

3

Análise e análise de sensibilidade de estruturas reticuladas

3.1

Introdução

Vários são os métodos para análise de estruturas. Dentre eles, o método dos elementos finitos com formulação em deslocamentos é o mais difundido e utilizado. Dessa maneira, maiores detalhes sobre esses métodos serão omitidos, apresentando-se nesse capítulo apenas as expressões básicas e as considerações adotadas nesse trabalho para a análise linear de estruturas planas reticuladas.

Para a obtenção da resposta estrutural se faz necessária a solução de equações algébricas. De acordo com HAFTKA & GÜRDAL (1993) o cálculo da sensibilidade é equivalente ao problema matemático de obter as derivadas da solução dessas equações em relação a suas variáveis.

Algumas técnicas de análise determinística de estruturas, como a de Ritz, utilizam os resultados das sensibilidades assim como estas são essenciais na avaliação da resposta estatística de estruturas quando do emprego do método estatístico linear. Porém, a análise de sensibilidade tem outras aplicações. Em geral, é bastante difícil prever quais as influências na resposta de uma estrutura causadas por modificações em alguns parâmetros de seu modelo. A sensibilidade da resposta da estrutura para pequenas variações desses parâmetros pode ser utilizada como ferramenta nas etapas de análise e dimensionamento da estrutura além de desempenhar um papel fundamental na otimização estrutural, uma vez que é empregada em vários métodos de programação matemática.

Freqüentemente a análise da sensibilidade é a etapa computacional mais cara no processo de otimização.

Outros aspectos que levam a análise de sensibilidade ter papel relevante são os erros que podem ser cometidos devidos à sua má avaliação.

Neste capítulo apresentam-se algumas técnicas para avaliação da sensibilidade como, aproximações por diferenças finitas, métodos analíticos e método semi-analítico.

3.2 Análise linear de estruturas reticuladas

Os deslocamentos de uma estrutura são causados pelos efeitos acumulados das deformações de todos os elementos. Portanto, a análise dos deslocamentos depende entre outros fatores do tipo de deformações consideradas.

O processo para determinação dos deslocamentos nodais em estruturas reticuladas com comportamento linear elástico se dá pela solução do seguinte sistema de equações de equilíbrio.

$$\mathbf{K} \mathbf{q} = \mathbf{F} \quad (3.1)$$

onde $\mathbf{K}$ é a matriz de rigidez global da estrutura, $\mathbf{q}$ o vetor de deslocamentos nodais e $\mathbf{F}$ o vetor de forças nodais, todos descritos num mesmo sistema, no referencial global.

Para a análise de treliças planas, considerando-se deformações axiais e tomando um elemento com dois nós e um grau de liberdade por nó representado na figura (3.1), tem-se a seguinte matriz de rigidez local do elemento.

$$\mathbf{K}_e = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & -\frac{EA}{L} \\ -\frac{EA}{L} & \frac{EA}{L} \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

Para a análise de pórticos planos geralmente consideram-se apenas os efeitos das deformações axiais e de flexão. Entretanto, em alguns casos, os efeitos causados pelas deformações por cisalhamento podem ser significativos. Nesse sentido e também para que as variáveis aleatórias sejam dependentes na análise estatística dos pórticos planos, considerar-se-á o efeito das deformações por cisalhamento. Tem-se então, para um elemento de pórtico plano com dois nós por

elemento e três graus de liberdade por nó representado na figura (3.1), a seguinte matriz de rigidez local.

$$\mathbf{K}_e = \frac{EI}{1+2g} \begin{bmatrix} \frac{A}{L} \left(\frac{1+2g}{I} \right) & 0 & 0 & -\frac{A}{L} \left(\frac{1+2g}{I} \right) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12}{L^3} & \frac{6}{L^2} & 0 & -\frac{12}{L^3} & \frac{6}{L^2} \\ 0 & \frac{6}{L^2} & \frac{4}{L} \left(1 + \frac{g}{2} \right) & 0 & -\frac{6}{L^2} & \frac{2}{L} (1-g) \\ -\frac{A}{L} \left(\frac{1+2g}{I} \right) & 0 & 0 & \frac{A}{L} \left(\frac{1+2g}{I} \right) & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12}{L^3} & -\frac{6}{L^2} & 0 & \frac{12}{L^3} & -\frac{6}{L^2} \\ 0 & \frac{6}{L^2} & \frac{2}{L} (1-g) & 0 & -\frac{6}{L^2} & \frac{4}{L} \left(1 + \frac{g}{2} \right) \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

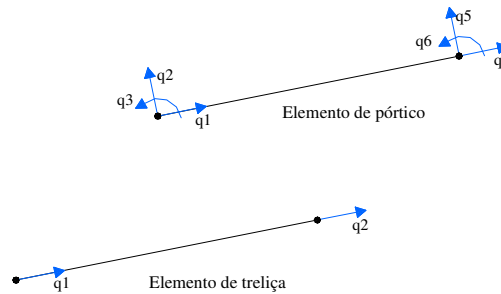


Figura 3.1: Elementos de treliça e pórtico

Nas matrizes $\mathbf{K}_e$, E é o módulo de elasticidade longitudinal, I o momento de inércia da seção transversal e L o comprimento do elemento, A é a área da seção transversal e g é definido por GERE & WEAVER (1967) como uma constante adimensional de cisalhamento dada por:

$$g = \frac{6fEI}{GA L^2} \quad (3.4)$$

Onde G é o módulo de elasticidade transversal e f é um fator relacionado com a geometria da seção transversal. Este fator é chamado por TIMOSHENKO & GERE (1989) de fator de forma para cisalhamento e é definido como:

$$f = \frac{A}{I^2} \int_A \frac{Q^2}{b^2} dA \quad (3.5)$$

Onde dA representa um elemento infinitesimal de área na seção reta do elemento, Q representa o momento estático da seção e b a largura da seção.

Para seções retangulares o fator de forma de cisalhamento é 6/5, para seções circulares é 10/9 e para tubos finos é 2.

Para comprovar o efeito gerado pelo termo referente à deformação por cisalhamento e assim justificar sua utilização, analisa-se o seguinte pórtico.

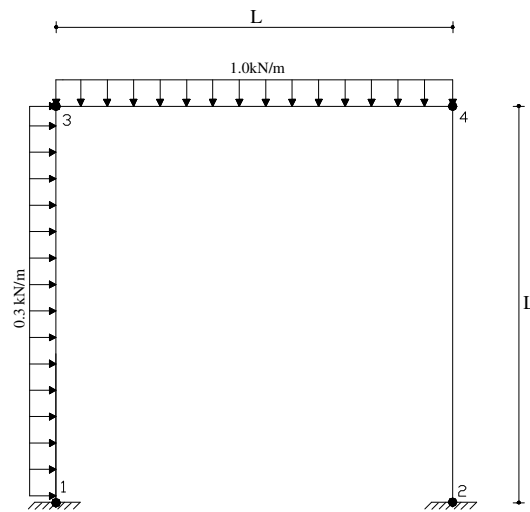


Figura 3.2: Pórtico de 3 elementos

Onde o comprimento L é de 3 m. O módulo de elasticidade longitudinal E é de 25000,00 kN/m^2 , o módulo de elasticidade transversal G é igual a 10416,00 kN/m^2 e a seção transversal retangular de largura b igual a 0,15 m.

Verifica-se, através da figura (3.3), o efeito gerado no deslocamento horizontal do nó 3 devido à parcela referente à deformação por cisalhamento. Chamou-se o deslocamento estudado de q_c quando da consideração de deformações por cisalhamento e de q quando esta parcela não era considerada. Nota-se que este efeito, conforme esperado, é mais significativo quando a relação entre h e L é maior, ou seja, em vigas altas. Para uma relação entre h e L igual a 0,266 a relação entre q e q_c foi de aproximadamente 0,85. A partir destas observações é possível afirmar que a parcela referente às deformações por cisalhamento é relevante neste caso.

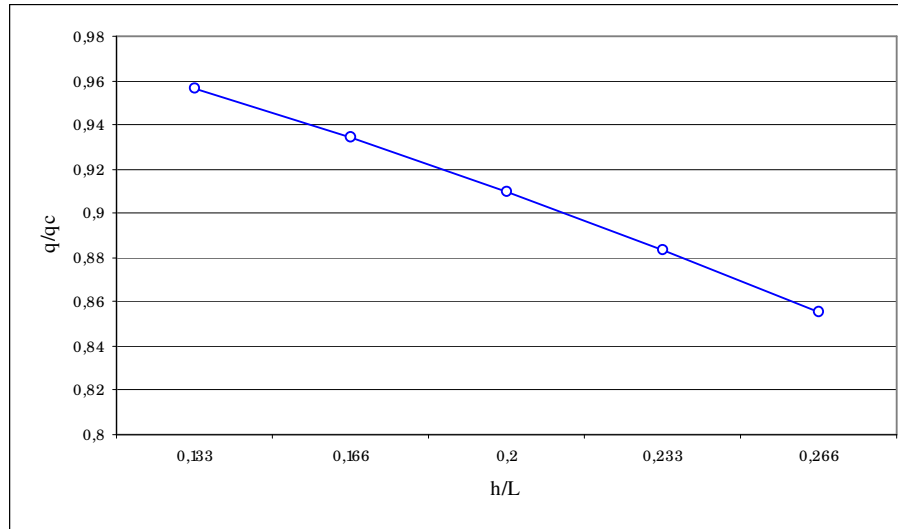


Figura 3.3: Efeito da deformação de cisalhamento

Para a análise de tensões, assumindo uma relação linear pode-se descrever o vetor de tensões por:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon} \quad (3.6)$$

onde $\mathbf{C}$ é a matriz constitutiva elástica dependente dos parâmetros mecânicos do material e $\boldsymbol{\varepsilon}$ é o vetor de deformações.

Os deslocamentos no interior dos elementos são definidos, no método dos elementos finitos, a partir dos deslocamentos nodais, pelas seguintes expressões:

$$\mathbf{q}^* = \mathbf{N} \mathbf{q} \quad (3.7)$$

sendo $\mathbf{N}$ construída com as funções de interpolação dos elemento. O vetor das deformações é expresso em função dos deslocamentos nodais por:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B} \mathbf{q} \quad (3.8)$$

Onde, $\mathbf{B}$ é uma matriz de incidência cinemática, que relaciona deslocamentos e deformações. Pode-se escrever então que:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} \mathbf{B} \mathbf{q} \quad (3.9)$$

3.3 Análise de sensibilidade

3.3.1 Aproximação por diferenças finitas

Dada uma função $f(x)$, a aproximação de primeira ordem $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ da derivada

$\frac{df}{dx}$ é dada por:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad (3.10)$$

Onde, Δx é uma perturbação absoluta e pequena o suficiente para produzir bons resultados. Esta perturbação é definida por:

$$\Delta x = \eta x \quad (3.11)$$

sendo η uma perturbação relativa.

É possível se empregar aproximações por diferenças finitas para derivadas de mais alta ordem, entretanto o custo computacional elevado faz com que raramente seja utilizada essa técnica. Caso se deseje obter as derivadas da resposta da estrutura em relação à n variáveis de projeto, a aproximação por diferenças finitas necessita de n análises adicionais.

A determinação do tamanho do passo Δx é fundamental para a utilização desta técnica, pois existem duas possibilidades de erro associadas a este fator: condição de erro e truncamento.

O erro por truncamento $\epsilon_T(\Delta x)$ resulta da negligência de termos na expansão em série de Taylor para a função perturbada. Por exemplo, a expansão até 2ª ordem em série de Taylor em torno do ponto x da função perturbada $f(x + \Delta x)$ pode ser escrita como:

$$f(x + \Delta x) = f(x) + \Delta x \frac{df(x)}{dx} + \frac{(\Delta x)^2}{2} \frac{d^2 f(x + \zeta \Delta x)}{dx^2} \quad 0 \leq \zeta \leq 1 \quad (3.12)$$

Da equação (3.12) verifica-se que o erro de truncamento para a aproximação por diferenças finitas é:

$$\epsilon_T(\Delta x) = \frac{(\Delta x)^2}{2} \frac{d^2 f(x + \zeta \Delta x)}{dx^2} \quad 0 \leq \zeta \leq 1 \quad (3.13)$$

Já a condição de erro é a diferença entre a avaliação numérica e o valor exato da função. Uma contribuição para a condição de erro é o “erro de arredondamento” no cálculo de $\frac{df}{dx}$ dos valores originais e perturbados.

Segundo HAFTKA & GÜRDAL (1993) selecionando-se um tamanho de passo muito pequeno reduz-se os erros por truncamento, entretanto ocorrerão excessivas condições de erro. A figura (3.4) representa um exemplo ilustrativo de avaliação da sensibilidade realizado por aproximação por diferenças finitas.

Observa-se na figura os erros por condição de erro quando o tamanho do passo é menor que 0,0001 e erros de truncamento quando o tamanho do passo é maior que 0,1.

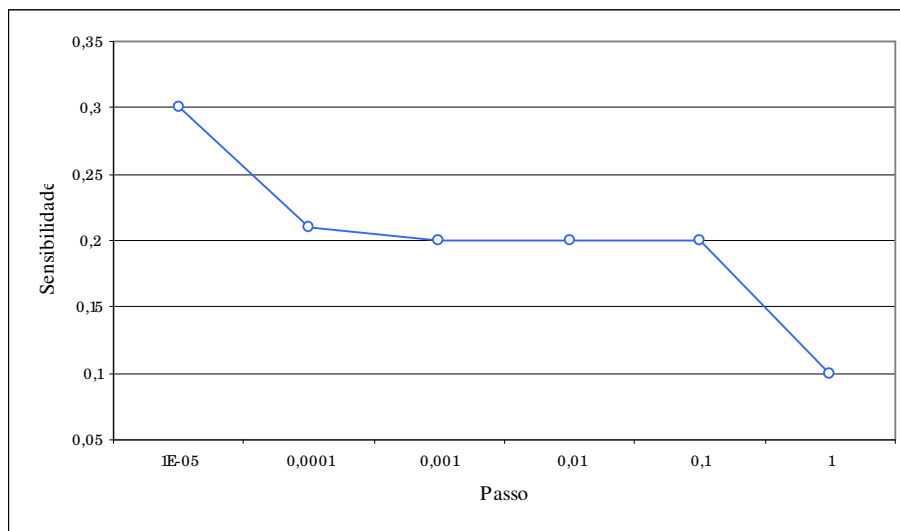


Figura 3.4: Sensibilidade - aproximação por diferenças finitas

3.3.2 Métodos analíticos

As derivadas primeiras, obtidas analiticamente, podem ser dadas ou pelo método direto ou pelo método adjunto. Para descrição de ambos os métodos

utiliza-se a equação de equilíbrio estático em termos dos deslocamentos nodais, equação (3.1).

Derivando a equação (3.1) com respeito à x tem-se:

$$\mathbf{K} \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial x} \mathbf{q} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} \quad (3.14)$$

Arranjando-se a equação (3.14), tem-se a derivada dos deslocamentos $\mathbf{q}$ com respeito à x dada da seguinte forma:

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial x} = \mathbf{K}^{-1} \left(-\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial x} \mathbf{q} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} \right) \quad (3.15)$$

A equação (3.15) representa o método direto. Nesta, a parcela entre parênteses é denominada de pseudo-força, $\mathbf{p}$.

A segunda aproximação, chamada de método adjunto é geralmente empregada para obtenção das sensibilidades das restrições nos problemas de otimização. Tomando-se uma típica restrição $g(\mathbf{q}, \mathbf{x}) \geq 0$ e supondo-se agora, por simplicidade, que a mesma dependa de uma única variável de projeto x , pode-se escrever:

$$\frac{dg}{dx} = \frac{\partial g}{\partial x} + \mathbf{z}^T \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial x} \quad (3.16)$$

onde $\mathbf{z}$ é um vetor com as componentes:

$$z_i = \frac{\partial g}{\partial q_i} \quad (3.17)$$

Nota-se que é usada a notação $\frac{dg}{dx}$ para a derivada total de g em relação a x . Esta derivada total inclui a parte explícita $\frac{\partial g}{\partial x}$ mais a parte implícita através de sua dependência de $\mathbf{q}$. Pré-multiplicando-se ambos os lados da equação (3.14) por $\mathbf{z}^T \mathbf{K}^{-1}$ e definindo-se um vetor adjunto $\boldsymbol{\lambda}$ obtido da solução do seguinte sistema:

$$\mathbf{K}\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{z} \quad (3.18)$$

pode-se escrever a equação (3.16) como:

$$\frac{dg}{dx} = \frac{\partial g}{\partial x} + \boldsymbol{\lambda}^T \left(-\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial x} \mathbf{q} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} \right) \quad (3.19)$$

Segundo HAFTKA & GÜRDAL (1993) a escolha do método a ser empregado está associada ao número de restrições e ao número de variáveis de projeto. O método direto requer a solução da equação (3.15) para cada variável de projeto ao passo que o método adjunto necessita a solução da equação (3.18) para cada restrição. Assim, o método direto é mais eficiente computacionalmente quando o número de variáveis de projeto é menor que o número de restrições que necessitam ser diferenciadas. O método adjunto é mais eficiente quando o número de variáveis de projeto é maior que o número dessas restrições.

3.3.3 Método semi-analítico

Tanto o método analítico direto quanto o adjunto requerem as derivadas da matriz de rigidez com respeito às variáveis de projeto. Muitas vezes a obtenção analítica dessas derivadas é complexa. Por este motivo, o método semi-analítico propõe a solução das derivadas da matriz de rigidez utilizando aproximações por diferenças finitas. Pode-se, desta maneira escrever a equação (3.19) da seguinte forma:

$$\frac{dg}{dx} = \frac{\partial g}{\partial x} + \boldsymbol{\lambda}^T \left(-\frac{\mathbf{K}(x + \Delta x) - \mathbf{K}(x)}{\Delta x} \mathbf{q} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} \right) \quad (3.20)$$

A equação (3.15) também poderia ser aproximada de maneira semelhante. Ressalta-se, entretanto, em se tratando de aproximações por diferenças finitas, que os erros decorrentes da aplicação desta técnica devem ser avaliados.