

5 Análise de sensibilidade estatística

5.1 Introdução

Alguns métodos para a análise de sensibilidade e a importância destes foram apresentados no capítulo 3. O capítulo atual trata da análise de sensibilidade estatística. Como descrito no capítulo 4, a análise de sensibilidade se faz necessária para a obtenção da resposta estatística das estruturas quando se utiliza o método estatístico linear. Citou-se também a importância da análise de sensibilidade na etapa de otimização. Nesse sentido, será apresentada a formulação para o cálculo da sensibilidade da resposta da estrutura como, sensibilidade da média e do desvio padrão dos deslocamentos e tensões, para o método estatístico linear e para a simulação de Monte Carlo.

Optou-se no trabalho pelo método analítico direto, dessa forma, para verificação dos resultados obtidos serão efetuadas algumas comparações com a técnica de aproximação por diferenças finitas.

5.2 Análise de sensibilidade da média dos deslocamentos

A sensibilidade da média dos deslocamentos com respeito às propriedades dos materiais, r , envolve a derivada com respeito as variáveis aleatórias r em ambos os lados da equação de equilíbrio (3.1), utilizando \bar{q} no lugar de q . Assim:

$$\mathbf{K} \frac{\partial \bar{\mathbf{q}}}{\partial r} + \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial r} \bar{\mathbf{q}} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial r} \quad (5.1)$$

Pode-se escrever então:

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{q}}}{\partial r} = \mathbf{K}^{-1} \left(-\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial r} \bar{\mathbf{q}} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial r} \right) \quad (5.2)$$

A análise dos resultados obtidos com o emprego da equação (5.2) pode ser efetuada através da figura (5.1). Esta apresenta a sensibilidade da média do deslocamento horizontal do nó 1 da treliça da figura (4.2) em relação ao módulo de elasticidade longitudinal E_1 .

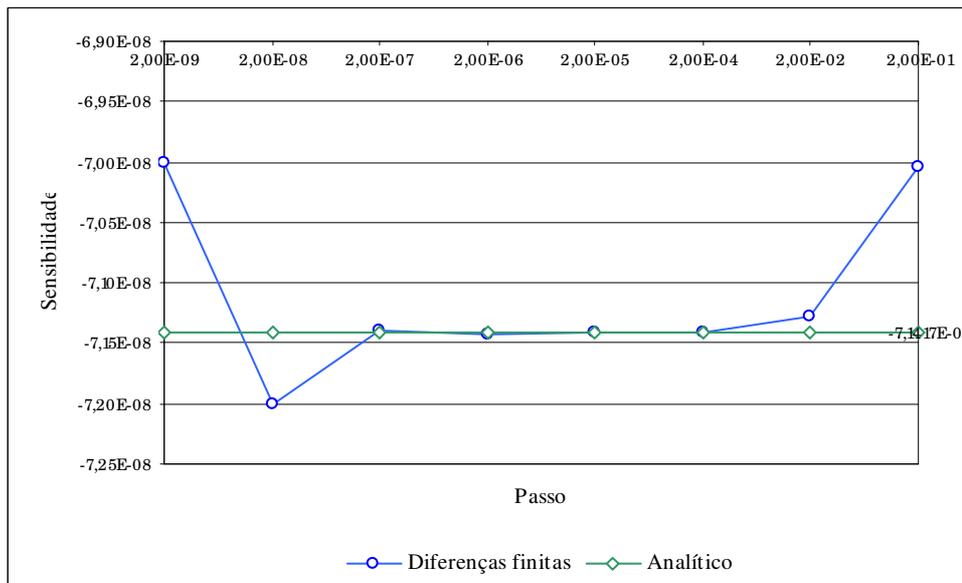


Figura 5.1: Sensibilidade do deslocamento em relação ao módulo de elasticidade E .

Descreve-se a seguir a formulação proposta para obtenção das sensibilidades da média dos deslocamentos com relação às variáveis de projeto, aqui denominadas por x .

Adotando o método analítico direto para a avaliação das sensibilidades, toma-se para determinação da sensibilidade da média dos deslocamentos à equação (5.3).

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{q}}}{\partial x} = \mathbf{K}^{-1} \left(-\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial x} \bar{\mathbf{q}} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} \right) \quad (5.3)$$

A figura (5.2) representa a análise da sensibilidade da média do deslocamento horizontal do nó 1 da treliça da figura (4.2) em relação à área do elemento três obtida por aproximações por diferenças finitas e pelo método analítico direto, equação (5.3).

Quando se emprega o método de análise estatístico linear, efetua-se o cálculo da sensibilidade com o emprego direto das expressões apresentadas acima. Porém, quando a análise é realizada através da simulação de Monte Carlo faz-se, para a avaliação da sensibilidade da média dos deslocamentos em relação as variáveis de projeto x , a derivada da equação (4.21) em relação a essas variáveis, obtendo-se o seguinte:

$$\frac{\partial \bar{q}}{\partial x} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \frac{\partial q_j}{\partial x} \quad (5.4)$$

Na equação (5.4) n é o número de números aleatórios escolhidos.

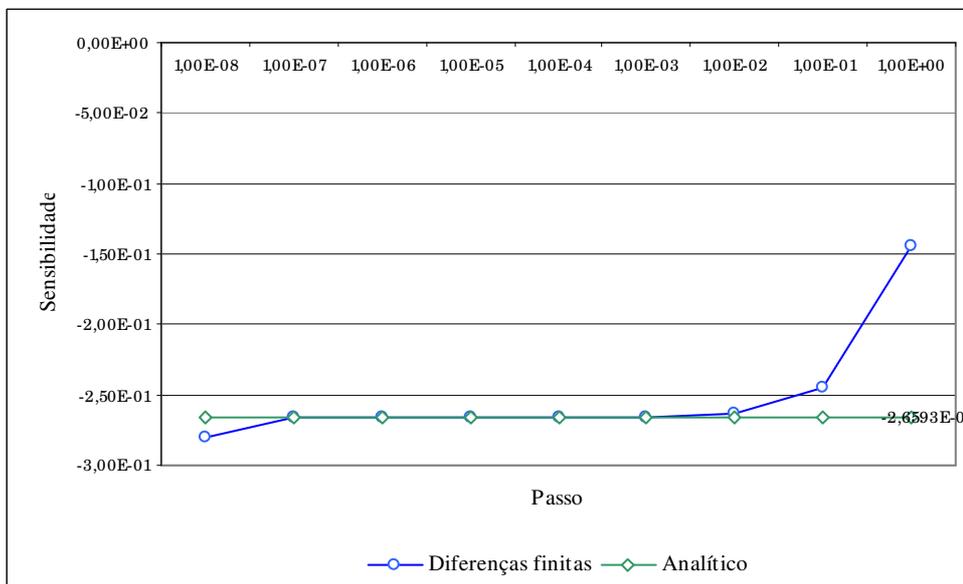


Figura 5.2: Sensibilidade do deslocamento em relação à área – Estatístico linear.

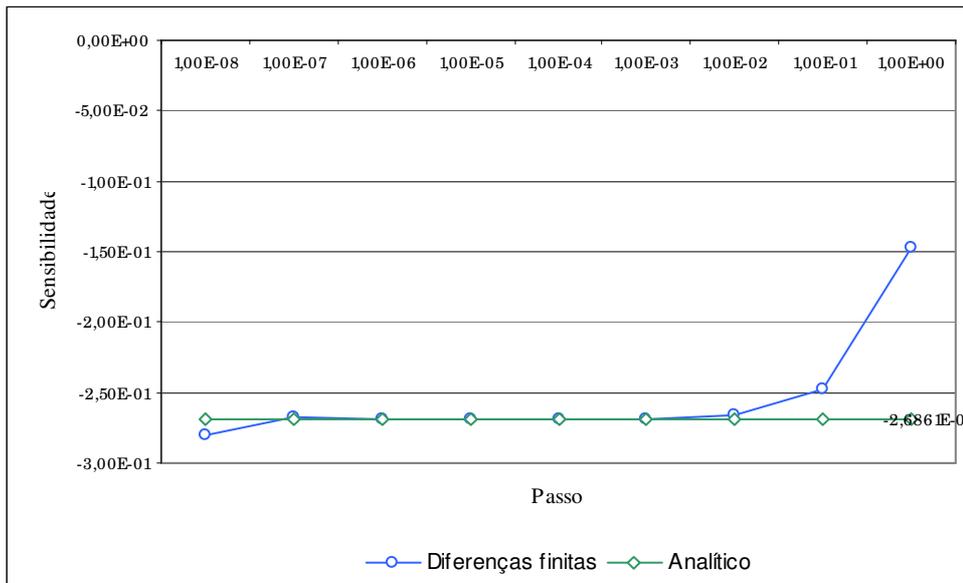


Figura 5.3: Sensibilidade do deslocamento em relação à área – SMC.

A figura (5.3) apresenta a análise de sensibilidade do deslocamento estudado na figura (5.2), porém para uma análise realizada por simulação de Monte Carlo.

5.3

Análise de sensibilidade do desvio padrão dos deslocamentos

Para a avaliação da sensibilidade do desvio-padrão dos deslocamentos manipulou-se a equação (4.8) que avalia a matriz de covariância das variáveis aleatórias. Derivando esta equação em termos das variáveis de projeto x tem-se:

$$\frac{\partial \mathbf{S}_q}{\partial x} = \left[\frac{\partial \left[\frac{\partial \bar{\mathbf{q}}}{\partial r} \right]}{\partial x} \mathbf{S}_r + \frac{\partial \bar{\mathbf{q}}}{\partial r} \frac{\partial \mathbf{S}_r}{\partial x} \right] \frac{\partial \bar{\mathbf{q}}}{\partial r}^T + \frac{\partial \bar{\mathbf{q}}}{\partial r} \mathbf{S}_r \frac{\partial \left[\frac{\partial \bar{\mathbf{q}}}{\partial r} \right]}{\partial x}^T \quad (5.5)$$

Verifica-se, na equação (5.5), que o termo $\frac{\partial \left[\frac{\partial \bar{\mathbf{q}}}{\partial r} \right]}{\partial x}$ é a sensibilidade em relação às variáveis de projeto da sensibilidade da média dos deslocamentos em

relação as variáveis aleatórias. Este termo pode ser obtido derivando-se em relação às variáveis de projeto a seguinte expressão.

$$\frac{\partial \left[\mathbf{K} \frac{\partial \bar{\mathbf{q}}}{\partial r} + \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial r} \bar{\mathbf{q}} - \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial r} \right]}{\partial x} = \mathbf{0} \quad (5.6)$$

ou:

$$\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial x} \frac{\partial \bar{\mathbf{q}}}{\partial r} + \mathbf{K} \frac{\partial \left[\frac{\partial \bar{\mathbf{q}}}{\partial r} \right]}{\partial x} + \frac{\partial \left[\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial r} \right]}{\partial x} \bar{\mathbf{q}} + \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial r} \frac{\partial \bar{\mathbf{q}}}{\partial x} - \frac{\partial \left[\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial r} \right]}{\partial x} = \mathbf{0} \quad (5.7)$$

Arranjando-se a equação (5.7), obtém-se:

$$\frac{\partial \left[\frac{\partial \bar{\mathbf{q}}}{\partial r} \right]}{\partial x} = \mathbf{K}^{-1} \left[- \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial x} \frac{\partial \bar{\mathbf{q}}}{\partial r} - \frac{\partial \left[\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial r} \right]}{\partial x} \bar{\mathbf{q}} - \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial r} \frac{\partial \bar{\mathbf{q}}}{\partial x} + \frac{\partial \left[\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial r} \right]}{\partial x} \right] \quad (5.8)$$

Sob a hipótese adotada neste trabalho:

$$\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial r} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} = \frac{\partial \mathbf{S}_r}{\partial x} = \mathbf{0} \quad (5.9)$$

pode-se escrever a sensibilidade da matriz de covariância dos deslocamentos em relação as variáveis de projeto como:

$$\frac{\partial \mathbf{S}_q}{\partial x} = \frac{\partial \left[\frac{\partial \bar{\mathbf{q}}}{\partial r} \right]}{\partial x} \mathbf{S}_r \frac{\partial \bar{\mathbf{q}}}{\partial r} + \frac{\partial \bar{\mathbf{q}}}{\partial r} \mathbf{S}_r \frac{\partial \left[\frac{\partial \bar{\mathbf{q}}}{\partial r} \right]}{\partial x} \quad (5.10)$$

Como o desvio padrão é igual à raiz quadrada da variância, pode-se escrever que:

$$s_{q_i}^2 = S_{q_{ii}} \quad (5.11)$$

E, utilizando-se a regra da cadeia:

$$\frac{\partial S_{q_{ii}}}{\partial x} = \frac{\partial S_{q_{ii}}}{\partial s_{q_i}} \frac{\partial s_{q_i}}{\partial x} = 2s_{q_i} \frac{\partial s_{q_i}}{\partial x} \quad (5.12)$$

Assim, pode-se definir a sensibilidade do desvio padrão dos deslocamentos em relação as variáveis de projeto como:

$$\frac{\partial s_{q_i}}{\partial x} = \frac{1}{2s_{q_i}} \frac{\partial S_{q_{ii}}}{\partial x} \quad (5.13)$$

A figura (5.4) apresenta os resultados obtidos para a análise de sensibilidade do desvio-padrão dos deslocamentos em relação às variáveis de projeto utilizando a formulação proposta e utilizando aproximações por diferenças finitas. É estudada a sensibilidade do desvio-padrão do deslocamento horizontal do nó 1 da treliça da figura (4.2) em relação à área do elemento 3.

As expressões para o cálculo da sensibilidade do desvio padrão dos deslocamentos, apresentadas acima, são utilizadas diretamente quando se efetua uma análise estatística linear. Quando se realiza uma simulação por Monte Carlo, a expressão é obtida a partir da derivação da equação (4.22) em relação as variáveis de projeto x , obtendo-se o seguinte:

$$\frac{\partial s_q}{\partial x} = \frac{1}{n} \frac{\sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial q_j}{\partial x} - \frac{\partial \bar{q}}{\partial x} \right) (q_j - \bar{q})}{s_q} \quad (5.14)$$

onde n é o número de números aleatórios escolhidos. A figura (5.5) apresenta os resultados obtidos com a utilização desta equação, comparando-os com aproximações por diferenças finitas.

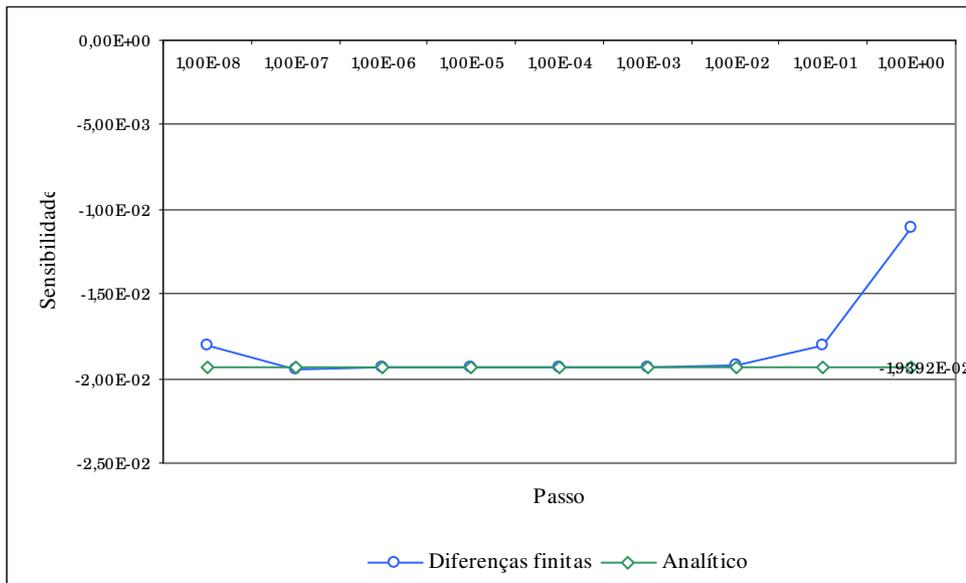


Figura 5.4: Sensibilidade do desvio padrão do deslocamento em relação à área - Estatístico linear

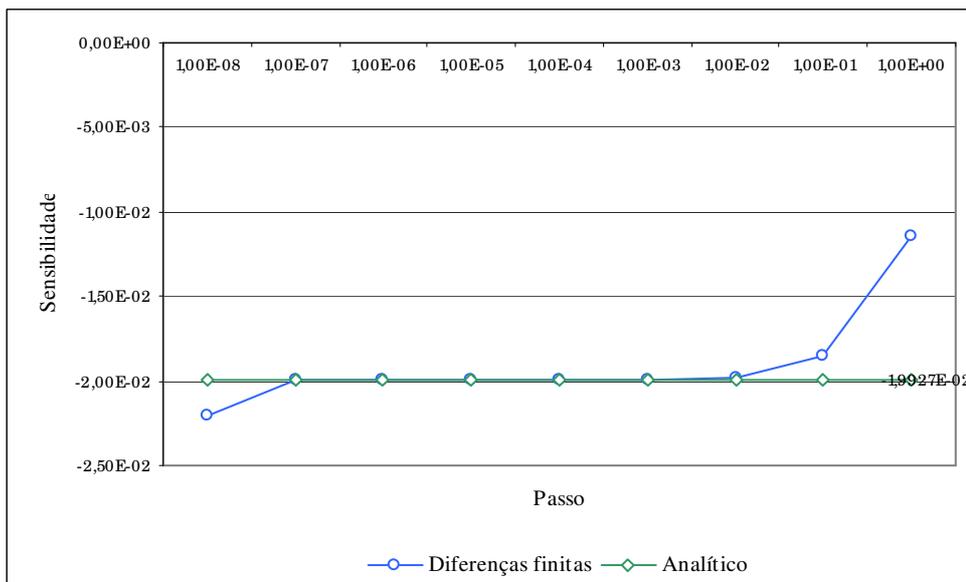


Figura 5.5: Sensibilidade do desvio padrão do deslocamento em relação à área - SMC

5.4 Análise de sensibilidade da média das tensões

A sensibilidade da média das tensões com respeito às propriedades dos materiais, r , envolve a derivada com respeito às variáveis aleatórias r em ambos os lados da equação (3.9). Assim:

$$\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial r} = \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial r} \mathbf{B} \bar{\mathbf{q}} + \mathbf{C} \mathbf{B} \frac{\partial \bar{\mathbf{q}}}{\partial r} \quad (5.15)$$

A figura (5.6) apresenta os resultados obtidos na análise da sensibilidade da média da tensão do elemento 3 da treliça da figura (4.2) em relação ao módulo de elasticidade longitudinal E_1 .

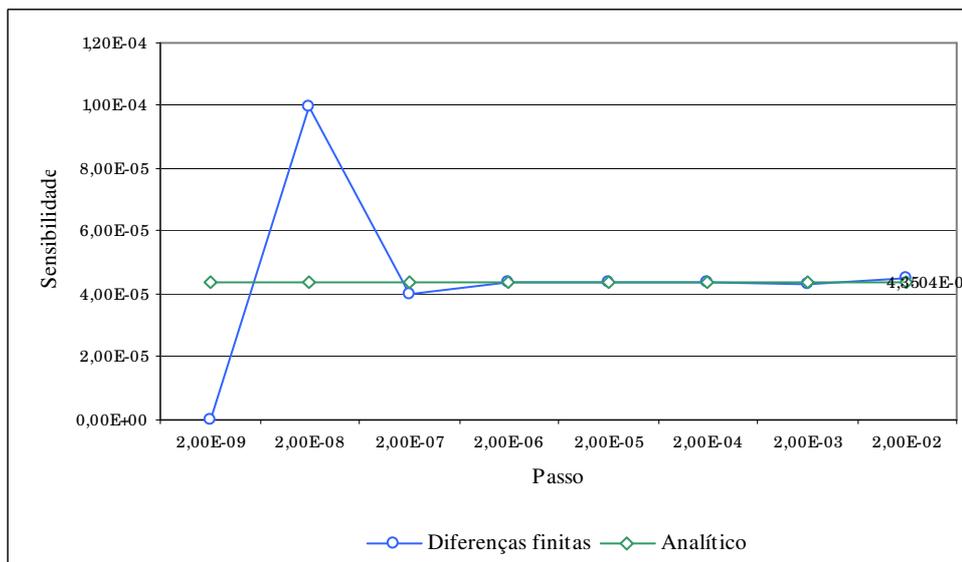


Figura 5.6: Sensibilidade da tensão média em relação ao módulo de elasticidade E.

Para o cálculo da sensibilidade da média das tensões em relação as variáveis de projeto x , tem-se a seguinte expressão:

$$\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial x} = \mathbf{C} \mathbf{B} \frac{\partial \bar{\mathbf{q}}}{\partial x} \quad (5.16)$$

Na figura (5.7) observa-se os resultados obtidos na análise da sensibilidade da média da tensão do elemento 3 da treliça da figura (4.2) em relação à área do elemento 3, com a utilização da expressão (5.16) e com aproximação por diferenças finitas.

Para a análise da sensibilidade da média das tensões, quando da utilização da simulação de Monte Carlo, faz-se uso da equação (5.4) sendo nesta substituído q por σ . Os resultados obtidos para o caso estudado na figura (5.7), para uma simulação por Monte Carlo, estão apresentados na figura (5.8).

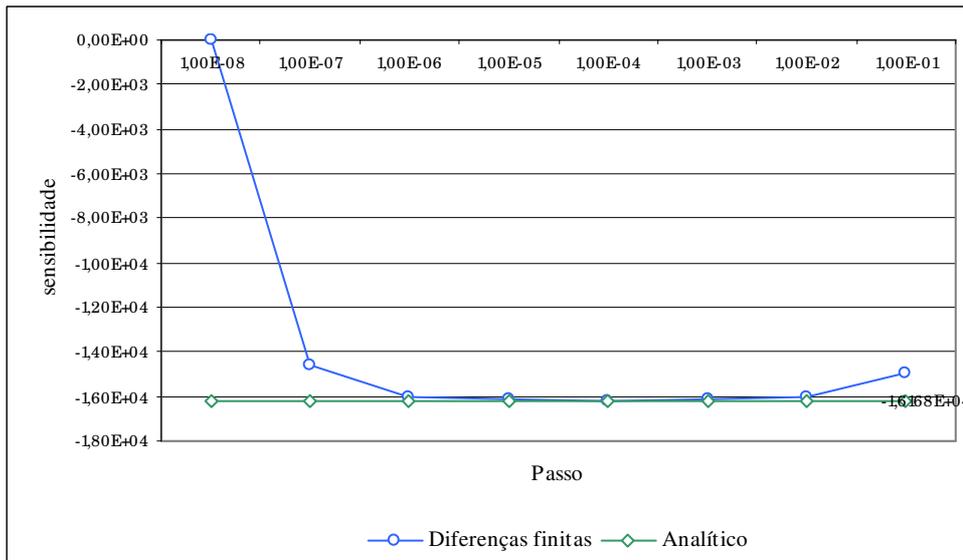


Figura 5.7: Sensibilidade da média da tensão em relação à área - Estatístico linear

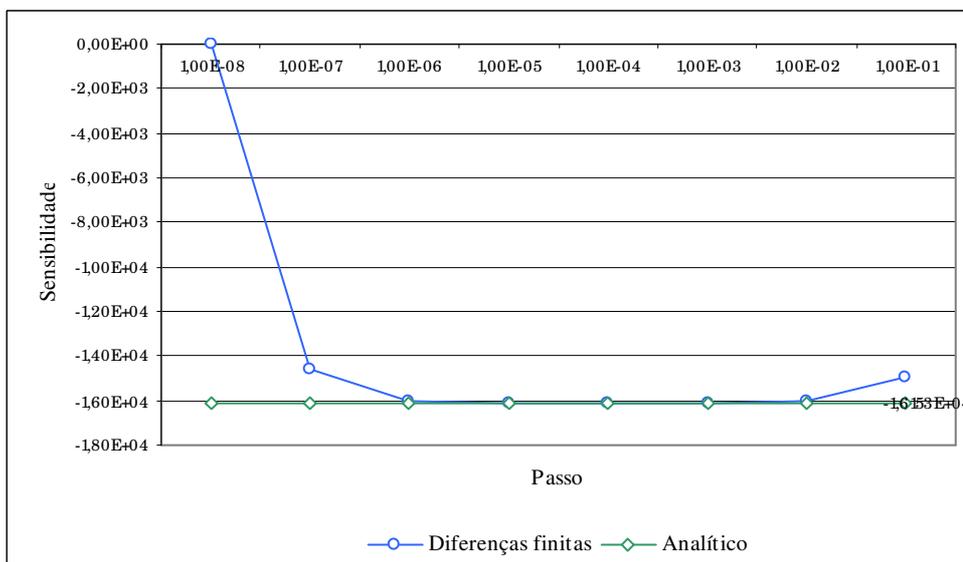


Figura 5.8: Sensibilidade da média da tensão em relação à área - SMC

5.4 Análise de sensibilidade do desvio padrão das tensões

Determina-se a sensibilidade do desvio padrão das tensões derivando-se em relação às variáveis de projeto x , a expressão (4.10). Essa derivada representa a sensibilidade da matriz de covariância das tensões e é dada por:

$$\frac{\partial \mathbf{S}_\sigma}{\partial x} = \frac{\partial \left[\frac{\partial \bar{\boldsymbol{\sigma}}}{\partial r} \right]}{\partial x} \mathbf{S}_r \frac{\partial \bar{\boldsymbol{\sigma}}^T}{\partial r} + \frac{\partial \bar{\boldsymbol{\sigma}}}{\partial r} \mathbf{S}_r \frac{\partial \left[\frac{\partial \bar{\boldsymbol{\sigma}}}{\partial r} \right]^T}{\partial x} \quad (5.17)$$

Verifica-se na equação (5.17) que o termo $\frac{\partial \left[\frac{\partial \bar{\boldsymbol{\sigma}}}{\partial r} \right]}{\partial x}$ é a sensibilidade em relação às variáveis de projeto da sensibilidade da média das tensões em relação às variáveis aleatórias. Este termo pode ser obtido derivando-se em relação às variáveis de projeto, a expressão (5.15), temos assim:

$$\frac{\partial \left[\frac{\partial \bar{\boldsymbol{\sigma}}}{\partial r} \right]}{\partial x} = \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial r} \mathbf{B} \frac{\partial \bar{\mathbf{q}}}{\partial x} + \mathbf{C} \mathbf{B} \frac{\partial \left[\frac{\partial \bar{\mathbf{q}}}{\partial r} \right]}{\partial x} \quad (5.18)$$

Realizando-se agora as mesmas manipulações feitas para obtenção da formulação para o cálculo da sensibilidade do desvio padrão dos deslocamentos em relação às variáveis de projeto, pode-se escrever que, a sensibilidade do desvio padrão das tensões em relação às variáveis de projeto é:

$$\frac{\partial s_{\sigma_i}}{\partial x} = \frac{1}{2s_{\sigma_i}} \frac{\partial S_{\sigma_{ii}}}{\partial x} \quad (5.19)$$

A figura (5.9) apresenta a comparação entre o método analítico direto e aproximações por diferenças finitas na análise da sensibilidade do desvio padrão da tensão do elemento 3 da treliça da figura (4.2) em relação à área do elemento 3.

A análise da sensibilidade do desvio padrão das tensões quando da utilização da simulação de Monte Carlo se dá pela utilização da equação (5.14), sendo nesta substituído q por σ . Os resultados obtidos para o mesmo caso estudado na figura (5.9) estão apresentados na figura (5.10).

Verificou-se através das comparações realizadas que a formulação proposta gera bons resultados, tanto para os casos em que a análise adotada é a estatística linear quanto para os casos em que é utilizada a simulação de Monte Carlo.

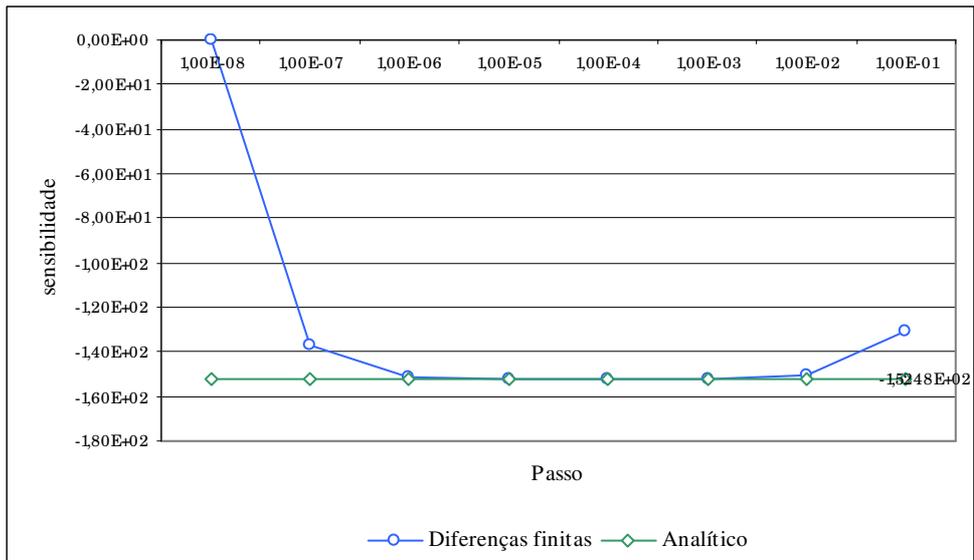


Figura 5.9: Sensibilidade do desvio padrão da tensão em relação à área - Estatístico linear

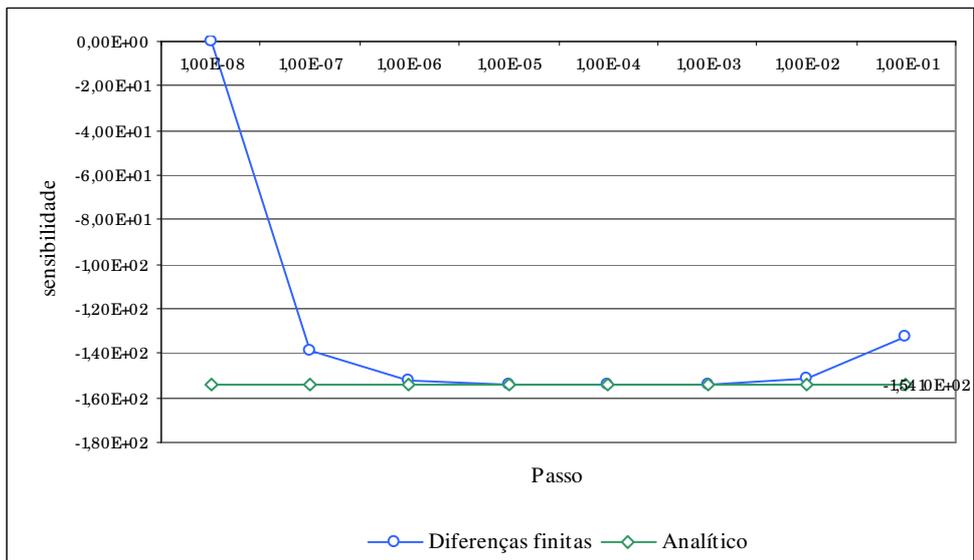


Figura 5.10: Sensibilidade do desvio padrão da tensão em relação à área - SMC