

4

Análise de estruturas incorporando incertezas

4.1

Introdução

Este capítulo trata da análise de estruturas incorporando incertezas. Como citado anteriormente, muitos parâmetros estruturais apresentam características de aleatoriedade. Dessa forma a resposta da estrutura também pode ser dada de maneira estatística, em termos de médias e dispersões de deslocamentos, tensões, esforços etc.

Três métodos de avaliação da resposta de estruturas quando da consideração de incertezas são apresentados. O primeiro método se baseia nos conceitos de média e desvio padrão descritos no capítulo 2 sendo chamado neste trabalho de método exato. O segundo usa uma expansão em série de Taylor para formular uma relação linear entre as variáveis aleatórias da resposta e os parâmetros aleatórios da estrutura. Esta análise envolve a solução de um sistema linear de equações e é chamada de análise estatística linear. O terceiro método é chamado de simulação de Monte Carlo (SMC). Este é o método mais difundido e utilizado na engenharia para tratar de problemas estatísticos.

Na parte final do capítulo são apresentados exemplos para demonstrar a aplicação dos três métodos e para comparação dos mesmos.

4.2

Análise estatística exata

Pode-se efetuar o cálculo da resposta da estrutura em termos estatísticos com o uso direto das equações (2.19) e (2.23), que se referem respectivamente ao cálculo da esperança e da variância. Nota-se, que a utilização dessas expressões é

plausível quando se defronta com problemas de pequeno porte. Ilustram-se nos exemplos apresentados no final do capítulo esses apontamentos.

4.3 Análise estatística linear

De acordo com HART (1982), pode-se determinar a resposta estatística de uma estrutura baseando-se em um modelo estatístico linear. A obtenção deste modelo é apresentada a seguir.

Fazendo-se uma expansão em série de Taylor para uma função f dependente de m parâmetros r em torno da média dos parâmetros \bar{r}_j temos:

$$f(r_1, r_2, \dots, r_m) = f(\bar{r}_1, \bar{r}_2, \dots, \bar{r}_m) + \sum_{j=1}^m \frac{\partial f(\bar{r}_1, \bar{r}_2, \dots, \bar{r}_m)}{\partial r_j} (r_j - \bar{r}_j) + 0^+ \quad (4.1)$$

Salienta-se que o modelo é linear, não sendo considerados desta forma termos de mais alta ordem na equação (4.1).

Pode-se escrever a equação (4.1) na forma matricial para n funções aleatórias com m parâmetros da seguinte maneira:

$$\mathbf{f}(\mathbf{r}) = \mathbf{f}(\bar{\mathbf{r}}) + \left[\frac{\partial \mathbf{f}(\bar{\mathbf{r}})}{\partial \mathbf{r}} \right] \{\mathbf{r} - \bar{\mathbf{r}}\} \quad (4.2)$$

Verifica-se na equação (4.2) a presença da matriz das derivadas parciais

$\left[\frac{\partial \mathbf{f}(\bar{\mathbf{r}})}{\partial \mathbf{r}} \right]$, sendo esta dita matriz de sensibilidade. Comprova-se desta maneira a

utilização da análise de sensibilidade na análise estatística de estruturas, conforme citado no capítulo 3. O valor médio para cada função aleatória é obtido calculando-se a esperança em ambos os lados da equação (4.2) como demonstrado no item sobre combinação linear de variáveis aleatórias do capítulo 2. Tem-se então:

$$E\langle \mathbf{f}(\mathbf{r}) \rangle = \mathbf{f}(\bar{\mathbf{r}}) + \left[\frac{\partial \mathbf{f}(\bar{\mathbf{r}})}{\partial \mathbf{r}} \right] E\langle \{\mathbf{r} - \bar{\mathbf{r}}\} \rangle \quad (4.3)$$

Na equação (4.3) cada termo de $E\langle \{\mathbf{r} - \bar{\mathbf{r}}\} \rangle$ é zero. Por esta razão pode-se escrever que:

$$E\langle \mathbf{f}(\mathbf{r}) \rangle = \mathbf{f}(\bar{\mathbf{r}}) \quad (4.4)$$

A matriz de covariância das funções aleatórias é obtida com o uso da equação (2.61) sendo descrita por:

$$\mathbf{S}_f = \left[\frac{\partial \mathbf{f}(\bar{\mathbf{r}})}{\partial \mathbf{r}} \right] \mathbf{S}_r \left[\frac{\partial \mathbf{f}(\bar{\mathbf{r}})}{\partial \mathbf{r}} \right]^T \quad (4.5)$$

Onde \mathbf{S}_r é a matriz de covariância das variáveis aleatórias.

Agora, aplicando-se os conceitos acima apresentados na equação (3.1), pode-se descrever o vetor de deslocamentos em função de m variáveis aleatórias r sob a forma da equação (4.2).

$$\mathbf{q}(\mathbf{r}) = \mathbf{q}(\bar{\mathbf{r}}) + \left[\frac{\partial \mathbf{q}(\bar{\mathbf{r}})}{\partial \mathbf{r}} \right] \{\mathbf{r} - \bar{\mathbf{r}}\} \quad (4.6)$$

Nota-se na equação (4.5) que a matriz $\left[\frac{\partial \mathbf{f}(\bar{\mathbf{r}})}{\partial \mathbf{r}} \right]$ representa a matriz de transformação linear \mathbf{C} da equação (2.61).

Se $\mathbf{q}(\bar{\mathbf{r}})$ é o vetor da média dos deslocamentos, pode-se obter $\mathbf{q}(\bar{\mathbf{r}})$ pela solução da equação de equilíbrio (3.1) com os valores médios das variáveis aleatórias substituídos na matriz de rigidez. Essa afirmativa é comprovada pela equação (2.57). Pode-se escrever então:

$$E\langle \mathbf{q}(\bar{\mathbf{r}}) \rangle = \mathbf{q}(\bar{\mathbf{r}}) = \mathbf{K}^{-1} \mathbf{F} \quad (4.7)$$

Chama-se a partir de agora a média dos deslocamentos de $\bar{\mathbf{q}}$. Além dos valores médios dos deslocamentos é interessante se obter a matriz de covariância da resposta da estrutura. É possível, com essa matriz representar a correlação existente entre os parâmetros aleatórios da resposta da estrutura, determinar os valores de variância e, por conseguinte, de desvio padrão.

O cálculo da matriz de covariância envolve a derivada com respeito às variáveis aleatórias r_j em ambos os lados da equação de equilíbrio apresentada anteriormente. Finalmente, a matriz \mathbf{S}_q de covariância da resposta em deslocamentos da estrutura correspondentes aos valores médios das variáveis r , é representada da seguinte forma:

$$\mathbf{S}_q = \left[\frac{\partial \mathbf{q}(\bar{\mathbf{r}})}{\partial \mathbf{r}} \right] \mathbf{S}_r \left[\frac{\partial \mathbf{q}(\bar{\mathbf{r}})}{\partial \mathbf{r}} \right]^T \quad (4.8)$$

Além de deslocamentos, a resposta da estrutura em termos de tensões e esforços, entre outros, também pode ser determinada, utiliza-se para isso a mesma metodologia empregada para o cálculo dos deslocamentos.

Para as tensões pode-se escrever, a partir da equação (3.9)

$$E\langle \boldsymbol{\sigma}(\bar{\mathbf{r}}) \rangle = \boldsymbol{\sigma}(\bar{\mathbf{r}}) = \mathbf{C} \mathbf{B} \bar{\mathbf{q}} \quad (4.9)$$

e a matriz de covariância como:

$$\mathbf{S}_\sigma = \left[\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}(\bar{\mathbf{r}})}{\partial \mathbf{r}} \right] \mathbf{S}_r \left[\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}(\bar{\mathbf{r}})}{\partial \mathbf{r}} \right]^T \quad (4.10)$$

Sendo a matriz \mathbf{C} da equação (4.9) obtida com os valores médios, ou seja, $\mathbf{C}(\bar{\mathbf{r}})$, caso essas sejam propriedades mecânicas dos materiais. A média das tensões serão designadas a partir de agora por $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$.

As matrizes derivadas utilizadas nesse processo serão apresentadas com detalhes no capítulo referente à análise de sensibilidade estatística.

4.4

Simulação de Monte Carlo

A simulação de Monte Carlo é amplamente utilizada na engenharia para solucionar problemas de análise estatística e problemas de incertezas. De acordo com HART (1982), a análise de Monte Carlo se apresenta bastante eficiente para solução de problemas não lineares e problemas que envolvam muitas variáveis aleatórias.

O passo fundamental na análise de Monte Carlo é a geração de um conjunto de n números aleatórios. Esse conjunto de números aleatórios tem a propriedade de possuir a mesma média e o mesmo desvio padrão.

A simulação de Monte Carlo é caracterizada de acordo com o tipo das variáveis envolvidas. Apresenta-se a seguir o tratamento dispensado às variáveis aleatórias independentes e às variáveis aleatórias dependentes.

4.5

Simulação de Monte Carlo para variáveis aleatórias independentes

Uma vez citado que o passo fundamental na simulação de Monte Carlo é a obtenção de um conjunto de números aleatórios que possuam mesmas médias e desvio padrão, trata-se agora deste item.

A obtenção dos números aleatórios se dá em duas etapas. Primeiro faz-se a geração de números aleatórios para uma função de densidade de probabilidade uniforme com intervalo de 0 a 1, HART(1982).

Tabela 4.1: Números aleatórios para uma função de densidade uniforme

| | | | | |
|---------|---------|---------|---------|---------|
| 0.52478 | 0.33415 | 0.73595 | 0.89716 | 0.92862 |
| 0.80249 | 0.41999 | 0.66224 | 0.85258 | 0.27419 |
| 0.94132 | 0.75908 | 0.48078 | 0.45790 | 0.01450 |
| 0.56605 | 0.91323 | 0.14168 | 0.92386 | 0.61200 |
| 0.58815 | 0.03428 | 0.47813 | 0.80621 | 0.66047 |
| 0.69379 | 0.02333 | 0.39404 | 0.16964 | 0.71899 |
| 0.75228 | 0.55696 | 0.84131 | 0.03060 | 0.36567 |
| 0.14327 | 0.74838 | 0.65097 | 0.46517 | 0.86135 |
| 0.90625 | 0.25833 | 0.44552 | 0.41481 | 0.82155 |
| 0.06070 | 0.87260 | 0.11997 | 0.11580 | 0.75099 |

O segundo passo a ser efetuado é a transformação desses números em novos números aleatórios correspondentes a uma nova função de densidade de probabilidade.

Considerando-se y_i como sendo um número aleatório para uma função de densidade de probabilidade uniforme e x_i um número aleatório para uma nova função de densidade de probabilidade $p(x)$, obtém-se a relação entre os dois números resolvendo o seguinte problema:

$$P(X = x_i) = \int_{-\infty}^{x_i} p(x) dx = y_i \quad (4.11)$$

Com as propriedades da função de densidade de probabilidade $p(x)$ pode-se determinar os valores das variáveis aleatórias a serem utilizadas. Por exemplo, para uma função de densidade de probabilidade normal:

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{x}{2}\right\} \quad (4.12)$$

Onde:

$$x = \frac{X - \bar{X}}{s_X} \quad (4.13)$$

Sendo s_X o desvio padrão da variável aleatória, \bar{X} o valor médio da variável aleatória e x o número aleatório determinado. Com a equação (4.13), determina-se o valor de X . Quanto maior o número de valores utilizados, melhores serão os resultados.

4.6

Simulação de Monte Carlo para variáveis aleatórias dependentes

De maneira semelhante ao realizado no caso de variáveis aleatórias independentes, aqui também se faz necessária uma relação entre números aleatórios. Determina-se, segundo HART (1982), a relação existente entre números aleatórios para o caso especial de problemas com variáveis aleatórias correlatas e função de densidade de probabilidade normal da seguinte forma:

Considera-se m variáveis correlatas (x_1, x_2, \dots, x_m) com função de densidade de probabilidade normal, sendo conhecidos o vetor das médias $\bar{\mathbf{X}}$ e a matriz de covariância das variáveis aleatórias \mathbf{S}_x . Serão gerados n números aleatórios para cada variável aleatória m . Faz-se inicialmente, uma decomposição da matriz de covariância \mathbf{S}_x utilizando-se o método de decomposição de Choleski:

$$\mathbf{S}_x = \mathbf{L} \mathbf{S}_y \mathbf{L}^T \quad (4.14)$$

onde \mathbf{L} é uma matriz triangular superior de ordem $(m \times m)$ obtida da seguinte maneira:

$$L_{ji} = 1 \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (4.15)$$

$$L_{j1} = \frac{S_{x_{1j}}}{S_{y_{11}}} \quad j \geq 2 \quad (4.16)$$

$$L_{ji} = \frac{1}{S_{y_{ii}}} \left[S_{x_{ij}} - \sum_{l=1}^{i-1} L_{il} L_{jl} S_{y_{ll}} \right] \quad i \geq 2 \quad j \geq i+1 \quad (4.17)$$

E \mathbf{S}_y uma matriz diagonal de ordem n obtida da seguinte forma:

$$S_{y_{11}} = S_{x_{11}} \quad (4.18)$$

$$S_{y_{ii}} = S_{x_{ii}} - \sum_{l=1}^{i-1} L_{il}^2 S_{y_{ll}} \quad i \geq 2 \quad (4.19)$$

Após essa etapa, é possível determinar com a matriz \mathbf{L} , que é uma matriz de transformação, e o vetor das médias $\bar{\mathbf{X}}$, um novo vetor de médias $\bar{\mathbf{Y}}$. O vetor $\bar{\mathbf{Y}}$ é o vetor desacoplado das médias, ou seja não existe mais relação entre as variáveis aleatórias uma vez que \mathbf{S}_y é diagonal. Com o vetor $\bar{\mathbf{Y}}$ determinam-se os n números aleatórios para as m variáveis aleatórias, denominados \mathbf{y} , como se as variáveis aleatórias fossem independentes entre si.

Finalmente, com os n números aleatórios gerados, utilizando-se a matriz de transformação \mathbf{L} , pode-se determinar os valores correlacionados das variáveis aleatórias \mathbf{X} fazendo:

$$\mathbf{X} = \mathbf{L} \mathbf{Y} \quad (4.20)$$

Tanto para problemas com variáveis aleatórias dependentes, quanto para problemas com variáveis aleatórias independentes, a etapa final da análise de Monte Carlo se dá da mesma maneira, sendo ela a seguinte:

Avalia-se o problema n vezes, ou seja, para cada número ou conjunto de números aleatórios. Finalmente, utilizando-se os conceitos apresentados no capítulo 2, pode-se determinar valores médios, desvio padrão ou outro parâmetro desejável. Por exemplo, a média dos deslocamentos é dada por:

$$\bar{q} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n q_j \quad (4.21)$$

o desvio padrão dos deslocamentos é dados por:

$$\mathbf{s}_q = \sum_{j=1}^n \left(q_j - \bar{q} \right)^2 \quad (4.22)$$

Nas equações (4.21) e (4.22) n é o número de valores aleatórios escolhidos. O cálculo da média e do desvio padrão das tensões se faz da mesma forma.

4.7

Considerações do trabalho para análise estatística de estruturas reticuladas

Para a análise estatística de treliças considerou-se o módulo de elasticidade longitudinal do material E como sendo uma variável aleatória. Já, para a análise estatística de pórticos adotou-se como variáveis aleatórias o módulo de elasticidade longitudinal E e o módulo de elasticidade transversal G , de acordo com as considerações apontadas no capítulo 3. Para carregamentos e dimensões foram tomados valores determinísticos.

As etapas do procedimento para a determinação do vetor da média e da matriz de covariância dos deslocamentos nodais, utilizando-se o modelo de análise estatística linear, são descritas a seguir:

Primeiro, como já citado, para determinação do vetor da média dos deslocamentos nodais, faz-se a resolução das equações de equilíbrio estático (3.1), substituindo na matriz de rigidez os valores médios das variáveis aleatórias.

Após a obtenção do vetor da média dos deslocamentos, determina-se a sensibilidade da média dos deslocamentos em relação às variáveis aleatórias. Com esses valores obtidos pode-se determinar, a partir da equação (4.8), a matriz de covariância dos deslocamentos. Ainda, para o modelo de treliça faz-se o cálculo da média e do desvio padrão das tensões. Utiliza-se para isso as equações (4.9) e (4.10).

Na simulação de Monte Carlo, toma-se para a análise de treliças o método empregado para variáveis aleatórias independentes, uma vez que se considerou somente o módulo de elasticidade longitudinal como variável aleatória. Para a análise de pórticos deve-se considerar a simulação de Monte Carlo para variáveis aleatórias dependentes, dada à correlação existente entre os módulos de elasticidade longitudinal e transversal.

4.8 Exemplos

Efetua-se a análise estatística de algumas estruturas para comparações entre os métodos e determinação de características referentes a cada um deles. Para todos os exemplos tomou-se uma função de densidade de probabilidade normal e 200 valores aleatórios para simulação de Monte Carlo.

4.8.1 Treliza de 4 elementos

A primeira estrutura a ser analisada é uma treliza plana (figura 4.1) com as seguintes características:

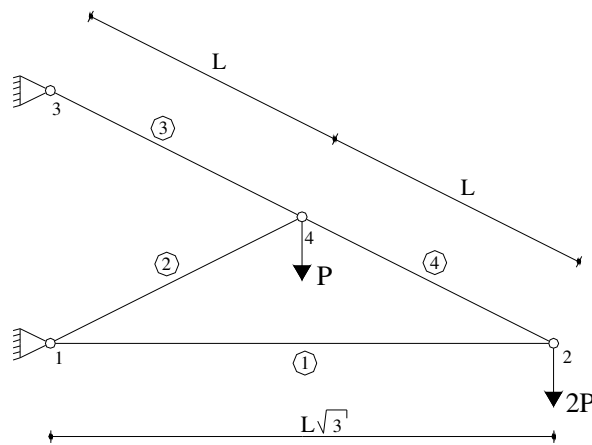


Figura 4.1: Treliza de 4 elementos.

Comprimento $L = 1,5 \text{ m}$; valor médio do módulo de elasticidade longitudinal $\bar{E} = 50000,0 \text{ kN/m}^2$; $\text{Var}(\bar{E}) = 16000000,0 \text{ (kN/m}^2)^2$; área da seção transversal do elemento 1, $A_1 = 0,015 \text{ m}^2$ e dos demais, A_2 , igual a $0,010 \text{ m}^2$; carga $P = 1,0 \text{ kN}$.

O deslocamento vertical do nó 2 pode ser calculado pela seguinte expressão:

$$q_2 = \frac{6PL}{E} \left(\frac{3}{A_1} + \frac{\sqrt{3}}{A_2} \right) \quad (4.23)$$

Portanto, com os conceitos apresentados no capítulo 2, pode-se dizer que o valor médio do deslocamento analisado de forma exata é igual a:

$$E\langle q_2 \rangle = \bar{q}_2 = \frac{6PL}{\bar{E}} \left(\frac{3}{A_1} + \frac{\sqrt{3}}{A_2} \right) \quad (4.24)$$

E seu desvio padrão:

$$s_{q_2} = \sqrt{E\left\langle \left(q_2 - \bar{q}_2 \right)^2 \right\rangle} \quad (4.25)$$

A tabela (4.2) apresenta os resultados obtidos para a média do deslocamento vertical do nó 2, tanto para a análise exata quanto para os métodos estatístico linear e simulação de Monte Carlo.

Tabela 4.2: Comparação de resultados da treliça de 4 elementos

| | $\bar{q}_2 \text{ (m)}$ | $s_{q_2} \text{ (m)}$ | Erro relativo \bar{q}_2 (%) | Erro relativo s_{q_2} (%) |
|-----------------|-------------------------|-----------------------|----------------------------------|--------------------------------|
| Exato | 0,0672 | 0,00553 | 0,000 | 0,000 |
| SMC | 0,0680 | 0,00554 | 1,190 | 0,180 |
| E.Linear | 0,0672 | 0,00538 | 0,000 | 2,712 |

Verifica-se através dos resultados apresentados na tabela (4.2) que os valores encontrados nos três métodos são semelhantes e que os erros encontrados no método estatístico linear e simulação de Monte Carlo em relação à resposta exata são pequenos. Nota-se também que, enquanto temos valores iguais para a média dos deslocamentos na análise exata e na análise estatística linear e valores diferentes na simulação de Monte Carlo, temos para o desvio padrão valores bastante semelhantes entre o método exato e a simulação de Monte Carlo e um erro relativo maior para a análise estatística linear.

Quando se analisa treliças isostáticas ou treliças constituídas por apenas um material, não verificamos variações nos valores médios das tensões. Desta forma não se obtém valores de desvio padrão das tensões.

4.8.2 Treliza de 10 elementos

O exemplo seguinte (figura 4.2), apresenta comparações entre o método estatístico linear e simulação de Monte Carlo. Os dados da treliza são os seguintes: Comprimento $L = 0,8 \text{ m}$; valor médio do módulo de elasticidade longitudinal para os elementos de 1 a 6 $\bar{E}_1 = 50000,0 \text{ kN/m}^2$; para os demais elementos $\bar{E}_2 = 60000,0 \text{ kN/m}^2$; $\text{Var}(\bar{E}_1) = 16000000,0 \text{ (kN/m}^2)^2$; $\text{Var}(\bar{E}_2) = 23040000,0 \text{ (kN/m}^2)^2$; $\text{Cov}(\bar{E}_1, \bar{E}_2) = 15360000,0 \text{ (kN/m}^2)^2$; carga $P = 1,0 \text{ kN}$; área da seção transversal dos elementos de 1 a 6 igual a $0,010 \text{ m}^2$ e dos demais igual a $0,015 \text{ m}^2$.

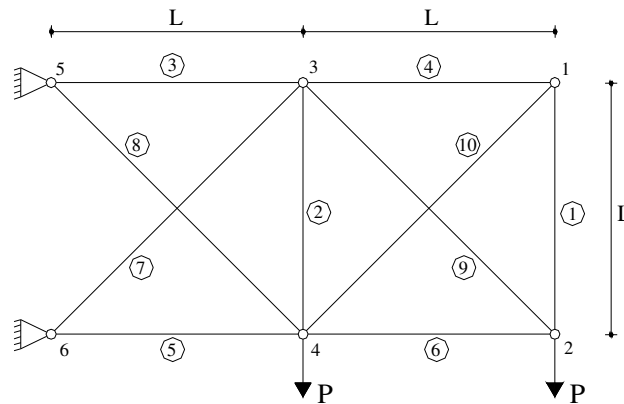


Figura 4.2: Treliza de 10 elementos.

A tabela (4.3) apresenta os resultados obtidos para a média e desvio padrão do deslocamento vertical do nó 2, e para a média e desvio padrão da tensão do elemento 3, segundo o método estatístico linear e para simulação de Monte Carlo.

Tabela 4.3: Comparação de resultados da treliza de 10 elementos

| | $\bar{q}_2 \text{ (m)}$ | $s_{q_2} \text{ (m)}$ | $\bar{\sigma}_3 \text{ (kN/m}^2\text{)}$ | $s_{\sigma_3} \text{ (kN/m}^2\text{)}$ |
|--------------------------|-------------------------|-----------------------|--|--|
| SMC | 0,01458 | 0,00087 | 193,987 | 0,1750 |
| E.Linear | 0,01446 | 0,00085 | 194,002 | 0,1740 |
| Erro relativo (%) | 0,823 | 2,298 | 0,007 | 0,571 |

Verifica-se na tabela (4.3) que os valores obtidos com a análise estatística linear são próximos dos obtidos pela simulação de Monte Carlo. O erro relativo, na comparação entre os dois métodos, é maior para a avaliação do desvio padrão do que para a avaliação dos valores médios de deslocamento e tensões.

Demonstrou-se, para o modelo de treliça, através dos dados apresentados que a análise estatística linear apesar de suas simplificações, gera bons resultados.

4.8.3 Pórtico de 3 elementos

A seguir far-se-á a análise do pórtico plano da figura (3.2) tomando-se os seguintes valores: $L = 3,0 \text{ m}$; valor médio do módulo de elasticidade longitudinal $\bar{E} = 50000,0 \text{ kN/m}^2$; valor médio do módulo de elasticidade transversal $\bar{G} = 20833,33 \text{ kN/m}^2$; $Var(\bar{E}) = 16000000,0 \text{ (kN/m}^2)^2$; $Var(\bar{G}) = 2777777,77 \text{ (kN/m}^2)^2$; $Cov(\bar{E}, \bar{G}) = 5333333,33 \text{ (kN/m}^2)^2$ e área da seção transversal $(0,15 \times 0,60) \text{ m}^2$. A tabela (4.4), apresenta os valores obtidos para a análise estatística linear e para a simulação de monte Carlo do deslocamento horizontal do nó 3.

Tabela 4.4: Comparação de resultados do pórtico teste 1

| | $\bar{q} \text{ (m)}$ | $s_q \text{ (m)}$ |
|--------------------------|-----------------------|-------------------|
| SMC | 0,005606 | 0,000474 |
| E.Linear | 0,005539 | 0,000433 |
| Erro relativo (%) | 1,195 | 8,649 |

Na tabela (4.4) constata-se também, que os maiores erros relativos entre o método estatístico linear e a simulação de Monte Carlo se dão para o desvio padrão.

Em todos os exemplos pode-se verificar que o método estatístico linear apresenta bons resultados em comparação a simulação de Monte Carlo. As

diferenças verificadas são muito pequenas caracterizando a resposta obtida pelo método estatístico linear como uma boa aproximação.