3 TEORIA DAS OPÇÕES REAIS

3.1 INTRODUÇÃO

A literatura de finanças relativa à Análise de Investimentos vem abordando métodos e modelos de avaliação similares aos tradicionais métodos de avaliação de ativos financeiros, particularmente, opções. Essas novas metodologias são inseridas no contexto da Teoria de Opções Reais, similar à Teoria das Opções Financeiras. O conceito teórico de opção dá ao seu detentor o direito de investir e não a obrigação de fazê-lo. Caracteriza-se, então, pela liberdade de decisão e pela modelagem da flexibilidade gerencial. Na prática das organizações e dos mercados, inclusive o de energia elétrica, o dia-a-dia das decisões é pautado por flexibilidades gerenciais. Os métodos tradicionais, usualmente utilizados pelas empresas do setor elétrico para a avaliação de investimentos em Projetos de Eficiência Energética no Brasil (apresentados na seção 2.5), como o Valor Presente Líquido (VPL), o Fluxo de Caixa Descontado (FCD) e a Taxa Interna de Retorno (TIR) não consideram as incertezas de mercado e as flexibilidades gerenciais. A Teoria de Opções Reais permite a incorporação destas flexibilidades e incertezas nos métodos tradicionais de avaliação, sendo uma metodologia moderna para análise econômica de projetos e decisões de investimento sob incerteza [15, 16]. Existem vários tipos de flexibilidades gerenciais, tais como as opções de espera, de expansão, de parada temporária, de mudança de uso (*switch-use*), de mudança de insumo (*switch-input*), etc.

A teoria das opções usada como ferramenta para avaliação de investimentos é relativamente nova. Seu conceito principal fundamenta-se na Teoria das Opções Financeiras, já que as decisões gerenciais ao longo da vida útil de um projeto de investimento podem ser consideradas análogas às opções.

O desenvolvimento teórico inicial da Teoria das Opções Financeiras foi apresentado por Black e Scholes (1973) [37]. Neste trabalho, Black e Scholes desenvolveram uma fórmula analítica para avaliação de uma opção de compra europeia, através da formação de uma carteira de ativos financeiros dinâmica sem risco, portanto, que não dependia das preferências ao risco de seu detentor.

Posteriormente, Merton (1973) [38] generalizou alguns conceitos apresentados por Black e Scholes. Dentre os conceitos, foi demonstrado que uma opção de compra americana sobre um ativo objeto que não paga dividendos tem o mesmo valor de uma opção europeia de compra sobre o mesmo ativo objeto.

Geralmente, em opções reais o ativo básico paga dividendos que são os fluxos de caixa do projeto. Logo, pode-se concluir que a opção americana de compra sobre um ativo que paga dividendos é mais valorosa do que a opção europeia sobre o mesmo ativo, sendo esta diferença relativa à flexibilidade de exercício da opção americana antes da sua data de expiração.

Em analogia a Teoria de Opções Financeiras, a Teoria de Opções Reais é uma metodologia para avaliação de ativos reais, como os projetos de investimento, que leva em conta as flexibilidades operacionais e gerenciais ao longo da vida útil do projeto. Sua característica dinâmica, diferentemente de técnicas tradicionais como Valor Presente Líquido (VPL), conduz a resultados mais realistas. Um dos primeiros trabalhos a considerar uma oportunidade de investimento como uma opção e não uma obrigação foi desenvolvido por Tourinho (1979) [39]. Tourinho avaliou o valor de uma reserva de recurso natural, dado que o preço do recurso era estocástico e considerando que a reserva era uma opção perpétua sobre os recursos extraídos.

Define-se Opção Real como a flexibilidade que um gerente tem para tomar decisões sobre ativos reais. À medida que novas informações surgem e as incertezas sobre o fluxo de caixa revelam-se, o gerente pode tomar decisões que influenciarão positivamente o valor final do projeto. As decisões mais comuns são: i) saber o momento certo de investir ou abandonar um projeto; ii) modificar as características operacionais de um ativo ou; iii) trocar um ativo por outro. Assim, um investimento de capital pode ser considerado um conjunto de opções reais sobre um ativo real.

Um investimento retorna um fluxo de caixa futuro que é afetado pelas incertezas e pelas decisões que a empresa e seus competidores tomarão no futuro. Para tomar uma decisão hoje, a empresa precisa levar em conta essas considerações futuras. As técnicas de avaliação de investimentos que consideram as decisões gerenciais devem ser capazes de lidar com contingências futuras.

Este capítulo descreve os conceitos da Teoria de Opções Reais utilizada para a avaliação de ativos reais, tais como projetos de investimento, avaliação de projetos de pesquisa, avaliação de propriedades intelectuais, entre outros. Este capítulo inicia-se com uma descrição dos principais conceitos referentes à Teoria de Opções Financeiras; a seguir descrevem-se os conceitos da Teoria das Opções Reais e uma breve descrição dos métodos de avaliação das Opções Reais. Descrevem-se, ainda neste capítulo, as modelagens de processos estocásticos mais utilizados. E, finalizando com a apresentação do modelo de simulação Monte Carlo.

3.2 OPÇÕES FINANCEIRAS

A Teoria das Opções Financeiras fundamenta os conceitos da Teoria das Opções Reais, muito embora existam diferenças importantes entre estas duas teorias. Nesta seção serão apresentadas apenas definições básicas da Teoria de Opções Financeiras, já que o foco deste trabalho é a aplicação destes conceitos na avaliação de projetos de investimento por opções reais.

Uma opção é o direito de comprar ou vender uma quantidade específica de um bem ou ativo por um preço fixo em uma determinada data prefixada ou até esta data. O fato de ser um direito e não uma obrigação gera uma assimetria benéfica ao proprietário da opção, já que o exercício somente será feito no caso da oscilação no preço do ativo objeto ser favorável ao seu detentor.

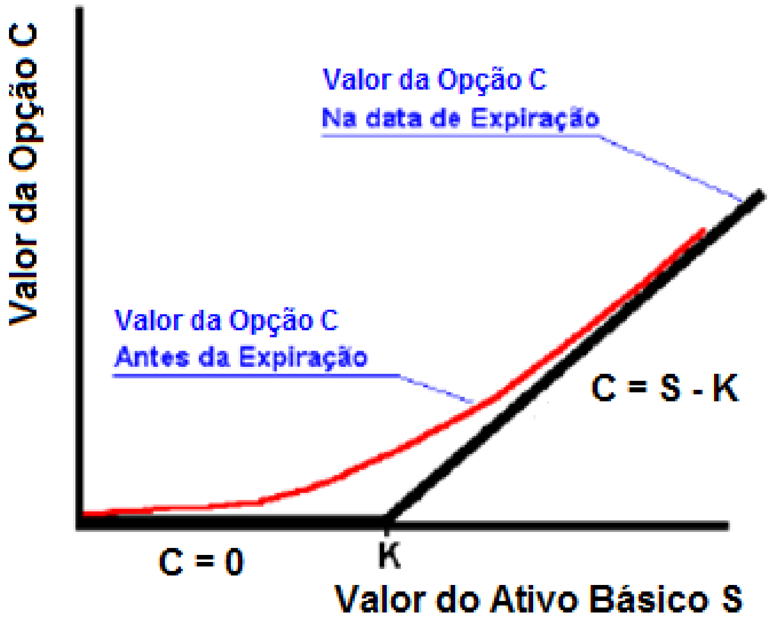
O preço fixo para a compra ou venda do ativo objeto é chamado de preço de exercício. A data prefixada para o exercício da opção é conhecida como data de expiração, data de vencimento, ou maturidade da opção.

3.2.1 Opções de Compra

Uma opção de compra (*call*) é um direito que o detentor do contrato tem de comprar o bem ou ativo objeto por um preço de exercício pré-estabelecido, em uma data futura determinada [12]. O ativo objeto pode ser uma ação de determinada firma, um contrato futuro sobre outro ativo ou uma commodity, entre outros. Este tipo de opção apresenta uma função de remuneração no vencimento dada pela equação (3-1).

$$\boldsymbol{C_T = max(S_T - K, 0)} \tag{3-1}$$

Onde $\boldsymbol{C_T}$ é o valor da opção de compra na data de vencimento $\boldsymbol{T}$ (*payoff*), $\boldsymbol{S_T}$ é o preço do ativo objeto e $\boldsymbol{K}$ é o preço de exercício. A Figura 4 mostra como o valor da opção de compra varia em função do preço do ativo objeto até a data de expiração da opção.



Fonte: Notas de Aula IND2272 PUC-Rio (2009) – Marco A. G. Dias.

Figura 4 – Variação do valor (payoff) de uma opção de compra

Observe-se que na expiração a opção só tem valor quando o preço do ativo objeto for superior ao preço de exercício. Mas, antes da expiração, o valor da opção é maior do que zero (C > 0), mesmo que o valor do ativo objeto seja menor do que o preço de exercício (S < K).

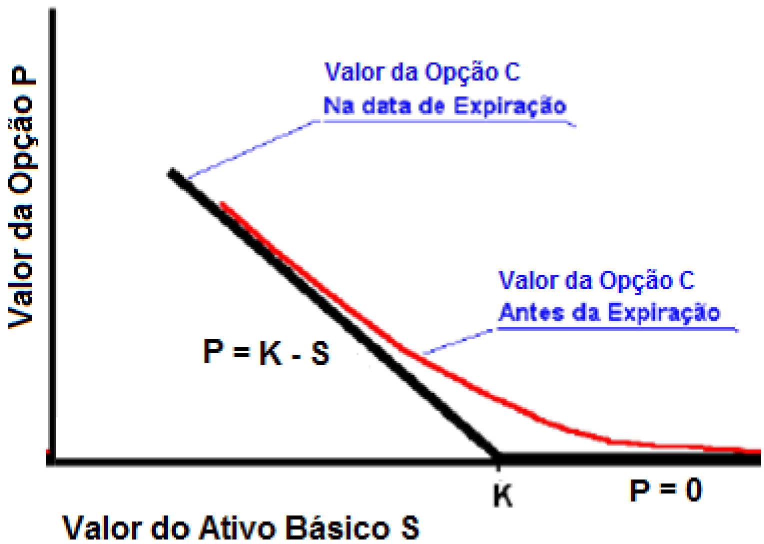
3.2.2 Opções de Venda

Uma opção de venda (*put*) dá ao seu detentor o direito de vender o bem ou ativo objeto por um preço de exercício numa data futura. A função de remuneração da opção de venda, no vencimento, é dada pela equação (3-2).

$$\boldsymbol{P_T = max(K - S_T, 0)} \qquad (3\text{-}2)$$

Onde $\boldsymbol{P_T}$ é o valor da opção de venda na data de vencimento $\boldsymbol{T}$ (*payoff*), $\boldsymbol{S_T}$ é o preço do ativo objeto e $\boldsymbol{K}$ é o preço de exercício. A Figura 5 mostra como o valor da opção de venda varia em relação ao preço do ativo objeto até a data de expiração da opção.

Neste caso, a opção de venda tem valor no vencimento quando o preço do ativo objeto for menor do que o preço de exercício. Antes do vencimento o valor da opção é maior do que zero (P > 0), mesmo quando o valor do ativo é maior do que o preço de exercício (S > K).



Fonte: Notas de Aula IND2272 PUC-Rio (2009) – Marco A. G. Dias.

Figura 5 – Variação do valor (payoff) de uma opção de venda

A opção de compra tem uma grande importância devido a sua analogia com uma oportunidade de investimento. Já a opção de venda pode ser pensada como um seguro, pois o detentor da opção, que também detém a ação, limita as suas perdas[14]. Assim, caso o valor da ação caia, pode-se exercer a opção e vender a ação por um preço pré-determinado como o mínimo adequado.

As opções também podem ser diferenciadas quanto à data de exercício. Opções europeias são aquelas onde os direitos podem ser exercidos somente na data de vencimento do título, enquanto as opções americanas são aquelas onde o detentor pode exercê-las em qualquer período até a data de vencimento.

O cálculo do valor de uma opção europeia, em geral, pode ser realizado mediante a equação de Black & Scholes & Merton [37], na versão com dividendos, que depende apenas de seis parâmetros:

a. Preço do ativo objeto (ação), *S*;
b. Preço de exercício da opção, *K*;
c. Volatilidade do ativo objeto (desvio padrão da taxa de retorno do ativo básico, isto é dS/S, em % a.a.), σ ;
d. O tempo que falta para a expiração da opção,τ, em anos (=T-t, onde T é a data de expiração e t é a data corrente);
e. A taxa de juros livre de risco, *r* (em % a.a.);
f. A taxa de distribuição de dividendos do ativo objeto, δ (*dividend yelds*, em % a.a. de *S*) .

A equação de Black e Scholes que avalia uma opção de compra europeia sobre uma ação que paga dividendos (Merton) é uma equação diferencial cuja solução é dada pela equação (3-3).

$$\boldsymbol{C = Se^{-\delta\tau}N(d_1) - Ke^{-r\tau}N(d_2)} \qquad (3\text{-}3)$$

[14] No caso de projetos (opções reais) a opção de venda tem analogia com a opção de abandono.

Onde $\boldsymbol{C}$ é o valor da opção de compra; $N(d_x)$ é a função de distribuição normal cumulativa da variável d_x,; d_1 e d_2 são dados pelas equações (3-4) e (3-5).

$$d_1 = \frac{ln\left(\frac{S}{K}\right) + (r - \delta + \frac{\sigma^2}{2})\tau}{\sigma\sqrt{\tau}} \tag{3-4}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{\tau} \tag{3-5}$$

Para a correta utilização da fórmula desenvolvida por Black e Scholes, é necessário que o mercado seja suficientemente completo de forma a não permitir oportunidades de arbitragem, já que a fórmula foi deduzida através da avaliação por arbitragem.

As opções americanas são, em geral, resolvidas numericamente ou usando aproximações analíticas. Em alguns casos, o valor da opção europeia é usado como um dos parâmetros para avaliar a opção americana através de relações do tipo:

Opção Americana = Opção Europeia + Prêmio de Exercício Antecipado.

A avaliação de opções americanas requer a determinação de uma política ótima de investimento, ou seja, deve-se determinar a partir de qual valor do preço do ativo objeto a opção deve ser exercida, de modo a maximizar o valor presente de sua remuneração. Para a teoria das opções reais, a determinação desta política é o fator central, já que pode estar sendo determinado o melhor momento para se investir em um projeto. O exercício ótimo de uma opção é dado pelo gatilho V*(t), que é função do tempo e dá o ponto de indiferença entre a esperar e investir, isto é, em V* o valor presente de espera é igual ao *payoff* de exercício.

3.2.3 Arbitragem

Conforme a abordagem da seção anterior, opções são derivativos, e um dos conceitos centrais da teoria de avaliação de ativos derivativos é o de arbitragem. Este conceito também foi utilizado por Black e Scholes (1973) [37] e é devida a Merton (1973) na aplicação em opções [38]. A definição de arbitragem é relativamente simples e significa tomar posições simultâneas em diferentes ativos de tal forma que um deles garanta um retorno livre de risco maior do que o retorno do ativo livre de risco do mercado. Se este lucro existir, então há uma oportunidade de arbitragem no mercado. Ou seja, na definição informal, arbitragem é a possibilidade de se ter lucro no mercado sem risco e sem investimento líquido (sem ter dinheiro).

Os conceitos de arbitragem são utilizados para definir o preço justo de um ativo financeiro, como contratos a termo, contratos futuros, swaps e opções. O preço justo de um ativo é aquele obtido em um ambiente livre de oportunidades de arbitragem.

3.2.4 Mercado Completo

Um mercado é dito completo quando existem ativos suficientes para reproduzir a remuneração de um título derivativo, como por exemplo, uma opção. Já um mercado é considerado incompleto quando a remuneração de um título derivativo não pode ser replicada utilizando os ativos existentes.

A completude é uma característica altamente desejável para avaliação de direitos contingenciais ("*Contingent Claims*"). Se um mercado é dito completo, então uma opção pode ser avaliada utilizando argumento de ausência de arbitragem, ou seja, o valor da opção pode ser obtido montando um portfólio livre de risco cujo valor presente pode ser obtido usando uma taxa de juros livre de risco. Se o mercado não for completo, este portfólio não pode ser montado.

Outra maneira de avaliar opções é através de uma mudança na medida de probabilidade, a chamada medida equivalente de Martingale (Q). Neste caso, o valor esperado do ativo básico (V) é penalizado e prova-se que sob medida “Q” pode-se descontar os resultados de funções ou derivativos F(V) com a taxa livre de risco. Entretanto, se o mercado for incompleto, a medida Q não é única e teria que ser selecionada.

3.2.5 Investimento Irreversível

Em geral o investimento é irreversível (totalmente ou parcialmente) pois uma vez feito, não pode ser recuperado totalmente caso o investidor se arrependa do investimento. Normalmente, a irreversibilidade é maior quando o capital a ser investido é específico da indústria. Não existe a possibilidade da recuperação total do capital investido.

Por exemplo, ao investir em um projeto para a conversão de uma usina térmica a gás de geração de eletricidade para bicombustível, o investidor estará investindo em um projeto específico da indústria de energia elétrica, ou seja, a planta não poderá ser utilizada para outros fins, a não ser produzir eletricidade com a opção de escolha do combustível da turbina a gás (Gás Natural ou Diesel).

A irreversibilidade desempenha um papel importante no processo de avaliação de projeto de investimento por Opções Reais, já que o exercício da opção é irreversível, enquanto que a espera é reversível.

3.3 OPÇÕES REAIS - MODELOS DE DECISÕES GERENCIAIS

A partir dos conceitos desenvolvidos pela Teoria das Opções Financeiras, a Teoria das Opções Reais é utilizada para avaliação de diversos tipos de investimentos de capital. Existem modelos para avaliação de investimentos na indústria do petróleo, modelos para avaliação de projetos de pesquisa e desenvolvimento, modelos para avaliação de ativos de propriedade intelectual, além de aplicações em outras indústrias. Com a desregulamentação da indústria de energia elétrica em vários países, inclusive no Brasil, a demanda por modelos de avaliação de ativos reais e ferramentas de gerenciamento de risco aumentou consideravelmente.

Determinar a viabilidade e a prioridade de investimentos potenciais é um passo crítico na tomada de decisões gerenciais, as quais são tomadas em ambientes incertos. Estas incertezas podem representar um risco elevado, mas também podem criar oportunidades de valor elevado para os investidores. Diversos fatores, dentre eles as condições de mercado, determinam o surgimento dessas incertezas e o gerente responsável pela tomada de decisões deverá acompanhar a evolução do mercado para assim realizar mudanças nos planos de investimento.

O dinamismo do mercado e a flexibilidade gerencial na avaliação de projetos de investimento (que está relacionada com a aparição de novas informações relativas ao projeto) podem levar uma empresa a alterar o cenário definido originalmente, como por exemplo: diferir o projeto; expandi-lo; prorrogá-lo ou abandoná-lo após a fase de planejamento. Quando exercitadas de forma ótima, todas estas opções proporcionam flexibilidade que aumenta o valor do projeto.

A análise de opções reais captura o valor dessa flexibilidade, o que os métodos tradicionais de avaliação de investimentos não conseguem fazer. Conforme apresentados no Capítulo 2 – Diagnóstico Energético, os métodos como o Valor Presente Líquido (VPL) ou o Fluxo de Caixa Descontado (FCD) não são suficientes para captar o valor associado à flexibilidade, pois eles tratam apenas de fluxos de caixa esperados. Tais limitações tornam esses métodos inadequados para análises quantitativas por induzir, na maioria das vezes, à taxas de desconto intuitivas. Em procedimentos deste tipo, existe forte tendência a valorizar excessivamente a aversão ao risco. Neste sentido, estes métodos subestimam sistematicamente todo projeto.

As opções reais são consequências naturais de circunstâncias criadas por situações do mundo real que proporcionam as características de irreversibilidade, incerteza e a flexibilidade de resposta à incerteza, incluindo a possibilidade de adiamento. No caso mais simples, pode-se estabelecer a seguinte analogia entre a oportunidade de investimento (opção real) e a opção financeira [13, 14]: uma firma com uma oportunidade de investimento irreversível carrega uma opção de investir no futuro (ou de esperar); ela tem o direito, mas não a obrigação, de comprar um ativo (investir em um projeto) no futuro, a um preço de exercício (o investimento). Quando a firma investe, ela exerce a opção e paga um custo de oportunidade igual ao seu valor. O exercício da opção (o investimento) é irreversível, mas a firma sempre tem a possibilidade de preservar o valor de sua opção (adiar o investimento) até que as condições de mercado se tornem mais favoráveis.

A Tabela 5 apresenta a analogia entre a opção real (oportunidade de investimento) e a opção financeira. Estabelecida esta analogia, é possível calcular o valor de uma opção real empregando os mesmos métodos usados para determinar o valor de uma opção financeira. Isto é válido no caso mais simples de opções reais de espera.

OPÇÃO FINANCEIRA	**OPÇÃO REAL**
Preço de exercício da opção	Custo de investimento do projeto
Ativo subjacente: Ação	Ativo subjacente: Projeto
Retorno da ação	Retorno do Projeto
Volatilidade no preço da ação	Volatilidade no valor do projeto
Fluxo de dividendo da ação	Fluxo de caixa líquido do projeto
Tempo de expiração da opção	Tempo de expiração da oportunidade de investimento
Taxa de juros livre de risco	Taxa de juros livre de risco

Tabela 5 – Analogia entre Opções Financeiras e Opções Reais

3.3.1 Tipos de Opções Reais

A seguir descrevem-se alguns dos tipos de opções reais identificados na bibliografia [13, 14, 40-44].

Opção de Abandono:

Trigeorgis [41] divide esse tipo de opção em duas classes: opção para desistir quando a construção estiver em curso e opção para abandonar pelo valor residual.

Opção para Desistir quando a Construção estiver em Curso: Na grande maioria dos projetos, o investimento necessário não se concentra em uma única despesa inicial; o investimento é fracionado. Esta situação específica, de projetos com despesas de investimento fracionadas ao longo do horizonte temporal, criam valiosas opções para desistência em qualquer fase. Por exemplo, quando se propõe construir uma fábrica em etapas, tais como etapa de projeto, de engenharia e de construção. Existe a opção de parar ou adiar o projeto ao fim de cada fase. Assim, cada fase é uma opção contingente ao exercício anterior de outras opções: uma opção sobre opções (opção composta). Desta forma, cada fase do investimento em questão pode ser vista como uma opção sobre o valor das fases subsequentes, ao requerer a despesa necessária para prosseguir para a etapa seguinte. Assim, cada fase do investimento pode ser avaliada de forma semelhante às opções sobre opções.

Opção para Abandonar pelo Valor Residual: Quando o funcionamento do projeto se torna prejudicial por qualquer motivo, a gerência não precisa continuar a incorrer com os custos fixos desse investimento. Nesta situação, a gerência poderá possuir uma valiosa opção de abandono por completo do investimento, em troca do seu valor residual encontrado no mercado secundário, através do preço de revenda dos equipamentos e/ou outros ativos do investimento.

Opção de Fechamento Temporário:

Trigeorgis e Mason [41] mostraram que a flexibilidade para fechar a produção temporariamente, ou de não funcionar por completo em qualquer período de vida do projeto, torna-se valiosa se as receitas não forem suficientes para cobrir os custos variáveis de funcionamento nesse período. Assim, em um dado momento, a gerência pode continuar com a produção e obter a diferença entre as receitas e o total de custos de funcionamento, ou então fechar e somente pagar os custos fixos associados ao projeto nesse momento.

Deste modo, a flexibilidade de funcionamento (ou não), em qualquer ano, pode ser vista como uma opção de compra da receita desse ano, ao pagar os custos variáveis como preço de exercício.

Opção de Conversão de um Conjunto de Mercadorias por Outro:

J. W. Kensinger [44, 45] analisou um projeto como uma carteira de opções de troca de um conjunto de mercadorias por outro, carteira que passa a ser administrada no futuro pela gerência.

Pode-se ilustrar a análise das opções de troca através de um simples caso de uma máquina que converte uma mercadoria em outra. Neste caso, a empresa que compra a máquina adquire a oportunidade de comprar a mercadoria de entrada, convertê-la e vender a mercadoria de saída, desde que seja rentável fazê-lo. Se tal atividade não for rentável em determinado instante, a empresa não precisa exercer a opção. A empresa detém a carteira dessas opções com diferentes maturidades, uma para cada período de vida da máquina.

Esta flexibilidade, de trocar os usos ou abandonar um projeto mais cedo em troca do seu "valor de recuperação", permite à gerência selecionar o valor máximo do projeto no seu atual uso ou no seu melhor uso alternativo. Assim, uma oportunidade de investimento, com a flexibilidade de troca de uso, pode ser vista como a soma do projeto em seu atual uso, mais uma opção de venda sobre o mesmo, com um preço de exercício igual ao valor de seu melhor uso alternativo [41].

Estas opções de flexibilidade consistem em uma carteira de opções de compra e venda, e um dos exemplos mais interessantes é constituído por uma empresa industrial flexível que pode produzir dois produtos diferentes (opção de troca de produtos).

Opção de Crescimento Futuro:

A maior parte dos investimentos iniciais pode ser vistos como pré-requisitos ou como elos em cadeias de projetos inter-relacionados. O valor destes projetos iniciais resulta também das futuras oportunidades de crescimento (que poderão desencadear).

Apesar de um aparente Valor Presente Líquido negativo, a infraestrutura, experiência e potencial de geração de subprodutos, durante o desenvolvimento do produto de primeira geração, pode servir como trampolim para o desenvolvimento de futuras gerações de produtos, com custos mais reduzidos ou de qualidade mais elevada, ou para criar aplicações totalmente novas. Mas, a menos que a empresa efetue esse investimento inicial, as gerações subsequentes ou outras aplicações não poderão ser viáveis. A infraestrutura ou a experiência adquirida, se a empresa for proprietária das mesmas, podem colocar a empresa em uma vantagem competitiva.

De fato, as decisões de investimento hoje podem criar a base para decisões de investimento amanhã; as alterações de capital efetuadas em qualquer ano são passos vitais na realização dos objetivos estratégicos. Pela mesma analogia, um planejamento de longo prazo implica necessariamente no cultivo de oportunidades de investimento particulares e podem ter um impacto monetário direto no preço dos títulos da empresa em um período próximo. Assim, as duas atividades são diferentes, mas relacionadas, pelo mesmo fim: a maximização do valor das ações ordinárias da empresa.

Opção de Adiar o Investimento:

A opção de adiar (Opção de Espera) um projeto por um período dá à gerência o direito, mas não a obrigação, de efetuar o investimento no próximo período; assim, a gerência esperará e só realizará o investimento se o valor do projeto no próximo período exceder o investimento necessário nessa data. Isto é, a opção de espera pode ser vista como uma opção de compra americana sobre o valor presente bruto do projeto V, com um preço de exercício igual à despesa de investimento requerida no período seguinte [41].

A opção de esperar (e aprender) [36] resume-se a possuir uma opção de compra sobre o projeto de investimento. A opção é exercida quando a empresa investe no projeto, sendo muito frequentemente preferível adiar um projeto com um VPL positivo como forma de manter viva a opção de compra. Este adiamento é mais atraente quando a incerteza é elevada e os fluxos de caixa imediatos do projeto são pequenos. De fato, uma opção é muito mais valiosa quando o risco ou a incerteza sobre o futuro é maior. A opção de espera é particularmente valiosa nas indústrias de extração de recursos e no desenvolvimento de bens imobiliários, devido à elevada incerteza e aos longos horizontes temporais associados a estes tipos de investimentos.

Opção de Expansão:

Uma vez efetuado um determinado projeto de investimento, a gerência possui a flexibilidade de alterá-lo de várias formas e em diferentes momentos no decorrer da vida do mesmo. Esta opção é similar a uma opção de compra de tipo americana para adquirir uma parte adicional (x%) do projeto, exigindo o custo de expansão (IE) como preço de exercício. Neste sentido, a oportunidade de investimento com uma opção de expansão pode ser pensada como o projeto de escala inicial, V, mais uma opção de compra num investimento futuro, isto é, V+max (xV-IE, 0).

A opção de expansão pode ser de importância estratégica, especialmente se permite à empresa explorar oportunidades futuras de crescimento. Esta opção, que será exercida somente se os desenvolvimentos futuros do mercado se tornarem favoráveis, pode tornar um investimento inicial, aparentemente não lucrativo, (tendo por base o método do VPL estático) num investimento que mereça ser realizado [41] [46].

Opção para Contrair:

Se as condições de mercado se tornarem desfavoráveis, a gerência pode decidir funcionar abaixo da capacidade ou mesmo reduzir a sua escala de operações (em digamos, c%), guardando parte das despesas do investimento planejado (IC). Esta flexibilidade para atenuar perdas é análoga a uma opção de venda do tipo americana sobre parte (c%) do projeto (título), com um preço de exercício igual aos potenciais custos poupados (IC), dado o Max(IC-cV, 0) [41].

3.4 PROCESSSOS ESTOCÁSTICOS

O problema geral de investimento sob incerteza pode ser visto como um problema de maximização de riqueza sujeito a uma ou mais incertezas que podem ser modelados como Processos Estocásticos.

Considerando a família de variáveis aleatórias comumente utilizadas para análise de opções financeiras, tem-se que um processo estocástico $X = \{X(t), t \in T\}$ é definido como uma lei de probabilidade para a evolução de X(t), [13]. Logo, para cada t no conjunto de índices T, X(t) é uma variável aleatória, sendo t usualmente interpretado como tempo. Uma realização de X(t) num intervalo de tempo é chamada de amostra de caminho ("*sample path*"). Podendo ser em tempo discreto ou em tempo contínuo.

Os processos estocásticos podem ser classificados como estacionários, onde as propriedades estatísticas, média e variância, da variável são assintóticamente constantes; ou como não estacionários, onde suas propriedades estatísticas não são constantes, porém o valor esperado da variável aleatória pode crescer sem limite e sua variância, T intervalos de tempo à frente, aumenta com T de forma ilimitada.

Um processo estocástico é definido por uma lei de probabilidade de evolução da variável aleatória. A equação (3-6) abaixo dá uma visão do processo estocástico como um valor esperado (previsão) mais um erro dessa previsão.

$$X(t) = E[X(t)] + erro(t) \quad (3\text{-}6)$$

Onde:

E[X(t)] = previsão do valor esperado da variável aleatória;

erro(t) = erro da previsão.

Pelo fato de ser considerada a natureza estocástica dos valores dos preços e dos custos, e sua ação ótima em cada cenário, os métodos de avaliação de Opções Reais se utilizam largamente dos Processos Estocásticos para modelar estas variações. Por isso, faz-se necessário estabelecer as propriedades dos processos estocásticos relevantes para a determinação destes valores. Alguns dos Processos Estocásticos comumente utilizados nas avaliações de Opções Reais serão apresentados a seguir.

3.4.1 Processos de Markov

São processos estocásticos onde somente o valor corrente de uma variável é relevante para prever o valor futuro desta variável. A propriedade de Markov diz que a distribuição de probabilidades dos valores em qualquer tempo no futuro depende única e exclusivamente de seu valor atual. Esta apresenta como principal vantagem o fato de simplificar a análise dos processos estocásticos, pois desconsidera nestas análises, os valores passados das variáveis.

<u>Definição – Processo de Markov:</u>

Um processo estocástico $X = \{X_t; t \in T\}$ é chamado um processo de Markov quando, para qualquer tempo $t_0 < t_1 <...< t_n < t$, a distribuição condicional de X_t para os valores dados de $Xt_0, Xt_1, ... , Xt_n$ dependem somente de Xt_n:

- Se X_t assumir valores discretos, esta definição é expressa como:

$$P\left(X_t = x \middle| X_{t_n} = x_n, X_{t_{n-1}} = x_{n-1}, \dots, X_{t_0} = x_0\right) = P\left(X_t = x \middle| X_{t_n} = x_n\right) \qquad (3\text{-}7)$$

- Se X_t assumir valores contínuos, esta definição é expressa como:

$$P\left(X_t \leq x \middle| X_{t_n} = x_n, X_{t_{n-1}} = x_{n-1}, \dots, X_{t_0} = x_0\right) = P\left(X_t \leq x \middle| X_{t_n} = x_n\right) \qquad (3\text{-}8)$$

Nas expressões (3-7) e (3-8), $t_0, t_1, ... t_{n-1}$ representam o passado, e t e t_n são o futuro e o presente, respectivamente.

A expressão (3-7), pode ser lida claramente como: a probabilidade da variável X ter valor igual a certo valor x no tempo t, dado que a variável aleatória tenha assumido os valores x_n , x_{n-1},..., x_0, respectivamente, nos tempos t_n , t_{n-1},..., t_0, é igual a probabilidade da variável X ter valor igual a um certo valor x no tempo t , dado apenas que a variável tenha assumido o valor x_n no tempo t_n.

Logo, em linguagem simples, definimos um processo de Markov como sendo um processo estocástico onde o futuro do processo, conhecido o estado presente, é independente do passado.

3.4.2 Processo de Wiener

Também conhecido como Movimento Browniano, o Processo de Wiener em tempo contínuo possui as seguintes propriedades:

1. É um processo de Markov, logo, para a previsão do valor futuro da variável necessita-se somente da sua distribuição de probabilidades e de seu valor atuais;
2. Possui incrementos independentes;
3. Mudanças sobre qualquer intervalo de tempo finito são normalmente distribuídas, com o aumento linear da variância em relação ao intervalo de tempo.

Se uma variável aleatória z(t) segue um processo de Wiener, então qualquer mudança em z, Δz, correspondente ao intervalo de tempo Δt, satisfaz as seguintes condições:

1. A relação entre Δz e Δt é dada por: $\Delta z = \varepsilon_t\sqrt{\Delta t}$, onde $\varepsilon_t \sim N(0,1)$;
2. A variável aleatória ε_t não possui correlação serial, sendo $E[\varepsilon_t , \varepsilon_s] = 0$, para $t \neq s$. Assim, os valores de Δz para quaisquer dois intervalos de tempo diferentes são independentes. Logo, z(t) segue um processo de Markov com incrementos independentes.

Dessa propriedade segue que, Δz tem distribuição normal com média 0 e variância igual a Δt, ou seja, $\Delta z \sim N(0, \Delta t)$.

Considerando-se o intervalo de tempo infinitesimal ($\Delta t \rightarrow 0$), o incremento do processo de Wiener (dz) pode ser representado em tempo contínuo, conforme demonstrado abaixo:

$$dz = \varepsilon_t \sqrt{dt} \quad (3\text{-}9)$$

Sendo $\varepsilon_t \sim N(0,1)$, tem-se que $E(dz) = 0$ e $Var(dz) = E[(dz)^2] = dt$. Logo, $dz \sim N(0,dt)$.

Observa-se que este processo não apresenta derivada em relação ao tempo no sentido convencional, conforme apresentado abaixo:

$$\frac{\Delta z}{\Delta t} = \frac{\varepsilon_t}{\sqrt{\Delta t_t}} \quad (3\text{-}10)$$

Logo, se $\Delta t \rightarrow 0$, $\Delta Z/\Delta t \rightarrow \infty$

3.4.3 Movimento Browniano Generalizado

Também conhecido como Processo de Itô, o Movimento Browniano Generalizado é dado pela equação (3-11) abaixo:

$$dx = a\,(x,t)\,dt + b(x,t)\,dz \quad (3\text{-}11)$$

Onde:

dz = incremento de Wiener;

a(x,t) = taxa instantânea de crescimento esperada (tendência do processo);

b(x,t) = taxa instantânea de variância esperada (relacionado à volatilidade do processo) .

A média e a variância de "dx" são definidas pelas equações (3-12) e (3-13) a seguir:

$$E(dx) = a(x,t) \tag{3-12}$$

$$Var(dx) = [b(x,t)]^2\, dt \tag{3-13}$$

3.4.4 Lema de Itô

Sendo um dos resultados mais importantes do cálculo estocástico, [13, 47] e também conhecido como Teorema Fundamental do Cálculo Estocástico, o Lema de Itô providencia uma fórmula analítica que simplifica a manipulação de diferenciais estocásticas. Pode ser considerado como a versão estocástica da Expansão de Taylor apresentada em cálculo diferencial.

Considerando-se a função F(x,t) diferenciável duas vezes em relação a "x" e uma vez em relação a "t". A equação (3-14) abaixo apresenta esta diferencial utilizando-se o Lema de Itô:

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial t}dt + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}dx^2 + \frac{1}{6}\frac{\partial^3 F}{\partial x^3}dx^3 + \cdots \tag{3-14}$$

Primeiramente, substituindo a equação (3-11) para *dx*, de forma a obtermos dx^2, tem-se:

$$(dx)^2 = a^2(x,t)dt^2 + 2a(x,t)b(x,t)(dt)^{3/2} + b^2(x,t)dt \tag{3-15}$$

Para *dt* infinitesimal os termos $dt^{3/2}$ e dt^2 são aproximadamente iguais a zero. Logo, da equação (3-15) tem-se:

$$(dx)^2 = b^2(x,t)dt \tag{3-16}$$

Da equação (3-14) pode-se observar que todos os termos na expansão de dx^3 incluirão o termo *dt* com expoente maior do que 1, logo tenderão à zero para *dt* infinitesimal. Este será o caso de qualquer termo de ordem superior, como p.ex.:

dx^4, etc. Logo substituindo por zero os termos dx de ordem maior ou igual a três na equação (3-14), obtém-se o Lema de Itô, conforme abaixo:

$$dF = \left[\frac{\partial F}{\partial t} + a(x,t)\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{1}{2}b^2(x,t)\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right]dt + b(x,t)\frac{\partial F}{\partial x}dz \quad (3\text{-}17)$$

3.4.5 Movimento Aritmético Browniano (MAB)

Também conhecido como processo de Wiener Generalizado, ou como Movimento Browniano com "drift" para uma variável, o Movimento Aritmético Browniano (MAB) é o caso mais simples de processo de Itô. Os termos $a(x,t) = \alpha$ e $b(x,t) = \sigma$, da equação (3-11), são constantes. O MAB pode ser definido pela seguinte expressão:

$$dx = \alpha\, dt + \sigma\, dz \quad (3\text{-}18)$$

Onde:

dz = incremento de Wiener;

α = tendência ("drift") do processo, neste caso, a tendência é constante;

σ = volatilidade do processo que representa a incerteza, neste caso, a volatilidade também é constante.

A mudança do valor de x, representada por dx, no intervalo de tempo dt, segue uma distribuição normal de probabilidades, com $E(\Delta x) = \alpha\Delta t$ e variância $V(\Delta x) = \sigma^2\Delta t$, conforme apresentado pela equação (3-19) a seguir:

$$\Delta x \sim N(\alpha\Delta t, \sigma^2\Delta t) \quad (3\text{-}19)$$

3.4.6 Movimento Geométrico Browniano (MGB)

Este caso particular de Processo de Itô, geralmente é o processo utilizado para modelar preço de ações, taxas de juros, preços de commodities e outras variáveis financeiras e econômicas, sendo o MGB, de longe, o processo estocástico mais utilizado tanto em Opções Financeiras, quanto em Opções Reais [12, 13, 16, 48].

A equação do MGB é vista a seguir:

$$dx = \alpha\, x\, dt + \sigma\, x\, dz \qquad (3\text{-}20)$$

Onde α e σ são constantes.

A seguir, pela aplicação do Lema de Itô, será demonstrado que se uma variável estocástica *x* segue um MGB, então uma função *F(x) = ln x*, segue um MAB.

Através da aplicação da equação (3-14) (Lema de Itô), na equação (3-20) (MGB), obtém-se a equação (3-21) a seguir:

$$dF = \left[\frac{\partial F}{\partial t} + \alpha x \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right] dt + \sigma x \frac{\partial F}{\partial x} dz \qquad (3\text{-}21)$$

As derivadas a serem utilizadas no Lema de Itô são:

$$\frac{\partial F}{dt} = 0 \;\; ; \;\; \frac{\partial F}{dx} = \frac{1}{x} \;\; ; \;\; \frac{\partial^2 F}{dx^2} = -\frac{1}{x^2} \qquad (3\text{-}22)$$

Logo, a partir de (3-21) e (3-22) tem-se que:

$$dF = \left(\alpha - \frac{1}{2}\sigma^2\right) dt + \sigma dz \qquad (3\text{-}23)$$

Logo, como queríamos demonstrar, segundo a equação (3-23) acima, a variação da função *"F"* segue uma distribuição normal com média $(a\text{-}1/2\sigma^2)dt$ e variância $\sigma^2 dt$. Ou seja, *dF* segue um MAB com a mesma volatilidade de *dx/x*, mas com diferentes *drifts*, onde $dx/x \neq d(ln(x))$, isto é, $dx/x > d(ln(x))$.

No MGB o valor esperado de *x* no instante *t*, dado pelo valor corrente x_0 pode ser demonstrado aplicando-se o Lema de Itô, onde F=ln(x) segue o MAB conforme a equação diferencial (3-23).

A equação diferencial (3-23) de *dF* tem a seguinte solução exata para $\Delta t = t - 0$:

$$\ln(x_t) - \ln(x_0) = ln(x_t/x_0) = \left(\alpha - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma N(0,1)\sqrt{t} \quad (3\text{-}24)$$

O que implica em:

$$x_{t=}x_0 e^{\left(\alpha-\frac{1}{2}\sigma^2\right)t+\sigma N(0,1)\sqrt{t}} \quad (3\text{-}25)$$

Logo:

$$\mathrm{E}[x_t] = x_0 e^{\left(\alpha-\frac{1}{2}\sigma^2\right)t} E\left[e^{\sigma N(0,1)\sqrt{t}}\right] \quad (3\text{-}26)$$

Então:

$$\mathrm{E}[x_t] = x_0 e^{\left(\alpha-\frac{1}{2}\sigma^2\right)t} E\left[e^{N(0,\sigma^2 t)}\right] \quad (3\text{-}27)$$

Se $x \sim N(m,s^2)$ pode-se provar que $E[e^x] = e^{[m+(1/2)s^2]}$ [15].

Logo, aplicando-se em (3-27), tem-se que:

$$\mathrm{E}[x_t] = x_0 e^{(\alpha-1/2\sigma^2)t} e^{1/2\sigma^2 t} \quad (3\text{-}28)$$

Então, o valor esperado da variável estocástica *x*, que segue um MGB, dado pelo valor corrente x_0 no instante *t* é dado por:

$$\mathrm{E}[x_t] = x_0 e^{\alpha t} \quad (3\text{-}29)$$

Se $x \sim N(m,s^2)$ pode-se provar que $Var[e^x] = e^{[2m+s^2]}\left(e^{s^2} - 1\right)$ [15].

Então, a variância de x, que segue um MGB, dado pelo valor corrente x_0 no instante t é dado por:

$$Var[x_t] = {x_0}^2 e^{2\alpha t}\left(e^{\sigma^2 t} - 1\right) \qquad (3\text{-}30)$$

Vale ressaltar que no caso do MGB, a variância (volatilidade) e a tendência não são constantes. A variância cresce indefinidamente com o horizonte de tempo, e a tendência é exponencial de crescimento ou de queda, conforme apresentado pela Figura 6 abaixo.

Mostra-se importante definir uma variação ou translação vertical do MGB. É o chamado MGB “livre de risco”. Esse processo é obtido pela subtração de um prêmio de risco π da tendência real α. Conforme a equação (3-31), demonstra-se com facilidade que a tendência neutra ao risco $(\alpha - \pi)$[15] é igual a:

$$\alpha - \pi = r - \delta \qquad (3\text{-}31)$$

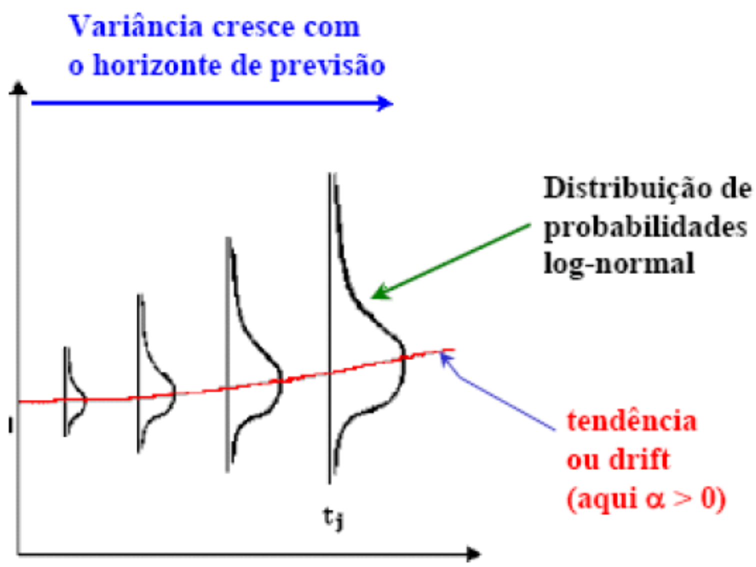
Onde:

r = taxa de desconto livre de risco;

π = prêmio de risco;

δ = taxa de conveniência (“convenience yield”).

[15] A taxa ajustada ao risco é μ = r + π. Em equilíbrio, essa é a taxa de retorno total de um ativo de risco μ = α + δ (ganho de capital mais dividendos). Logo, α + δ = r + π, ou (α − π = r – δ).



Fonte: Notas de Aula IND2272 PUC-Rio (2009) – Marco A. G. Dias.

Figura 6 – Tendência e Variância no MGB

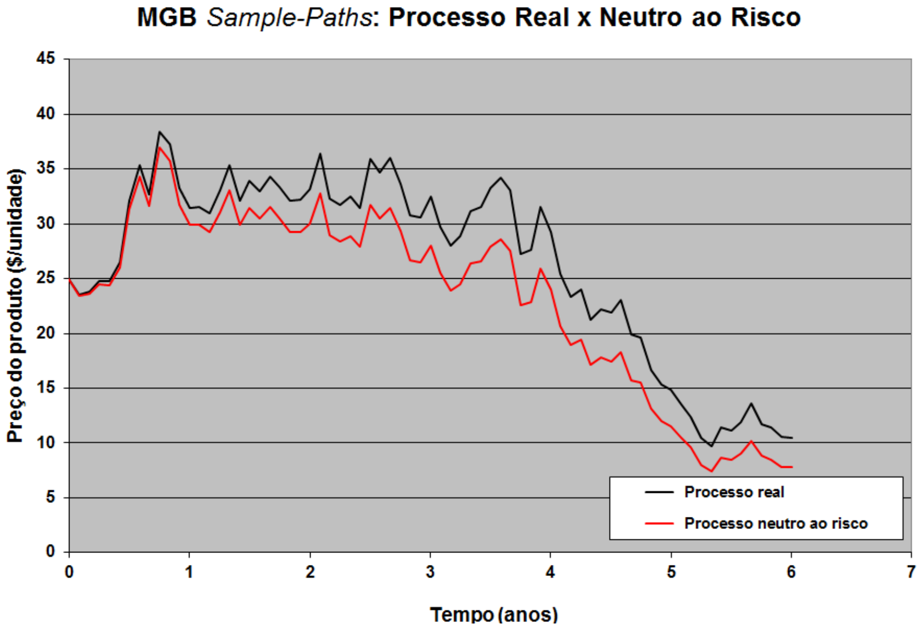
A taxa de conveniência é relacionada a fenômenos de preços futuros e benefícios de estoques no caso de "commodities", ou à taxa de distribuição de dividendos *("dividend yield")* se o ativo básico for uma opção financeira ou um projeto em operação com distribuição de fluxos de caixa.

Dessa forma, o MGB neutro ao risco é dado pela equação (3-32) a seguir:

$$dx = (r - \delta)\, x\, dt + \sigma\, x\, dz \qquad (3\text{-}32)$$

Em comparação com a equação (3-20) (MGB Real), observa-se que apenas o termo de tendência ("drift") é alterado. Geralmente, o processo neutro ao risco (descontado o prêmio de risco) é usado para avaliar opções e derivativos em geral, ao passo que o processo real é usado para fazer previsões e em algumas aplicações como em cálculo de "value at risk".

Como exemplo, a Figura 7 abaixo apresenta duas amostras de caminho ("sample paths") de preços de barril de petróleo ($/bbl) seguindo um MGB real e duas amostras de caminho equivalentes (mesmos parâmetros e mesmos choques estocásticos dz) para o caso de um MGB neutro ao risco.



Fonte: Notas de Aula IND2272 PUC-Rio (2009) – Marco A. G. Dias.

Figura 7 – Simulação MGB real x MGB neutro ao risco

Observa-se que a amostra neutra ao risco é sempre menor que a amostra real (a diferença é o prêmio de risco). Por este motivo, a simulação neutra ao risco de um processo estocástico é a simulação real penalizada por um valor igual ao prêmio de risco.

3.4.7 Movimento de Reversão à Média (MRM)

Foi observado no processo de Movimento Geométrico Browniano, que o valor previsto tende a divergir do seu valor original, dado que o processo apresenta uma tendência exponencial de crescimento ou de queda.

Nos Movimentos de Reversão à Média, que também são processos de Markov, observa-se que o sentido e a intensidade da tendência dependem do valor corrente, e que a variância inicialmente cresce e posteriormente se estabiliza (variância limitada). Nesse processo, o valor tende a reverter para o equilíbrio no valor médio[13].

A equação do caso mais simples de MRM, o MRM aritmético, também conhecido como Ornstein-Uhlenbeck, é apresentada abaixo:

$$dx = \eta(\bar{x} - x)dt + \sigma dz \tag{3-33}$$

Onde:

dz = incremento de Wiener;

η = velocidade de reversão à média (indica a velocidade com que o processo tende a voltar para o valor médio);

$\bar{x}$ = nível normal de x (valor para o qual x tende a reverter).

O valor esperado e a variância são dados pelas equações (3-34) e (3-35), a seguir:

$$E(x_t) = \bar{x} - (x_0 - \bar{x})e^{-\eta(t-t_0)} \tag{3-34}$$

$$Var(x_t) = \frac{\sigma^2}{2\eta}(1 - e^{-2\eta(t_0 - t)}) \tag{3-35}$$

Observa-se quando t $\rightarrow \infty$:

$$\lim E(x_T) = \lim[\bar{x} - (x_0 - \bar{x})\frac{1}{e^{\eta T}}] = \bar{x} - (x_0 - x)\lim\left[\frac{1}{e^{\eta T}}\right] \tag{3-36}$$

Então:

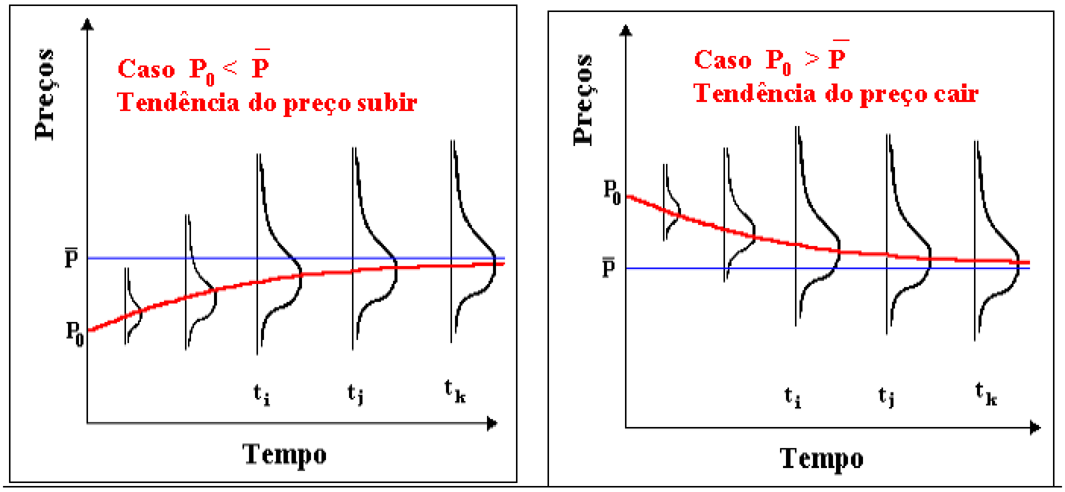
$$T \rightarrow \infty, \quad e^{\eta T} \rightarrow \infty \text{ e } (x_0 - \bar{x})\frac{1}{e^{\eta T}} \rightarrow 0$$

$$T \xrightarrow{\lim} \infty$$

Logo:

$$E(x_T) = \bar{x} \tag{3-37}$$

No caso do processo de reversão à média, a tendência é o preço reverter para um nível de equilíbrio de mercado, $\bar{x}$, chamada de média de longo prazo. Ou seja, a variância cresce inicialmente e depois se estabiliza na média de longo prazo. A Figura 8 apresenta a tendência do processo de reversão à média, onde pode-se observar variâncias estáveis após t_i, ou seja, em t_i, t_j e t_k, as variâncias são aproximadamente iguais.



Fonte: Notas de Aula IND2272 PUC-Rio (2009) – Marco A. G. Dias.

Figura 8 - Tendência e Variância do Processo de Reversão à Média (MRM)

3.4.8 Métodos de avaliação de Opções Reais

Do mesmo modo que uma opção financeira, uma opção real pode ser avaliada usando técnicas de análise de Direitos Contingenciais ("*Contingent Claims*"). Independentemente se os investidores são ou não avessos ao risco, o valor da opção pode ser obtido montando-se uma carteira dinâmica, sem risco (independentemente das preferências dos investidores), que replica o valor do ativo real, evitando-se o problema complexo de estimar a taxa ajustada ao risco de uma opção. Utilizando ferramentas do cálculo estocástico, obtém-se uma equação diferencial parcial que pode ser resolvida analiticamente ou através de métodos numéricos. Este método se mostra limitado, pois se o número de variáveis com incerteza for grande (maior ou igual a 3), o processo de avaliação pode tornar-se pesado computacionalmente ou algebricamente intratável.

Outro método numérico, conhecido como árvore binomial, foi proposto por Cox, Ross e Rubinstein (1979) [49]. Esse método tem o mesmo problema em termos de ser intratável quando o número de processos estocásticos for maior ou igual a 3. A distribuição de probabilidades do ativo em cada período, suposta log-normal, foi aproximada por uma distribuição binomial. Assim, em cada período o preço do ativo pode mudar para somente dois valores possíveis, conforme apresentado pela árvore binomial da Figura 9 a seguir:

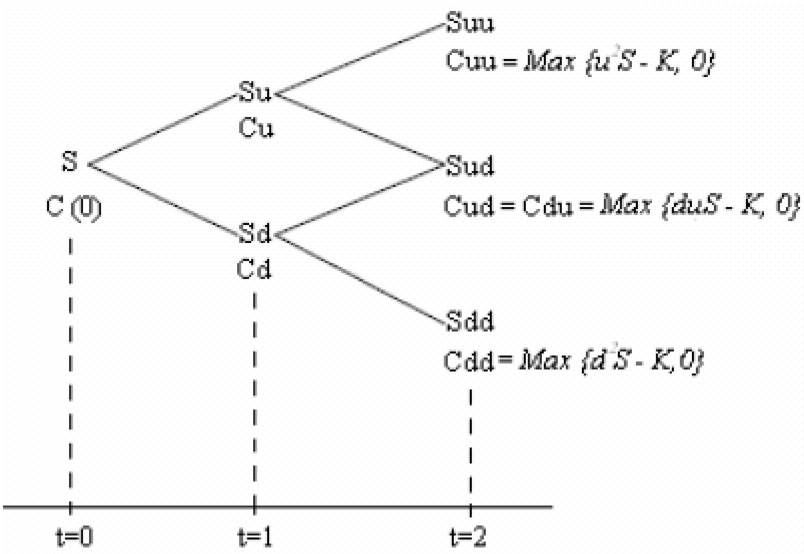


Figura 9 – Valor (*payoff*) de uma opção em cada período

Desenvolvido em 1973, o modelo de Black e Scholes é considerado até os dias de hoje, como a principal contribuição para a precificação de opções. Inicialmente utilizado para avaliar opções de compra e opções de venda europeias com ativo-objeto que não pagam dividendos.

Para complementar o modelo, Merton (1973) [38] derivou a equação de Black & Scholes adaptada para opções em ativos com dividendos. Para tal, foi considerado que os dividendos pagos são conhecidos com antecedência e que o valor corrente do ativo-objeto poderia ser deduzido do valor presente dos dividendos pagos durante a vida útil da opção. Esta dedução é dada pela taxa de dividendos sobre o preço ou "*dividend yield*" (δ). Este modelo tem as seguintes premissas:

- O preço da ação (ativo-objeto) segue um processo estocástico MGB, (distribuição log-normal);
- Não existem requerimentos de margem de garantia;
- Não há custos de transação e de tributação;
- Os papéis são perfeitamente divisíveis;
- Inexistência de arbitragem;
- Negociação contínua do ativo-objeto;
- Taxa livre de risco constante e igual para diferentes maturidades;
- Volatilidade constante.

No desenvolvimento das equações do modelo, foi utilizado para eliminar o risco, a montagem de uma carteira composta por ação e opção, com a taxa de retorno dada pela taxa livre de risco.

O modelo ajustado considerando dividendos (Modelo de Black, Scholes e Merton) é dado pelas equações a seguir:

$$Call = Se^{-\delta\tau}N(d_1) - Xe^{-r\tau}N(d_2) \tag{3-38}$$

$$Put = Xe^{-r\tau}N(-d_2) - Se^{-\delta\tau}N(-d_1) \tag{3-39}$$

Onde:

$$d_1 = \frac{ln\left(\frac{S}{X}\right) + \left(r - \delta + \frac{\sigma^2}{2}\right)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}} \tag{3-40}$$

$$d_2 = \frac{ln\left(\frac{S}{X}\right) + \left(r - \delta - \frac{\sigma^2}{2}\right)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}} \tag{3-41}$$

S = preço corrente do ativo básico;

N = função cumulativa da probabilidade normal padronizada;

X = preço de exercício da opção;

r = taxa livre de risco;

σ = volatilidade do preço do ativo básico (desvio-padrão da taxa de retorno do ativo básico, isto é, de dS/S);

τ = prazo até o vencimento da opção ($\tau = T - t$, onde T = data da expiração e t = data corrente);

δ = taxa de distribuição de dividendos do ativo básico, (*dividend yield* em % p.a. de S).

Técnicas de simulação estatística, como Monte Carlo e Programação Dinâmica Estocástica, também podem ser utilizadas para a avaliação de opções. Simulação de Monte Carlo normalmente é utilizada para avaliação de opções Europeias, pois a regra de exercício é simples e só ocorre na expiração (não é necessário trabalhar "*backwards*", como nas opções americanas).

3.4.9 Simulação de Monte Carlo

Desenvolvido durante a Segunda Guerra Mundial, no Projeto Manhattan, por Metropolis e Ulam (1949), o método de Monte Carlo é baseado no uso de números fortuitos e estatística de probabilidade, resolvendo os problemas através da simulação direta do processo físico, se mostrando flexível para manusear vários detalhes específicos dos problemas, várias restrições e várias fontes de incertezas, [15] [50].

O método leva este nome devido às roletas de Monte Carlo, no Principado de Mônaco. Os primeiros estudos envolvendo Simulação de Monte Carlo na avaliação de investimentos de capital foram feitos por Hertz (1964).

A Simulação de Monte Carlo (SMC) é um método cada vez mais utilizado também para a precificação de derivativos, inclusive opções. O método de Monte Carlo resolve o problema pela simulação direta do processo físico, evitando-se de escrever e solucionar a equação diferencial da opção real. Além disso, a aplicação do método Monte Carlo é vantajoso por não ter problemas: (i) da dimensionalidade, que ocorre quando se tem um número grande de fontes de incerteza; (ii) da modelagem, que normalmente exigem esforço computacional e dificultam a solução de problemas reais complexos.

As etapas básicas da solução de um problema através do método de Monte Carlo são apresentadas a seguir:

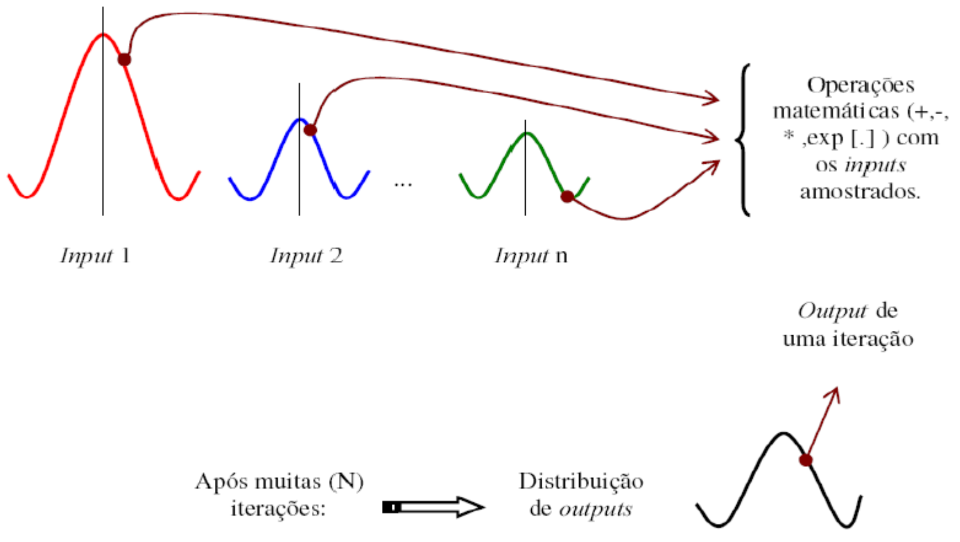
1 - Especificação da distribuição das variáveis de entrada do problema estudado (inputs), inclusive através de processos estocásticos (sequências temporais de distribuições); e das correlações entre as variáveis,

2 - Operações matemáticas com as amostras dos inputs para calcular o resultado (output) gerado por essa amostra,

3 - Repetição N vezes das etapas 1 e 2 apresentadas acima, gerando N outputs; e

4 - Cálculo da média, da variância, do intervalo de confiança e outras propriedades estatísticas da distribuição de output que foi gerada.

A Figura 10 abaixo ilustra as etapas da Simulação de Monte Carlo:



Fonte: Notas de Aula IND2272 PUC-Rio (2009) – Marco A. G. Dias.

Figura 10 – Etapas da Simulação de Monte Carlo

3.4.9.1 Simulação de Monte Carlo na Precificação de Opções

Especificamente na precificação de opções, recomenda-se a utilização da Simulação de Monte Carlo [51, 52] quando as opções dependem de múltiplas variáveis de estado e processos estocásticos diversos e/ou quando os "*payoffs*" dependem da trajetória de preços do ativo.

Observa-se que, no caso da precificação de Opções, as etapas da solução por Simulação de Monte Carlo são as seguintes:

1 – Simulação neutra ao risco do preço do ativo básico, escolhendo-se adequadamente o processo estocástico, e os parâmetros do mesmo;

2 – Determinação do payoff da opção para cada amostra;

3 – Cálculo do valor presente de seu payoff usando a taxa livre de risco;

4 – Precificação da opção, através da média da simulação.

A principal vantagem de Monte Carlo sobre outros métodos numéricos na avaliação de opções é a sua flexibilidade de manusear várias fontes de incerteza e vários aspectos práticos de modelagem em uma planilha. Porém, apresenta como desvantagem o fato do erro ser inversamente proporcional ao tamanho da amostra, exigindo para a obtenção de melhores estimativas, maiores amostras e, consequentemente, maior esforço computacional. Pelo teorema central do limite, o erro é da ordem de ($n^{-0,5}$), onde n é o número de simulações. Boyle (1977) [51] utilizou algumas técnicas para melhorar a precisão das estimativas. Estas técnicas são conhecidas como técnicas de redução de variância.

A maioria dos trabalhos utilizando Monte Carlo avaliava Opções Europeias, inclusive opções mais complexas do que simples opções de compra e venda. Opções Americanas são mais difíceis de serem avaliadas por Monte Carlo, por possuírem característica de otimização "*backward*", pois podem ser exercidas a qualquer momento até o vencimento. Esta característica "*backward*" está ligada à avaliação da política ótima de investimento.

Porém, alguns trabalhos de avaliação de Opções Americanas com o método vêm sendo desenvolvidos mais recentemente, Boyle, Broadie e Glasserman (1997) [53] utilizaram um modelo de árvore simulada para o preço do ativo objeto.

Um método amplamente utilizado pela sua facilidade de aplicação que calcula o preço de opções americanas por simulação, é o desenvolvido por Grant, Vora e Weeks – GVW (1997) [54]. Este método baseia-se no conjunto de valores críticos que constituem a curva de gatilho, ou o contorno livre, do derivativo americano. Com a curva de gatilho, pode-se calcular o valor da opção através de simples simulações de Monte Carlo, a partir do instante inicial, de forma similar à avaliação de opções europeias. Outra maneira de avaliar uma Opção Americana foi apresentada por Ibanez e Zapatero (1999) [55], neste trabalho, foi utilizado um algoritmo computacionalmente eficiente que calculava a política ótima de investimento, considerando esta política como um ponto fixo no algoritmo de programação dinâmica.

Outro método numérico desenvolvido para determinar o preço de uma opção americana, é o modelo Longstaff e Schwartz (2001) [56]. A metodologia chamada de LSM (Least Square Monte Carlo), utiliza, também, a programação dinâmica, mas sem necessitar do cálculo a curva de gatilho, o que torna o método computacionalmente mais eficiente do que o método Grant, Vora e Weeks. A implementação do método é simples, pois depende basicamente de regressões de mínimos quadrados. O método LSM é bastante intuitivo e baseia-se no exercício ótimo das opções americanas. A regra ótima de exercício de uma opção americana consiste na comparação entre seu valor de exercício imediato e o valor esperado de continuação em cada data de exercício antecipado. Se o exercício imediato for maior ou igual ao valor de continuação, a opção deverá ser exercida. O valor esperado de continuação é estimado a cada data de exercício, através de uma regressão de mínimos quadrados utilizando-se dados da simulação. De acordo com as experimentações numéricas feitas em Frota (2003) [57] e Araújo (2004) [58], conclui-se que a metodologia LSM oferece resultados mais exatos, do que o método de Grant, Vora e Weeks.

Vale ressaltar que com toda a elegância e facilidade, os resultados da Simulação de Monte Carlo dependem fortemente das premissas consideradas nas variáveis de entrada modelo, tais como a distribuição de probabilidades, os parâmetros e as funções de precificação. Logo, deve-se ter o cuidado adequado com os efeitos que possíveis erros nestas premissas podem ter nos resultados da simulação [59].

3.5 APROXIMAÇÕES ANALÍTICAS NA PRECIFICAÇÃO DE OPÇÕES AMERICANAS

Existem algumas aproximações analíticas para a precificação de opções americanas com dividendos contínuos. Aqui serão discutidas duas das mais populares. A primeira aproximação foi desenvolvida por Barone-Adesi e Robert Whaley (1987) [60]. A segunda, desenvolvida mais recentemente por Petter Bjerksund e Gunnar Stensland (1993) [61] é considerada computacionalmente mais eficiente e mais precisa na precificação de opções com prazos mais longos.

O método proposto por Giovanni Barone-Adesi e Robert Whaley em 1987, utiliza os mesmos pressupostos do modelo Black e Scholes, empregando uma aproximação quadrática, considerando a possibilidade de exercício antecipado das opções, situação que pode ocorrer quando se precificam as opções americanas. Barone-Adesi (2005) [62] destaca que na construção do modelo assume-se que a taxa de juros de curto-prazo é constante.

O método proposto por Petter Bjerksund e Gunnar Stensland em 1993 para precificar opções americanas tem como premissa a definição de um limite (*flat boundary*), que estabelece o preço de gatilho (*trigger price*). Assim, a opção será exercida toda vez que o preço do ativo-base atingir esse limite. Para Bjerksund e Stensland (2002) [63], investigações numéricas indicam que esse limite de preço é muito próximo do verdadeiro valor da opção e garante uma grande flexibilidade ao modelo.