.1b e calcular a matriz de espalhamento  $\bar{\bar{S}}$  de acordo com (3-29). A inversão da estrutura recai na junção mostrada na Fig. D.1a, que foi descrita anteriormente.

Se a seção do guia circular não contenha a seção do guia coaxial, tem-se um caso de descontinuidade mista, e deve ser tratada de maneira análoga ao descrito no Capítulo 3.

### D.3

#### Acoplamento entre Guias Circular→Circular

Usando as considerações anteriores, a junção entre guias do tipo circular→circular também pode-se resolver pela formulação do MMT. Neste caso, tem-se a descontinuidade entre guias circulares, e uma condição para a aplicação da formulação do Capítulo 3 é a excitação do primeiro trecho de guia ser feita por um modo  $TM^z$  puro.

### D.4

#### Validação

O *software* CST MWS foi usado para validar as considerações deste Apêndice. Considera-se a junção entre um guia coaxial→circular mostrado na Fig. D.2, com dimensões dadas na Tabela D.1.

O resultado da perda de retorno obtida no CST é comparado com o resultado obtido pelo método de casamento de modos descrito no Capítulo 3

junto as considerações deste apêndice na Fig. D.3. Os resultados apresentam concordância. Na Fig. D.3 são destacadas as frequências em que os modos tornam-se propagantes no guia coaxial (região *I*) e no guia circular (região *II*). Como o guia de excitação é homogêneo, o modo  $TEM^z$  se propaga sem frequência de corte. Contudo, o guia circular não suporta o modo TEM, e é apenas com a entrada do modo  $TM_{01}$  na região *II* que tem-se acoplamento de energia entre a junção; isso ocorre em  $\sim 19$  GHz. O segundo modo TM torna-se propagante no guia circular em  $\sim 44$  GHz. Em  $\sim 47$  GHz o modo  $TM_{01}$  do guia coaxial torna-se propagante.

É importante lembrar que apesar do modo fundamental do guia circular ser TE, os modos puros TE não se acoplam com o modo TEM ( $TM_{00}$ ) e os demais modos TM. Deve ser observado que na frequência de entrada do modo  $TM_{01}$  no guia circular a resposta da perda de retorno do CST é sutilmente superior a 0 dB. Esse resultado não é esperado em uma rede passiva de guias de onda, e se admite que seja um problema da DFT do CST.

	$a$ (mm)	$b$ (mm)	$c$ (mm)	$\epsilon_{r1}$	$\epsilon_{r2}$	$L$ (mm)
Região I	1,840	2,0	5,0	1,0	1,0	$\infty$
Região II	0	2,0	6,0	1,0	1,0	$\infty$

Tabela D.1: Dimensões e parâmetros da junção entre guias coaxial→circular usados na simulação da Fig. D.3.

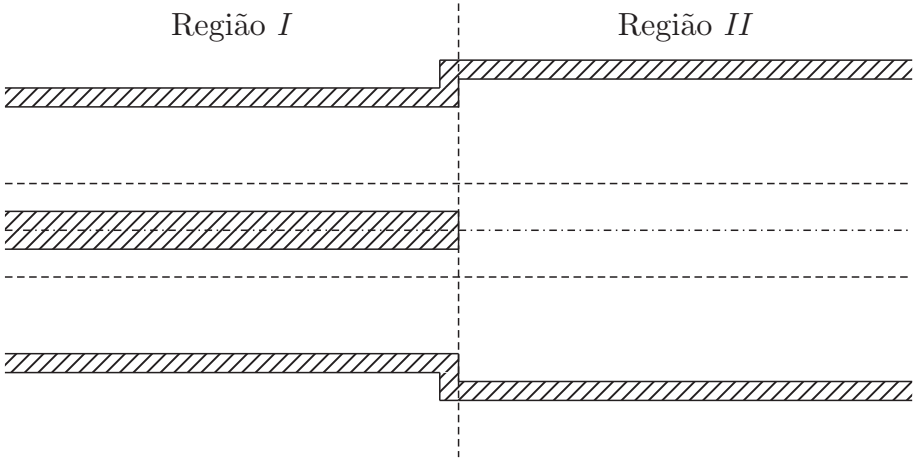


Figura D.2: Acoplamento entre guias coaxial→circular.

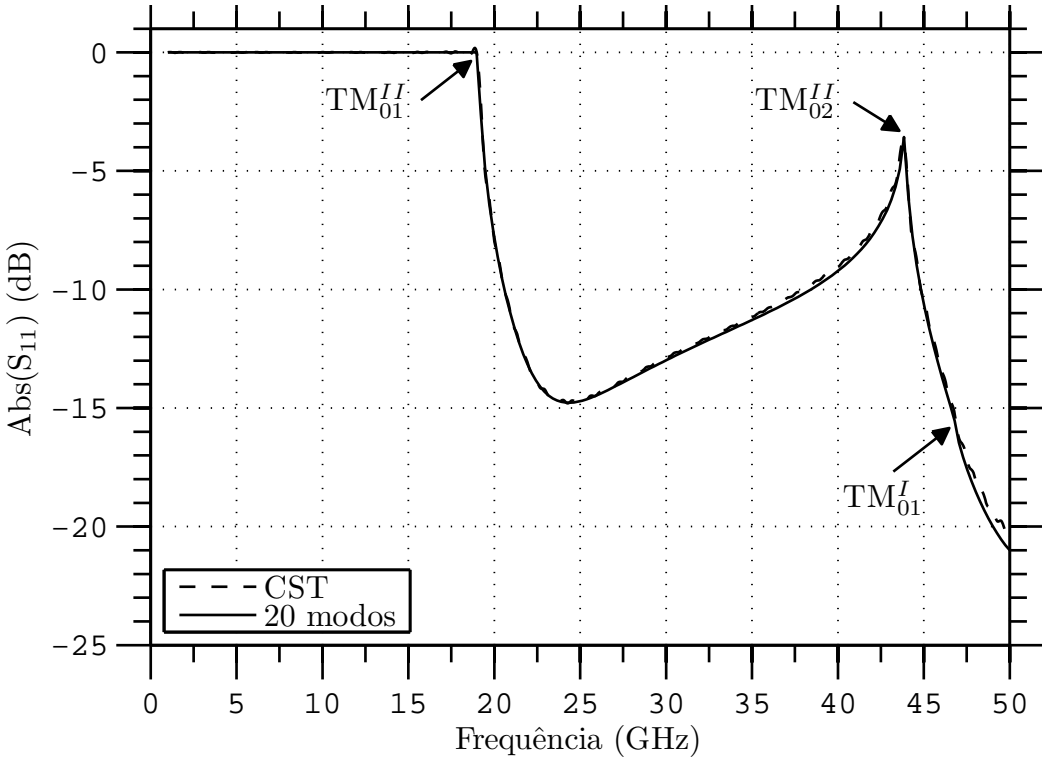


Figura D.3: Comparação entre a perda de retorno simulada no CST com os valores obtidos pelo MMT . Número de células do TD do CST: 827424.

## E

### Guia não Homogêneo com $N$ Camadas Radiais

#### E.1

##### Introdução

A expansão modal dos campos eletromagnéticos para guias com multicamadas radiais é formulado neste Apêndice.

#### E.2

##### Autovalores para Guias com $N$ Camadas Radiais

Nos capítulos iniciais foi verificado que guias coaxiais não homogêneos suportam apenas modos  $\text{TM}^z$  e  $\text{TE}^z$  puros em campos sem dependência azimutal em  $\phi$ . Uma vez que são de interesse os modos  $\text{TM}^{z1}$ , a função de onda em termos de  $\rho$  que é geral o suficiente para representar os campos em um guia coaxial não homogêneo é da forma  $R(k_\rho \rho) = AJ_0(k_\rho \rho) + BY_0(k_\rho \rho)$ . Dessa forma, o problema de contorno do guia coaxial circular não homogêneo com  $N$  camadas radiais da Fig. E.1 pode ser representado para o modo  $\text{TM}^z$  por

$$\bar{\bar{Z}}\bar{C} = \bar{0}, \quad (\text{E-1})$$

em que a matriz de coeficientes e o vetor de constantes são dados por (E-2) e (E-3).

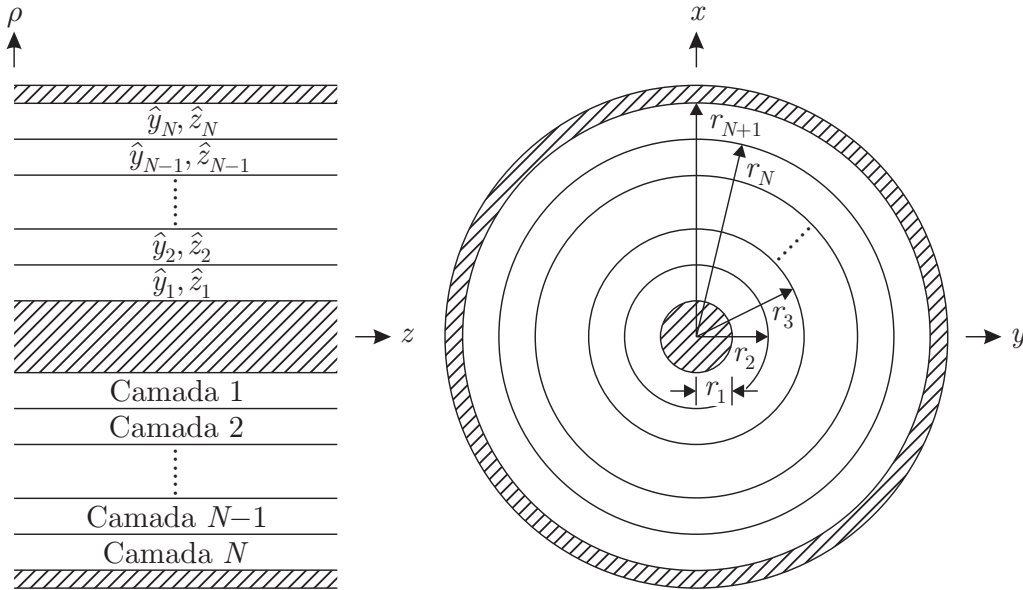


Figura E.1: Vistas ortogonais do guia não homogêneo com  $N$  camadas radiais.

<sup>1</sup>A seguir são aplicadas as condições de contorno para o modo  $\text{TM}^z$ . Dessa forma, por comodidade de notação, o sobrescrito  $\text{TM}$  é omitido.

$$\begin{aligned}
E_z|_{\rho=r_1} = 0 & \quad \{ \\
\text{Continuidade} & \quad \left\{ \begin{array}{cccc} z_{1,1} & z_{1,2} & & \\ z_{2,1} & z_{2,2} & z_{2,3} & z_{2,4} \\ z_{3,1} & z_{3,2} & z_{3,3} & z_{3,4} \end{array} \right. \\
\text{em } \rho = r_2 & \\
\text{Continuidade} & \quad \left\{ \begin{array}{cccccc} & & z_{4,3} & z_{4,4} & z_{4,5} & z_{4,6} \\ & & z_{5,3} & z_{5,4} & z_{5,5} & z_{5,6} \end{array} \right. \\
\text{em } \rho = r_3 & \\
\vdots & \quad \left\{ \begin{array}{cccccc} & & & & \ddots & \ddots \end{array} \right. \\
\text{Continuidade} & \quad \left\{ \begin{array}{cccccc} & & z_{2N-4,2N-5} & z_{2N-4,2N-4} & z_{2N-4,2N-3} & z_{2N-4,2N-2} \\ & & z_{2N-3,2N-5} & z_{2N-3,2N-4} & z_{2N-3,2N-3} & z_{2N-3,2N-2} \end{array} \right. \\
\text{em } \rho = r_{N-1} & \\
\text{Continuidade} & \quad \left\{ \begin{array}{cccccc} & & & & z_{2N-2,2N-3} & z_{2N-2,2N-2} & z_{2N-2,2N-1} & z_{2N-2,2N} \\ & & & & z_{2N-1,2N-3} & z_{2N-1,2N-2} & z_{2N-1,2N-1} & z_{2N-1,2N} \end{array} \right. \\
\text{em } \rho = r_N & \\
E_z|_{\rho=r_{N+1}} = 0 & \quad \left\{ \begin{array}{cccccc} & & & & & z_{2N,2N-1} & z_{2N,2N} \end{array} \right. \end{aligned}
\quad = \bar{\bar{Z}}, \text{ e} \quad (\text{E-2})$$

$$\bar{C} = \left[ A^{(1)} \quad B^{(1)} \quad A^{(2)} \quad B^{(2)} \quad A^{(3)} \quad B^{(3)} \quad \dots \quad A^{(N-2)} \quad B^{(N-2)} \quad A^{(N-1)} \quad B^{(N-1)} \quad A^{(N)} \quad B^{(N)} \right]^T. \quad (\text{E-3})$$

A matriz de coeficientes  $\bar{\bar{Z}}$  combina as condições de contorno de todas as camadas do guia da Fig. E.1. Os coeficientes  $z_{n,\tilde{n}}$  são dados a seguir.

A primeira linha de  $\bar{\bar{Z}}$  impõe  $E_z^{(1)} = 0$  em  $\rho = r_1$ , ou seja,

$$z_{1,1} = J_0(k_{\rho 1} r_1), \text{ e} \quad (\text{E-4a})$$

$$z_{1,2} = Y_0(k_{\rho 1} r_1). \quad (\text{E-4b})$$

A  $2N$ -ésima linha de  $\bar{\bar{Z}}$  impõe  $E_z^{(N)} = 0$  em  $\rho = r_{N+1}$ , ou seja,

$$z_{2N,2N-1} = J_0(k_{\rho N} r_{N+1}), \text{ e} \quad (\text{E-5a})$$

$$z_{2N,2N} = Y_0(k_{\rho N} r_{N+1}). \quad (\text{E-5b})$$

A segunda linha de  $\bar{\bar{Z}}$  impõe  $E_z^{(1)} = E_z^{(2)}$  em  $\rho = r_2$ , ou seja,

$$z_{2,1} = \hat{y}_2 k_{\rho 1}^2 J_0(k_{\rho 1} r_2), \quad (\text{E-6a})$$

$$z_{2,2} = \hat{y}_2 k_{\rho 1}^2 Y_0(k_{\rho 1} r_2), \quad (\text{E-6b})$$

$$z_{2,3} = -\hat{y}_1 k_{\rho 2}^2 J_0(k_{\rho 2} r_2), \text{ e} \quad (\text{E-6c})$$

$$z_{2,4} = -\hat{y}_1 k_{\rho 2}^2 Y_0(k_{\rho 2} r_2). \quad (\text{E-6d})$$

A terceira linha de  $\bar{\bar{Z}}$  impõe  $H_\phi^{(1)} = H_\phi^{(2)}$  em  $\rho = r_2$ , ou seja,

$$z_{3,1} = -k_{\rho 1} J_1(k_{\rho 1} r_2), \quad (\text{E-7a})$$

$$z_{3,2} = -k_{\rho 1} Y_1(k_{\rho 1} r_2), \quad (\text{E-7b})$$

$$z_{3,3} = k_{\rho 2} J_1(k_{\rho 2} r_2), \text{ e} \quad (\text{E-7c})$$

$$z_{3,4} = k_{\rho 2} Y_1(k_{\rho 2} r_2). \quad (\text{E-7d})$$

A  $(2N - 2)$ -ésima linha de  $\bar{\bar{Z}}$  impõe  $E_z^{(N-1)} = E_z^{(N)}$  em  $\rho = r_N$ , ou seja,

$$z_{2N-2,2N-3} = \hat{y}_N k_{\rho(N-1)}^2 J_0(k_{\rho(N-1)} r_N), \quad (\text{E-8a})$$

$$z_{2N-2,2N-2} = \hat{y}_N k_{\rho(N-1)}^2 Y_0(k_{\rho(N-1)} r_N), \quad (\text{E-8b})$$

$$z_{2N-2,2N-1} = -\hat{y}_{N-1} k_{\rho N}^2 J_0(k_{\rho N} r_N), \text{ e} \quad (\text{E-8c})$$

$$z_{2N-2,2N} = -\hat{y}_{N-1} k_{\rho N}^2 Y_0(k_{\rho N} r_N). \quad (\text{E-8d})$$

A  $(2N - 1)$ -ésima linha de  $\bar{\bar{Z}}$  impõe  $H_\phi^{(N-1)} = H_\phi^{(N)}$  em  $\rho = r_N$ , ou seja,

$$z_{2N-1,2N-3} = -k_{\rho(N-1)} J_1(k_{\rho(N-1)} r_N), \quad (\text{E-9a})$$

$$z_{2N-1,2N-2} = -k_{\rho(N-1)} Y_1(k_{\rho(N-1)} r_N), \quad (\text{E-9b})$$

$$z_{2N-1,2N-1} = k_{\rho N} J_1(k_{\rho N} r_N), \text{ e} \quad (\text{E-9c})$$

$$z_{2N-1,2N} = k_{\rho N} Y_1(k_{\rho N} r_N). \quad (\text{E-9d})$$

Se o número de camadas do guia for maior que 3, isto é,  $N > 3$ , fazendo  $n = 4, 6, 8, \dots, N$ , as linhas de  $\bar{\bar{Z}}$  são dadas de forma recursiva por

- $n$ -ésima linha: impõe  $E_z^{(n/2)} = E_z^{(n/2+1)}$  em  $\rho = r_{n/2+1}$ , ou seja,

$$z_{n,n-1} = \hat{y}_{n/2+1} k_{\rho(n/2)}^2 J_0(k_{\rho(n/2)} r_{n/2+1}), \quad (\text{E-10a})$$

$$z_{n,n} = \hat{y}_{n/2+1} k_{\rho(n/2)}^2 Y_0(k_{\rho(n/2)} r_{n/2+1}), \quad (\text{E-10b})$$

$$z_{n,n+1} = -\hat{y}_{n/2} k_{\rho(n/2+1)}^2 J_0(k_{\rho(n/2+1)} r_{n/2+1}), \text{ e} \quad (\text{E-10c})$$

$$z_{n,n+2} = -\hat{y}_{n/2} k_{\rho(n/2+1)}^2 Y_0(k_{\rho(n/2+1)} r_{n/2+1}). \quad (\text{E-10d})$$

- $(n + 1)$ -ésima linha: impõe  $H_\phi^{(n/2)} = H_\phi^{(n/2+1)}$  em  $\rho = r_{n/2+1}$ , ou seja,

$$z_{n+1,n-1} = -k_{\rho(n/2)} J_1(k_{\rho(n/2)} r_{n/2+1}), \quad (\text{E-11a})$$

$$z_{n+1,n} = -k_{\rho(n/2)} Y_1(k_{\rho(n/2)} r_{n/2+1}), \quad (\text{E-11b})$$

$$z_{n+1,n+1} = k_{\rho(n/2+1)} J_1(k_{\rho(n/2+1)} r_{n/2+1}), \text{ e} \quad (\text{E-11c})$$

$$z_{n+1,n+2} = k_{\rho(n/2+1)} Y_1(k_{\rho(n/2+1)} r_{n/2+1}). \quad (\text{E-11d})$$

As linhas 2, 3,  $2N - 2$  e  $2N - 1$ ; dadas por (E-6), (E-7), (E-8) e (E-9); são casos especiais de (E-10) e (E-11) para quando  $n = 2$  e  $n = 2n - 2$ . Essas linhas foram explicitadas, pois, a partir de (E-2), fazendo  $r_1 = 0$  tem-se um caso particular do guia coaxial da Fig. E.1: um guia circular não homogêneo com  $N$  camadas radiais. A função de onda em termos de  $\rho$  que é geral o suficiente para representar os campos em um guia circular da camada 1 é da forma  $R(k_{\rho 1} \rho)^{(1)} = A^{(1)} J_0(k_{\rho 1} \rho)$ . Dessa forma, para o guia circular, a segunda coluna de  $\bar{\bar{Z}}$  e a segunda linha de  $\bar{C}$  são eliminadas. Isso implica que os termos com as funções de Bessel de segundo tipo somem de (E-6) e (E-7). Como a condição de contorno em  $\rho = r_1 = 0$  é desnecessária no guia circular, a primeira linha de  $\bar{\bar{Z}}$  é eliminada, e a ordem da matriz  $\bar{\bar{Z}}$  passa para  $(N - 1 \times N - 1)$ , e o vetor  $\bar{C}$  fica  $(N - 1 \times 1)$ . Deve ser observado que o guia circular não suporta o modo  $\text{TM}_{00}$ , e o modo fundamental é o  $\text{TE}_{11}$ . Dessa forma, se a excitação for TEM (em um primeiro trecho de guia coaxial homogêneo), só haverá acoplamento a partir da frequência de corte do modo  $\text{TM}_{01}$ . Um exemplo



de acoplamento entre um guia coaxial com um guia circular é mostrado no Apêndice D.

Um caso particular do guia anterior ocorre quando a estrutura não é confinada, ou seja o raio da última camada é infinito  $r_{N+1} \rightarrow \infty$ . Nesse caso, o campo deve cair exponencialmente acima da frequência de corte e representar uma onda se propagando para fora abaixo da frequência de corte. A função de onda em termos de  $\rho$  que é geral o suficiente para representar os campos em um guia circular na camada  $N$  é da forma [14, p. 221]

$$R(k_{\rho N} \rho)^{(N)} = A^{(N)} H_0^{(2)}(k_{\rho N} \rho).$$

A aproximação assintótica da função de Hankel de segundo tipo para grandes argumentos é da forma [19, p. 364]

$$H_\nu^{(2)}(z) \xrightarrow{z \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \exp \left[ -j \left( z - \frac{1}{2} \nu \pi - \frac{1}{4} \pi \right) \right].$$

A medida que  $\rho \rightarrow \infty$  é evidente que a condição de contorno de  $E_z^{(N)}|_{\rho=r_{N+1}} = 0$  é naturalmente satisfeita, de modo que a última linha de  $\bar{\bar{Z}}$  é dispensável. Adicionalmente, a última coluna de  $\bar{\bar{Z}}$  e a última linha de  $\bar{C}$  são eliminadas. Isso implica que os termos envolvendo a função de Bessel de segundo tipo são dispensáveis em (E-8) e (E-9), a passo que as funções de Bessel de primeiro tipo devem ser substituídas pela função de Hankel de segundo tipo em (E-8c) e (E-8d).

Combinando as expressões para os casos em que  $r_1 = 0$  e  $r_{N+1} \rightarrow \infty$ , pode-se resolver o problema de contorno do guia de  $N$  camadas radiais não confinadas. Um caso particular de interesse ocorre quando a condutividade das camadas 1 e  $N + 1$  é grande, de forma que pode-se resolver formalmente o problema do guia coaxial considerando as perdas nos condutores interno e externo em  $\rho = r_2$  e  $\rho = r_N$ , respectivamente.

As equações supracitadas, obtidas a partir das condições de contorno possuem solução não trivial apenas quando o determinante de  $\bar{\bar{Z}}$  for nulo. Em geral, para um guia com  $N$  camadas radiais, é razoável calcular o determinante de forma numérica. Dessa forma, para um dado  $k_{\rho 1}$ , pode-se obter todos os autovalores  $k_{\rho n}$  das  $N$  camadas de forma recursiva por

$$k_{\rho n} = \sqrt{k_n^2 - k_{n-1}^2 + k_{\rho(n-1)}^2}, \text{ para } n = 2, 3, 4, \dots, N. \quad (\text{E-12})$$

Após encontrado um autovalor  $k_{\rho 1}$  (e consequentemente todos os autovalores  $k_{\rho n}$  das  $N$  camadas) que satisfaça  $\det(\bar{\bar{Z}}) = 0$ , a matriz  $\bar{\bar{Z}}$  fica determinada e o vetor de coeficientes  $\bar{C}$  pode ser obtido resolvendo o sistema homogêneo  $\bar{\bar{Z}}\bar{C} = \bar{0}$ . Em geral, a decomposição em valores singulares; conhecida na lite-

ratura internacional por *singular value decomposition* (SVD); pode ser usada para resolver o sistema linear homogêneo<sup>2</sup>.

A equação característica para o modo TE<sup>z</sup> pode ser obtida por dualidade fazendo  $\hat{y} \rightarrow \hat{z}$  nos elementos da matriz  $\bar{\bar{Z}}$ .

A partir da recursão (E-12) pode-se determinar  $k_{\rho n}$  e função de  $k_{\rho(n-1)}$ . Explorando (E-12) para alguns valores de  $n$ , sem muito esforço pode-se encontrar

$$k_{\rho n} = \sqrt{k_n^2 - k_1^2 + k_{\rho 1}^2}, \text{ para } n = 2, 3, 4, \dots, N, \quad (\text{E-13})$$

que relaciona  $k_{\rho n}$  diretamente com  $k_{\rho 1}$  para todo  $n$  diretamente.

### E.3

#### Resolvendo a Equação Transcendental

Infelizmente a equação transcendental  $\det(\bar{\bar{Z}}) = 0$  que é usada para determinar a constante de propagação não pode ser resolvida de forma fechada. A equação transcendental, portanto, deve ser resolvida numericamente. De acordo com [50], existem vários métodos que podem ser usados para determinar as raízes (zeros) de uma função complexa. Entre esses métodos, destacam-se os métodos de Newton e Muller, que são frequentemente empregados. O método de Newton é de fácil implementação, contudo, requer um valor inicial aproximado. Se o ponto inicial for longe da raiz o método pode não convergir para a raiz do modo particular de interesse. Métodos aproximados, usando expressões assintóticas da equação transcendental tem um intervalo de validade limitado [ver (2-72) que vale para  $k_{\rho 1}^{TM} a \gg \frac{1}{8}$ ]. Em geral, os modos de mais baixa ordem apresentam valores de  $k_{\rho 1}$  que não permitem usar as expressões assintóticas da equação transcendental. Um ponto crítico da busca de zeros ocorre quando zeros estão muito próximos entre si ou próximos de polos. Neste caso, alguns zeros podem não ser encontrados. Deve ser observado que mesmo a equação característica assintótica para o guia coaxial circular com 2 camadas radiais (2-72) não tem solução fechada, e requer uma solução numérica.

Fica claro que uma informação extremamente relevante é o número de zeros que se deseja encontrar em uma dada região do plano complexo. Motivado por isso, nessa Dissertação o método do *winding number* descrito em [50], [51], [52], [53] é usado para determinar as raízes da equação transcendental. A vantagem deste método é ser possível encontrar todas os zeros dentro de um dado contorno no plano complexo [50].

<sup>2</sup>Na implementação em FORTRAN foi empregada a função SVD [49, pp. 1491-1492]. Essa função decompõe uma matriz  $\bar{\bar{A}}$  nas matrizes  $\bar{\bar{S}}$ ,  $\bar{\bar{U}}$  e  $\bar{\bar{V}}$  tal que  $\bar{\bar{A}} = \bar{\bar{U}}\bar{\bar{S}}\bar{\bar{V}}^T$ . O vetor  $\bar{\bar{C}}$  do sistema linear homogêneo (E-1) é igual a última coluna da matriz decomposta  $\bar{\bar{V}}$ .

## E.4

### Folhas de Riemann e Branch Cuts

Essa seção revisa características de funções analíticas no plano complexo. Termos como ramificações, pontos de ramificação e folhas de Riemann são tratados de forma sucinta, baseados em referências clássicas [41, pp. 455-462], [39, pp. 66-70].

Uma função da variável complexa  $w = f(z)$  pode ser vista como um mapeamento dos pontos no plano complexo  $z$  para o plano  $w$ . Se para cada valor da variável independente  $z$  existe *um, e apenas um* ponto imagem  $w$ , o mapeamento é dito *single-valued*.

A função  $k_z = (k_0^2 - k_\rho^2)^{1/2}$  é uma função *double valued*, pois, fazendo a raiz quadrada de um número, tem-se que dois valores são possíveis. Neste caso,  $k_z$  é uma função *double valued* de  $k_\rho$ . Consequentemente, para todo ponto no plano complexo  $k_\rho$  existem dois valores possíveis de  $k_z$ . Dessa forma, uma função em termos de  $k_z$  é indefinida se não for estipulado qual dos dois valores de  $k_z$  é adotado.

Uma função *multivalued* é denotada no plano complexo com a ajuda de folhas de Riemann. Seja, por um instante, uma função *double value* tal que  $k_z$  é atribuído a duas folhas de Riemann para um único plano complexo. Em uma dessas folhas de Riemann  $k_z$  assume o valor oposto em sinal em relação ao valor na outra folha de Riemann.

Considera-se uma função  $f(z) = z^{1/2}$ , que é *double valued*. Fazendo  $z = ce^{j\theta_0}$ ; em que  $c$  e  $\theta_0$  são reais; então  $f(z) = \sqrt{c}e^{j\theta_0/2}$ , em que  $c$  e  $\sqrt{c}$  são constantes reais positivas. Assim,  $f(z)$  é uma função periódica em termos de  $\theta_0$  com período de  $4\pi$ . Deve ser observado que para  $\theta_0 = \frac{3\pi}{2}$  e  $\theta_0 = -\frac{\pi}{2}$ ; que denotam o mesmo ponto no plano complexo  $z$ ;  $f(z)$  tem dois possíveis valores:  $\sqrt{c}e^{j3\pi/4}$  e  $\sqrt{c}e^{-j\pi/4}$ . Por questões de clareza, folhas de Riemann são usadas no plano complexo  $z$  para distinguir entre estes dois valores: os valores de  $f(z)$  associados com  $-\pi < \theta_0 < \pi$  são atribuídos para a folha de Riemann do topo, enquanto os valores de  $f(z)$  associados com  $\pi < \theta_0 < 3\pi$  são atribuídos para a folha de Riemann de baixo no plano complexo  $z$ .

Para  $-\pi < \theta_0 < \pi$ , o argumento de  $f(z)$  varia entre  $-\pi/2$  e  $\pi/2$ . Consequentemente, o meio plano da direita do plano complexo  $f$  mapeia a folha de Riemann do topo. Similarmente, o meio plano da esquerda no plano complexo  $f$  mapeia a folha de Riemann de baixo (ver Fig. E.2(a)). Uma vez que os pontos  $z = ce^{-j\pi}$  e  $z = ce^{j\pi}$ , que denotam o mesmo ponto no plano complexo  $z$ , são atribuídos dois valores de  $f(z)$ , como mostrado pelo mapeamento dos pontos  $A$  e  $B$ , existe uma descontinuidade em  $f(z) = ce^{\pm j\pi}$ . Esta descontinuidade é denotada por um *branch cut*. Um *branch cut* sempre

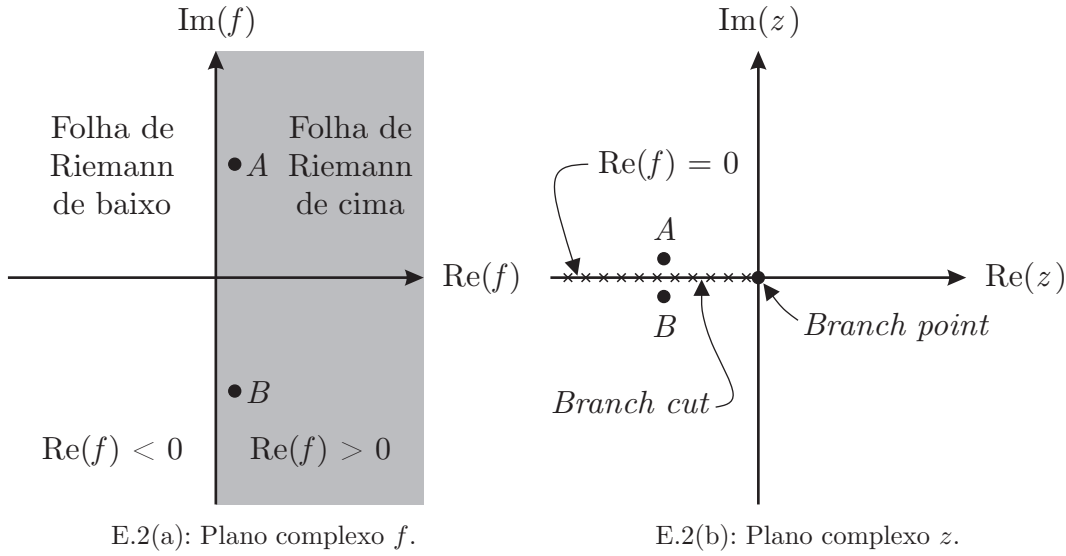


Figura E.2: Planos complexos em que  $f = z^{1/2}$ . O meio plano da direita do plano complexo  $f$  é mapeado para a folha de Riemann de cima, enquanto o meio plano da esquerda é mapeado na folha Riemann de baixo.

emana de um *branch point* e termina no infinito ou em outro *branch point*. Topologicamente, pode-se pensar na folha de Riemann no plano complexo  $z$  como uma consequência do alongamento do meio plano da direita, que é “costurado” junto a linha  $\text{Re}(f) = 0$ , formando uma costura ( $\times \times \times$ ) da forma que é mostrada na Fig. E.2(b).

## E.5 Método do Winding Number

Considera-se uma função de variável complexa  $G(w)$  que é meromorfa<sup>3</sup> em um domínio  $D$ . Seja uma curva simples fechada  $C$  em  $D$  tal que não se tenha zeros ou polos de  $G(w)$  no contorno. Assume-se que o contorno  $C$  é estabelecido corretamente e seja  $N_o$  o número de zeros de  $G(w)$  dentro de  $C$ , enquanto  $N_p$  representa o número de polos de  $G(w)$  dentro de  $C$ . Dessa forma, de acordo com o *princípio do argumento* tem-se que [54, pp. 281-283]

$$\frac{1}{j2\pi} \oint_C \frac{G'(w)}{G(w)} dw = N_o - N_p, \quad (\text{E-14})$$

em que o sobrescrito primo denota a derivada parcial de  $G(w)$  em respeito a  $w$ , e a integral é sobre o contorno  $C$  no sentido anti-horário do plano complexo.

A imagem  $\Gamma$  de  $C$  sobre a transformação  $s = G(w)$  é um contorno fechado, não necessariamente simples, no plano  $s$ . A medida que um ponto  $w$  percorre  $C$  na direção positiva, sua imagem  $s$  percorre  $\Gamma$  em uma direção

<sup>3</sup>Uma função *single-valued* que tem apenas polos e zeros.

particular que determina a orientação de  $\Gamma$ . Como a função  $G(w)$  não tem zeros sobre o contorno  $C$ , então  $\Gamma$  não cruza a origem no plano  $s$ .

A variação do valor do argumento de  $G(w)$  ao percorrer  $C$  é evidentemente um múltiplo inteiro de  $2\pi$ , pode ser escrito como  $(2\pi)^{-1}\delta_C \arg G(w)$ . Esse número representa o número de vezes que um ponto percorrendo o contorno  $\Gamma$  girou ao redor da origem do plano  $s$ . Por esta razão, a integral E-14 é chamada *winding number*.

Se a função  $G(w)$  é livre de singularidades – ou seja, a função  $G(w)$  não possui polos e/ou *branch points* – dentro do contorno  $C$ , o *winding number* é igual ao número de zeros de  $G(w)$  dentro de  $C$ .

É importante observar que apesar do integrando de (E-14) ser tal que [55]

$$\frac{G'(w)}{G(w)} = \frac{d}{dw} \text{Log} G(w) \text{ para } \arg[G(w)] \neq -\pi,$$

o logaritmo natural pode ser analiticamente continuado para números complexos da forma [19, p. 67]

$$\log(z) = \log[\text{Abs}(z)] + j \arg(z), \text{ para } -\pi < \arg(z) < \pi.$$

Para um número complexo  $z$ , o logaritmo natural que é *multivalued* satisfaz

$$\text{Log}(z) = \log(z) + j2\pi t = \log[\text{Abs}(z)] + j [\arg(z) + 2\pi t], \quad (\text{E-15})$$

em que  $t$  é um inteiro arbitrário, e  $\log(z)$  é o valor principal de  $\text{Log}(z)$  [19, p. 67].

Uma vez que o número de zeros em um dado contorno é conhecido, um método numérico deve ser empregado para localizar *todos* os zeros e, por conseguinte, encontrar as constantes de propagação desses modos.

O primeiro passo para usar o método do *winding number* é determinar um contorno  $C$  dentro qual  $G(w)$  é analítica (ou seja, livre de polos e *branch points*). Fazendo  $G(w) = G(k_{\rho 1}) = \det(\bar{\bar{Z}})$ , verifica-se que a função  $G(k_{\rho 1})$  pode apresentar  $(N - 1)$  *branch points* para as  $N$  camadas radiais do guia da Fig. E.1. Estes *branch points* resultam da função raiz quadrada de  $k_{\rho n}$  (com  $n = 2, 3, 4, \dots, N$ ) que ocorre em (E-13). Como  $k_{\rho n}$  se relaciona com  $k_{\rho 1}$  através de (E-13), os *branch points* de  $G(k_{\rho 1})$  são dados por

$$k_{\rho n}^{bp} = \pm j\chi_n, \quad (\text{E-16})$$

em que

$$\chi_n = \sqrt{k_n^2 - k_1^2}. \quad (\text{E-17})$$

Os *branch points* resultam devido a  $k_{\rho n}$  aparecer em termos envolvendo raiz quadrada [ver (E-13)] e devido a função de Hankel com argumento proporcional a  $k_{\rho N}$  [ver equações E-4 a E-11]. Par assegurar que a propagação

de ondas na direção  $\rho$  na camada  $N$  (do guia não confinado:  $\rho_{N+1} \rightarrow \infty$ ) não aumente exponencialmente,  $k_{\rho N}$  deve estar no quarto quadrante –  $\text{Re}(k_{\rho N} < 0)$  e  $\text{Im}(k_{\rho N} < 0)$  – pois os campos eletromagnéticos transversais para  $\rho \rightarrow \infty$  são proporcionais a

$$\mathbf{E}_t^{(N)}, \mathbf{H}_t^{(N)} \propto e^{-jk_z z} e^{-jk_{\rho N} \rho}.$$

Como  $k_{\rho 2}$  deve estar no quarto quadrante, tem-se que  $k_{\rho n}^2$  terá sempre parte imaginária positiva, ou seja,

$$\text{Im}(k_{\rho n}^2) > 0.$$

A partir de (E-13), tem-se  $k_{\rho n}^2 = k_{\rho 1}^2 + \chi_n^2$ , que permite escrever

$$\text{Im}(k_{\rho n}) = \text{Im}(k_{\rho 1}) + \text{Im}(\chi_n^2).$$

Quando  $\text{Im}(k_{\rho n}) = 0$  tem-se o limite da região admissível no plano complexo que garante a condição de radiação. Logo, para assegurar que a propagação da direção de  $\rho$  não cresça exponencialmente,  $k_{\rho n}$  deve estar no quarto quadrante do plano complexo. Isso implica que

$$\text{Im}(k_{\rho 1}) < -\text{Im}(\chi_n^2). \quad (\text{E-18})$$

A partir da expressão anterior determina-se os limites para o contorno admissível no plano  $k_{\rho 1}^2$ . Uma análise mais profunda revela que apenas  $k_N$  é um *branch point*. Este ponto de ramificação está associado a potência que é radiada para o infinito na camada  $N$  quando o guia não é confinado ( $r_{N+1} \rightarrow \infty$ ). Quando o guia é confinado, ou seja,  $r_{N+1}$  é finito, não ocorrem branch cuts.

No plano complexo  $k_{\rho 1}$ , o contorno admissível para a busca dos modos guiados quando  $r_{N+1} \rightarrow \infty$  ocorre quando  $\text{Im}(k_{\rho N}) = 0$ . Como

$$k_{\rho N}^2 = \text{Re}(k_{\rho 1}^2) + j2\text{Re}(k_{\rho 1})\text{Im}(k_{\rho 1}) - \text{Im}(k_{\rho 1}^2) + \chi_N^2, \quad (\text{E-19})$$

tem-se que o contorno admissível é delimitado pela seguinte hipérbole na qual  $k_{\rho N}^2$  é puramente real:

$$2\text{Re}(k_{\rho 1})\text{Im}(k_{\rho 1}) + \text{Im}(\chi_N^2) = 0$$

$$\text{Im}(k_{\rho 1}) = -\frac{1}{2\text{Re}(k_{\rho 1})}\text{Im}(\chi_N^2). \quad (\text{E-20})$$

O contorno admissível é limitado pela área sombreada da Fig. E.3. O *branch cut* em que  $\text{Im}(k_{\rho N}) = 0$  vai apenas na direção a partir do *branch point* em que  $\text{Re}(k_{\rho N}^2) > 0$ , como mostra a Fig. E.4. Na outra direção,  $\text{Re}(k_{\rho N}^2) < 0$  e então  $k_{\rho N}$  é imaginário puro.

Deseja-se garantir que as raízes de  $G(k_{\rho 1})$  produzam constantes de

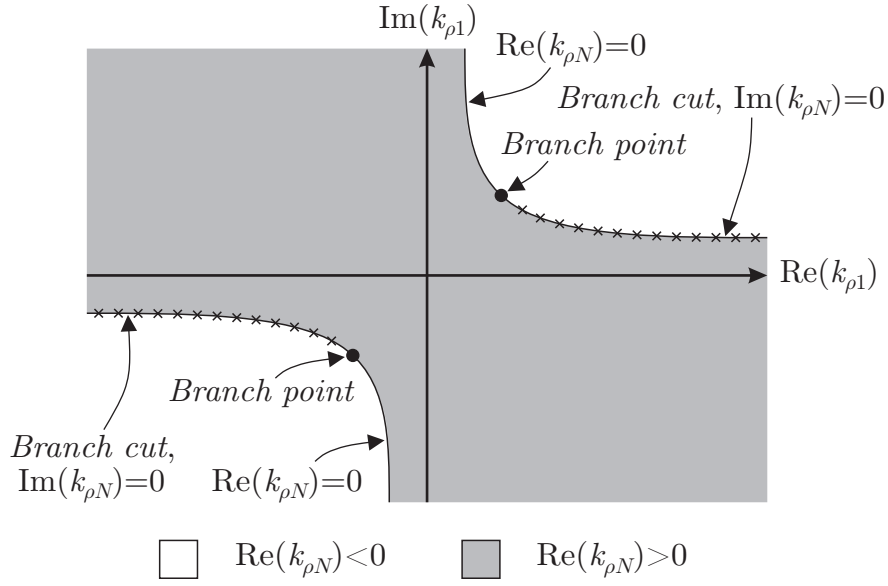


Figura E.3: Plano complexo  $k_{\rho 1}$ . O contorno admissível está na região sombreada.

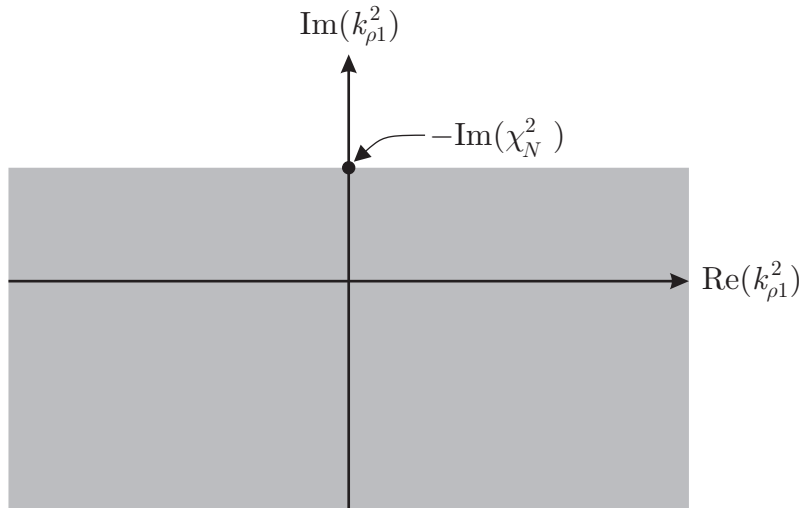


Figura E.4: Plano complexo  $k_{\rho 1}^2$ .

propagação que tenham a seguintes formas exponenciais:

$$e^{-j\beta z - \alpha z}, \text{ para ondas propagando para } +z, \text{ e} \quad (\text{E-21})$$

$$e^{j\beta z + \alpha z}, \text{ para ondas propagando para } -z, \quad (\text{E-22})$$

em que  $\alpha = \text{Re}(\gamma)$  e  $\beta = \text{Im}(\gamma)$ , pois

$$\gamma = \pm jk_z = \pm \sqrt{-1} k_z = \pm \sqrt{k_{\rho 1}^2 - k_1^2} = \pm j\beta \pm \alpha.$$

Para assegurar isso, o contorno deve ser limitado pelos eixos real e imaginário. O contorno admissível para a busca das raízes de  $G(k_{\rho 1})$  é limitado pelas áreas

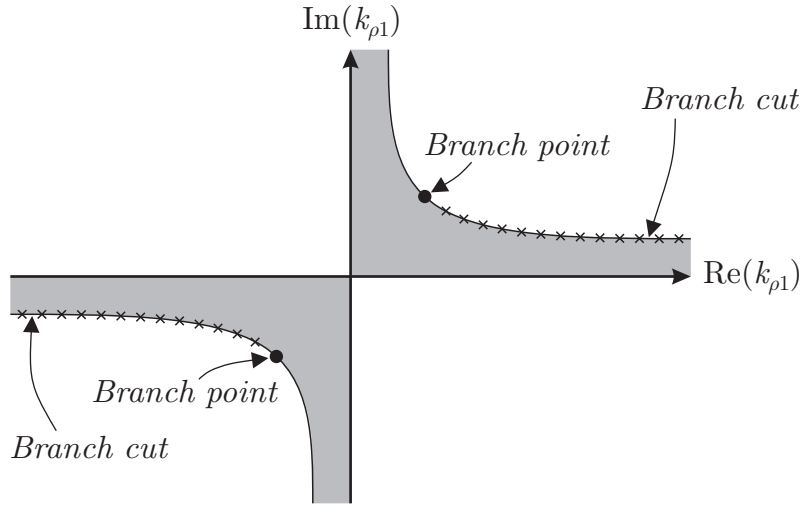


Figura E.5: Plano complexo  $k_{\rho 1}$ . A região admissível para a busca das raízes de  $G(k_{\rho 1})$  está sombreada.

sombreadas do plano  $k_{\rho 1}$  da Fig. E.5<sup>4</sup>. A área sombreada no primeiro quadrante corresponde as ondas se propagando para  $+z$ , enquanto a área sombreada no terceiro quadrante corresponde a ondas se propagando para  $-z$ . Como são de interesse apenas ondas se propagando para  $+z$ , a busca por raízes deve ser realizada na área sombreada do primeiro quadrante do plano complexo  $k_{\rho 1}$ .

Em um trabalho recente, os autores de [53] revisitaram o problema da determinação de zeros para a obter as constantes de propagação de um guia de onda circular com 2 camadas radiais, em que a camada externa tem espessura infinita. No trabalho da referência [53] o método do *winding number* foi combinado com o método de Newton-Raphson como forma rápida e eficiente de solução. Adicionalmente, a busca dos zeros da equação transcendental é realizada no plano  $k_{\rho 1}^2$ , em uma equivalência da notação da referência [53] com a empregada aqui. A região do plano complexo  $k_{\rho 1}^2$  que traz soluções para ondas propagando para  $+z$  satisfaz

$$0 < \text{Im}(k_{\rho 1}^2) < -\text{Im}(\chi_n^2). \quad (\text{E-23})$$

De acordo com as figuras E.3 e E.4, definir um contorno de integração em  $k_{\rho 1}^2$  é mais conveniente do que em  $k_{\rho 1}$ . No plano complexo  $k_{\rho 1}^2$  contornos retangulares são facilmente definidos, enquanto no plano  $k_{\rho 1}$  os contornos possíveis são limitados por hipérboles. O *winding number* em termos do contorno  $C^2$  sobre o plano  $k_{\rho 1}^2$  é tal que [53]

$$N_o = \frac{1}{j4\pi} \oint_{C^2} \frac{G'(k_{\rho 1})}{k_{\rho 1} G(k_{\rho 1})} dk_{\rho 1}^2, \quad (\text{E-24})$$

<sup>4</sup>Eventualmente pode ser de interesse buscar constantes de propagação do tipo  $\gamma = \alpha \pm j\beta$ ,  $\forall \alpha \geq 0$  e  $\beta > 0$ . Neste caso, outros limites para imaginária do contorno admissível no plano  $k_{\rho 1}$  devem ser usados.



que é equivalente a (E-14).

Como o integrando de  $N_o$  tem a derivada de  $G(k_{\rho 1})$  em termos de  $k_{\rho 1}$ , é interessante investigar este termo. Pode-se escrever que a derivada de um determinante é tal que [56, pp. 169-170]

$$\frac{\partial}{\partial k_{\rho 1}} G(k_{\rho 1}) = \frac{\partial}{\partial k_{\rho 1}} \det(\bar{\bar{Z}}) = \text{tr} \left[ \text{adj}(\bar{\bar{Z}}) \frac{\partial}{\partial k_{\rho 1}} \bar{\bar{Z}} \right], \quad (\text{E-25})$$

em que  $\text{adj}$  é a adjunta, e o traço de uma matriz  $\bar{\bar{A}}$ , com ordem  $(n \times n)$ , é definido por

$$\text{tr}(\bar{\bar{A}}) = \sum_{i=1}^n a_{ii} = a_{11} + a_{22} + a_{33} + \dots a_{nn},$$

em que  $a_{ii}$  são os elementos da diagonal principal de  $\bar{\bar{A}}$ . Em (E-25) o termo  $\partial/\partial k_{\rho 1} \bar{\bar{Z}}$  é a derivada elemento a elemento da matriz  $\bar{\bar{Z}}$ , e será desenvolvido a seguir.

### E.5.1

#### **Termo $\partial/\partial k_{\rho 1} \bar{\bar{Z}}$**

Seja  $B_\nu$  uma função (ou a combinação linear de funções) de Bessel de ordem  $\nu$ , a partir de várias fórmulas recursivas de [27, p. 137] pode-se escrever

$$\frac{\partial}{\partial k_{\rho 1}} [k_{\rho n}^2 B_0(k_{\rho n} r)] = k_{\rho 1} [2B_0(k_{\rho n} r) - k_{\rho n} r B_1(k_{\rho n} r)], \text{ e} \quad (\text{E-26})$$

$$\frac{\partial}{\partial k_{\rho 1}} [k_{\rho n} B_1(k_{\rho n} r)] = \frac{k_{\rho 1}}{k_{\rho n}} B_1(k_{\rho n} r) + \frac{1}{2} k_{\rho 1} r [B_0(k_{\rho n} r) - B_2(k_{\rho n} r)]. \quad (\text{E-27})$$

A derivada da matriz  $\bar{\bar{Z}}$  com respeito a  $k_{\rho 1}$  é obtida derivando os elementos  $z_{1,1}$  a  $z_{2N,2N}$  da matriz  $\bar{\bar{Z}}$ . Usando a notação abreviada em que ' representa a derivada parcial com respeito a  $k_{\rho 1}$ , e empregando (E-26) e (E-27), pode-se escrever

$$\begin{aligned} z'_{1,1} &= -r_1 J_1(k_{\rho 1} r_1), \\ z'_{1,2} &= -r_1 Y_1(k_{\rho 1} r_1), \\ z'_{2N,2N-1} &= -r_{N+1} J_1(k_{\rho N} r_{N+1}), \\ z'_{2N,2N} &= -r_{N+1} Y_1(k_{\rho N} r_{N+1}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z'_{2,1} &= \hat{y}_2 k_{\rho 1} [2J_0(k_{\rho 1} r_2) - k_{\rho 1} r_2 J_1(k_{\rho 1} r_2)], \\ z'_{2,2} &= \hat{y}_2 k_{\rho 1} [2Y_0(k_{\rho 1} r_2) - k_{\rho 1} r_2 Y_1(k_{\rho 1} r_2)], \\ z'_{2,3} &= -\hat{y}_1 k_{\rho 1} [2J_0(k_{\rho 2} r_2) - k_{\rho 2} r_2 J_1(k_{\rho 2} r_2)], \\ z'_{2,4} &= -\hat{y}_1 k_{\rho 1} [2Y_0(k_{\rho 2} r_2) - k_{\rho 2} r_2 Y_1(k_{\rho 2} r_2)], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z'_{3,1} &= -J_1(k_{\rho 1} r_2) - \frac{1}{2}k_{\rho 1} r_2 [J_0(k_{\rho 1} r_2) - J_2(k_{\rho 1} r_2)], \\ z'_{3,2} &= -Y_1(k_{\rho 1} r_2) - \frac{1}{2}k_{\rho 1} r_2 [Y_0(k_{\rho 1} r_2) - Y_2(k_{\rho 1} r_2)], \\ z'_{3,3} &= \frac{k_{\rho 1}}{k_{\rho 2}} J_1(k_{\rho 2} r_2) + \frac{1}{2}k_{\rho 1} r_2 [J_0(k_{\rho 2} r_2) - J_2(k_{\rho 2} r_2)], \\ z'_{3,4} &= \frac{k_{\rho 1}}{k_{\rho 2}} Y_1(k_{\rho 2} r_2) + \frac{1}{2}k_{\rho 1} r_2 [Y_0(k_{\rho 2} r_2) - Y_2(k_{\rho 2} r_2)], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z'_{2N-2,2N-3} &= \hat{y}_N k_{\rho 1} [2J_0(k_{\rho(N-1)} r_N) - k_{\rho(N-1)} r_N J_1(k_{\rho(N-1)} r_N)], \\ z'_{2N-2,2N-2} &= \hat{y}_N k_{\rho 1} [2Y_0(k_{\rho(N-1)} r_N) - k_{\rho(N-1)} r_N Y_1(k_{\rho(N-1)} r_N)], \\ z'_{2N-2,2N-1} &= -\hat{y}_{N-1} k_{\rho 1} [2J_0(k_{\rho N} r_N) - k_{\rho N} r_N J_1(k_{\rho N} r_N)], \\ z'_{2N-2,2N} &= -\hat{y}_{N-1} k_{\rho 1} [2Y_0(k_{\rho N} r_N) - k_{\rho N} r_N Y_1(k_{\rho N} r_N)], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z'_{2N-1,2N-3} &= -\frac{k_{\rho 1}}{k_{\rho(N-1)}} J_1(k_{\rho(N-1)} r_N) - \frac{1}{2}k_{\rho 1} r_N [J_0(k_{\rho(N-1)} r_N) - J_2(k_{\rho(N-1)} r_N)], \\ z'_{2N-1,2N-2} &= -\frac{k_{\rho 1}}{k_{\rho(N-1)}} Y_1(k_{\rho(N-1)} r_N) - \frac{1}{2}k_{\rho 1} r_N [Y_0(k_{\rho(N-1)} r_N) - Y_2(k_{\rho(N-1)} r_N)], \\ z'_{2N-1,2N-1} &= \frac{k_{\rho 1}}{k_{\rho N}} J_1(k_{\rho N} r_N) + \frac{1}{2}k_{\rho 1} r_N [J_0(k_{\rho N} r_N) - J_2(k_{\rho N} r_N)], \\ z'_{2N-1,2N} &= \frac{k_{\rho 1}}{k_{\rho N}} Y_1(k_{\rho N} r_N) + \frac{1}{2}k_{\rho 1} r_N [Y_0(k_{\rho N} r_N) - Y_2(k_{\rho N} r_N)], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z'_{n,n-1} &= \hat{y}_{n/2+1} k_{\rho 1} [2J_0(k_{\rho(n/2)} r_{n/2+1}) - k_{\rho(n/2)} r_{n/2+1} J_1(k_{\rho(n/2)} r_{n/2+1})], \\ z'_{n,n} &= \hat{y}_{n/2+1} k_{\rho 1} [2Y_0(k_{\rho(n/2)} r_{n/2+1}) - k_{\rho(n/2)} r_{n/2+1} Y_1(k_{\rho(n/2)} r_{n/2+1})], \\ z'_{n,n+1} &= -\hat{y}_{n/2} k_{\rho 1} [2J_0(k_{\rho(n/2+1)} r_{n/2+1}) - k_{\rho(n/2+1)} r_{n/2+1} J_1(k_{\rho(n/2+1)} r_{n/2+1})], \\ z'_{n,n+2} &= -\hat{y}_{n/2} k_{\rho 1} [2Y_0(k_{\rho(n/2+1)} r_{n/2+1}) - k_{\rho(n/2+1)} r_{n/2+1} Y_1(k_{\rho(n/2+1)} r_{n/2+1})], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z'_{n+1,n-1} &= -\frac{k_{\rho 1}}{k_{\rho(n/2)}} J_1(k_{\rho(n/2)} r_{n/2+1}) \\ &\quad - \frac{1}{2}k_{\rho 1} r_{n/2+1} [J_0(k_{\rho(n/2)} r_{n/2+1}) - J_2(k_{\rho(n/2)} r_{n/2+1})], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z'_{n+1,n} &= -\frac{k_{\rho 1}}{k_{\rho(n/2)}} Y_1(k_{\rho(n/2)} r_{n/2+1}) \\ &\quad - \frac{1}{2}k_{\rho 1} r_{n/2+1} [Y_0(k_{\rho(n/2)} r_{n/2+1}) - Y_2(k_{\rho(n/2)} r_{n/2+1})], \end{aligned}$$

$$z'_{n+1,n+1} = \frac{k_{\rho 1}}{k_{\rho(n/2+1)}} J_1(k_{\rho(n/2+1)} r_{n/2+1}) + \frac{1}{2} k_{\rho 1} r_{n/2+1} [J_0(k_{\rho(n/2+1)} r_{n/2+1}) - J_2(k_{\rho(n/2+1)} r_{n/2+1})], \text{ e}$$

$$z'_{n+1,n+2} = \frac{k_{\rho 1}}{k_{\rho(n/2+1)}} Y_1(k_{\rho(n/2+1)} r_{n/2+1}) + \frac{1}{2} k_{\rho 1} r_{n/2+1} [Y_0(k_{\rho(n/2+1)} r_{n/2+1}) - Y_2(k_{\rho(n/2+1)} r_{n/2+1})].$$

Os elementos explícitos anteriormente compõem a matriz  $\partial/\partial k_{\rho 1} \bar{\bar{Z}}$ . Os elementos desta matriz são dispostos de forma análoga aos da matriz  $\bar{\bar{Z}}$ , diferindo apenas pelo sobrescrito primo nos elementos (ver equação E-2).

### E.5.2

#### Integração

Substituindo as equações anteriores, tem-se que o número de autovalores para um caminho fechado  $C^2$  é tal que

$$N_o = \frac{1}{j4\pi} \oint_{C^2} \frac{\text{tr} \left[ \text{adj}(\bar{\bar{Z}}) \frac{\partial}{\partial k_{\rho 1}} \bar{\bar{Z}} \right]}{k_{\rho 1} \det(\bar{\bar{Z}})} dk_{\rho 1}^2,$$

em que é importante ressaltar que o caminho de integração  $C^2$  é sobre o plano complexo  $k_{\rho 1}^2$ , contudo, o integrando depende de  $k_{\rho 1}$ .

Deve ser observado que o cálculo do *winding number* em termos de  $k_{\rho 1}^2$  é vantajoso para a situações em que os polos da equação característica estão muito próximos aos zeros. Nesta situação, no plano  $k_{\rho 1}$  zeros e polos estão muito próximos, exigindo uma integração numérica computacionalmente mais exigente em um contorno que passe próximo aos polos. No plano  $k_{\rho 1}^2$ , no entanto, os polos e zeros ficam relativamente mais afastado do que no outro plano, e portanto uma integração numérica computacionalmente menos exigente é requerida [53]. Como a formulação elaborada anteriormente é livre de polos, a integração também pode ser realizada em um contorno  $C$  sobre o plano complexo  $k_{\rho 1}$ , tal que

$$N_o = \frac{1}{j2\pi} \oint_C \frac{\text{tr} \left[ \text{adj}(\bar{\bar{Z}}) \frac{\partial}{\partial k_{\rho 1}} \bar{\bar{Z}} \right]}{\det(\bar{\bar{Z}})} dk_{\rho 1}. \quad (\text{E-28})$$

A vantagem da integração em termos de  $k_{\rho 1}^2$  é o contorno de busca ser um retângulo. Contudo, para guias confinados, ou seja, com  $\sigma = \infty$  na camada mais externa, tem-se que o *branch point* vai para o infinito, e a região de busca

por modos guiados pode ser limitado no eixo real desde  $\text{Re}(k_{\rho 1}) = 0$  até

$$\left( \frac{\pi}{r_2 - r_1} - \frac{r_3 - r_2}{r_2 - r_1} \right) \times (\text{Número de modos}), \text{ para } (r_2 - r_1) > (r_3 - r_2), \text{ e}$$

$$\left( \frac{\pi}{r_3 - r_2} - \frac{r_2 - r_1}{r_3 - r_2} \right) \times (\text{Número de modos}), \text{ para } (r_3 - r_2) > (r_2 - r_1),$$

para o caso do guia coaxial não homogêneo com duas camadas radiais. Essas expressões foram obtidas a partir da equação característica assintótica (2-73), que tem dois períodos, e levando em conta que para autovalores de alta ordem tem-se  $k_{\rho 1} \sim k_{\rho 2}$ . Os limites da região de busca em termos do eixo imaginário pode ser escolhidos tais que

$$\text{Im}(k_{\rho 1}) \leq \text{Abs}[\max(\chi_n)].$$

O limite do eixo imaginário envolve o quarto quadrante do plano complexo, permitindo a localização de constantes de propagação do tipo  $\gamma = \alpha \pm j\beta$ . Caso apenas ondas *forward* sejam necessários, esse quadrante não deve ser incluído. Caso o contorno de integração envolva quarto quadrante pode-se localizar ondas *backwards* complexas.

A expressão (E-28) envolve a determinação de uma adjunta de  $\bar{\bar{Z}}$ , que é tal que [57, 285]

$$\text{adj}(\bar{\bar{Z}}) = \det(\bar{\bar{Z}}) \bar{\bar{Z}}^{-1}.$$

Substituindo a expressão acima em (E-28), tem-se uma simplificação significativa, ou seja,

$$N_o = \frac{1}{j2\pi} \oint_C \text{tr} \left( \bar{\bar{Z}}^{-1} \frac{\partial}{\partial k_{\rho 1}} \bar{\bar{Z}} \right) dk_{\rho 1}. \quad (\text{E-29})$$

O traço do produto de duas matrizes  $\bar{\bar{A}}$  e  $\bar{\bar{B}}$  tem a seguinte propriedade [56, p. 34]

$$\text{tr}(\bar{\bar{A}}\bar{\bar{B}}) = \text{tr}(\bar{\bar{B}}\bar{\bar{A}}) = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N A_{mn} B_{nm},$$

que permite reescreve (E-29) na forma

$$N_o = \frac{1}{j2\pi} \oint_C \left[ \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N (\bar{\bar{Z}}^{-1})_{mn} \left( \frac{\partial}{\partial k_{\rho 1}} \bar{\bar{Z}} \right)_{nm} \right] dk_{\rho 1}. \quad (\text{E-30})$$

O *winding number* dado na forma de (E-30) é muito mais prático, e numericamente mais rápido de se avaliar do que (E-28). As matrizes  $\bar{\bar{Z}}$  e sua derivada termo a termo com respeito a  $k_{\rho 1}$  são analíticas. A matriz inversa de  $\bar{\bar{Z}}$  deve ser calculada numericamente, da mesma forma que a integral sobre o caminho  $C$ . Em geral, verificou-se que o tempo computacional gasto para calcular o número de zeros em um contorno no plano complexo envolvendo  $\sim 20$  modos para guias coaxiais não homogêneos confinados com perdas elevadas é menor que 5 vezes o tempo gasto pela determinação completamente numérica de

$N_o$ . Nessa comparação, o número de intervalos de integração trapezoidal é o mesmo nos dois casos, e a derivada numérica foi realizada pela função `DERIV` da biblioteca `IMSL` [58, p. 828].

Infelizmente a integração a integral de (E-30) deve ser calculada numericamente. É necessário definir um número suficiente de segmentos sobre  $C$  para que a integração resulte no correto número de zeros dentro da região limitada por  $C$ . De acordo com [59], o número de segmentos da integração deve aumentar até que  $\text{Im}(N_o) \rightarrow 0$ , e, portanto,  $\text{Re}(N_o)$  tende a um valor inteiro. Apesar deste ser um critério bastante prático, é passível a erros, e pode levar ao incorreto número de zeros. Por exemplo, se o contorno  $C$  é dividido em 4 segmentos,  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$  e  $C_4$ . Neste exemplo, a integral numérica de cada segmento é realiza individualmente. Se a integral numérica de  $C_1$  erra a quantia  $-0,5 + j\delta$  no segmento  $C_1$ , e por exemplo, no segmento  $C_3$  o erro é de  $-0,5 + j\delta$  ( $\delta$  é um valor infinitesimal), a soma das integrais totais vai estar errando  $-1, 0$ , e portanto, um zero que está dentro do contorno não é contabilizado.

Um critério para avaliar se a integração foi satisfatória e assegurar o correto valor de  $N_o$  é descrito a seguir. De acordo com (E-15), é possível saber o valor *exato* da parcela real do integrando, ou seja, a parcela imaginária de  $N_o$  em um caminho passando por  $z_1 \mapsto z_2 \mapsto z_3 \mapsto z_4 \mapsto z_1$  é tal que

$$\begin{aligned} \text{Im}(N_o) = & -\frac{1}{2\pi} \left\{ \log \{ \text{Abs}[G(k_{\rho 1})] \} \right\} \bigg|_{z_1}^{z_2} - \frac{1}{2\pi} \left\{ \log \{ \text{Abs}[G(k_{\rho 1})] \} \right\} \bigg|_{z_2}^{z_3} \\ & - \frac{1}{2\pi} \left\{ \log \{ \text{Abs}[G(k_{\rho 1})] \} \right\} \bigg|_{z_3}^{z_4} - \frac{1}{2\pi} \left\{ \log \{ \text{Abs}[G(k_{\rho 1})] \} \right\} \bigg|_{z_4}^{z_1}. \end{aligned} \quad (\text{E-31})$$

A condição  $\text{Im}(N_o) = 0$  é uma condição apenas necessária, ou seja, não é suficiente para assegurar que a integração está correta. Contudo, se cada trecho da integral, por exemplo,  $z_1 \mapsto z_2$ , verifica-se que

$$\text{Re} \left( \int_{z_1}^{z_2} \right) = -\frac{1}{2\pi} \left\{ \log \{ \text{Abs}[G(k_{\rho 1})] \} \right\} \bigg|_{z_1}^{z_2},$$

pode-se encontrar o valor inteiro de  $t$  que satisfaz (E-15). O mesmo vale para os outros intervalos de integração.

Dessa forma, o critério para verificar se o número de intervalos da integração é suficiente usado nesta Dissertação foi

$$\text{Re} \left( \int_{z_n}^{z_{n+1}} \right) + \frac{1}{2\pi} \left\{ \log \{ \text{Abs}[G(k_{\rho 1})] \} \right\} \bigg|_{z_n}^{z_{n+1}} < 10^{-3}, \text{ para } n = 1, 2, 3, 4.$$

### E.5.3

#### Localização dos Zeros

Após determinado o número de autovalores em um caminho fechado, uma grade de pontos no plano complexo  $k_{\rho 1}^2$  é determinada, como mostrado na Fig. E.6. A cada ponto está associado a amplitude de  $G(k_{\rho 1})$ . Os zeros tornam-se os mínimos locais de  $\text{Abs}[G(k_{\rho 1})]$ . Os mínimos locais são localizados por meio de um algoritmo que usa os 9 pontos adjacentes da grade: se o ponto central é um mínimo em relação aos 8 pontos que o circundam, este valor está próximo de um mínimo local de  $G(k_{\rho 1})$ . Os pontos das extremidades da grade não são verificados, afinal, o teorema do *winding number* não é válido para zeros sobre o contorno de integração, pois o integrando de (E-14) é singular. Se o número de autovalores for suficiente, o algoritmo para. Caso contrário, uma nova região de integração é gerada, calcula-se o *winding number* do contorno fechado, etc, até o número de autovalor suficientes ser encontrado como ilustrado da Fig. E.7.

Caso o número de mínimos locais encontrados em uma região seja menor que o *winding number* do contorno, a grade de pontos é refinada, sucessivamente, até todos mínimos locais serem encontrados.

Por fim, os mínimos locais encontrados são usados como valor inicial

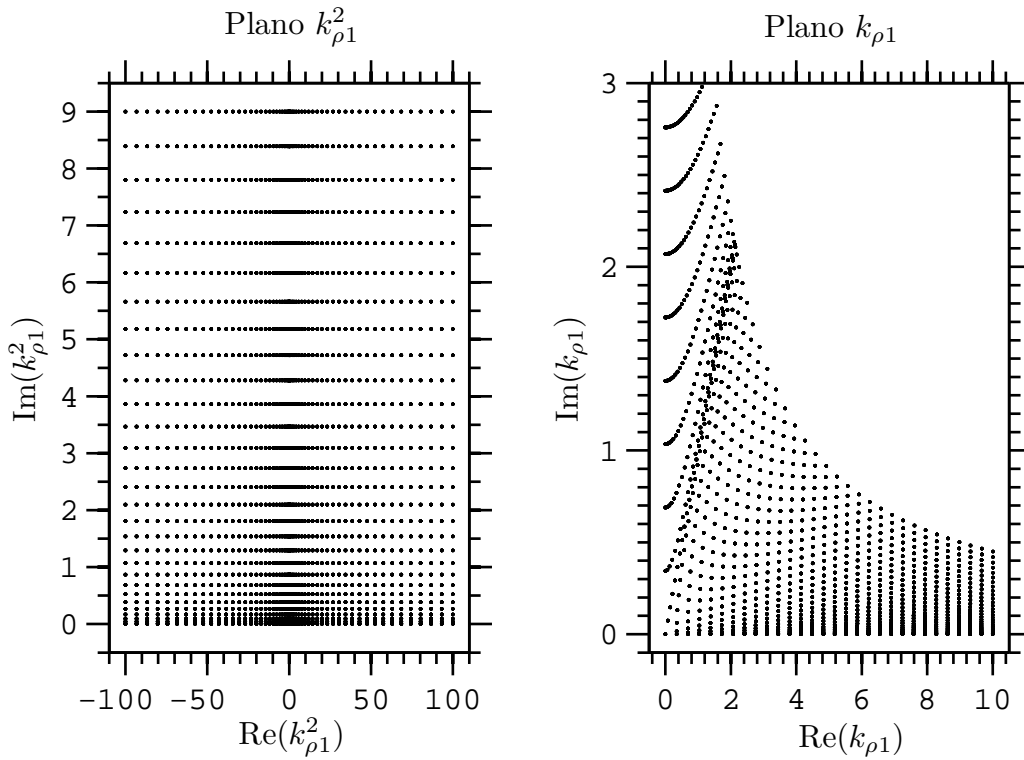


Figura E.6: Ilustração da grade de pontos no plano complexo  $k_{\rho 1}^2$  e seu mapeamento no plano  $k_{\rho 1}$ .

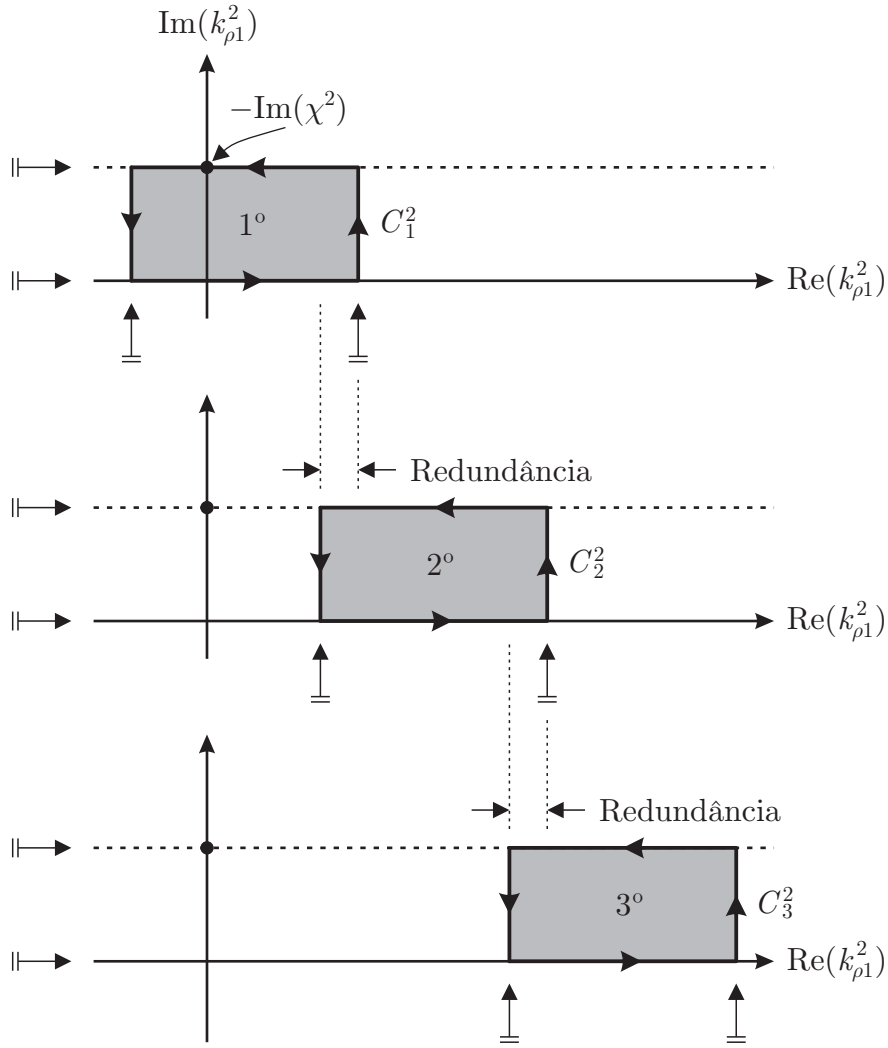


Figura E.7: Ilustração do algoritmo para busca de raízes no plano complexo  $k_{\rho 1}^2$ .

aproximado para uma busca de zeros pelo método de Muller (ZANLY, [58, pp. 1153-1156]).

Para o guias confinados não é tão conveniente usar a grade descrita da Fig. E.6. Uma grade regular em termos de  $k_{\rho 1}$  foi empregada neste caso. É importante mencionar que como a formulação da matriz  $\bar{\bar{Z}}$  é livre de polos, mesmo em guias não confinados a busca de autovalores pode ser realizada no plano  $k_{\rho 1}$ .

## E.6

### Validação da Formulação

A fim de validar a formulação supracitada para o guia não homogêneo com  $N$  camadas radiais, considera-se um caso particular: um guia coaxial com 4 camadas radiais pela Tabela E.1. Os resultados obtidos para a constante de propagação do modo fundamental  $\text{TM}_{00}$  pela formulação deste Apêndice são

comparados com os resultados do CST na Fig. E.8. Verifica-se a concordância entre os resultados.

No Apêndice F mais considerações são feitas para o caso particular em que  $N = 2$  camadas.

Camada	Raio interno (mm)	Raio externo (mm)	$\hat{\epsilon}_r$	$\hat{\sigma}$
1	1,5250	2,0	2,0	3,0
2	2,0	2,50	5,0	5,0
3	2,50	3,0	7,0	8,0
4	3,0	3,550	11,0	13,0

Tabela E.1: Dimensões do guia coaxial com 4 camadas radiais. As regiões  $0 \leq \rho \leq 1,5250$  e  $\rho \geq 3,550$  são condutores elétricos perfeitos.

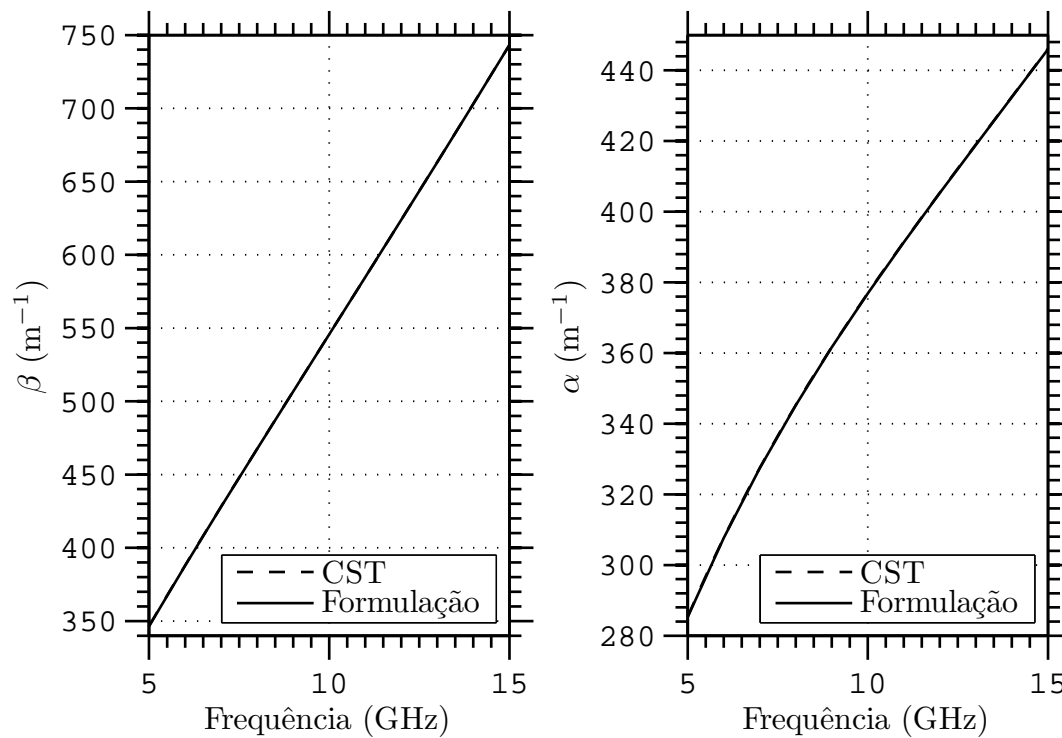


Figura E.8: Constantes de fase e de atenuação para o modo fundamental do guia descrito da Tabela E.1. Número de células do CST: 4467382.



## F

### Autovalores Complexos em Guias de Onda com 2 Camadas

#### F.1

##### Introdução

Nas referências [50] e [53] o método do *winding number* foi para determinar as soluções modais para guias de onda circulares com perdas. Na formulação empregada por essas referências as características de radiopropagação de túneis, poços de minas, furos de sondagens, etc., são modeladas como um guia de onda circular cujas paredes são compostas por solo. Após a aplicação das condições de contorno do problema, a solução modal é obtida resolvendo uma equação característica bem conhecida, em que os zeros são os autovalores que dão as constantes de propagação de cada modo. Admitindo que o solo apresenta perdas, os autovalores inevitavelmente são complexos. O método do *winding number* foi usado em [50] para determinar o número de zeros da equação característica para um contorno no plano complexo em termos do número de onda radial da camada mais interna do guia circular ( $w = ak_1$ ). O algoritmo descrito pela referência [50] inicia a busca dos zeros no plano complexo  $w$  a partir de um valor tal que  $\text{Im}(w) > 0$  para evitar os polos da equação característica que ocorrem próximo ao eixo real. A fim de evitar os problemas numéricos na determinação do *winding number* no plano  $w$ , em [53], os zeros da equação característica são buscados no plano  $w^2$ . Com este mapeamento,  $w \rightarrow w^2$ , as constantes de propagação de ondas *forward* são confinadas na região  $-\text{Im}[a^2\omega^2\mu_0(\epsilon_2 - \epsilon_1)] > \text{Im}(w^2) > 0$ . Em termos do plano  $w^2$ , a região de busca de zeros é uma faixa retangular, enquanto no plano  $w$  esta região é limitada pelos eixos e pela hipérbole

$$\text{Im}(w) = -\frac{1}{2\text{Re}(w)}\text{Im}[a^2\omega^2\mu_0(\epsilon_2 - \epsilon_0)]. \quad (\text{F-1})$$

As revisões propostas em [53] a cerca da técnica descrita em [50] melhoram a eficiência numérica do método de busca de zeros. Contudo, da mesma forma que no algoritmo de [50], as melhorias de [53] requerem o conhecimento de um contorno de integração livre de polos. Em [53] foi proposto localizar a posição dos polos da equação característica, e, em seguida, gerar um contorno de integração acima dos polos. No algoritmo descrito em [53] os zeros e polos da equação característica  $G(w)$  são determinados em função de  $|G(w)|$ , em que os máximos locais estão para os polos, e os mínimos locais estão para os zeros.

Verifica-se que em ambos algoritmos descritos em [50] e [53] é necessário

determinar posições de polos. Discute-se a seguir uma abordagem que não requer a localização de polos.

## F.2

### Equação Característica sem Polos

A notação usada a seguir é a mesma encontrada em [50] e [53]. A solução modal para um guia circular de raio  $a$  e propriedades eletromagnéticas do espaço livre  $(\epsilon_0, \mu_0)$  satisfaz a equação característica bem conhecida [60, 524-527]

$$G(w) = F_1 F_2 + \left( \frac{1}{w^2} - \frac{1}{y^2} \right)^2 (\nu \gamma)^2 = 0, \quad (\text{F-2})$$

em que

$$F_1 = \frac{\omega^2 \mu_0 \epsilon_0}{w} \frac{J'_\nu(w)}{J_\nu(w)} - \frac{\omega^2 \mu_2 \epsilon_2}{y} \frac{H'_\nu(y)}{H_\nu(y)}, \quad (\text{F-3a})$$

$$F_2 = \frac{1}{w} \frac{J'_\nu(w)}{J_\nu(w)} - \frac{1}{y} \frac{H'_\nu(y)}{H_\nu(y)}, \quad (\text{F-3b})$$

$$w = k_1 a, \quad y = k_2 a,$$

$$k_1^2 = \gamma^2 + \omega^2 \mu_1 \epsilon_1, \quad k_2^2 = \gamma^2 + \omega^2 \mu_2 \epsilon_2,$$

$$y = \sqrt{w^2 + a^2 \omega^2 \mu_0 (\epsilon_2 - \epsilon_0)}, \text{ e}$$

$$\gamma = \sqrt{\left( \frac{w}{a} \right)^2 - \omega^2 \mu_0 \epsilon_0}.$$

Nas equações acima, para  $z \in \mathbb{C}$ ,  $J_\nu(z)$  representa a função de Bessel de primeiro tipo, e como a dependência harmônica é da forma  $\exp(-j\omega t)$ ,  $H_\nu(z)$  está para a função de Hankel de segundo tipo. O parâmetro  $\nu$  é um inteiro e  $'$  representa a derivada com respeito ao argumento das funções de Bessel.

A fim de evitar a localização, bem como a exclusão dos polos da região de integração usado no método do *winding number*, a equação característica  $G(w) = 0$  é reescrita de modo a remover os polos. Fazendo

$$F_1^* = y \omega^2 \mu_0 \epsilon_0 J'_\nu(w) H_\nu(y) - w \omega^2 \mu_2 \epsilon_2 H'_\nu(y) J_\nu(w),$$

$$F_2^* = y J'_\nu(w) H_\nu(y) - w H'_\nu(y) J_\nu(w), \text{ e}$$

$$N^2 = w^2 y^2 J_\nu^2(w) H_\nu^2(y), \quad (\text{F-4})$$

pode-se escrever a equação característica (F-2) na forma

$$G^*(w) = F_1^* F_2^* + N^2 \left( \frac{1}{w^2} - \frac{1}{y^2} \right)^2 (\nu \gamma)^2 = 0, \quad (\text{F-5})$$

$\nu$	Modo	Winding number em $w = 0$	
		$G(w)$	$G^*(w)$
0	TM <sub>0m</sub>	0	+1
	TE <sub>0m</sub>	0	+1
1	HE <sub>1m</sub> , EH <sub>1m</sub>	-2	+2
2	HE <sub>2m</sub> , EH <sub>2m</sub>	-2	+4
3	HE <sub>3m</sub> , EH <sub>3m</sub>	-2	+6
⋮			
$\nu$	HE <sub><math>\nu</math>m</sub> , EH <sub><math>\nu</math>m</sub>	-2	+2 $\nu$

Tabela F.1: *Winding number* em um contorno infinitesimal envolvendo a origem  $w = 0$  em função da ordem das funções cilíndricas  $\nu$ .

que é livre de polos em termos da variável complexa  $w$ . As equações indicadas com o sobrescrito \* são livres de polos no plano  $w$ .

Usando a equação característica  $G^*(w) = 0$  em um contorno qualquer no plano complexo  $w$  que não envolva a origem pode-se determinar por meio do *winding number* o número de zeros de  $G^*$ . É importante mencionar que  $G$  e  $G^*$  compartilham os mesmos zeros, salvo em  $w = 0$ .

Analisando a analiticamente das funções  $G$  e  $G^*$ , pode-se relacionar a ordem das funções cilíndricas  $J_\nu$ , e  $H_\nu$  em função do *winding number* no ponto  $w = 0$ , como ilustra a Tabela F.1. Deve ser observado que quando  $\nu = 0$  os campos podem ser desacoplados em modos TM e TE puros. As equações características  $G_{TM}^*$  para o modo TM, e  $G_{TE}^*$  para o modo TE são tais que

$$G_{TM}^*(w) = F_1^*|_{\nu=0} = 0, \text{ e } G_{TE}^*(w) = F_2^*|_{\nu=0} = 0.$$

Dessa forma, pode ser verificado que em  $w = 0$  as equações características sem polos para os modos TM e TE puros apresentam um zero cada, como mostra a Tabela F.1.

Conhecida a contribuição do número de polos e zeros na origem  $w = 0$ , pode-se calcular o *winding number* em um contorno qualquer, que eventualmente envolva a origem. Caso a origem esteja dentro do contorno, subtraindo-se a contribuição da origem (valor listado na Tabela F.1), e tem-se o número de zeros de interesse dentro do contorno. Caso os meios do guia apresentem perdas muito pequenas, ou mesmo admitindo-se a condição sem perdas, os zeros da equação característica estão muito próximos aos eixos no plano  $w$ . Nesse caso, um contorno que envolve a origem pode ser usado para encontrar zeros muito próximos aos eixos ou a origem. A seguir, as considerações anteriores são validadas com resultados conhecidos da literatura.

Considera-se um túnel no solo. Admite-se que no túnel exista ar, que

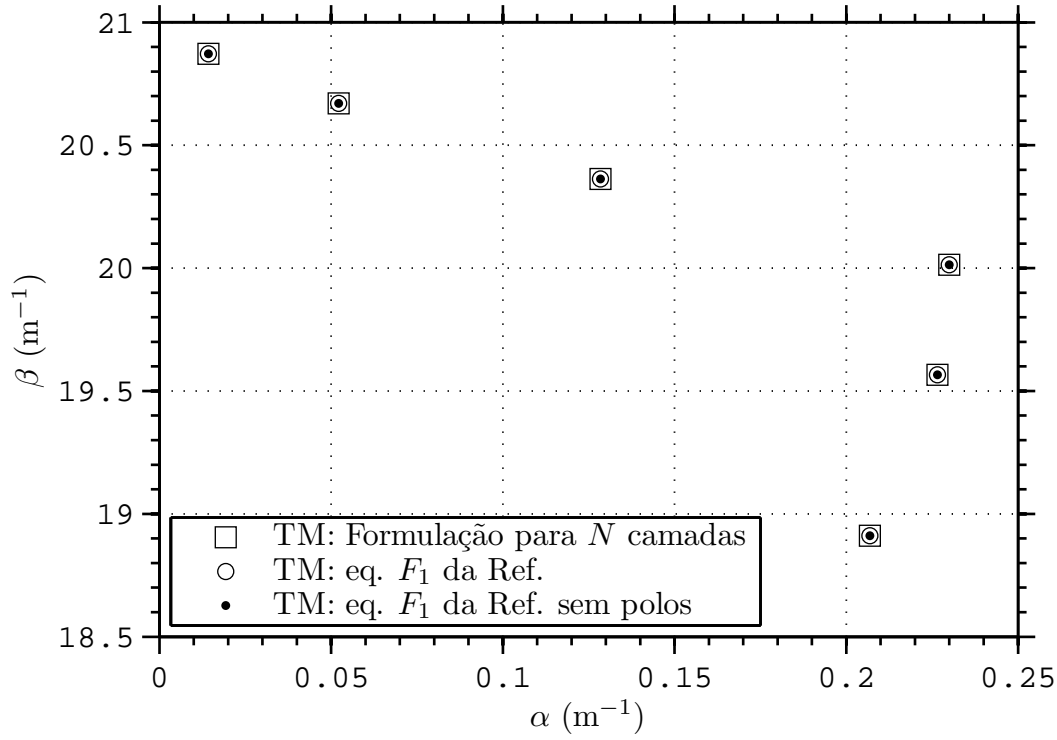


Figura F.1: Constantes de propagação computadas para o modo TM em 1 GHz em um túnel com 2 m de raio, preenchido com ar, e cujas paredes tem de solo apresentam  $\epsilon_2 = (10 - j)\epsilon_0$ .

em termos eletromagnéticos é caracterizado pelas propriedades do vácuo. As paredes do túnel são o solo. Considera-se um túnel com 2 m de raio e o solo com  $\epsilon_2 = (10 - j)\epsilon_0$ . Os resultados obtidos pela formulação clássica para os modos TM e TE em 1,0 GHz são mostrados nas Fig. F.1. Adicionalmente compara-se os autovalores obtidos pela formulação de  $N$  camadas radiais do Apêndice E bem como a formulação sem polos. Todos resultados convergem entre si. O mesmo problema é simulado em termos dos modos híbridos, com dependência azimutal 1, como visto na Fig. F.3. Fica clara a vantagem de eliminar polos nas equações transcendentais. Deve ser observado que todos os resultados obtidos pela formulação sem polos descrita neste Apêndice usaram, propositalmente, um contorno de integração do *winding number* envolvendo a origem. O algoritmo implementado em FORTRAN realiza a compensação descrita na Tabela F.1.

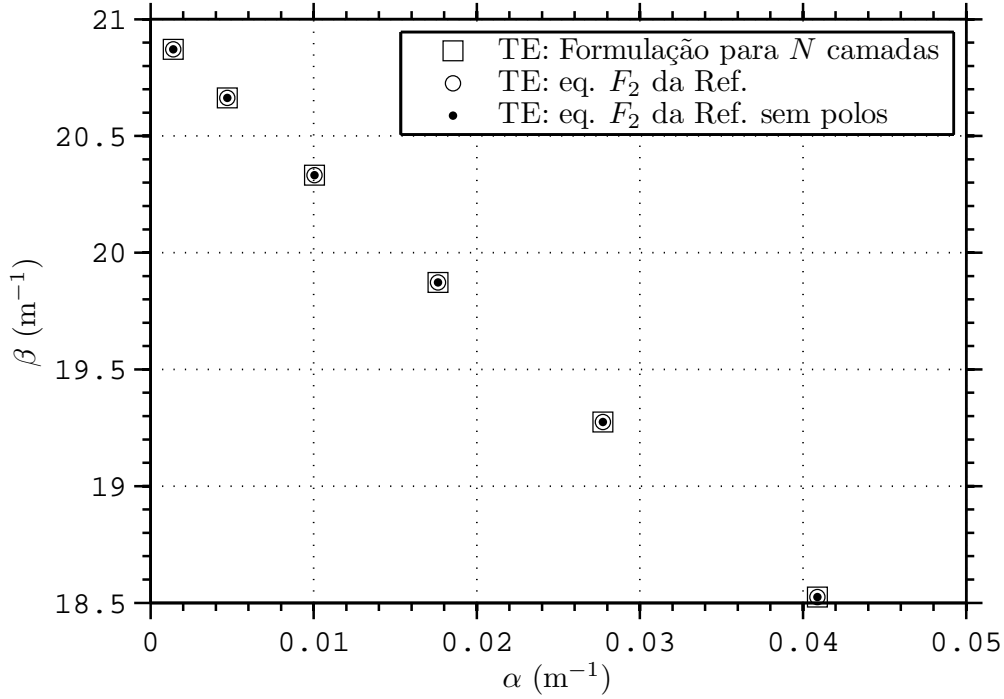


Figura F.2: Constantes de propagação computadas para o modo TE em 1 GHz em um túnel com 2 m de raio, preenchido com ar, e cujas paredes tem de solo apresentam  $\epsilon_2 = (10 - j)\epsilon_0$ .

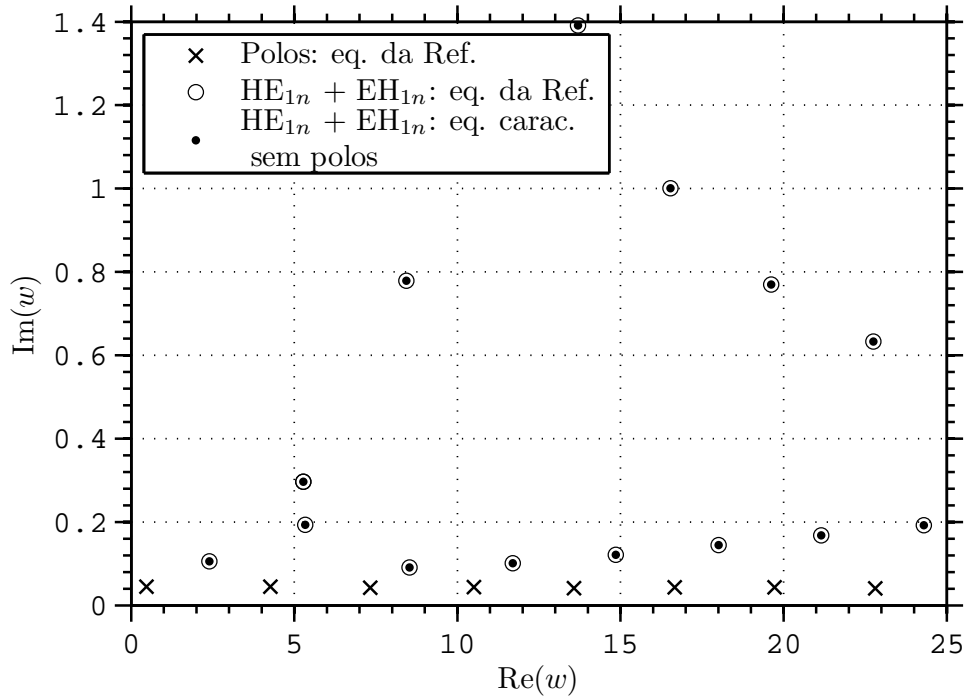


Figura F.3: Autovalores computados para modos híbridos em 1 GHz em um túnel com 2 m de raio, preenchido com ar, e cujas paredes tem de solo apresentam  $\epsilon_2 = (10 - j)\epsilon_0$ . Nota-se o empecilho de uma equação característica com polos.

## G Modelagem de Antenas

### G.1 Introdução

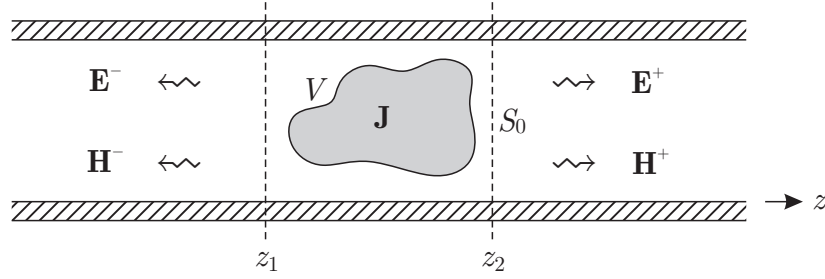
No capítulo 5 foi admitido que a antena transmissora dentro da coluna de produção do poço de petróleo excite apenas o primeiro modo  $TM_{00}^z$ , e que na recepção a outra antena seja sensível apenas a este modo. Neste Apêndice considera-se um modelo mais realista: as antenas podem transmitir ou receber infinitos modos. A distribuição de corrente da região da fonte é expandida em termos de amplitudes modais dos campos eletromagnéticos, e a tensão induzida na antena receptora é obtida sob a forma do somatório da contribuição de cada modo.

### G.2 Modelo de Fonte

A antena de transmissão do poço mostrado na Fig. 5.7 é uma bobina toroidal, na qual são enroladas espiras. No modelo de excitação para o poço considerado aqui, a antena vai ser modelada por espiras de corrente elétrica. Neste modelo desconsidera-se a interação entre o metal condutor das espiras e as paredes do guia de onda. Considera-se que a excitação dos modos de propagação em um guia de onda é feita por meio de uma fonte de densidade de corrente elétrica. Com respeito a Fig. G.1, considera-se uma fonte com densidade de corrente elétrica  $\mathbf{J}$  localizada entre dois planos transversais em  $z_1$  e  $z_2$  de um guia de onda de seção  $S_0$ , que gera os campos  $\mathbf{E}^+$  e  $\mathbf{H}^+$  propagando no sentido  $+z$ , e os campos  $\mathbf{E}^-$  e  $\mathbf{H}^-$  propagando para  $-z$ . Estes campos podem ser expressos em termos de um somatório modal, ou seja:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}^+ &= \sum_m A_m^+ \mathbf{E}_m^+, \text{ para } z > z_2, \\ \mathbf{H}^+ &= \sum_m A_m^+ \mathbf{H}_m^+, \text{ para } z > z_2, \\ \mathbf{E}^- &= \sum_m A_m^- \mathbf{E}_m^-, \text{ para } z < z_1, \text{ e} \\ \mathbf{H}^- &= \sum_m A_m^- \mathbf{H}_m^-, \text{ para } z < z_1,\end{aligned}$$

em que  $m$  é o índice modal.


 Figura G.1: fonte de corrente elétrica em guia de onda de seção transversal  $S_0$ .

De acordo com [61, pp. 206-209], a amplitude dos campos são tais que

$$A_m^+ = \frac{-1}{N_m} \int_V \mathbf{E}^- \cdot \mathbf{J} dv, \text{ e} \quad (\text{G-1})$$

$$A_m^- = \frac{-1}{N_m} \int_V \mathbf{E}^+ \cdot \mathbf{J} dv, \quad (\text{G-2})$$

em que a constante de normalização modal do  $m$ -ésimo modo é dada em função da integral de reação na abertura  $S_0$ :

$$N_m = 2 \int_{S_0} \mathbf{E}_{tm} \times \mathbf{H}_{tm} \cdot \mathbf{u}_z ds, \quad (\text{G-3})$$

em que  $\mathbf{E}_{tm}$  e  $\mathbf{H}_{tm}$  são os campos eletromagnéticos transversais ao sentido de propagação.

Supondo que a fonte está no guia da região  $I$  da Fig. 3.1, a integral de (G-3) já foi calculada no Capítulo 3 para  $z = 0$ , e é igual a  $R_{mm}$ . Portanto,

$$N_m = 2R_{mm}. \quad (\text{G-4})$$

A fonte considerada para excitar o poço é uma bobina toroidal com  $N_e$  espiras. Sem perda de generalidade, admite-se que a bobina esteja em trecho de guia homogêneo, e que excite apenas modos sem dependência azimutal. Como as frequências de interesse são muito baixas, admite-se que a corrente que percorre a bobina seja constante e igual a  $I_0$ . A estrutura da bobina é aproximada por  $N_e$  espiras, como mostrado na Fig. G.2. Como os campos excitados não têm dependência azimutal em termos de  $\phi$ , basta definir a densidade de corrente elétrica para uma espira em  $\phi = 0$ , que a densidade de corrente de toda a bobina vai ser proporcional ao número de espiras. Para uma espira de raio infinitesimal e dimensões mostradas na Fig. G.3, a densidade corrente é representada por

$$\mathbf{J}(\rho, \phi = 0, z) = I_0 \delta_T, \quad (\text{G-5})$$

em que

$$\delta_T = \begin{cases} \delta(z - z_T + d_1/2)\mathbf{u}_\rho \\ \delta(\rho - \rho_T - d_2/2)\mathbf{u}_z \\ -\delta(z - z_T - d_1/2)\mathbf{u}_\rho \\ -\delta(\rho - \rho_T + d_2/2)\mathbf{u}_z \end{cases}, \text{ para } \begin{cases} \rho_T - d_2/2 \leq \rho \leq \rho_T + d_2/2 \\ z_T - d_1/2 \leq z \leq z_T + d_1/2 \\ \rho_T + d_2/2 \leq \rho \leq \rho_T - d_2/2 \\ z_T + d_1/2 \leq z \leq z_T - d_1/2 \end{cases}. \quad (\text{G-6})$$

Os campos modais  $\text{TM}^z$  e  $\text{TE}^z$  para o guia coaxial foram desenvolvido no Capítulo 2 para a propagação para  $+z$ . Para a propagação para  $-z$  os campos são obtidos de forma análoga ao caso *forward*. Para melhor compreensão, os campos modais são repetidos a seguir.

Em guias isotrópicos tem-se que  $(\gamma_m, \mathbf{E}_{tm}, E_{zm}, \mathbf{H}_{tm}, H_{zm})$  são acompanhado por  $(-\gamma_m, \mathbf{E}_{tm}, -E_{zm}, -\mathbf{H}_{tm}, H_{zm})$  [34, p. 867]. Dessa forma, a partir dos campos se propagando para  $+z$  desenvolvidos no Capítulo 2 pode-se obter os campos eletromagnéticos se propagando para  $-z$ . O campo elétrico modal para uma onda  $\text{TEM}^z$  em um guia coaxial circular é da forma

$$\mathbf{E}_0^\pm = \frac{1}{\rho} e^{\mp jkz} \mathbf{u}_\rho. \quad (\text{G-7})$$

Para os modos  $\text{TM}^z$ , os campos modais são

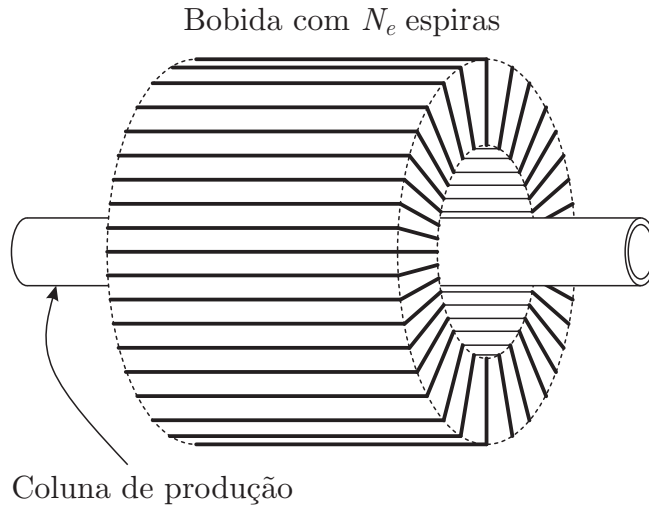


Figura G.2: Antena transmissora: bobina com  $N_e$  espira de corrente.

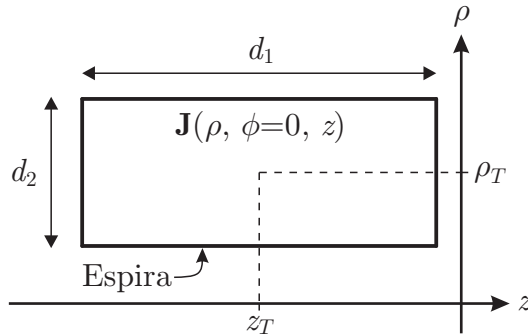


Figura G.3: Espira de corrente.



$$\mathbf{E}_m^\pm = -\frac{j k_{zm} k_{\rho m}}{\hat{y}} Z'_0(k_{\rho m} \rho) e^{\mp j k_{zm} z} \mathbf{u}_\rho \pm \frac{1}{\hat{y}} (k_{\rho m})^2 Z_0(k_{\rho m} \rho) e^{\mp j k_{zm} z} \mathbf{u}_z, \quad (\text{G-8})$$

em que

$$\begin{aligned} Z_0(k_{\rho m} \rho) &= A_{0,m} J_0(k_{\rho m} \rho) + B_{0,m} Y_0(k_{\rho m} \rho), \text{ e} \\ Z'_0(k_{\rho m} \rho) &= -Z_1(k_{\rho m} \rho) = A_{0,m} J'_0(k_{\rho m} \rho) + B_{0,m} Y'_0(k_{\rho m} \rho). \end{aligned}$$

Como os campos modais  $\text{TE}_{0m}^z$  não têm componentes em termos de  $\mathbf{u}_\rho$  e  $\mathbf{u}_z$ , o produto escalar entre esses campos e a densidade de corrente dada por (G-5) é nulo, e  $A_m^+ = A_m^- = 0$ .

No MMT desenvolvido no Capítulo 3 considera que o trecho de guia inicial na região  $I$  (ver Fig. 3.1) se estende para  $z \rightarrow -\infty$  ou termina em uma carga casada. Dessa forma são de interesse apenas os coeficientes de transmissão  $A_m^+$ .

Para o modo  $\text{TEM}^z$ , tem-se

$$\begin{aligned} A_0^+ &= -\frac{I_0}{2R_{00}^{\text{TEM}}} \left[ \int_z \int_0^{2\pi} \int_{\rho_T - d_2/2}^{\rho_T + d_2/2} \frac{1}{\rho} e^{jkz} \delta(z - z_T + d_1/2) \rho d\rho d\phi dz \right. \\ &\quad \left. - \int_z \int_0^{2\pi} \int_{\rho_T + d_2/2}^{\rho_T - d_2/2} \frac{1}{\rho} e^{jkz} \delta(z - z_T - d_1/2) \rho d\rho d\phi dz \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_0^+ &= -\frac{2\pi I_0}{2R_{00}^{\text{TEM}}} \left[ (\rho_T + d_2/2 - \rho_T + d_2/2) e^{jk(z_T - d_1/2)} \right. \\ &\quad \left. - (\rho_T - d_2/2 - \rho_T - d_2/2) e^{jk(z_T + d_1/2)} \right] \end{aligned}$$

$$A_0^+ = -I_0 \frac{\pi d_2}{R_{00}^{\text{TEM}}} e^{jkz_T} [e^{-jk d_1/2} + e^{jk d_1/2}] = -I_0 \frac{2\pi d_2}{R_{00}^{\text{TEM}}} \cos(k d_1/2) e^{jkz_T}.$$

Para os modos  $\text{TM}_{0m}^z$ , tem-se

$$A_m^+ = -\frac{I_0}{2R_{mm}^{TM}} \times \left[ \int_z \int_0^{2\pi} \int_{\rho_T-d_2/2}^{\rho_T+d_2/2} -\frac{jk_{zm}k_{\rho m}}{\hat{y}} Z'_0(k_{\rho m}\rho) e^{jk_{zm}z} \delta(z - z_T + d_1/2) \rho d\rho d\phi dz \right. \\ + \int_{z_T-d_1/2}^{z_T+d_1/2} \int_0^{2\pi} \int_{\rho} -\frac{1}{\hat{y}} (k_{\rho m})^2 Z_0(k_{\rho m}\rho) e^{jk_{zm}z} \delta(\rho - \rho_T - d_1/2) \rho d\rho d\phi dz \\ - \int_z \int_0^{2\pi} \int_{\rho_T+d_2/2}^{\rho_T-d_2/2} -\frac{jk_{zm}k_{\rho m}}{\hat{y}} Z'_0(k_{\rho m}\rho) e^{jk_{zm}z} \delta(z - z_T - d_1/2) \rho d\rho d\phi dz \\ \left. - \int_{z_T+d_1/2}^{z_T-d_1/2} \int_0^{2\pi} \int_{\rho} -\frac{1}{\hat{y}} (k_{\rho m})^2 Z_0(k_{\rho m}\rho) e^{jk_{zm}z} \delta(\rho - \rho_T + d_1/2) \rho d\rho d\phi dz \right]$$

$$A_m^+ = \frac{2\pi I_0}{2R_{mm}^{TM}} \left\{ \frac{jk_{zm}k_{\rho m}}{\hat{y}} \left[ e^{jk_{zm}(z_T-d_1/2)} \int_{\rho_T-d_2/2}^{\rho_T+d_2/2} Z'_0(k_{\rho m}\rho) \rho d\rho \right. \right. \\ \left. \left. - e^{jk_{zm}(z_T+d_1/2)} \int_{\rho_T+d_2/2}^{\rho_T-d_2/2} Z'_0(k_{\rho m}\rho) \rho d\rho \right] \right. \\ \left. + \frac{1}{\hat{y}} (k_{\rho m})^2 \left[ (\rho_T + d_1/2) Z_0[k_{\rho m}(\rho_T + d_1/2)] \int_{z_T-d_1/2}^{z_T+d_1/2} e^{jk_{zm}z} dz \right. \right. \\ \left. \left. - (\rho_T - d_1/2) Z_0[k_{\rho m}(\rho_T - d_1/2)] \int_{z_T+d_1/2}^{z_T-d_1/2} e^{jk_{zm}z} dz \right] \right\}$$

$$A_m^+ = \frac{\pi I_0}{R_{mm}^{TM}} \left\{ \frac{jk_{zm}k_{\rho m}}{\hat{y}} \left[ e^{jk_{zm}(z_T-d_1/2)} \int_{\rho_T-d_2/2}^{\rho_T+d_2/2} Z'_0(k_{\rho m}\rho) \rho d\rho \right. \right. \\ \left. \left. - e^{jk_{zm}(z_T+d_1/2)} \int_{\rho_T+d_2/2}^{\rho_T-d_2/2} Z'_0(k_{\rho m}\rho) \rho d\rho \right] \right. \\ \left. + \frac{1}{\hat{y}} (k_{\rho m})^2 \left[ (\rho_T + d_1/2) Z_0[k_{\rho m}(\rho_T + d_1/2)] [e^{jk_{zm}(z_T+d_1/2)} - e^{jk_{zm}(z_T-d_1/2)}] \right. \right. \\ \left. \left. - (\rho_T - d_1/2) Z_0[k_{\rho m}(\rho_T - d_1/2)] [e^{jk_{zm}(z_T-d_1/2)} - e^{jk_{zm}(z_T+d_1/2)}] \right] \right\}$$

$$\begin{aligned}
A_m^+ &= \frac{\pi I_0}{R_{mm}^{TM}} e^{jk_{zm}z_T} \left\{ \frac{jk_{zm}k_{\rho m}}{\hat{y}} \left[ e^{-jk_{zm}d_1/2} \int_{\rho_T-d_2/2}^{\rho_T+d_2/2} Z'_0(k_{\rho m}\rho) \rho d\rho \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - e^{jk_{zm}d_1/2} \int_{\rho_T+d_2/2}^{\rho_T-d_2/2} Z'_0(k_{\rho m}\rho) \rho d\rho \right] \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{\hat{y}} (k_{\rho m})^2 \left[ (\rho_T + d_1/2) Z_0[k_{\rho m}(\rho_T + d_1/2)] [e^{jk_{zm}d_1/2} - e^{-jk_{zm}d_1/2}] \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - (\rho_T - d_1/2) Z_0[k_{\rho m}(\rho_T - d_1/2)] [e^{-jk_{zm}d_1/2} - e^{jk_{zm}d_1/2}] \right] \right\}. \\
\\
A_m^+ &= -\frac{\pi I_0}{R_{mm}^{TM}} e^{jk_{zm}z_T} \left\{ \frac{jk_{zm}k_{\rho m}}{\hat{y}} \left[ e^{-jk_{zm}d_1/2} \int_{\rho_T-d_2/2}^{\rho_T+d_2/2} Z_1(k_{\rho m}\rho) \rho d\rho \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - e^{jk_{zm}d_1/2} \int_{\rho_T+d_2/2}^{\rho_T-d_2/2} Z_1(k_{\rho m}\rho) \rho d\rho \right] \right. \\
&\quad \left. - \frac{j^2}{\hat{y}} (k_{\rho m})^2 \sin(k_{zm}d_1/2) \left[ (\rho_T + d_1/2) Z_0[k_{\rho m}(\rho_T + d_1/2)] \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + (\rho_T - d_1/2) Z_0[k_{\rho m}(\rho_T - d_1/2)] \right] \right\}.
\end{aligned}$$

Com respeito a formulação do MMT do Capítulo 3, representando as amplitudes dos campos  $A_m^+$  pelo vetor  $\bar{A}^+$ , tem-se

$$\bar{A}_I = N_e \bar{A}^+, \quad (\text{G-9})$$

e como guia  $I$  (ver Fig. G.1) termina em carga casada, tem-se

$$\bar{A}_{II} = \bar{0}. \quad (\text{G-10})$$

### G.3

#### Modelo de Antena Receptora

A antena receptora é modelada de forma análoga a transmissora: uma bobina com  $N_e$  espiras. Para frequências baixas, em que o comprimento da antena é muito menor que o comprimento de onda, é razoável aproximar a tensão induzida em uma espira por

$$V_R = - \int_V \mathbf{E}^+ \cdot \boldsymbol{\delta}_R dv = - \sum_n A_n^+ \int_V E_n^+ \cdot \boldsymbol{\delta}_R dv \quad (\text{G-11})$$

em que  $\boldsymbol{\delta}_R$  define a posição da espira, e pode ser obtido fazendo  $\rho_T \rightarrow \rho_R$  e  $z_T \rightarrow z_R$  em (G-6).

Se apenas o modo fundamental  $\text{TEM}^z$  é propagante, então, a tensão induzida nas  $N_e$  espiras da bobina receptora pode ser aproximada por

$$V_R = N_e S_{21}^0(0, 0) A_I(0, 0) 4\pi d_2 \cos(kd_1/2) e^{-jkz_R}. \quad (\text{G-12})$$

Para sistemas de telemetria operando em baixas frequências (1–10 Hz) e considerando poços com dimensões similares as listadas na Tabela, apenas o modo principal é propagante, e a aproximação de (G-12) é razoável.

Considerando que as bobinas de transmissão e recepção têm as mesmas dimensões e número de espiras, e considerando que as o trecho de guia inicial tem as mesmas características eletromagnéticas que o último trecho de guia, para baixas frequências ( $k \rightarrow 0$ ), a equação (G-12) se reduz para

$$V_R = \frac{I_0 N_e^2 8\pi^2 d_2^2}{R_{00}^I} S_{21}^0(0, 0),$$

em que  $R_{00}^I$  é a auto-reação do primeiro modo do guia da região  $I$ , e  $S_{21}^0(0, 0)$  é o coeficiente de transmissão do primeiro modo.