

### 3 FUNDAMENTOS TEÓRICOS.

#### 3.1. FORMULAÇÃO MATEMÁTICA DA ESTRUTURA DO EDIFÍCIO TIPO SHEAR BUILDING

Um modelo de edifício tipo “*Shear Building*” é definido como uma estrutura na qual não se produzem rotações nos membros horizontais à altura das lajes. Ele tem muito das características de uma viga em balanço deformada somente pelo esforço cortante. Para que a estrutura apresente este estado de deformações, as seguintes hipóteses devem ser obedecidas. (Paz, 1992)

1. Toda a massa da estrutura está concentrada no nível das lajes.
2. As vigas nas lajes são infinitamente rígidas, quando comparadas com a rigidez das colunas.

A primeira condição transforma o problema de um sistema contínuo com um número infinito de graus de liberdade em um sistema que tem somente tantos graus de liberdade quanto o número de massas concentradas (número de andares). A segunda condição introduz o requisito de que as ligações entre as vigas e colunas são fixas e sem rotações e que as vigas nas lajes permaneçam horizontais durante o movimento da estrutura.

Note-se que o edifício pode ter um número qualquer de vãos e, só por conveniência, o representamos usualmente com somente um vão, como se mostra na Figura 3.1. Uma alternativa para representar um edifício simples é adotar um modelo de massas e molas, como se mostra na Figura 3.2. Em qualquer das duas representações mostradas na Figura 3.1 e Figura 3.2, o coeficiente de rigidez, ou constante de rigidez da mola,  $K_i$ , entre duas massas consecutivas é a força requerida para produzir um deslocamento relativo de magnitude unitária entre duas lajes consecutivas e se deve à soma de rigidez de todos os pilares entre estas duas lajes.

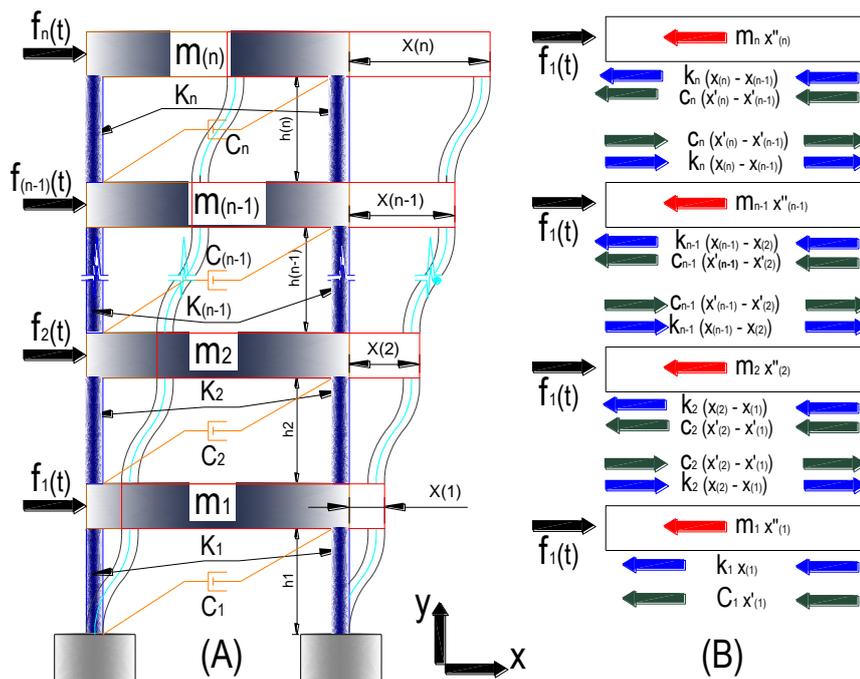


Figura 3.1- (A) Modelo de um vão para representar um edifício simples, (B) diagrama de corpo livre de cada laje.

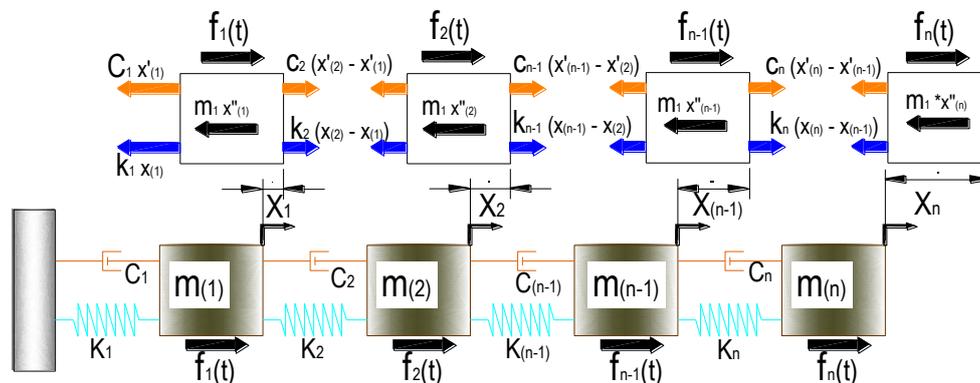


Figura 3.2 -Modelo de massas concentradas e molas para representar um edifício simples e diagrama de corpo livre.

As duas representações são equivalentes; em consequência as equações de movimento de um edifício simples de vários andares podem ser obtidas de qualquer dos dois diagramas de corpo livre mostrados nas figuras acima.

O sistema de equações diferenciais de movimento de um edifício de  $n$  andares, expressas matricialmente, tem a seguinte forma:

$$[M]\{\ddot{x}\} + [C]\{\dot{x}\} + [K]\{x\} = \{f(t)\} \tag{3.1}$$

Onde:

$$[M] = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & m_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_n \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

$$[K] = \begin{bmatrix} K_1 + K_2 & -K_2 & 0 & \dots & 0 \\ -K_2 & K_2 + K_3 & -K_3 & \dots & 0 \\ 0 & -K_3 & K_3 + K_4 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & K_{n-1} + K_n & -K_n \\ 0 & 0 & 0 & -K_n & K_n \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

$$[C] = \begin{bmatrix} C_1 + C_2 & -C_2 & 0 & \dots & 0 \\ -C_2 & C_2 + C_3 & -C_3 & \dots & 0 \\ 0 & -C_3 & C_3 + C_4 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & C_{n-1} + C_n & -C_n \\ 0 & 0 & 0 & -C_n & C_n \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

$$\{\ddot{x}\} = \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \vdots \\ \ddot{x}_n \end{Bmatrix}; \{\dot{x}\} = \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{Bmatrix}; \{x\} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{Bmatrix}; e, \{f(t)\} = \begin{Bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{Bmatrix} \quad (3.5)$$

Nestas equações,  $[M]$  é a matriz de massa,  $[C]$ , a matriz de amortecimento,  $[K]$ , a matriz de rigidez,  $\{\ddot{x}\}$ , o vetor de acelerações  $\{\dot{x}\}$ , o vetor de velocidades,  $\{x\}$ , o vetor de deslocamentos e  $\{f(t)\}$ , o vetor de forças externas do sistema. Nota-se que a matriz de massas, eq. (3.2), é uma matriz diagonal.

### 3.2. FORMULAÇÃO DO PROBLEMA ESTRUTURA – ISOLADOR DE BASE.

O modelo dinâmico da estrutura-isolamento de base, considerado neste estudo é apresentado na Figura 3.3 e consiste em um edifício simples de tipo “*shear building*” com um sistema de isolamento de base e submetido a uma componente de aceleração de base ( $\ddot{S}_g$ ). O comportamento da estrutura é considerado linear elástico. As não linearidades estão concentradas apenas na base do edifício, como consequência do tipo de sistema isolamento de base usado, neste caso o amortecedor MR.

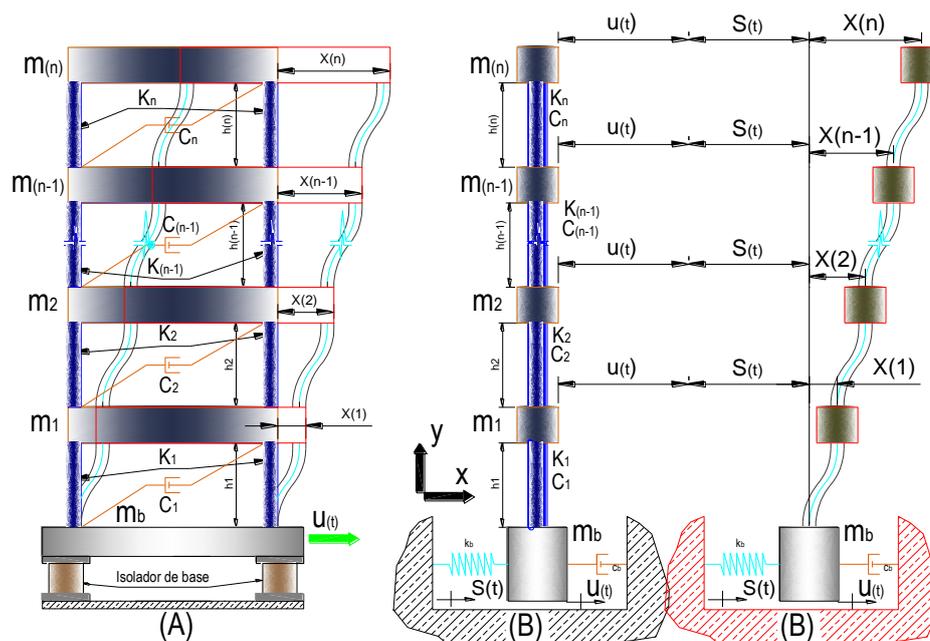


Figura 3.3 Modelo dinâmico do “shear building” com isolador de base.

### 3.2.1. ISOLAMENTO DE BASE

O conceito fundamental dos sistemas de isolamento de base consiste em desacoplar a estrutura do edifício das componentes nocivas do movimento de base (dado de entrada) pela introdução de uma interface flexível entre a estrutura e sua fundação. Desta forma, limita-se a magnitude da força a ser transmitida à estrutura e, portanto, a demanda estrutural será diminuída.

Sistemas de isolamento com blocos de borracha com baixa rigidez horizontal, localizados entre as colunas e a fundação, são usualmente utilizados como a interface flexível. Cada bloco é simulado por uma mola e um amortecedor viscoso de coeficiente de rigidez e amortecimento linear; como mostrado na Figura 3.3.

### 3.2.2. FORMULAÇÃO MATEMÁTICA DA ESTRUTURA – ISOLADOR.

As seguintes suposições são feitas sobre o sistema estrutural em consideração:

1. O comportamento da estrutura é considerado elástico e linear durante a excitação sísmica. Esta hipótese é razoável, já que o sistema de isolamento de base tende a reduzir a resposta sísmica, e,

como consequência, a estrutura permanece dentro do regime elástico.

2. As lajes e a base do sistema estrutura-isolador de base são considerados rígidos em seu próprio plano, e se supõe que a massa ( $m_i ; m_b$ ), está concentrada em cada nível de piso.
3. Os pilares são inextensíveis e de massa desprezível em relação os pisos, fornecendo a rigidez lateral do sistema.
4. O sistema estrutura – isolador de base, esta sob a ação de um deslocamento de base representado por um acelerograma  $\ddot{S}_g$ , gerando movimento do solo.
5. Os efeitos interação solo-estrutura não são levados em consideração.

As equações diferenciais para a fundação e definidas por.

Para a fundação.

$$\left(m_b + \sum_{i=1}^n m_i\right)\ddot{u} + \sum_i m_i \ddot{x}_i + C_b \dot{u} + k_b u = -\left(m_b + \sum_{i=1}^n m_i\right)\ddot{s} \quad (3.6)$$

Onde,  $C_b, k_b$ , são, respectivamente, o coeficiente de amortecimento e rigidez do sistema de isolamento de base e  $n$  é o número de andares.

O sistema de equações para a estrutura é definida pela eq.(3.1); onde o vetor de forças é função do deslocamento da fundação e do solo, é dado por:

$$\{f(t)\} = -[M]\{\Gamma\}(\ddot{u} + \ddot{S}) \quad (3.7)$$

Onde  $\{\Gamma\} = \{1, 1, \dots, 1\}_{1 \times n}^T$ , é um vetor unitário, associado aos graus de liberdade considerados no “*shear building*”.

Matricialmente as equações de movimento da estrutura – base isolada é dada por.

$$\begin{bmatrix} m_b + \sum_{i=1}^n m_i & m_1 & m_2 & \cdots & m_n \\ 0 & m_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & m_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u} \\ \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \vdots \\ \ddot{x}_n \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} C_b & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & C_1 + C_2 & -C_2 & \cdots & 0 \\ 0 & -C_2 & C_2 + C_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & C_{n-1} + C_n & -C_n \\ 0 & 0 & 0 & -C_n & C_n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u} \\ \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_b & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & K_1 + K_2 & -K_2 & \cdots & 0 \\ 0 & -K_2 & K_2 + K_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & -K_n & K_n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} m_b & m_1 & m_2 & \cdots & m_n \\ 0 & m_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & m_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{Bmatrix} (\ddot{u} + \ddot{S}) \quad (3.8)$$

$$[M_E]\{\ddot{X}\} + [C_E]\{\dot{X}\} + [K_E]\{X\} = -[M'_E](\ddot{u} + \ddot{S}) \quad (3.9)$$

Onde,  $[M_E]$ ,  $[C_E]$ ,  $[K_E]$  são as matrizes equivalentes de massa, amortecimento e rigidez do sistema estrutura-isolador de base e  $[M'_E]$ , é a matriz de massa que gera as forças inerciais.

### 3.3. RIGIDEZ LATERAL DO EDIFÍCIO.

#### 3.3.1. FORMULAÇÃO MATEMÁTICA DA RIGIDEZ LATERAL SEM CONSIDERAR O EFEITO DA FORÇA AXIAL.

Para determinar o coeficiente de rigidez de cada coluna do edifício simples, bem como os esforços ao longo do pilar gerados pelo deslocamento relativo entre dois andares consecutivos, considera-se uma viga bi-engastada, submetida a um deslocamento em uma das extremidades como se mostra na Figura 3.4.

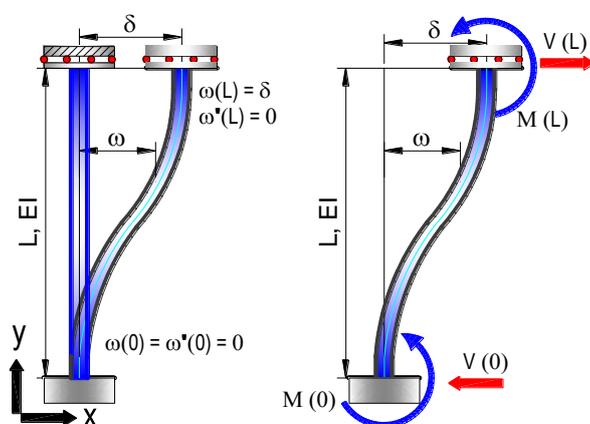


Figura 3.4 Viga bi-engastada submetida a um deslocamento  $\delta$ .

A equação da elástica da viga tem que satisfazer a equação diferencial de 4ª ordem

$$EI \omega^{IV} = 0 \quad (3.10)$$

A função que satisfaz a eq. (3.10) tem a seguinte forma.

$$\omega = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D \quad (3.11)$$

$$\omega' = 3Ax^2 + 2Bx + C \quad (3.12)$$

Considerando as condições de contorno mostradas na Figura 3.4 e as eqs. (3.11) e (3.12), obtém-se para as constantes.

$$A = \frac{-2\delta}{L^3}; B = \frac{-3\delta}{L^2}; C = 0; D = 0 \quad (3.13)$$

Substituindo os valores das constantes A, B, C e D na eq. (3.11), se tem a função que representa os deslocamentos da viga gerados por um deslocamento  $\delta$ :

$$\omega = \delta \left[ \frac{-2x^3}{L^3} + \frac{3x^2}{L^2} \right] \quad (3.14)$$

Neste caso o momento fletor e força cortante são dados pelas seguintes equações.

$$M = EI \omega_{,xx} = EI \delta \left[ \frac{6}{L^2} - \frac{12x}{L^3} \right]; 0 \leq x \leq h \quad (3.15)$$

$$V = EI \omega_{,xxx} = EI \delta \left[ -\frac{12}{L^3} \right]; 0 \leq x \leq h \quad (3.16)$$

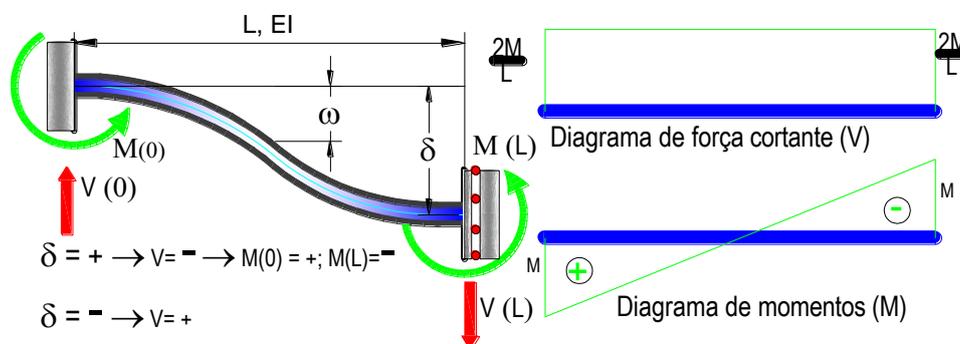


Figura 3.5 Diagramas de força cortante e momento fletor na viga.

Aplicando a definição de  $f = kd$  para a força cortante no extremo livre da viga, se tem que.

$$V = \frac{12EI}{L^3} \delta \quad (3.17)$$

Fazendo a comparação da eq. (3.17) com a força em uma mola linear, tem-se para a rigidez da mola equivalente.

$$k = \frac{12EI}{L^3} \quad (3.18)$$

Conhecendo as propriedades geométricas ( $I$  e  $L$ ) de cada coluna e as propriedades físicas do material ( $E$ ), bem como número de colunas por andar, a matriz de rigidez fica totalmente determinada.

### 3.3.2. FORMULAÇÃO MATEMÁTICA DA RIGIDEZ LATERAL COM A CONSIDERAÇÃO DA FORÇA AXIAL.

A seguir é obtida a rigidez de uma coluna considerando-se o efeito de uma força axial compressiva. Para isto, se considera uma viga-coluna sujeita a um deslocamento  $\delta$  em uma das extremidades, como se mostra na Figura 3.6.

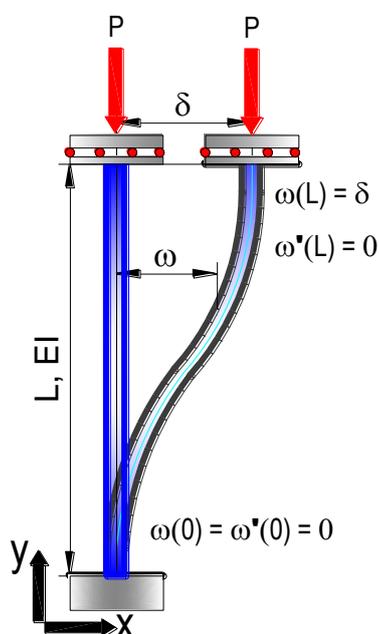


Figura 3.6 Diagrama de corpo livre depois da perturbação  $\delta$ , para a viga coluna.

A equação diferencial que governa o problema é

$$EI\omega^{IV} + P\omega'' = 0 \quad (3.19)$$

Que pode ser escrita da seguinte maneira.

$$\omega^{IV} + \lambda^2\omega'' = 0 \quad (3.20)$$

Onde:

$$\lambda^2 = \frac{P}{EI} \quad (3.21)$$

A solução geral da eq. (3.20) é:

$$\omega = A\sin \lambda x + B\cos \lambda x + Cx + D \quad (3.22)$$

Aplicando as condições de contorno que são mostrados na Figura 3.6, se tem a seguinte expressão para a equação da elástica

$$\omega(x) = -\frac{\delta(1 - \cos(\lambda L)) - \lambda \sin(\lambda L)x + \sin(\lambda L)\sin(\lambda x) - \cos(\lambda x) + \cos(\lambda x)\cos(\lambda L)}{\sin(\lambda L)L\lambda - 2 + 2\cos(\lambda L)} \quad (3.23)$$

A carga crítica de Euler para uma coluna engastada nos dois extremos, e liberada somente para ter deslocamento na direção transversal é expressa da seguinte forma:

$$P_{CR} = \frac{\pi^2 EI}{L^2} \quad (3.24)$$

Na eq.(3.21) é feita uma manipulação algébrica de modo que fique em função da carga axial (P) e da carga crítica ( $P_{CR}$ ) da coluna, obtendo-se:

$$\lambda = \frac{\pi \sqrt{\frac{P}{\pi^2 EI}}}{L} = \frac{\pi \sqrt{\frac{P}{P_{CR}}}}{L} = \frac{\alpha\pi}{L} \quad (3.25)$$

Onde  $\alpha = \sqrt{\frac{P}{P_{CR}}}$  e  $0 \leq \alpha \leq 1$ .

As funções que representam os momentos e força cortante na viga-coluna são obtidas a partir da equação da elástica, sendo dadas por:

$$M = EI\omega'' = -\frac{EI\delta \left[ -\sin(\lambda L)\sin(\lambda x)\lambda^2 + \cos(\lambda x)\lambda^2 - \cos(\lambda x)\lambda^2 \cos(\lambda L) \right]}{\sin(\lambda L)\lambda L - 2 + 2\cos(\lambda L)}; \quad (3.26)$$

$$0 \leq x \leq L$$

$$M(0) = M(L) = -\frac{\lambda^2 EI\delta [-1 + \cos(\lambda L)]}{\sin(\lambda L)\lambda L - 2 + 2\cos(\lambda L)} \quad (3.27)$$

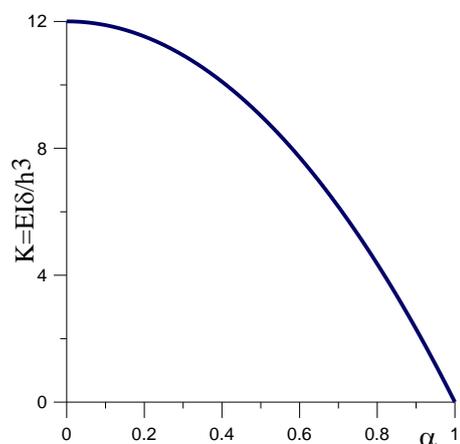
$$V = EI\omega''' = -\frac{EI\delta \left[ -\sin(\lambda L)\cos(\lambda x)\lambda^3 - \sin(\lambda x)\lambda^3 + \sin(\lambda x)\lambda^3 \cos(\lambda L) \right]}{\sin(\lambda L)\lambda L - 2 + 2\cos(\lambda L)}; \quad (3.28)$$

$$0 \leq x \leq L$$

$$V(0) = V(L) = -\frac{\lambda^3 EI\delta \sin(\lambda L)}{\sin(\lambda L)\lambda L - 2 + 2\cos(\lambda L)} \quad (3.29)$$

Para determinar a rigidez da viga coluna também se utiliza a definição de  $f = kd$  e por similitude com a eq. (3.29), tem-se:

$$k = \frac{\alpha^3 \pi^3 EI \sin(\alpha\pi)}{L^3 (\sin(\alpha\pi)\alpha\pi - 2 + 2\cos(\alpha\pi))} \quad (3.30)$$



**Figura 3.7** Variação não linear da rigidez da viga-coluna em relação a  $\alpha$ .

A variação da rigidez da coluna com a carga axial é mostrada na Figura 3.7. A rigidez diminui à medida que  $\alpha$  aumenta e se torna nula para  $\alpha=1$ , o que significa que a carga axial que é igual ao valor da carga crítica.

### 3.4. AMORTECIMENTO.

O amortecimento, ou atrito interno, é uma das propriedades mais sensíveis de materiais e estruturas, tanto em escala macro quanto microscópica. O amortecimento representa a capacidade do sistema em dissipar energia. Como modelo mais simples de amortecimento se tem o amortecimento viscoso linear, assim chamado por representar a força dissipativa proporcionada por um fluido viscoso. Esta força tem como característica principal ser proporcional à velocidade relativa entre as superfícies em movimento quando existe um fluido separando-as.

A força de amortecimento viscoso tem como expressão:

$$F_a = -C\dot{x} \quad (3.31)$$

Onde  $C$  é a constante de amortecimento.

É conveniente expressar este coeficiente como uma fração do amortecimento crítico do sistema, chamado de fator de amortecimento ( $\xi$ )

$$\xi = \frac{c}{c_{cr}} \quad (3.32)$$

#### 3.4.1. FORMULAÇÃO MATEMÁTICA DO AMORTECIMENTO PROPORCIONAL.

O amortecimento proporcional, também conhecido como de amortecimento de Rayleigh, é um tipo comum de amortecimento usado para modelar sistemas na prática de uma forma empírica. A idéia é assumir que o amortecimento é proporcional ao parâmetro de rigidez e à massa do sistema, ou seja, (Paz, 1992)

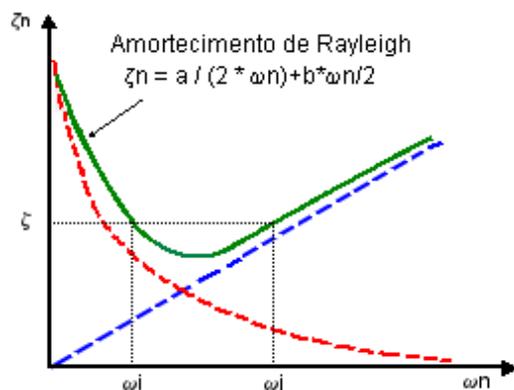
$$C = a_0 [M] + a_1 [K] \quad (3.33)$$

Sendo  $a_0$  e  $a_1$  duas constantes obtidas a partir de testes experimentais e usando técnicas de ajuste de modelos e otimização.

O fator de amortecimento para sistemas com amortecimento proporcional é escrito em função das constantes  $a_0$  e  $a_1$  na forma:

$$\xi = \frac{1}{2} \left( a_0 \omega_n + \frac{a_1}{\omega_n} \right) \quad (3.34)$$

Além disto, deve-se destacar que em sistemas com múltiplos graus de liberdade com amortecimento proporcional o problema de auto-valor fica simplificado levando a frequências e modos de vibração reais, o que simplifica a formulação.



**Figura 3.8** Variação de amortecimento crítico normalizado em relação a frequência natural. (Adotado de (Liu e Corman. 1995))

Para o caso da matriz de amortecimento de vários graus de liberdade, a condição de ortogonalidade aplicada à eq. (3.33) é uma forma de determinar a matriz de amortecimento do sistema; este se consegue pré-multiplicando ambos os membros da eq.(3.33) pelo vetor modal de ordem  $n$  transposto  $\{\phi\}_n^T$  e pós-multiplicando pela matriz modal  $[\Phi]$ , obtendo-se:

$$\{\phi\}_n^T [C][\Phi] = a_0 \{\phi\}_n^T [M][\Phi] + a_1 \{\phi\}_n^T [K][\Phi] \quad (3.35)$$

$$\{\phi\}_n^T [C][\Phi] = (a_0 + a_1 \omega_n^2) M_n \quad (3.36)$$

Onde  $M_n$  é a matriz de massa normalizada.

As equações (3.35) e (3.36) têm a forma da eq. (3.33). No entanto se pode demonstrar que é possível gerar outras relações entre as matrizes de rigidez e massa que também atendam as condições de ortogonalidade. Em geral a matriz de amortecimento pode ser expressa da forma seguinte:

$$[C] = [M] \sum_i a_i ([M]^{-1} [K])^i \quad (3.37)$$

Onde  $i$  pode ter qualquer valor no trecho  $-\infty < i < \infty$  e a soma pode incluir tantos termos quantos se deseje. A matriz de amortecimento proporcional, eq. (3.33), pode ser obtida a partir da eq. (3.37) atribuindo valores a  $i = 0$  e  $i = 1$ ;

utilizando a matriz de amortecimento modal  $C_n$  que é definido da seguinte maneira.

$$C_n = \{\phi\}_n^T [C] \{\phi\}_n = 2\xi_n \omega_n M_n \quad (3.38)$$

Substituindo a eq.(3.37) na eq. (3.38), se tem a seguinte expressão:

$$C_n = \sum_i a_i \omega_n^{2i} M_n = 2\xi_n \omega_n M_n \quad (3.39)$$

Da qual se obtém:

$$\xi_n = \frac{1}{2\omega_n} \sum_i a_i \omega_n^{2i} \quad (3.40)$$

A eq. (3.40) pode ser usada para calcular os valores das constantes  $a_i$  correspondentes a valores dos fatores de amortecimento correspondentes a cada grau de liberdade e pode ser expressa da seguinte maneira.

$$\begin{Bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \omega_1 & \omega_1^3 & \cdots & \omega_1^{2n-1} \\ \omega_2 & \omega_2^3 & \cdots & \omega_2^{2n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \omega_n & \omega_n^3 & \omega_n^5 & \omega_n^{2n-1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{Bmatrix} \quad (3.41)$$

A expressão simbólica da equação (3.41) é escrita da seguinte forma:

$$\{\xi\} = \frac{1}{2} [Q] \{a\} \quad (3.42)$$

A solução da eq. (3.42) para as constantes  $\{a\}$  é

$$\{a\} = 2[Q]^{-1} \{\xi\} \quad (3.43)$$

Finalmente a matriz de amortecimento é obtida depois de substituir a eq. (3.43) na eq. (3.37).

### 3.5.

#### A MODELAGEM DE UMA TORRE COMO PÊNDULO MÚLTIPLO.

Em muitas estruturas como edifícios esbeltos, torres e chaminés, a estrutura ao se deformar na presença de uma excitação de base apresenta rotações de moderadas a grandes e uma modelagem, que leve em contas estas características, é desenvolvida a seguir considerando grandes deslocamentos/rotações.

### 3.5.1. FORMULAÇÃO MATEMÁTICA DA ESTRUTURA - ISOLADOR.

A análise dinâmica de torres com isolamento de base e submetidas a movimento de base (S), considerando as rotações das colunas é feita utilizando o método de Rayleigh-Ritz e do princípio de Hamilton. A modelagem é semelhante à desenvolvida por Jurjo (2007) para uma coluna discretizada como um pêndulo múltiplo.

O funcional total da estrutura é dado pela Função de Lagrange (FL).

$$FL = T - \Pi_p \quad (3.44)$$

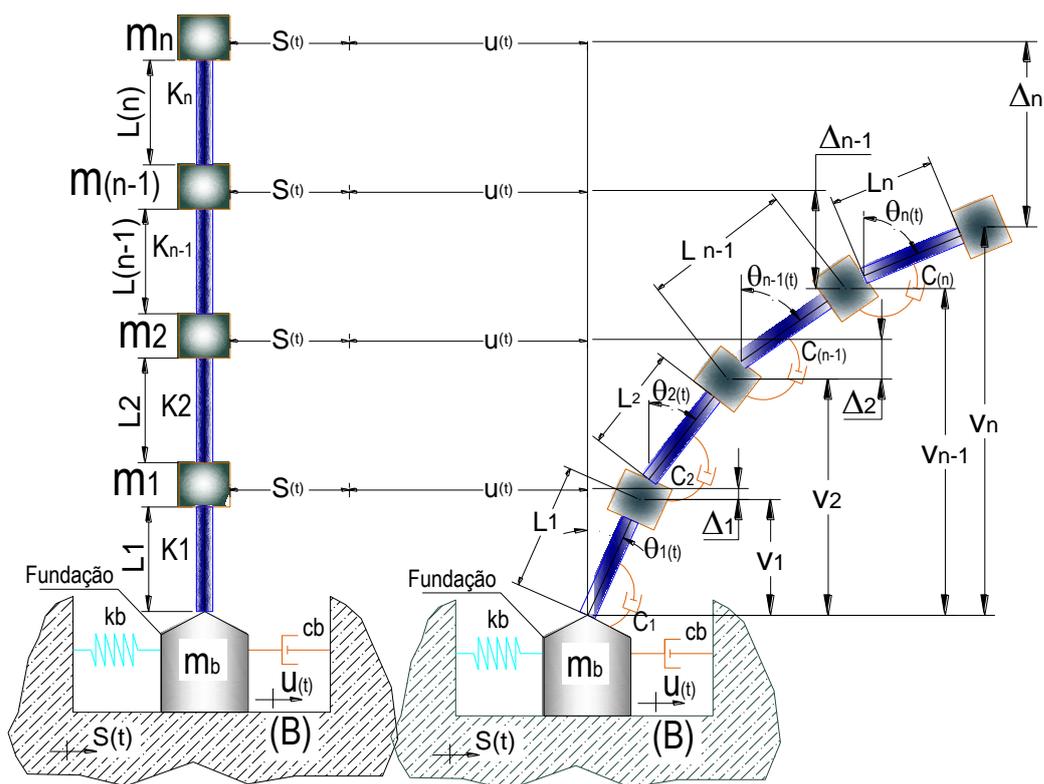
Onde  $T$  e  $\Pi_p$  são, respectivamente, a energia cinética e potencial total da estrutura. A energia cinética é função das coordenadas generalizadas, das velocidades generalizadas e do tempo. Já a energia potencial total depende somente das coordenadas generalizadas e do tempo.

A energia potencial da estrutura é dada pela seguinte equação.

$$\Pi_p = U + W \quad (3.45)$$

Onde  $U$  é a energia interna de deformação e  $W$  é o trabalho total.

As equações de movimento do edifício foram deduzidas a partir de uma modelagem da coluna como uma sequência de pêndulos enrijecidos, como se mostra na Figura 3.9.



**Figura 3.9 Modelagem da estrutura através de um sistema de pêndulos, com isolamento de base.**

Para a modelagem da coluna ilustrada na Figura 3.9, o deslocamento horizontal da  $n$ -ésima massa é dado por.

$$X_n = \left( S + u + \sum_{i=1}^n L_i \sin \theta_i \right) i + \left( \sum_{i=1}^n L_i \cos \theta_i \right) j \quad (3.46)$$

Onde,  $L_i$ , é a altura do  $i$ -ésimo pêndulo,  $\theta_i$ , a sua rotação, tomada como coordenada generalizada,  $u$ , é o deslocamento da fundação e  $S$ , o deslocamento produzido pelo movimento de base.

Assim, o movimento da fundação é dado por

$$X = (S + u) i \quad (3.47)$$

A energia cinética do pêndulo múltiplo associada ao movimento das massas concentradas é dada por

$$T_k = \frac{1}{2} M_k \left( \left( \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k L_i L_j \dot{\theta}_i \dot{\theta}_j \cos(\theta_i - \theta_j) \right) + \left( \sum_{i=1}^k (2L_i \dot{\theta}_i \dot{u} \cos \theta_i + 2L_i \dot{\theta}_i \dot{S} \cos \theta_i + (\dot{u} + \dot{S})^2) \right) \right) \quad (3.48)$$

E a energia cinética da fundação por:

$$T_f = \frac{1}{2} m (\dot{u} + \dot{S})^2 \quad (3.49)$$

O trabalho das cargas externas, correspondente ao peso das massas concentradas, é dado por:

$$W_k = M_k g \sum_{i=1}^K (L_i (1 - \cos \theta_i)) \quad (3.50)$$

Nas eqs. (3.48) a (3.50);  $m$ ,  $M_k$ ,  $g$ ,  $\dot{\theta}_i$  e  $\theta_j$ ,  $\dot{u}$ ,  $\dot{S}$ ,  $L_i$  e  $L_j$ , são respectivamente a massa da fundação, as massas concentradas de cada andar, a aceleração da gravidade, as velocidades generalizadas dos giros das colunas, a velocidade generalizada da fundação, a velocidade do movimento de base e as alturas dos andares.

A energia interna de deformação das molas que representam a rigidez da estrutura é obtida a partir da expressão.

$$U = \frac{1}{2} K \theta_1^2 + \frac{1}{2} K \left( \sum_{i=1}^{n-1} (\theta_{i+1} - \theta_i)^2 \right) \quad (3.51)$$

Onde,  $K$ , é a constante elástica das molas das colunas.

A energia de deformação da mola da fundação é escrita como.

$$U_f = \frac{1}{2} K_s (u)^2 \quad (3.52)$$

De acordo à eq.(3.44), e utilizando as equações (3.48) até a eq. (3.52) obtém-se a função de Lagrange para a estrutura em análise:

$$\begin{aligned} FL = & \frac{1}{2} m (\dot{u} + \dot{S})^2 \\ & + \sum_{k=1}^n \left( \frac{1}{2} M_k \left( \left( \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k L_i L_j \dot{\theta}_i \dot{\theta}_j \cos(\theta_i - \theta_j) \right) + \left( \sum_{i=1}^K (2L_i \dot{\theta}_i \dot{u} \cos \theta_i + 2L_i \dot{\theta}_i \dot{S} \cos \theta_i + (\dot{u} + \dot{S})^2) \right) \right) \right) \\ & - \left( M_k g \sum_{i=1}^K (L_i (1 - \cos \theta_i)) \right) \\ & - \left( \frac{1}{2} K \theta_1^2 + \frac{1}{2} K \left( \sum_{i=1}^{n-1} (\theta_{i+1} - \theta_i)^2 \right) \right) - \frac{1}{2} K_s (u)^2 \end{aligned} \quad (3.53)$$

As forças dissipativas são obtidas a partir da função de Rayleigh

$$R_b = \frac{1}{2} C_b \dot{u}^2 \quad (3.54)$$

$$R_i = \frac{1}{2} \left( C_1 \theta_1^2 + \sum_{i=1}^{n-1} C_{i+1} (\theta_{i+1} - \theta_i)^2 \right) \quad (3.55)$$

As equações de movimento de Euler-Lagrange, determinadas a partir do princípio de Hamilton, para a modelagem desenvolvida, são expressas pelas seguintes equações.

$$\frac{\partial L}{\partial u} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{u}} \right) - \frac{dR_b}{d\dot{u}} = 0 \quad (3.56)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_i} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_i} \right) - \frac{dR_i}{d\dot{\theta}_i} = 0; i = 1, 2, \dots, n \quad (3.57)$$

Onde,  $R_i$ , é a função de dissipação de Rayleigh que são as forças não conservativas incluindo as forças de amortecimento.

A equação gerada pelo grau de liberdade do deslocamento ( $u$ ), eq. (3.56), é dada por:

$$m\ddot{u} + [RM]\{\ddot{\theta}\} - [RJ]\{\dot{\theta}^2\} + (\sum M)\ddot{u} + (\sum M)\ddot{S} + C_b\dot{u} + \kappa_b u + m\ddot{S} = 0 \quad (3.58)$$

Ou seja:

$$\begin{aligned} m\ddot{u} + \left[ L_1 \cos \theta_1 \sum_{i=1}^n (M_i) \quad L_2 \cos \theta_2 \sum_{i=2}^n (M_i) \quad L_3 \cos \theta_3 \sum_{i=3}^n (M_i) \quad L_4 \cos \theta_4 \sum_{i=4}^n (M_i) \quad \dots \right] \begin{Bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \\ \ddot{\theta}_3 \\ \ddot{\theta}_4 \\ \vdots \end{Bmatrix} \\ - \left[ L_1 \sin \theta_1 \sum_{i=1}^n (M_i) \quad L_2 \sin \theta_2 \sum_{i=1}^n (M_i) \quad L_3 \sin \theta_3 \sum_{i=3}^n (M_i) \quad L_4 \sin \theta_4 \sum_{i=4}^n (M_i) \quad \dots \right] \begin{Bmatrix} \dot{\theta}_1^2 \\ \dot{\theta}_2^2 \\ \dot{\theta}_3^2 \\ \dot{\theta}_4^2 \\ \vdots \end{Bmatrix} \\ + \left( \sum_{i=1}^n i M_i \right) \ddot{u} + \left( \sum_{i=1}^n i M_i \right) \ddot{S} + k_b u + C_b \dot{u} + m \ddot{S} = 0 \end{aligned} \quad (3.59)$$

O sistema de equações geradas pelas rotações das colunas, eq. (3.57), pode ser expresso matricialmente na forma:

$$[RM]\{\ddot{\theta}\} + [M]\{\ddot{u}\} + [RJ]\{\dot{\theta}^2\} + [RW]\{\sin \theta\} + [RC]\{\dot{\theta}\} + [RK]\{\theta\} + [M]\{\ddot{S}\} = 0$$

(3.60)

Onde,  $[RM]$ ,  $\{M\}$ ,  $[RJ]$ ,  $[RW]$ ,  $[RC]$ ,  $[RK]$ , são respectivamente, a matriz de massa, vetor de massas, matrizes giroscópica (anti-simétrica), potencial gravitacional, amortecimento e rigidez rotacional.

Os termos da equação (3.60) são expressos da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n M_i L_1^2 & \sum_{i=2}^n M_i L_1 L_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) & \sum_{i=3}^n M_i L_1 L_3 \cos(\theta_1 - \theta_3) & \sum_{i=4}^n M_i L_1 L_4 \cos(\theta_1 - \theta_4) & \cdots \\ \sum_{i=2}^n M_i L_1 L_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) & \sum_{i=2}^n M_i L_2^2 & \sum_{i=3}^n M_i L_2 L_3 \cos(\theta_2 - \theta_3) & \sum_{i=4}^n M_i L_2 L_4 \cos(\theta_2 - \theta_4) & \cdots \\ \sum_{i=3}^n M_i L_1 L_3 \cos(\theta_1 - \theta_3) & \sum_{i=3}^n M_i L_2 L_3 \cos(\theta_2 - \theta_3) & \sum_{i=3}^n M_i L_3^2 & \sum_{i=4}^n M_i L_3 L_4 \cos(\theta_3 - \theta_4) & \cdots \\ \sum_{i=4}^n M_i L_1 L_4 \cos(\theta_1 - \theta_4) & \sum_{i=4}^n M_i L_2 L_4 \cos(\theta_2 - \theta_4) & \sum_{i=4}^n M_i L_3 L_4 \cos(\theta_3 - \theta_4) & \sum_{i=4}^n M_i L_4^2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \\ \ddot{\theta}_3 \\ \ddot{\theta}_4 \\ \vdots \end{Bmatrix} \\
& + \begin{bmatrix} 0 & \sum_{i=2}^n M_i L_1 L_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) & \sum_{i=3}^n M_i L_1 L_3 \sin(\theta_1 - \theta_3) & \sum_{i=4}^n M_i L_1 L_4 \sin(\theta_1 - \theta_4) & \cdots \\ -\sum_{i=2}^n M_i L_1 L_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) & 0 & \sum_{i=3}^n M_i L_2 L_3 \sin(\theta_2 - \theta_3) & \sum_{i=4}^n M_i L_2 L_4 \sin(\theta_2 - \theta_4) & \cdots \\ -\sum_{i=3}^n M_i L_1 L_3 \sin(\theta_1 - \theta_3) & -\sum_{i=3}^n M_i L_2 L_3 \sin(\theta_2 - \theta_3) & 0 & \sum_{i=4}^n M_i L_3 L_4 \sin(\theta_3 - \theta_4) & \cdots \\ -\sum_{i=4}^n M_i L_1 L_4 \sin(\theta_1 - \theta_4) & -\sum_{i=4}^n M_i L_2 L_4 \sin(\theta_2 - \theta_4) & -\sum_{i=4}^n M_i L_3 L_4 \sin(\theta_3 - \theta_4) & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\theta}_1^2 \\ \dot{\theta}_2^2 \\ \dot{\theta}_3^2 \\ \dot{\theta}_4^2 \\ \vdots \end{Bmatrix} \\
& + \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n g M_i L_1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \sum_{i=2}^n g M_i L_2 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \sum_{i=3}^n g M_i L_3 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \sum_{i=4}^n g M_i L_4 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sin \theta_1 \\ \sin \theta_2 \\ \sin \theta_3 \\ \sin \theta_4 \\ \vdots \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} C_1 + C_2 & -C_2 & 0 & 0 & \cdots \\ -C_2 & C_2 + C_3 & -C_3 & 0 & \cdots \\ 0 & -C_3 & C_3 + C_4 & -C_4 & \cdots \\ 0 & 0 & -C_4 & C_4 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \\ \dot{\theta}_4 \\ \vdots \end{Bmatrix} \\
& + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 & 0 & \cdots \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 & 0 & \cdots \\ 0 & -k_3 & k_3 + k_4 & -k_4 & \cdots \\ 0 & 0 & -k_4 & k_4 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \\ \vdots \end{Bmatrix} + \\
& \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n M_i L_1 \cos(\theta_1) & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \sum_{i=2}^n M_i L_2 \cos(\theta_2) & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \sum_{i=3}^n M_i L_3 \cos(\theta_3) & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \sum_{i=4}^n M_i L_4 \cos(\theta_4) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u} \\ \ddot{u} \\ \ddot{u} \\ \ddot{u} \\ \vdots \end{Bmatrix} \\
& + \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n M_i L_1 \cos(\theta_1) & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \sum_{i=2}^n M_i L_2 \cos(\theta_2) & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \sum_{i=3}^n M_i L_3 \cos(\theta_3) & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \sum_{i=4}^n M_i L_4 \cos(\theta_4) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{S} \\ \ddot{S} \\ \ddot{S} \\ \ddot{S} \\ \vdots \end{Bmatrix} = 0
\end{aligned}$$

(3.61)

### 3.5.2. ISOLAMENTO DE BASE

### 3.5.3. ESTRUTURA – ISOLADOR COM AMORTECEDOR MR.

A análise dinâmica do edifício incluindo amortecedor MR sujeito a movimento de base como é ilustrado na figura (3.10).

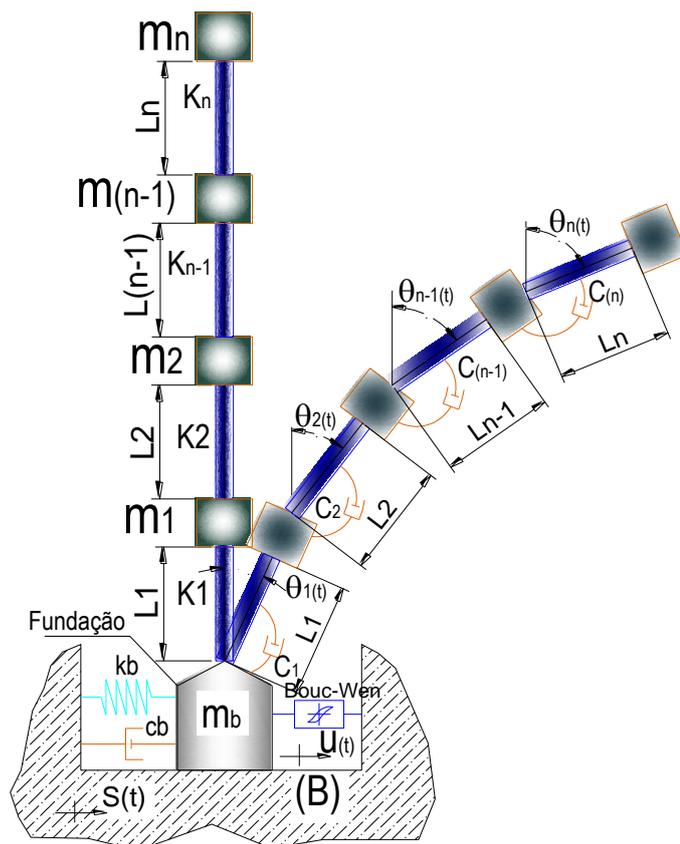


Figura 3.10 Representação do edifício na forma de torre com massas concentradas, com isolamento de base de comportamento não linear (amortecedor MR).

#### 3.5.3.1. FORMULAÇÃO MATEMÁTICA DA ESTRUTURA DO EDIFÍCIO “*Shear building*”, COM ISOLAMENTO DE BASE DE COMPORTAMENTO LINEAR E NÃO LINEAR.

A análise dinâmica da estrutura-base isolada, incluindo o amortecedor MR, para o edifício tipo “*shear building*”, e feita só acrescentando o valor da força do amortecedor eq. (2.6), na parcela das forças não conservativas na eq.(3.6), como é mostrada na seguinte equação.

$$\left(m_b + \sum_{i=1}^n m_i\right)\ddot{u} + \sum_{i=1}^n m_i \ddot{x}_i + C_b \dot{u} + k_b u = -\left(m_b + \sum_{i=1}^n m_i\right)\ddot{s} - F \quad (3.62)$$

Matricialmente, a equação é expressa da seguinte forma.

$$[M_E]\{\ddot{X}\} + [C_E]\{\dot{X}\} + [K_E]\{X\} = -[M'_E](\ddot{u} + \ddot{S}) - \{\Lambda\}(F) \quad (3.63)$$

Onde,  $\{\Lambda\} = \{1, 0, 0, \dots, 0\}_{1 \times n}^T$ , é um vetor relacionado com o número de graus de liberdade do sistema estrutura-base isolada; que indica a posição onde o amortecedor MR é instalado, neste caso na fundação do edifício

### 3.5.3.2. FORMULAÇÃO MATEMÁTICA DA RIGIDEZ ROTACIONAL DE UMA COLUNA.

Da mesma forma como foi obtida a rigidez da coluna no modelo anterior, agora se mostra como é obtida a rigidez rotacional das molas do modelo de pêndulo múltiplo.

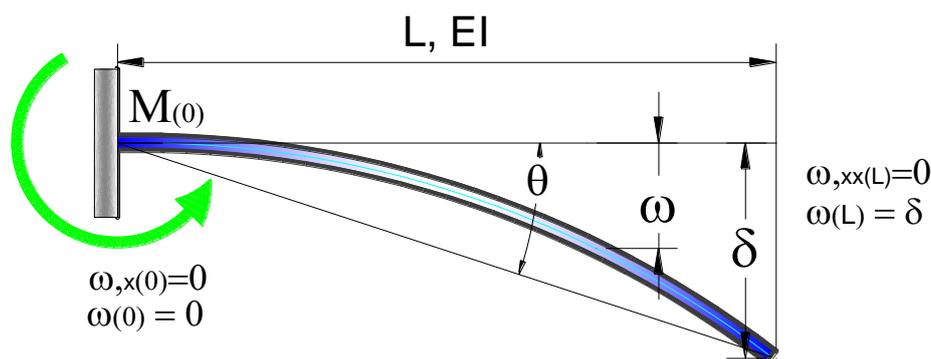


Figura 3.11 Viga em balanço submetido a um deslocamento lateral  $\delta$ .

A equação de deslocamentos da elástica ( $\omega$ ) da viga, eq.(3.11), tem que satisfazer a equação diferencial de 4ª ordem, eq.(3.10), com as condições de contorno mostradas na Figura 3.11.

A rigidez rotacional da coluna é determinada a partir do momento de engaste fazendo a seguinte similitude.

$$M = K_r \theta \quad (3.64)$$

Da Figura 3.11, pode-se ver que a rotação da coluna gerada pelo deslocamento lateral  $\delta$  do extremo livre que leva à mesma magnitude de momento de engaste é:

$$\theta = \frac{\delta}{L}, \sin \theta \cong \theta \quad (3.65)$$

O momento de engaste em função do giro da coluna é:

$$M = \frac{3EI\theta}{L} \quad (3.66)$$

Fazendo a similitude das eq.(3.64), e (3.66) se tem a rigidez rotacional.

$$K_r = \frac{3EI}{L} \quad (3.67)$$