2
Conceitos Básicos

Neste capítulo são apresentados alguns conceitos importantes e necessários para o desenvolvimento do trabalho. São apresentadas as definições de *campo vetorial*, *fluxo* e *linhas de fluxo*. Tratamos também de *pontos singulares* destacando como classificá-los. Apresentamos como os dados se comportam num *campo vetorial discreto* além de abordar um pouco da representação de topologia do campo vetorial por meio do seu *grafo topológico*.

2.1
Campo Vetorial e Fluxo

Os campos vetoriais foram originalmente usados em física para descrever movimentos num domínio, como por exemplo, a velocidade e direção de um fluido em um dado espaço. Nesta dissertação, nos restringiremos ao caso de campos vetoriais bidimensionais.

Definição 2.1 *Um* ***campo vetorial*** $\mathbf{v}$ *em um domínio planar* $D \in \mathbb{R}^2$ *é uma função que associa a cada ponto* $(x, y) \in D$ *a um vetor bidimensional*

$$\mathbf{v}(x, y) = (v^x(x, y), v^y(x, y)).$$

Assumindo que v^x e v^y são funções diferenciáveis nas duas variáveis, a matriz Jacobiana de $\mathbf{v}$ em um ponto $\boldsymbol{p} = (x_0, y_0)$ é dada por:

$$J_{\mathbf{v}}(x_0, y_0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial v^x}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial v^x}{\partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial v^y}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial v^y}{\partial y}(x_0, y_0) \end{bmatrix}, \tag{2-1}$$

onde essa matriz expressa a aproximação linear local do campo.

Definição 2.2 *O campo vetorial* $\mathbf{v}$ *gera um* ***fluxo*** $\phi : U \subset \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, *satisfazendo* $\frac{\partial}{\partial t}\phi(\boldsymbol{p}, t)\,|_{t=\tau} = \mathbf{v}(\phi(\boldsymbol{p}, \tau))$. *A partir desta função suave* ϕ, *definimos* $\phi_t : U_t \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *por* $\phi_t(\boldsymbol{p}) = \phi(\boldsymbol{p}, t)$.

Propriedade 2.1.1 *Com a definição acima, ϕ_t satisfaz as propriedades:*

1. $\phi_0 = id$,
2. $\phi_t \circ \phi_s = \phi_{t+s}$, *em particular,* $\phi_t \circ \phi_{-t} = id$

Definição 2.3 *As **linhas de fluxo** de um campo vetorial* $\mathbf{v}$ *são as trajetórias seguidas por uma partícula cujo campo de velocidade é um campo vetorial dado. Os vetores do campo vetorial são tangentes as suas linhas de fluxo.*
Assim, a linha de fluxo $sl(x_0, y_0)$, passando por (x_0, y_0), é unicamente definida por:

$$sl(x_0, y_0) = \bigcup_{t_0=0}^{\infty} \phi_t(x_0, y_0), \tag{2-2}$$

se $\mathbf{v}(x_0, y_0) \neq (0, 0)$.

Existem outras formas para a Definição 2.3, onde esta é dada por $sl(x_0, y_0) = \bigcup_{t_0=-\infty}^{\infty} \phi_t(x_0, y_0)$. Essa abordagem, porém, não será utilizada neste trabalho.

2.1.1 Pontos Singulares

Um ponto $(x_0, y_0) \in D$ é dito *singular* ou *crítico* em $\mathbf{v}$ se $\mathbf{v}(x_0, y_0) = (0, 0)$. Em Andronov *et al.* (1) e em Hirsch *et al.* (9) pode ser encontrada uma classificação completa para pontos singulares.
Observe que $\frac{\partial \phi}{\partial t}(x_0, y_0, t) = \mathbf{v}(x_0, y_0) = (0, 0)$. Portanto, $sl(x_0, y_0) = (x_0, y_0)$.

Através dos autovalores da matriz Jacobiana $J_{\mathbf{v}}$, ou dos vetores singulares caso $J_{\mathbf{v}}$ seja singular, podemos classificar os pontos singulares do campo vetorial como nos casos mostrados abaixo:

- **Caso 1:** Se J tem autovalores com parte real não nula e com sinais opostos, então a singularidade é chamada **ponto de sela** (ver Figura 2.1).
- **Caso 2:** Se J tem ambos autovalores com parte real estritamente negativa, então a singularidade é chamada **poço ou sorvedouro** (ver Figura 2.2).
  - **Caso 2.1:** Se J é diagonalizável e seus autovalores são diferentes, a singularidade é chamada **poço de nó** (ver Figura 2.2(a)). Caso os autovalores sejam iguais, então a singularidade é chamada de **poço focal** (ver Figura 2.2(b)).

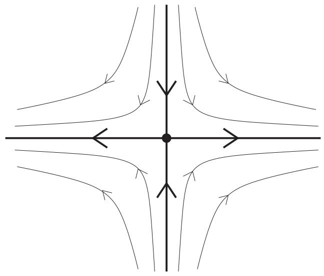
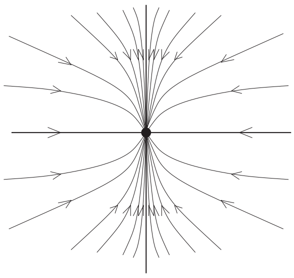
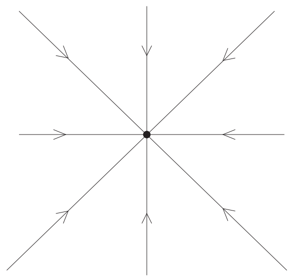


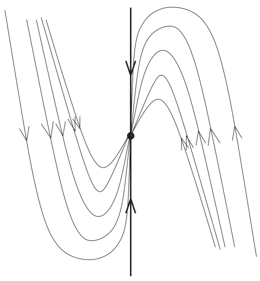
Figura 2.1: Sela



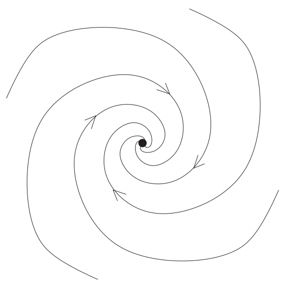
2.2(a): Poço de nó



2.2(b): Poço focal



2.2(c): Poço de nó impróprio



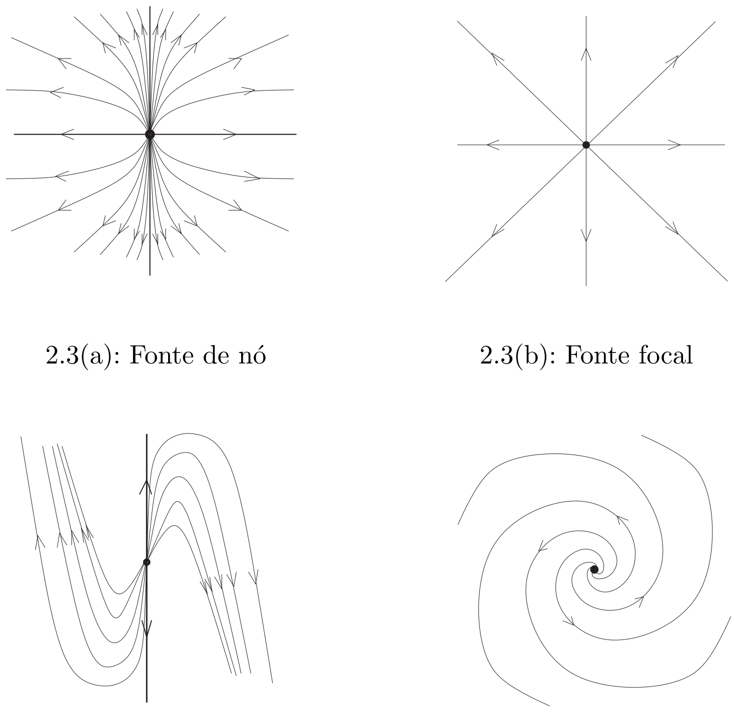
2.2(d): Poço espiral

Figura 2.2: Poço

- **Caso 2.2:** Se J não é diagonalizável mas um autovalor tem parte real negativa, então a singularidade é chamada **poço de nó impróprio** (ver Figura 2.2(c)).
- **Caso 2.3:** Se J tem dois autovalores complexos conjugados com parte real negativa, então a singularidade é chamada **poço espiral** (ver Figura 2.2(d)).

- **Caso 3:** Se J tem ambos autovalores com parte real estritamente positiva, então a singularidade é chamada **fonte** (ver Figura 2.3).

- **Caso 3.1:** Se J é diagonalizável e seus autovalores são diferentes, a singularidade é chamada **fonte de nó** (ver Figura 2.3(a)). Caso os autovalores sejam iguais, então a singularidade é chamada de **fonte focal** (ver Figura 2.3(b)).
- **Caso 3.2:** Se J não é diagonalizável mas um autovalor tem parte real é positiva, então a singularidade é chamada **fonte de nó impróprio** (ver Figura 2.3(c)).
- **Caso 3.3:** Se J tem dois autovalores complexos conjugados com parte real positiva, então a singularidade é chamada **fonte espiral** (ver Figura 2.3(d)).



2.3(a): Fonte de nó

2.3(b): Fonte focal

2.3(c): Fonte de nó impróprio

2.3(d): Fonte espiral

Figura 2.3: Fonte

– **Caso 4:** Se J tem pelo menos um dos autovalores com a parte real nula, então a singularidade é de ordem superior (por exemplo, ver Figura 2.4).

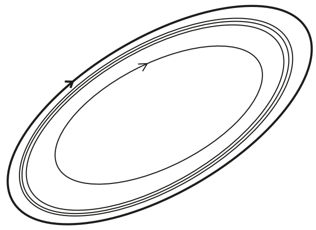


Figura 2.4: Órbita fechada

2.2 Grafo Topológico

Um fator interessante para auxiliar na compreensão de um campo vetorial é observar sua topologia por meio da construção do *grafo topológico*.

Definição 2.4 ***Separatrizes*** *são linhas de fluxo que dividem localmente o domínio de um campo vetorial em sub-domínios nos quais, dentro deles, todas as linhas de fluxo partem na vizinhança de uma única singularidade e convergem para uma mesma singularidade.*

Definição 2.5 *O* ***grafo topológico*** *de um campo vetorial planar* $\mathbf{v}$ *é constituído de todos os seus* ***pontos críticos*** *e suas* ***separatrizes****.*

Para o posicionamento das separatrizes em um campo sem singularidade de alta ordem, os pontos de sela são fundamentais, pois é a partir desses pontos e dos seus autovetores, que as separatrizes serão calculadas.

Uma questão interessante, e que requer atenção, ocorre quando estamos tratando de domínios com bordo. Nesses casos, as linhas de fluxo têm um comportamento que não depende exclusivamente das sigularidades, ele também depende das restrições impostas pelo bordo. Nesse caso, o bordo pode atuar localmente como um poço (as linhas de fluxo convergem para o bordo); como uma fonte (as linhas de fluxo partem do bordo) ou ainda, como uma sela (o bordo separa as linhas de fluxo e forma dois grupos). Em Scheuermann *et al.* (22) pode ser encontrada uma apresentação desse tópico do ponto de vista da visualização da topologia local de um campo vetorial. Um exemplo de um grafo topológico pode ser visto na Figura 2.5.

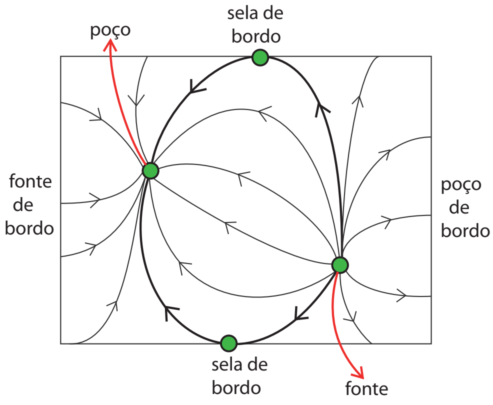


Figura 2.5: Grafo topolólgico

2.3 Campo Discreto

Em dados obtidos por medição, o campo vetorial $\mathbf{v}$ não é dado em forma de uma função diferenciável; esses dados se apresentam de forma discretizada.

Suporemos então que os valores de $\mathbf{v}$ estão dados nos pontos (x_i, y_i) de uma grade regular, como na Figura 2.6, de dimensão MxN. Usaremos a seguinte notação:

$$\mathbf{v}_{i,j} = (v^x_{i,j}, v^y_{i,j}) = \mathbf{v}(x_i, y_j),$$

para $i = 1, ..., M$ e $j = 1, ..., N$.

Quando for necessário obter os valores fora dos vértices da grade, interpolaremos os valores dos pontos amostrados. Uma interpolação simples, dentro de uma célula $[0,1]^2$ da grade, consiste em uma interpolação bilinear como mostrado abaixo:

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_{i,j} : [0,1]^2 &\to \mathbb{R}^2 \ , \\ \mathbf{b}_{i,j}(x,y) = \mathbf{v}_{i,j} \cdot (1-x)(1-y) &+ \mathbf{v}_{i+1,j} \cdot x(1-y) \\ + \mathbf{v}_{i,j+1} \cdot (1-x)y &+ \mathbf{v}_{i+1,j+1} \cdot xy \quad . \end{aligned} \tag{2-3}$$

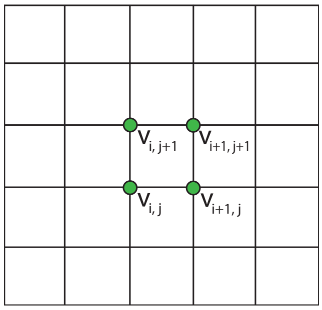


Figura 2.6: Grade regular