

9 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] MME - Ministério de Minas e Energia, "Plano Nacional de Eficiência Energética - Premissas e Diretrizes Básicas," Departamento de Desenvolvimento Energético, p. 13, pp. 13-15, 2011.
- [2] A. G. P. Garcia, *Leilão de Eficiência Energética no Brasil*, Rio de Janeiro: Synergia Editora, 2009.
- [3] ANEEL - Agência Nacional de Energia Elétrica, "Manual para Elaboração do Programa de Eficiência Energética", Resolução Normativa nº 300/2008, 2008.
- [4] C. A. Goldman, N. C. Hopper, and J. G. Osborn, "Review of US ESCO industry market trends: an empirical analysis of project data," *Energy Policy*, vol. 33, no. 3, pp. 387-405, Feb, 2005.
- [5] EVO - Efficiency Evaluation Organization, "International Performance Measurement and Verification Protocol - Concepts and Options for Determining Energy and Water Savings", 2007.
- [6] E. Mills *et al.*, "From volatility to value: analysing and managing financial and performance risk in energy savings projects," *Journal of Reshaping Markets for the Benefit of Energy Saving*, vol. 34, no. 2, pp. 188-199, 2006.
- [7] J. M. Chamorro, L. M Abadie, "Investments in energy efficiency under climate policy uncertainty," in Joint Seminar Programme EHU-BC3: 5th Seminar, Sarriko, Espanha, 2009.
- [8] S. Kihm, and C. C., "Uncertainty, Real Options, and Industrial Energy Efficiency Decisions," in Summer Study on Energy Efficiency in Industry, Niagara Falls, New York, 2009.
- [9] L. M. Abadie, R. A. Ortiz, and I. Galarraga, "Determinants of energy efficiency investments in the US," vol. 45, no. 0, pp. 551-566, 2012.
- [10] H. Allcott, and M. Greenstone, "Is There an Energy Efficiency Gap?," National Bureau of Economic Research Working Paper Series, 2012.
- [11] L. M. Abadie, J. M. Chamorro, and M. González-Eguino, "Valuing uncertain cash flows from investments that enhance energy efficiency," *Journal of Environmental Management*, vol. 116, no. 0, pp. 113-124, 2013.

- [12] J. C. Hull, *Options, Futures, and Other Derivatives, 7th Ed.*: Pearson, Prentice Hall, 2009.
- [13] A. K. Dixit, and R. S. Pindyck, *Investment under uncertainty*, Princeton, N.J.: Princeton University Press, 1994.
- [14] T. Copeland, and P. Tufano, "A real-world way to manage real options," *Harvard Business Review*, vol. 82, no. 3, pp. 90+, Mar, 2004.
- [15] M. A. G. Dias, "Notas de Aula: IND 2272 - Análise de Investimentos com Opções Reais - PUC-Rio," 2009.
- [16] M. A. G. Dias. "Real Options Approach to Investments in General and Especially in Petroleum Exploration and Production (E&P)." Acesso em 05/06/2011, 2011; <http://www.puc-rio.br/marco.ind>.
- [17] W. Xiaogun, "Dimension Reduction Techniques in Quasi-Monte Carlo Methods for Option Pricing," *INFORMS Journal on Computing*, vol. 21, no. 3, pp. 488-504, Summer2009, 2009.
- [18] J. P. d. A. Albuquerque, J. M. P. Fortes, and W. A. Finamore, *Probabilidade, variáveis aleatórias e processos estocásticos*, Rio de Janeiro: Interciência, 2008.
- [19] E. S. Schwartz, "The stochastic behavior of commodity prices: Implications for valuation and hedging," *Journal of Finance*, vol. 52, no. 3, pp. 923-973, Jul, 1997.
- [20] M. J. Alves, "Determinação do Preço no Mercado de Energia Brasileiro e Valoração de um Derivativo de Energia por Simulação de Monte Carlo com Aproximação por Algoritmos Genéticos," Departamento de Energia Elétrica - DEE, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro - PUC-Rio, Junho 2011, 2011.
- [21] D. E. Goldberg, *Genetic Algorithms in Search, Optimization, and machine Learning*: Addison-Wesley Publishing Company, Inc, 1989.
- [22] J. R. Koza, "Genetic Programming As A Means For Programming Computers By Natural-Selection," *Journal of Statistics and Computing*, vol. 4, no. 2, pp. 87-112, Jun, 1994.
- [23] M. Zbigniew, *Genetic Algorithms + Data Structures = Evolution Programs*, USA: Springe-Verlag, 1996.
- [24] C. A. Hooker, "Adaptation In Natural And Artificial Systems - Holland,Jh," *Journal of Philosophical Psychology*, vol. 8, no. 3, pp. 287-299, Sep, 1995.

- [25] P. Jorion, *Value at risk: the new benchmark for managing financial risk*, New York: McGraw-Hill Pub. Co, 2001.
- [26] P. Krokmal, Palmquist, J., and S. Uryasev, "Portfolio Optimization with Conditional Value-at-Risk Objective and Constraints.," *Journal of Risk*, vol. 4, no. 2, pp. 43-68, 2002.
- [27] R. T. Rockafellar, and S. Uryasev, "Conditional value-at-risk for general loss distributions," *Journal of Banking & Finance*, vol. 26, no. 7, Jul, 2002.
- [28] S. Uryasev, and R. T. Rockafellar, "Conditional Value-at-Risk: Optimization approach," *Stochastic Optimization: Algorithms and Applications*, vol. 54, 2001, 2001.
- [29] Y. Yamai, and T. Yoshida, "Comparative analyses of expected shortfall and value-at-risk," *Journal of the Operations Research Society of Japan*, vol. 45, no. 4, pp. 490-506, Dec, 2002.
- [30] P. Artzner *et al.*, "Coherent measures of risk," *Mathematical Finance*, vol. 9, no. 3, Jul, 1999.
- [31] R. Mayo, *Derivativos de Eletricidade & Gerenciamento de Riscos*, 1ª Edição ed.: Synergia Editora, 2009.
- [32] CEPEL - Centro de Pesquisas de Energia Elétrica, "NEWAVE I e II: Planejamento da Operação a Longo Prazo de Subsistemas Hidrotérmicos Interligados. Manual do Usuário. Especificação Funcional e Manual de Metodologia. 1999b."
- [33] M. E. P. MACEIRA, "Programação Dinâmica Dual Estocástica Aplicada ao Planejamento da Operação Energética de Sistemas Hidrotérmicos com Representação do Processo Estocástico de Afluências por Modelos Auto-Regressivos Periódicos.," 1993.
- [34] ABNT - Associação Brasileira de Normas Técnicas, "NBR 5413: Iluminância de Interiores," 1992
- [35] ABNT - Associação Brasileira de Normas Técnicas, "NBR 16401-2 - Instalações de Ar Condicionado - Sistemas Centrais e Unitários - Parte 2: Parâmetros de Conforto Térmico," 2008.
- [36] R. A. a. M. Brealey, S. C., *Princípios de Finanças Empresariais*, Portugal: McGraw-Hill, 1998.

- [37] F. Black, and M. Scholes, "PRICING OF OPTIONS AND CORPORATE LIABILITIES," *Journal of Political Economy*, vol. 81, no. 3, pp. 637-654, 1973.
- [38] R. C. Merton, "THEORY OF RATIONAL OPTION PRICING," *Bell Journal of Economics*, vol. 4, no. 1, pp. 141-183, 1973.
- [39] A. F. T. Octavio, *The Option Value of Reserves of Natural Resources*, University of California at Berkeley, 1979.
- [40] L. Trigeorgis, "Real Options And Interactions With Financial Flexibility," *Financial Management*, vol. 22, no. 3, pp. 202-224, Fal, 1993.
- [41] L. Trigeorgis and Mason S. P., "Valuing Managerial Flexibility," *Midland Corporate Finance Journal*, vol. Vol. 5, no. N° 1, pp. pp. 14-21, 1987.
- [42] R. McDonald, and D. Siegel, "The Value of Waiting to Invest," *The Quarterly Journal of Economics*, vol. 101, no. 4, pp. 707-728, 1986.
- [43] P. G. Berger, E. Ofek, and I. Swary, "Investor valuation of the abandonment option," *Journal of Financial Economics*, vol. 42, no. 2, pp. 257-287, 1996.
- [44] J. W. Kensinger, "Project Abandonment as a Put Option: Dealing with the Capital Investment Decision and Operating Risk using Option Pricing Theory," The Annual Meeting of the Financial Management Association, 1980.
- [45] J. W. Kensinger, "The Capital Investment Project as a Set of Exchange Options," University of Texas at Austin, 1986.
- [46] S. A. Ross, Westerfield, R. W. e Jaffe, J., "Corporate Finance, Editorial Irwin," International Student Edition, 4ª Edition, 1996.
- [47] D. Duffie, *Dynamic Asset Pricing Theory*: Princeton University Press, 1992.
- [48] M. A. G. Dias, "Investimento Sob Incerteza em Exploração & Produção de Petróleo," Departamento de Engenharia Industrial, PUC-RIO, 1996.
- [49] J. C. Cox, S. A. Ross, and M. Rubinstein, "Option pricing: A simplified approach," *Journal of Financial Economics*, vol. 7, no. 3, pp. 229-263, 1979.
- [50] M. A. G. Dias, "Opções Reais Híbridas com aplicações em petróleo," Departamento de Engenharia Industrial, PUC-Rio, 2005.

- [51] P. Boyle, "Options - Monte-Carlo Approach," *Journal of Financial Economics*, vol. 4, no. 3, pp. 323-338, 1977.
- [52] J. G. L. Lazo, "Determinação do Valor de Opções Reais por Simulação de Monte Carlo com Aproximação por Números Fuzzy e Algoritmos Genéticos," Departamento de Engenharia Elétrica, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro - PUC-Rio, 27 de agosto de 2004, 2004.
- [53] P. Boyle, M. Broadie, and P. Glasserman, "Monte Carlo methods for security pricing," *Journal of Economic Dynamics & Control*, vol. 21, no. 8-9, pp. 1267-1321, Jun, 1997.
- [54] D. Grant, G. Vora, and D. Weeks, "Simulation and Early-Exercise of Option Problem.," *Journal of Financial Engineering*, vol. 5, no. 3, pp. 221-227, 1996.
- [55] A. Ibanez, and F. Zapatero, "Monte Carlo valuation of American options through computation of the optimal exercise frontier," *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, vol. 39, no. 2, pp. 253-275, Jun, 2004.
- [56] F. A. Longstaff, and E. S. Schwartz, "Valuing American options by simulation: A simple least-squares approach," *Review of Financial Studies*, vol. 14, no. 1, pp. 113-147, Spr, 2001.
- [57] A. E. F. Frota, "Avaliação de Opções Americanas Tradicionais e Complexas," Departamento de Engenharia Industrial, PUC-Rio, Rio de Janeiro, 2003.
- [58] R. O. Araújo, "Avaliação de Opções Reais Através do Método dos Mínimos Quadrados de MonteCarlo," Departamento de Engenharia Industrial, PUC-Rio, Rio de Janeiro, 2004.
- [59] P. Jorion, *Financial Risk Manager Handbook, 5th Edition*: John Wiley & Sons, 2009.
- [60] G. Barone-Adesi, and R. E. Whaley, "Efficient Analytic Approximation of American Option Values," *The Journal of Finance*, vol. 42, no. 2, pp. 301-320, //, 1987.
- [61] P. Bjerksund, and G. Stensland, "CLOSED-FORM APPROXIMATION OF AMERICAN OPTIONS," *Scandinavian Journal of Management*, vol. Vol 9, Supplement 1993: Proceedings of the Nordic Symposium on Contingent Claims Analysis in Finance, 1992, pp. S87-S99, 1993, 1993.
- [62] G. Barone-Adesi, "The saga of the American put," *Journal of Banking & Finance*, vol. 29, no. 11, pp. 2909-2918, Nov, 2005.

- [63] P. Bjerksund, and G. Stensland, *Closed form valuation of American Options.*, Norwegian School of Economics and Business Administration, 2002.
- [64] J. Holland, "Adaptation in Natural and Artificial Systems," University of Michigan Press, 1975.
- [65] M. Mitchell, *An Introduction to Genetic Algorithms*, USA: The MIT Press, 1994.
- [66] P. H. Hammond, "FOGEL,LJ - Artificial Intelligence Through Simulated Evolution," *Control*, 105, 1967, pp. 139-&.
- [67] T. Bäck, *Evolutionary algorithms in theory and practice*, New York, USA: Oxford University Press, 1996.
- [68] I. Harvey, "The Artificial Evolution of Adaptive Behaviour," School of Cognitive and Computing Sciences (COGS), University of Sussex, 1993.
- [69] R. Hassan, R. de Neufville, and D. McKinnon, "Value-at-risk analysis for real options in complex engineered systems," in IEEE International Conference on Systems, Man and Cybernetics, Waikoloa, HI, 2005, pp. 3697-3704.
- [70] A. S. D. Aguiar, "Equivalente Certo e Medidas de Risco em Decisões de Comercialização de Energia Elétrica," Departamento de Engenharia Elétrica, PUC-Rio, Rio de Janeiro, 2008.
- [71] A. Purvis *et al.*, "Technology Adoption Decisions Under Irreversibility And Uncertainty - An Ex Ante Approach," *American Journal of Agricultural Economics*, vol. 77, no. 3, pp. 541-551, Aug, 1995.
- [72] J. P. Assis, "Simulação estocástica de atributos do clima e da produtividade potencial de milho utilizando-se distribuição triangular," *Revista Pesquisa Agropecuária Brasileira*, vol. 41, no. 3, pp. 539-543, 2006.
- [73] M. A. G. Dias, "Investment in Information for Oil Field Development Using Evolutionary Approach with Monte Carlo Simulation," in 5th Annual International Conference on Real Options – Theory Meets Practice, UCLA, Los Angeles, USA, July 13-14, 2001., 2001.
- [74] A. Justel, D. Pefia, and R. Zamar, "A multivariate Kolmogorov-Smirnov test of goodness of fit," *Journal of Statistics & Probability Letters*, vol. 35, no. 3, pp. 251-259, 1997.

- [75] M. J. Gardner, and D. G. Altman, "Confidence intervals rather than P values: estimation rather than hypothesis testing," *British Medical Journal*, vol. 292, no. 6522, pp. 746-750, 1986.
- [76] T. J. Pasieka, R. F. Woolson, and C. Grose, "Viral induced fusion and syncytium formation: measurement by the Kolmogorov–Smirnov statistical test," *Journal of Virological Methods*, vol. 111, no. 2, pp. 157-161, 2003.
- [77] S. Zacharias, C. D. Heatwole, and C. W. Coakley, "Robust quantitative techniques for validating pesticide transport models," *Transactions of the Asae*, vol. 39, no. 1, pp. 47-54, Jan-Feb, 1996.
- [78] T. M. Barry, "Recommendations on the testing and use of pseudo-random number generators used in Monte Carlo analysis for risk assessment," *Risk Analysis*, vol. 16, no. 1, pp. 93-105, Feb, 1996.
- [79] P. Lecuyer, "RANDOM NUMBERS FOR SIMULATION," *Journal of Communications of the Acm*, vol. 33, no. 10, pp. 85-97, Oct, 1990.
- [80] INMETRO - Instituto Nacional de Metrologia, Normação e Qualidade Industrial, "Tabelas de consumo/eficiência energética" , 2008; Acesso em 20/12/2008; <http://www.inmetro.gov.br/consumidor/tabelas.asp>.
- [81] M. J. Grubb, "Communication Energy efficiency and economic fallacies," *Energy Policy*, vol. 18, no. 8, pp. 783-785, 1990.
- [82] A. B. Jaffe, and R. N. Stavins, "The energy-efficiency gap What does it mean?," *Journal of Markets for energy efficiency*, vol. 22, no. 10, pp. 804-810, 1994.
- [83] S. T. Anderson, and R. G. Newell, "Information programs for technology adoption: the case of energy-efficiency audits," *Resource and Energy Economics*, vol. 26, no. 1, pp. 27-50, 2004.
- [84] P. Wessel. "Critical Values for the Two-sample Kolmogorov-Smirnov test (2-sided)," Acessado em 05/04/2012; http://www.soest.hawaii.edu/wessel/courses/gg313/Critical_KS.pdf.

ANEXO I – MODELO DE REVERSÃO À MÉDIA DE DIAS

O modelo de reversão à média proposto por Dias (2001) [73] é uma variação do modelo de um fator descrito por Schwartz [19]. Este modelo fornece uma interpretação mais direta do nível do preço de equilíbrio de longo prazo.

Considera inicialmente o processo aritmético de Ornstein-Uhlenbeck, adotado por Schwartz para a variável estocástica $x(t)$:

$$dx = \eta(\bar{x} - x)dt + \sigma dz \quad (\text{I-1})$$

Onde $x(t)$ tem distribuição normal com média e variância apresentadas nas eq. (I-2) e (I-3):

$$E[x(t)] = x(0)e^{-\eta t} + \bar{x}(1 - e^{-\eta t}) \quad (\text{I-2})$$

$$Var[x(t)] = (1 - e^{-2\eta t}) \cdot \frac{\sigma^2}{2\eta} \quad (\text{I-3})$$

Logo a equação de simulação para $x(t)$ é apresentada na eq. (I-4) para tempo discreto

$$x_t = x_{t-1} e^{-\eta \Delta t} + \bar{x} (1 - e^{-\eta \Delta t}) + \sigma \sqrt{(1 - \exp(-2\eta \Delta t)) / (2\eta)} N(0,1) \quad \text{exato.}$$

(I-4)

Porém neste modelo $x(t)$ pode assumir valores negativos em sua distribuição normal. Tal circunstância é inadequada para utilização em preços de commodities onde a variável deve ser estritamente positiva. Assim, o modelo assume dois importantes conceitos:

- 1- O preço da commodity P segue um processo de reversão à média em direção ao nível de equilíbrio \bar{P} dado pela eq. (I-5).

$$\bar{x} = \ln(\bar{P}) \quad (I-5)$$

- 2- Definir os preços de forma que a média simulada seja $E[P(t)] = \exp\{E[x(t)]\}$, resultando no valor esperado para a commodity no instante t apresentado na eq. (I-6).

$$E[P(t)] = \exp\{x(0)e^{-\eta t} + \bar{x}(1 - e^{-\eta t})\} \quad (I-6)$$

Segundo Dias, o processo $P(t) = \exp\{x(t)\}$ não funciona porque a exponencial da distribuição Normal adiciona metade da variância na distribuição log-normal.

Assim, com o intuito de anular este acréscimo, metade da variância é compensada relacionando x e P conforme a equação (I-7).

$$P(t) = \exp\{x(t) - 0.5\text{Var}[x(t)]\} \quad (I-7)$$

Para o modelo de reversão à média, o drift real é dado por $\alpha = \eta(\bar{x} - x)$ e o dividendo não é constante, mas é função de x:

$$\delta = \mu - \alpha = \mu - \eta(\bar{x} - x) \quad (I-8)$$

Logo o drift neutro ao risco é igual a:

$$r - \delta = r - \mu - \eta(\bar{x} - x) = \eta\left[\bar{x} - \left(\frac{\mu - r}{\eta}\right)\right] - x \quad (I-9)$$

Substituindo o drift neutro ao risco na eq. (I-1) tem-se:

$$dx = \eta \left(\left[\bar{x} - \left(\frac{\mu - r}{\eta} \right) \right] - x \right) dt + \sigma dz \quad (\text{I-10})$$

No modelo neutro ao risco, a simulação do processo $x(t)$ da eq. (I-4) é:

$$x_t = x_{t-1} e^{-\eta \Delta t} + \left[\bar{x} - \left(\frac{\mu - r}{\eta} \right) \right] (1 - e^{-\eta \Delta t}) + \sigma \sqrt{(1 - \exp(-2\eta \Delta t)) / (2\eta)} N(0, 1) \quad (\text{I-11})$$

Substituindo na eq. (I-7) o termo $x(t)$ pela equação (I-11) e o termo $Var[x(t)]$ pela equação (I-3), pode-se simular o processo neutro ao risco para o preço $P(t)$ diretamente pela eq. (I-12) abaixo:

$$P(t) = \exp \left\{ \left[\ln[P(t-1)] \exp[-\eta \Delta t] + \left[\left[\ln(\bar{P}) - \frac{(\mu - r)}{\eta} \right] (1 - \exp[-\eta \Delta t]) \right] - \left[(1 - \exp[-2\eta \Delta t]) \frac{\sigma^2}{4\eta} \right] + \sigma \sqrt{\frac{1 - \exp[-2\eta \Delta t]}{2\eta}} N(0, 1) \right] \right\} \quad (\text{I-12})$$

ANEXO II – RESUMO DO ALGORITMO GVW

O algoritmo de Grant, Vora e Weeks para o cálculo do valor de uma opção americana pode ser resumido em alguns passos:

1. Discretiza-se a vida útil da opção em $N = T / \Delta t$ partes onde Δt é o tamanho de cada intervalo, e adota-se a condição terminal $S_T^* = K$.

2. No instante $T-\Delta t$, adota-se como aproximação de $S_{T-\Delta t}$ um valor igual ou próximo de S_T^* . Em seguida, utiliza-se a simulação de Monte Carlo para se obter diferentes valores de S_T e, conseqüentemente, de C_T . O valor de C_T é calculado através da média das simulações executadas.

3. Verifica-se se a condição de valor ótimo a seguir é satisfeita (eq. II-1):

$$S_{T-\Delta t}^* - K = e^{-r\Delta t} E_{T-\Delta t} [C_T(S_T^*, K)] \quad (\text{II-1})$$

Caso a condição seja satisfeita, inicia-se o próximo passo. Caso contrário, incrementa-se $S_{T-\Delta t}$ de um valor Δt e repete-se o passo anterior.

4. Repete-se o segundo e o terceiro passos para os instantes anteriores, até a condição de parada t_0 ²⁷.

5. Uma vez obtida a curva de gatilho, utiliza-se novamente a SMC, a partir de S_{t_0} , dado pelo mercado, e simula-se as trajetórias do preço do ativo base no tempo. Cada trajetória resultará em um valor da opção, dado pelo cruzamento da mesma com a curva de gatilho. Por último, obtém-se o valor esperado da opção, através da média dos valores simulados.

O esquema gráfico dos passos do algoritmo de GVW para avaliar uma opção de compra americana é ilustrado a seguir:

²⁷ O valor da opção deve ser simulado para todos os instantes posteriores ao momento avaliado.

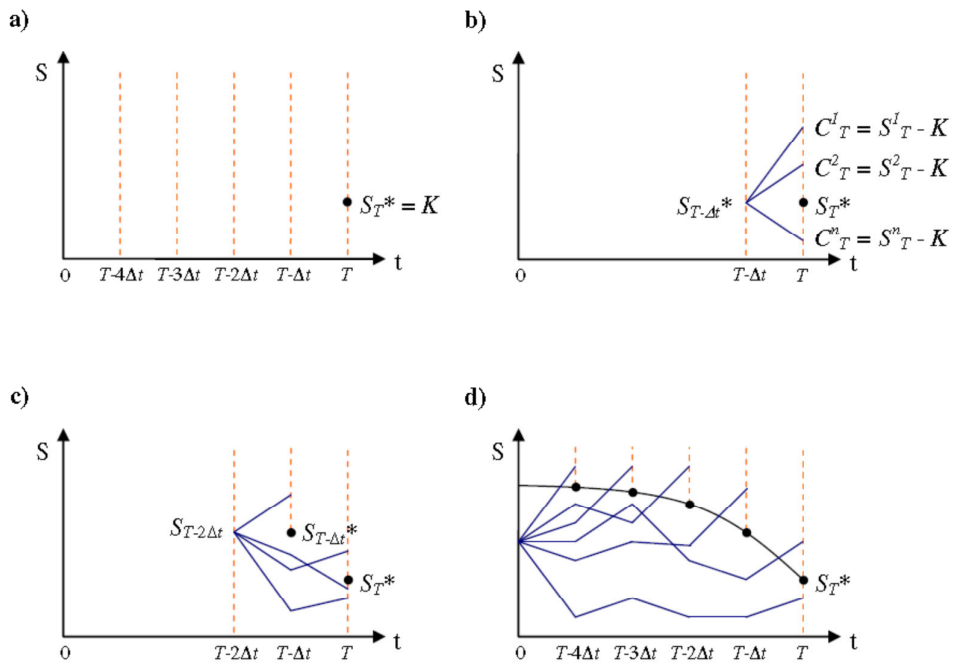


Figura 64 – Ilustração dos passos do algoritmo de avaliação do método de GWW

Na Figura 64 acima, o item 'a' representa o primeiro passo, enquanto o item 'b' mostra o segundo e terceiro passos e os itens 'c' e 'd' ilustram os passos quatro e cinco, respectivamente.

ANEXO III – ALGORITMO LSM: EXEMPLO NUMÉRICO DO CÁLCULO DE UMA CALL AMERICANA

Para exemplificar o algoritmo LSM desenvolvido por Longstaff e Schwartz (2001) [56], foi considerada uma opção de compra (*call*), americana sobre um ativo objeto (Benefícios de Economia de Energia (EE) e de Redução de Demanda (RD) para um Projeto de Eficiência Energética) que não paga dividendos. O preço de exercício (valor do investimento no projeto) da opção é R\$ 222.602,00, podendo ser exercida nos instantes 1, 2, e 3, sendo $t=3$ a data de vencimento da opção. A taxa de desconto livre de risco é igual a 0,487% a.m. (equivalente à 6% a.a.). Para simplificar a demonstração do algoritmo, foram simulados oito caminhos para o ativo objeto, supondo neutralidade ao risco. Os valores tabelados foram divididos por 100.000. A matriz de simulação dos preços do ativo é apresentada a seguir:

Caminho	$t = 0$	$t = 1$	$t = 2$	$t = 3$
1	2,18327	2,18341	2,19093	2,19790
2	2,29222	2,29223	2,29972	2,30776
3	2,31382	2,31390	2,32141	2,32844
4	2,31383	2,31391	2,32142	2,32844
5	2,20709	2,20612	2,21248	2,21935
6	2,05052	2,05062	2,05696	2,06377
7	2,24883	2,24778	2,25518	2,26321
8	2,32448	2,32459	2,33107	2,33803

Tabela 42 – Matriz de simulação de caminhos do preço da ação

O objetivo do algoritmo LSM é definir a regra de exercício que maximiza o valor da opção em cada ponto ao longo de cada trajetória de preços. Caso a opção não seja exercida antes da sua data de vencimento ($t=3$), o fluxo de caixa do exercício imediato neste instante é dado por:

Caminho	t = 1	t = 2	t = 3
1	-	-	-
2	-	-	0,08174
3	-	-	0,10242
4	-	-	0,10242
5	-	-	-
6	-	-	-
7	-	-	0,03719
8	-	-	0,11201

Tabela 43 – Matriz dos fluxos de caixa em t=3

Na data de vencimento, não há valor de continuação, logo, o exercício ótimo ocorre se o valor de exercício imediato da opção for maior que zero. Assim, pode-se construir uma matriz de regra ótima de exercício no instante final, colocando-se o número ‘1’ onde o exercício é ótimo e zero onde não for. A Tabela 44, abaixo, apresenta a matriz da parada ótima atualizada para o instante final (t=3).

Caminho	t = 1	t = 2	t = 3
1	-	-	-
2	-	-	1
3	-	-	1
4	-	-	1
5	-	-	-
6	-	-	-
7	-	-	1
8	-	-	1

Tabela 44 – Matriz de parada ótima atualizada em t=3

Se a opção estiver no estado *in-the-money* instante t=2, deve-se decidir entre o exercício imediato ou mantê-la “viva” até o vencimento em t=3. Dos oito caminhos simulados para o preço da ação, somente em cinco a opção está *in-the-money*. Adota-se X como sendo o vetor dos preços da ação no instante t=2 e Y

como sendo o vetor dos fluxos de caixa futuros recebidos em $t=3$, descontados²⁸ para o instante $t=2$. Serão usados somente os caminhos de preços que estão *in-the-money* no instante $t=2$. Os vetores X e Y são dados pelas entradas não nulas da Tabela 45 a seguir:

Caminho	Y	X
1	$0,1849 \times 0,99516$	-
2	$0,2937 \times 0,99516$	2,29972
3	$0,3154 \times 0,99516$	2,32141
4	$0,3154 \times 0,99516$	2,32142
5	$0,2065 \times 0,99516$	-
6	$0,0509 \times 0,99516$	-
7	$0,2492 \times 0,99516$	2,25518
8	$0,3520 \times 0,99516$	2,33107

Tabela 45 – Dados para a regressão em $t=2$

Para se estimar o valor esperado de continuação da opção, condicionada ao preço da ação em $t=2$, regride-se Y com relação X por uma função polinomial de segundo grau cuja forma é dada por:

$$p(x) = a_0 + a_1X + a_2X^2 \quad (\text{III-1})$$

A função de expectativas condicionadas obtida pela regressão é:

$$E[Y|X] = -2,2152 + 0,9952X + 2 \cdot (10^{-13})X^2 \quad (\text{III-2})$$

Através da equação acima, é possível estimar o valor de continuação esperado para cada trajetória de preços substituindo X na função. Em seguida, compara-se os valores de exercício imediato e de continuação para se determinar a regra ótima de exercício no instante $t=2$ (apenas nas trajetórias de preços que se apresentam *in-the-money*), conforme a Tabela 46 a seguir:

²⁸ O desconto para um período, em tempo discreto, é dado por $1/(1+i) = 0,99516$

Caminho	Exercício	Continuação
1	-	-
2	0,07370	0,07349
3	0,09539	0,09507
4	0,09540	0,09507
5	-	-
6	-	-
7	0,02916	0,02916
8	0,10505	0,10468

Tabela 46 – Comparação dos valores de exercício imediato e de continuação no instante $t=2$

Comparando-se as duas últimas colunas da Tabela 46 acima, verifica-se que em todos os cinco caminhos, o exercício da *call* é ótimo e assim, pode-se atualizar a matriz da regra ótima de exercício conforme ilustrado a seguir na Tabela 47:

Caminho	$t = 1$	$t = 2$	$t = 3$
1	-	-	-
2	-	1	-
3	-	1	-
4	-	1	-
5	-	-	-
6	-	-	-
7	-	1	-
8	-	1	-

Tabela 47 – Matriz de parada ótima atualizada no instante 2

Observa-se que, quando a opção é exercida em $t = 2$, a regra ótima no último instante também é modificada, pois o fluxo de caixa final em $t = 3$ é igual a zero. Isto ocorre por que a opção só pode ser exercida uma única vez durante sua vida útil. Assim, uma vez exercida, a opção deixa de existir. Seguindo a mesma

linha de raciocínio, progride-se recursivamente até o instante $t=1$. O mesmo procedimento aplicado no instante $t=2$ é reaplicado neste instante. Novamente, determinam-se os caminhos nos quais a opção está *in-the-money* e obtém-se os vetores X e Y . Neste instante, o vetor Y representa o valor dado pela soma dos fluxos de caixa dos instantes 2 e 3, atualizados pela matriz de regra ótima e descontados para o instante atual. Dado que a opção só pode ser exercida uma vez, os fluxos de caixa futuros ocorrem em $t = 2$ ou em $t = 3$, nunca em ambos os instantes. Os fluxos de caixa recebidos em $t = 2$ serão descontados um período de tempo, e os fluxos de caixa recebidos em $t = 3$ serão descontados dois períodos. Da mesma forma que no instante 2, X agora representa os preços da ação em $t = 1$ nos quais a opção está *in-the-money*, e Y representa os fluxos de caixa futuros. A Tabela 48 abaixo mostra os valores de X e Y para $t = 1$.

Caminho	Y	X
1	$0,1774 \times 0,99516$	-
2	$0,2862 \times 0,99516$	2,29223
3	$0,3079 \times 0,99516$	2,31390
4	$0,3079 \times 0,99516$	2,31391
5	$0,2001 \times 0,99516$	-
6	$0,0446 \times 0,99516$	-
7	$0,2418 \times 0,99516$	2,24778
8	$0,3186 \times 0,99516$	2,32459

Tabela 48 – Dados para a regressão em $t=1$

Novamente, faz-se a regressão de Y com relação a X e X^2 para estimar o valor de continuação. Desta vez, a função de expectativas condicionadas é dada por:

$$E[Y | X] = -2,2152 + 0,9952X + (10^{-13})X^2 \quad (\text{III-3})$$

Para se obter os valores de continuação de cada trajetória, substitui-se os valores de X na função de regressão e compara-se estes valores com os valores do exercício imediato da *call* em $t = 1$. A Tabela 49 a seguir apresenta estes valores.

Caminho	Exercício	Continuação
1	-	-
2	0,06621	0,06603
3	0,08788	0,08760
4	0,08789	0,08760
5	-	-
6	-	-
7	0,02176	0,02179
8	0,09857	0,09823

Tabela 49 – Comparação dos valores de exercício imediato e de continuação em $t=1$

Comparando-se os valores apresentados na Tabela 49 acima, verifica-se que o exercício imediato é ótimo em $t=1$ no segundo, terceiro, quarto e oitavo caminhos. Assim, pode-se atualizar novamente a matriz de regra ótima de exercício, obtendo-se a regra completa de parada ótima, dada pela Tabela 50 a seguir:

Caminho	$t = 1$	$t = 2$	$t = 3$
1	-	-	-
2	1	-	-
3	1	-	-
4	1	-	-
5	-	-	-
6	-	-	-
7	-	1	-
8	1	-	-

Tabela 50 – Matriz completa da regra ótima de exercício

Dada a regra de parada ótima, o cálculo dos fluxos de caixa realizados é feito de maneira bastante simples. Basta calcular o produto escalar entre a matriz de parada ótima e a matriz completa dos fluxos de caixa de em cada data de

exercício antecipado da opção. O resultado do produto é a matriz de fluxos de caixa realizados, dada a seguir:

Caminho	t = 1	t = 2	t = 3
1	-	-	-
2	0,0662	-	-
3	0,0879	-	-
4	0,0879	-	-
5	-	-	-
6	-	-	-
7	-	0,0292	-
8	0,0986	-	-

Tabela 51 – Matriz de fluxos de caixa realizados

Finalmente o valor da opção pode ser obtido, descontando-se para o instante zero os fluxos de caixa da matriz acima e obtendo-se a média sobre todos os caminhos. O valor obtido para a *call* americana foi de 0,113609, ou seja, multiplicando-se por 100.000, tem-se que:

$$\text{Call} = \text{R\$ } 11.360,90$$

O valor do VPL no instante zero é igual a média dos cenários neste instante menos o investimento. Logo, tem-se que:

$$\text{VPL}_0 = \text{R\$ } 224.176,00 - \text{R\$ } 222.602,00 = \text{R\$ } 1.574,00$$

Assim, a Regra de Decisão Ótima para este Projeto de Eficiência Energética é “esperar e ver”, exercendo a opção somente no cenário favorável.

Este exemplo demonstra a simplicidade do método LSM e a clareza da intuição por traz do mesmo.

ANEXO IV – TESTE DE KOLMOGOROV-SMIRNOV (K-S)

O teste de Kolmogorov-Smirnov (K-S) [74] busca determinar se dois conjuntos de dados (amostras) diferem significativamente. O teste K-S tem a vantagem de não fazer nenhuma hipótese sobre a distribuição dos dados (tecnicamente falando, é não-paramétrico e independe da distribuição). O teste K-S é um dos métodos não paramétricos genéricos mais úteis para se comparar duas amostras, dado que é sensível às diferenças na localização e na forma das funções de distribuição cumulativas das duas amostras.

A estatística do teste K-S compara a distribuição acumulada de frequências observadas com a respectiva distribuição teórica e determina o ponto em que essas duas distribuições acusam a maior divergência (máxima distância absoluta $D_{n,n'}$). A distribuição amostral indica se essa diferença máxima pode ser atribuída ao acaso. A Figura 65 apresenta graficamente a máxima distância absoluta $D_{n,n'}$ entre as funções de distribuição acumuladas $F_1(x)$ e $F_2(x)$.

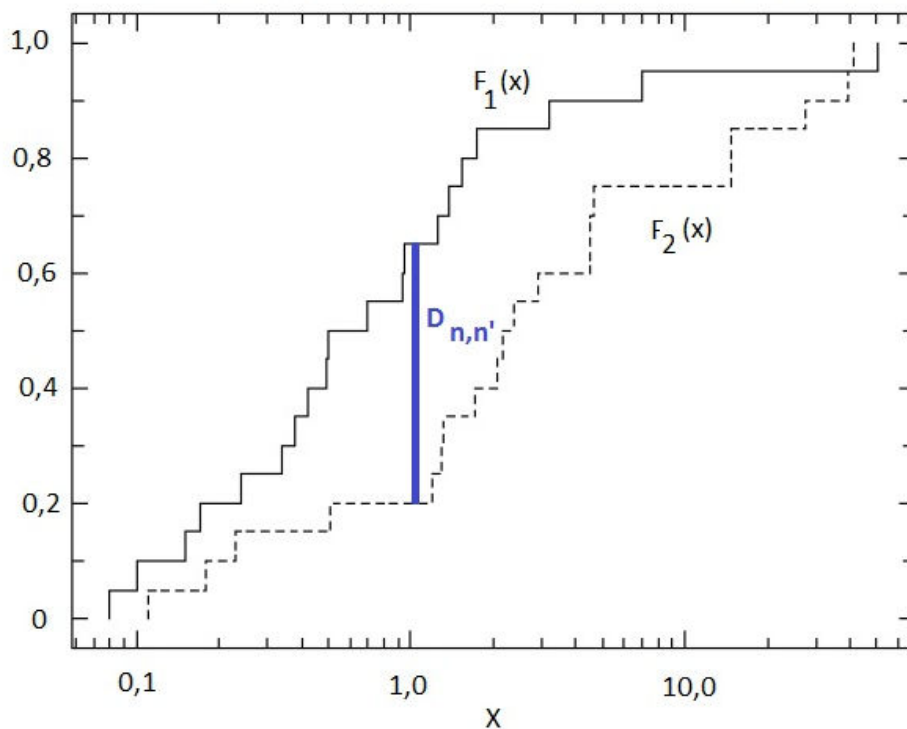


Figura 65 - Teste K-S - Comparação entre Duas Funções de Distribuição Acumuladas

A hipótese nula ($h=0$) é aquela na qual as amostras têm a mesma distribuição. A hipótese alternativa é aquela em que a distribuição não é a mesma. O resultado h igual a 1 é obtido se o teste rejeita a hipótese nula com $\alpha\%$ de nível de significância. A estatística do teste para duas amostras é definida como:

$$D_{n,n'} = \sup_x |F_{1,n}(x) - F_{2,n'}(x)| \quad (\text{IV-1})$$

Onde:

- $F_{1,n}(x)$ e $F_{2,n'}(x)$ são Funções de Distribuição Acumuladas (FDA) da primeira e da segunda amostra respectivamente;
- $D_{n,n'}$ é a distância máxima absoluta entre $F_{1,n}(x)$ e $F_{2,n'}(x)$.

A hipótese nula ($h=0$) é rejeitada no nível de significância α se:

$$D_{n,n'} > c(\alpha) \sqrt{\frac{n+n'}{nn'}} \quad (\text{IV-2})$$

Para amostras onde o número de observações é superior à 12, o valor de $c(\alpha)$ é dado pela Tabela 52 abaixo, para cada nível de significância α [84].

α	0,10	0,05	0,025	0,01	0,005	0,001
$C(\alpha)$	1,22	1,36	1,48	1,63	1,73	1,95

Tabela 52 - Teste K-S - Coeficientes por nível de significância

Pode-se observar que o teste K-S para duas amostras verifica se estas amostras são oriundas da mesma distribuição, independentemente de qual seja esta distribuição (normal ou não-normal).