7 Referencias Bibliográficas

ABAQUS 6.11. **Documentation**. Dassault Systèmes Simulia Corp., Providence, RI, USA, 2012.

Abdelaziz, Y.; Hamouine, A. A survey of the extended finite element. **Computers & Structures**, vol. 86, pp. 1141-1151, 2008.

Andrade, H. A. C. Implementação de Procedimentos Numéricos para a
Análise de Elementos Drenantes em Solos. 2003. 125 p. Dissertação de
Mestrado – Departamento de Engenharia Civil, PUC-Rio, Rio de Janeiro, 2003.

Belytschko, T.; Black, T. Elastic crack growth in finite elements with minimal remeshing. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, vol. 45, pp. 601-620, 1999

Belytschko, T.; Moës, N.; Usui, S.; Parimi, C. Arbitrary discontinuities in finite elements. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, vol. 50, pp. 993-1013, 2001.

Borja, R. I. A finite element model for strain localization analysis of strongly discontinuous fields based on Galerkin approximation. **Computers Methods in Applied Mechanics and Engineering**, vol. 190, pp. 1529-1549, 2000.

Borja, R. I. Assumed enhanced strain and the extended finite element methods: A unification of concepts. **Computers Methods in Applied Mechanics and Engineering**, vol. 197, pp. 2789-2803, 2008.

Callari, C.; Armero, F.; Abati, A. Strong discontinuities in partially saturated poroplastic solids. Computers Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 199, pp. 1513-1535, 2010.

Daux, C.; Möes, N.; Dolbow, J.; Sukumar, N.; Belytschko, T. Arbitrary branched

and intersecting cracks with the extended finite element method. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, vol. 48, pp. 1741-1760, 2000.

de Borst, R.; Rethore, J.; Abellan, M.-A. A precis of two-scale approaches for fracture in porous media. Lecture Notes on Composite Materials. Solid Mechanics and Its Applications, vol. 154, pp. 149-171, 2009.

Desai, C. S.; Zaman, M. M.; Lightner, J. G.; Siriwardane, H. J. Thin-layer element for interfaces and joints. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, vol. 8, pp. 19-43, 1984.

Dolbow, J.; Moës, N; Belytschko, T. An extended finite element method for modeling crack growth with frictional contact. **Computers Methods in Applied Mechanics and Engineering**, vol. 190, pp. 6825-6846, 2001.

Foster, C. D.; Borja, R. I.; Regueiro, R. A. Embedded strong discontinuity finite elements for fractured geomaterials with variable friction. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, vol. 72, pp. 549-581, 2007.

Fries, T-P; Belytschko, T. The intrinsic xfem: a method for arbitrary discontinuities without additional degrees. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, vol. 68, pp. 1358-1385, 2006.

Goodman, R. E.; Taylor, R. L.; Brekke, T. L. A model for mechanics of rock joint. Journal of the Soil Mechanics and Foundations Divisions, ASCE, vol. 3, pp. 637-659, 1968.

Gravouil, A.; Moës, N.; Belytschko, T. Non-planar 3D crack growth by the extended finite element and level sets – Part II: Level set update. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, vol. 53, pp. 2569-2586, 2002.

Jing, L. A review of techniques advances and outstanding issues in numerical modeling for rock mechanics and rock engineering. International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences, vol. 40, pp. 283–353, 2003.

Katona, M. G. A simple contact-friction interface element with applications to buried culverts. International Journal for Numerical and Analytical Methods

in Geomechanics, vol. 7, pp. 371-84, 1983.

Khoei, A. R.; Haghighat, E. Extended finite element modeling of deformable porous media with arbitrary interfaces. **Applied Mathematical Modeling**, vol. 35, pp. 5426-5441, 2011.

Khoei, A. R.; Nikbakht, M. An enriched finite element algorithm for numerical computation of contact friction problems. **International Journal of Mechanical Sciences**, vol. 49, pp. 183-199, 2007.

Lamb, A. R.; Gorman, G. J.; Gosselin, O. R.; Onaisi, A. Finite element voupled deformation and fluid flow in fractured porous media. **Proceedings of the SPE EUROPE/EAGE Annual Conference and Exhibition**, Society of Petroleum Engineers, Barcelona, Espanha, paper SPE 131725, 2010.

Lewis, R. W.; Schrefler, B. A. A Finite Element Simulation of the Subsidence of a Gas Reservoir Undergoing a Waterdrive. **Finite Element in Fluids**. Wiley: London, vol. 4, pp. 179-200, 1982.

Malvern, L. E. Introduction to the mechanics of a continuous medium. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall, Inc, 1969. 723 p.

Manzoli, O. L.; Shing, P. B. A general Technique to embed non-uniform discontinuities into standard solid finite elements. **Computers and Structures**, vol. 84, pp. 742-757, 2006.

Melenk, J. M; Babuska, I. The partition of unity finite element method: basic theory and applications. **Computers Methods in Applied Mechanics and Engineering**, vol. 39, pp. 289-314, 1996.

Mendes, R. A.; Costa, A. M.; Sousa Jr., L. C.; Pereira, L. C.; Oliveira, M. F. Risks and mitigation problems in CO2 injection project for a petroleum onshore field in Brazil. Proceedings of the 44th US Rock Mechanics Symposium and 5th US-Canada Rock Mechanics Symposium, Salt Lake City, UT, ARMA 10-162, 2010.

Moës, N.; Dolbow, J; Belytschko, T. A finite element method for crack growth

without remeshing. International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 46, pp. 131-150, 1999

Mohammadi, S. Extended Finite Element Method. Blackwell Publishing Ltd, 2008. 261 p.

Pande, G. N.; Beer, G.; Williams, J. R. Numerical Methods in Rock Mechanics. Chichester: Wiley, 1990. 327p.

Pereira, L. C.; Costa, A. M.; Sousa Jr., L. C.; Amaral, C. S.; Souza, A. L. S.; Falcão, F. O. L.; Portella, F. A.; Silva, L. C. F; Mendes, R. A.; Chaves, R. A. P.; Roehl, D.; Oliveira, M. F. Specialist Program for injection pressure limits considering fault reactivation criteria. Proceedings of the 44th US Rock Mechanics Symposium and 5th US-Canada Rock Mechanics Symposium, Salt Lake City, UT, ARMA 10-214, 2010.

Regueiro, R. A.; Borja, R. I. A finite element model of localized deformation in frictional materials taking a strong discontinuity approach. Finite Elements in Analysis and Design, vol. 33, pp. 283-315, 1999.

Regueiro, R. A.; Borja, R. I. Plane strain finite element analysis of pressure sensitive plasticity with strong discontinuity. **International Journal of Solids and Structures**, vol. 38, pp. 3647-3672, 2001.

Regueiro, R. A.; Yu, S.K. Comparison between elasto-plastic and rigid-plastic cohesive surface and embedded strong discontinuity finite element implementation of rock fracture. **Proceedings of 44th US Rock Mechanics Symposium and 5th US-Canada Rock Mechanics Symposium**, Salt Lake City, UT, ARMA 10-473, 2010.

Sanborn, S. E.; Prévost, J. H. Frictional slip plane growth by localization detection and the extended finite element method (XFEM). International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 2010. Published online in Wiley Online Library, DOI:10.1002/nag.958

Siavelis, M; Guiton, M. L. E.; Massin, P.; Moës, N. Extended finite element modeling of sedimentary basin evolution with large sliding along faults.

Proceedings of the 45th US Rock Mechanics / Geomechanics Symposium, San Francisco, CA, ARMA 11-555, 2011..

Simo, J. C.; Rifai, M. S. A class of mixed assumed strain methods and the method of incompatible modes. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, vol. 29, pp. 1595-1638, 1990.

Sluys, L. J.; Berends, A. H. Discontinuous failure analysis for mode I and modeII localization problems. International Journal of Solids and Structures, vol.35, pp. 4257-4274, 1998.

Sukumar, N.; Moës, N., Moran; B., Belytschko, T. Extended finite element method for three-dimensional crack modeling. International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 48, pp. 1549-1570, 2000.

Wan, R. G.; Chan, D. H.; Morgenstern, N. R. Modelling discontinuous behavior and fault formation in geomaterials. **Fractured and jointed rock masses**, Rotterdam: Taylor & Francis, pp. 319-325, 1995. 786 p. ISBN-10: 9054105917.

Zienkiewicz, O. C.; Best, B., Dullage; C. and Stagg, K. G. Analysis of nonlinear problems in rock mechanics with particular reference to jointed rock systems. **Proceedings of the Second International Congress on Rock Mechanics**, Belgrade, vol. 3, pp. 501-509, 1970.

Apêndice – A ESTUDO DE REFINAMENTO

A segunda seção do capítulo 5 apresentou uma comparação entre os elementos CPE4P, *cohesive* e enriquecido. As malhas empregadas naquela seção são o resultado do estudo de refinamento ilustrado neste apêndice. O estudo aborda apenas os exemplos mecânico e de fluxo descritos no capítulo 5. O exemplo acoplado foi excluído pelo fato de não haver no programa ABAQUS um elemento equivalente ao elemento enriquecido.

O estudo de refinamento visa atender a três pontos. O primeiro é garantir que as malhas utilizadas no capítulo 5 são confiáveis do ponto de vista de refinamento. O segundo ponto é mostrar que, ao usar malhas com uma distribuição uniforme de elementos, o modelo numérico que utiliza o elemento enriquecido produz uma resposta muito próxima a de outro modelo numérico em que a descontinuidade é discretizada. O terceiro ponto é ilustrar a diferença nas respostas obtidas pelo elemento enriquecido de fluxo de acordo com a aproximação de poro-pressão na descontinuidade empregada.

Procurando conhecer o comportamento do elemento enriquecido mediante o refinamento, dezoito malhas são construídas para o estudo de refinamento. Para o uso do ABAQUS são geradas seis malhas para o exemplo mecânico e outras seis para o exemplo de fluxo. Com relação ao elemento enriquecido, os modelos numéricos mecânico e de fluxo empregam a mesma malha.

Para cada exemplo (mecânico ou fluxo), as malhas são feitas aos pares, isto é, para cada malha gerada pelo ABAQUS-CAE existe uma malha gerada pelo GiD com aproximadamente o mesmo número de nós e elementos. As malhas estão ilustradas no final do apêndice, páginas 223 a 225, e são numeradas de 1 a 6. Os comentários feitos neste apêndice são limitados à questão do refinamento. Outras observações a respeito do elemento enriquecido são encontradas no capítulo 5.

A.1. Carregamento mecânico em uma coluna de arenito

Este exemplo, idêntico ao do capítulo 5, consiste em modelar uma coluna de arenito submetida a um carregamento de compressão uniforme (P) de 1 MPa como

ilustrado na figura A-1. O deslocamento é restringido ao longo das faces direita e esquerda da coluna na direção x e, ao longo da base, na direção y. A coluna possui uma descontinuidade no seu interior com uma espessura de 5 mm e uma inclinação de 45° em relação ao eixo x. A coluna é formada por um arenito com comportamento linear elástico isotrópico e obedece ao estado plano de deformação, enquanto a descontinuidade é formada por um material linear elástico anisotrópico. Os parâmetros de material da coluna são listados na tabela A-1. A escolha do material I ou II para a descontinuidade não tem qualquer influência na resposta do exemplo mecânico.

Arenito		Descontinuidade				
		Material I		Material II		
E (GPa)	27,6	r _{nn} (GPa/m) 5,00		r _{nn} (GPa/m)	5,00	
ν	0,15	r _{ss} (GPa/m)	1,00	r _{ss} (GPa/m)	1,00	
K (mD)	1,00	K _n (mD)	10000,00	K _n (mD)	0,001	
ф	0,06	K _t (mD)	10000,00	K _t (mD)	0,001	
Ks (GPa)	36,00	φ	0,19	φ	0,06	
***	***	Ks (GPa)	36,00	Ks (GPa)	36,00	

Tabela A-1: Parâmetros de material utilizados no estudo de refinamento



Figura A-1: Esboço do exemplo de carregamento mecânico







Figura A-2: Curvas de deslocamento na direção x ao longo da coluna de arenito obtida pelos elementos cohesive e enriquecido com 3 nós



Enriquecido (3 nós) - posição 3

Figura A-3: Curvas de deslocamento na direção y ao longo da coluna de arenito obtida pelos elementos cohesive e enriquecido com 3 nós

-5.0E-005

0.0E+000

0.0E+000

0.0E+000

-1.5E-004

-1.0E-004

Deslocamento na direção y (m)

-1.5E-004 -1.0E-004 -5.0E-005 Deslocamento na direção y (m)

-1.5E-004 -1.0E-004 -5.0E-005 Deslocamento na direção y (m)

Malha 6

Malha 4

Malha 2

Seguindo o mesmo raciocínio do capítulo 5, as respostas de deslocamento previstas pelos elementos enriquecido e *cohesive* são comparadas ao longo da coluna em três posições, as mesmas ilustradas na Figura 5-13. As figuras A-2 e A-3, páginas 211 e 212, mostram as respostas de deslocamentos nas direções x e y respectivamente.

Os resultados ilustrados nas figuras A-2 e A-3 indicam claramente que, para qualquer refinamento adotado, modelos numéricos que usam o elemento enriquecido, em sua maioria, produzem uma resposta idêntica a modelos em que a descontinuidade é discretizada. A única diferença significativa na resposta dos dois modelos numéricos é vista no deslocamento da direção x para a malha 1.

Essa diferença, em um primeiro momento, induz a uma interpretação de que a resposta obtida pelo elemento enriquecido não é satisfatória quando comparada ao elemento *cohesive*. Porém, ao avaliar o deslocamento na direção x descrito pelas malhas 2 a 6, nota-se o contrário. A resposta obtida pelo elemento enriquecido na malha 1 é mais próxima daquelas determinadas para os modelos mais refinados (malha 6). Isso sugere que, mesmo com um refinamento grosseiro, o modelo numérico que utiliza o elemento enriquecido tem condições de produzir uma resposta adequada.

Malha	Cohesive		Enriquecido com 3 nós		
	Deslocamento	Diferença (%)	Deslocamento	Diferença (%)	
1	1,4843 x 10 ⁻⁴	7,06	1,5338 x 10 ⁻⁴	4,16	
2	1,5479 x 10 ⁻⁴	3,08	1,5640 x 10 ⁻⁴	2,27	
3	1,5721 x 10 ⁻⁴	1,56	1,5793 x 10 ⁻⁴	1,32	
4	1,5845 x 10 ⁻⁴	0,79	1,5890 x 10 ⁻⁴	0,71	
5	1,5921 x 10 ⁻⁴	0,31	1,5959 x 10 ⁻⁴	0,28	
6	1,5970 x 10 ⁻⁴	0,00	1,6004 x 10 ⁻⁴	0,00	

Tabela A-2: Variação da resultante de deslocamento devido ao refinamento de malha

Tabela A-3: Valores dos deslocamentos nas direções x e y

	Coh	esive	Enriquecido com 3 nós Deslocamento		
Malha	Desloca	amento			
	Direção x	Direção y	Direção x	Direção y	
1	-1,5519 x 10 ⁻⁶	-1,4842 x 10 ⁻⁴	-2,0922 x 10 ⁻⁶	-1,5337 x 10 ⁻⁴	
2	-2,5706 x10 ⁻⁶	-1,5476 x 10 ⁻⁴	-2,6719 x 10 ⁻⁶	-1,5638 x 10 ⁻⁴	
3	-2,9544 x 10 ⁻⁶	-1,5718 x 10 ⁻⁴	-2,9927 x 10 ⁻⁶	-1,5790 x 10 ⁻⁴	
4	-3,1374 x 10 ⁻⁶	-1,5842 x 10 ⁻⁴	-3,1658 x 10 ⁻⁶	-1,5887 x 10 ⁻⁴	
5	-3,2418 x 10 ⁻⁶	-1,5917 x 10 ⁻⁴	-3,2835 x 10 ⁻⁶	-1,5956 x 10 ⁻⁴	
6	-3,3091 x 10 ⁻⁶	-1,5967 x 10 ⁻⁴	-3,3512 x 10 ⁻⁶	-1,6000 x 10 ⁻⁴	

Apêndice – A

Na seção 5.3.1 foi mencionada a seleção da malha 4 para a modelagem do exemplo mecânico. Sua seleção está baseada na convergência do valor da resultante de deslocamento para o ponto com distância 4,00 m, posição 3. Definindo a malha 6 como malha de referência (modelo mais refinado), determina-se a diferença da resultante de deslocamento, no ponto citado, obtida entre uma malha qualquer e a malha 6. O valor de diferença encontrado é o parâmetro de escolha da malha. Esses valores são listados na tabela A-2. A tabela A-3 lista os valores das componentes de deslocamento para o ponto citado nas direções x e y em cada malha.

Como pode ser observado na tabela A-2, a escolha da malha 4 garante uma boa resposta do ponto de vista de refinamento. O valor de diferença encontrado para a malha 4 é menor do que 1% para os dois elementos. Comparando as resultantes de deslocamentos obtidas pelos elementos *cohesive* e enriquecido para a malha 4, a diferença encontrada é de 0,28%. Um ótimo resultado.

A.2. Fluxo de fluido descendente uma coluna de arenito

O segundo exemplo a ser trabalhado no estudo de refinamento consiste na modelagem de uma coluna de arenito submetida a um fluxo prescrito (q) de 1×10^{-7} m/s como ilustrado na figura A-4. O fluxo ocorre em regime permanente e uma condição de poro-pressão nula é aplicada na base da coluna. A coluna possui uma descontinuidade no seu interior com uma inclinação de 45° em relação ao eixo x e uma espessura de 5 mm. A fim de verificar a aproximação de poro-pressão na descontinuidade, dois materiais são definidos para a descontinuidade. O material I representa uma descontinuidade com permeabilidade maior do que o arenito, o material II com permeabilidade menor. Os parâmetros de material são listados na tabela A-1. O fluido no meio poroso possui uma viscosidade (μ) de 50 cP, peso específico (γ) de 8 KN/m3 e um módulo de variação volumétrica (K_f) de 3,3 GPa.



Figura A-4: Esboço da geometria, fluxo e condições de contorno do exemplo de fluxo

O exemplo de fluxo apresentado aqui tem duas características diferentes em relação ao exemplo da seção 5.3.2. A primeira característica é que a descontinuidade é um material isotrópico. A isotropia foi adotada simplesmente para fazer com que a descontinuidade se comporte como um meio condutor ou isolante, limitando qualquer interpretação de resultado à forma de aproximação de poro-pressão na descontinuidade. A outra é que a descontinuidade não corta toda a coluna. Esta condição geométrica faz

com que o comportamento de poro-pressão na coluna seja menos suave, exigindo um maior refinamento de malha.

Seguindo o mesmo procedimento do capítulo 5, as respostas de poro-pressão obtidas pelos elementos CPE4P e enriquecido são lidas ao longo das posições 1, 2 e 3 da coluna, as mesmas ilustradas na Figura 5-13. As figuras A-5 e A-6, páginas 217 e 218, mostram as respostas de poro-pressão determinadas pelos elementos enriquecidos com 3 e 5 nós respectivamente. Essas figuras descrevem as curvas de poro-pressão para o caso em que a descontinuidade é um meio condutor (material I).

Os resultados ilustrados nas figuras A-5 e A-6 mostram que, para qualquer refinamento adotado, o modelo numérico que usa o elemento enriquecido produz uma resposta próxima ou praticamente idêntica ao modelo em que a descontinuidade é discretizada.

Além disso, as figuras A-5 e A-6 permitem visualizar a limitação da aproximação de poro-pressão na descontinuidade citada no capítulo 3. Nota-se que, para uma descontinuidade com valor alto de permeabilidade tangencial, a resposta de poro-pressão calculada pelo elemento enriquecido com 3 nós é sempre inferior àquela obtida pelo elemento enriquecido com 5 nós. Esta diferença reflete o modo como a poro-pressão na descontinuidade é determinada.

Ao adotar um valor de permeabilidade tangencial muito alto, a matriz de fluxo inteira do elemento enriquecido com 3 nós torna-se mais permeável como explicado no capítulo 3. Como o elemento é mais permeável, um gradiente de poro-pressão menor é formado no interior do elemento enriquecido. A figura A-5, página 217, retrata exatamente este comportamento.

Para a condição em que a descontinuidade atua como material condutor, o elemento enriquecido com 5 nós mostra-se mais eficiente. Ao descrever a poro-pressão na descontinuidade como um grau de liberdade específico, o elemento enriquecido com 5 nós evita que toda a matriz de fluxo torne-se mais permeável. O resultado disso é que o elemento enriquecido prevê praticamente a mesma resposta de poro-pressão do elemento CPE4P como ilustrado na figura A-6, página 218.

A diferença de resposta obtida pelas duas aproximações do elemento enriquecido tende a diminuir à medida que o refinamento aumenta. A razão disso é que a região do modelo representada pelo elemento enriquecido com 3 nós fica menor, minimizando o erro da aproximação.



CPE4P - posição 3

0

×

٥

×

0

Enriquecido (3 nós) - posição 1

🗙 Enriquecido (3 nós) - posição 2

e Enriquecido (3 nós) - posição 3



Figura A-5: Curvas de poro-pressão ao longo da coluna para o material I obtida pelos elementos CPE4P e enriquecido (com 3 nós)



CPE4P - posição 3

¢

×

◊

×

0

Enriquecido (5 nós) - posição 1

🗙 Enriquecido (5 nós) - posição 2

e Enriquecido (5 nós) - posição 3



Figura A-6: Curvas de poro-pressão obtidas pelos elementos CPE4P e enriquecido (com 5 nós) para o material I





4.00

3.00

2.00



Figura A-7: Curvas de poro-pressão ao longo da coluna obtida pelos elementos CPE4P e enriquecido (com 3 nós) para o material II



Enriquecido (5 nós) - posição 1

🗙 Enriquecido (5 nós) - posição 2

😑 Enriquecido (5 nós) - posição 3

♦

×

◇ ×



Figura A-8: Curvas de poro-pressão ao longo da coluna obtida pelos elementos CPE4P e enriquecido (com 5 nós) para o material II

A mesma modelagem de fluxo em regime permanente é feita novamente, agora trocando o material I da descontinuidade pelo material II. A resposta de poro-pressão obtida pelos elementos enriquecidos com 3 e 5 nós é ilustrada nas figuras A-7 e A-8, páginas 219 e 220 respectivamente.

Ao definir um material com baixa permeabilidade para a descontinuidade (material II), a influência da permeabilidade tangencial sobre a matriz do elemento enriquecido com 3 nós desaparece. Nesta condição, independentemente do refinamento, as respostas de poro-pressão previstas pelas duas aproximações do elemento enriquecido com 3 e 5 nós passam a ser muito próximas como visto nas figuras A-7 e A-8.

	CPE4P		Enriquecido (com 3 nós)		Enriquecido (com 5 nós)	
Malha	Poro- pressão (MPa)	Diferença (%)	Poro-pressão (MPa)	Diferença (%)	Poro-pressão (MPa)	Diferença (%)
1	17,966	2,55	17,177	5,230	17,945	2,50
2	18,210	1,22	17,473	3,597	18,147	1,41
3	18,323	0,61	17,786	1,870	18,269	0,74
4	18,379	0,31	17,950	0,966	18,336	0,38
5	18,415	0,11	18,132	-0,039	18,394	0,07
6	18,435	0,00	18,125	0,000	18,406	0,00

Tabela A-5: Variação de poro-pressão para o material II devido ao refinamento de malha

	CPE4P		Enriquecido (com 3 nós)		Enriquecido (com 5 nós)	
Malha	Poro- pressão (MPa)	Diferença (%)	Poro-pressão (MPa)	Diferença (%)	Poro-pressão (MPa)	Diferença (%)
1	21,289	3,24	21,664	1,37	21,709	1,43
2	21,691	1,41	21,788	0,81	21,890	0,61
3	21,846	0,70	21,866	0,45	21,954	0,32
4	21,923	0,35	21,914	0,23	21,988	0,17
5	21,973	0,13	21,962	0,01	22,001	0,11
6	22,001	0,00	21,965	0,00	22,025	0,00

Quanto à seleção da malha 6 para a aplicação do exemplo de fluxo na seção 5.3.2, sua escolha está baseada na convergência do valor de poro-pressão para o ponto com

=

distância 4,00m, posição 3. Definindo a malha 6 como malha de referência (modelo mais refinado), determina-se a diferença de poro-pressão, no ponto citado, obtida entre uma malha qualquer e a malha 6. O valor de diferença encontrado é o parâmetro de escolha da malha.

As figuras A-5 a A-8 mostraram que a resposta do elemento enriquecido é mais sensível em relação ao material I, por tal razão, apenas os resultados do material I são utilizados na seleção da malha. A tabela A-4 lista os valores de poro-pressão e diferença de poro-pressão (em termos de porcentagem) encontrados na modelagem do material I, a tabela A-5 lista os mesmos valores para a situação em que a descontinuidade é descrita pelo material II.

De modo semelhante ao exemplo mecânico, a malha 4 apresenta um refinamento suficiente para garantir uma resposta confiável. Porém, no exemplo de fluxo, a malha 6 será escolhida devido a uma pequena oscilação vista na resposta de poro-pressão determinada pelo elemento enriquecido com 3 nós. A oscilação é pequena e não compromete a análise do elemento.

Os valores de poro-pressão listados na tabela A-4 permitem uma observação interessante. Por mais que a malha seja refinada, a resposta obtida pelo elemento enriquecido (com 3 nós) é sempre inferior à resposta do elemento enriquecido (com 5 nós). Utilizando a tabela A-4, a diferença de valores de poro-pressão, em termos de porcentagem, entre os elementos CPE4P e enriquecido (com 3 nós) é de 1,68% para a malha 6, enquanto para os elementos CPE4P e enriquecido com (5 nós) a diferença é de 0,16%.

Uma característica comum aos dois exemplos do estudo de refinamento (mecânico e fluxo) é que as malhas que empregaram o elemento enriquecido foram sempre homogêneas, isto é, elas possuem uma distribuição uniforme de elementos com o mesmo tamanho. Aliada à questão do refinamento, essa característica é relevante, pois mostra que o elemento enriquecido, a princípio, possibilita o uso de malhas simples para representação da descontinuidade.



Figura A-9: Malhas 1 a 2 geradas pelo GiD e ABAQUS-CAE



Figura A-10: Malhas 3 a 4 geradas pelo GiD e ABAQUS-CAE



Figura A-11: Malhas 5 a 6 geradas pelo GiD e ABAQUS-CAE

Apêndice – B FUNÇÃO DE INTERPOLAÇÃO N^β

Antes de apresentar a função de interpolação N^{β} para o elemento CST, uma breve descrição da função para um elemento unidimensional é feita. Utilizando o deslocamento como variável a ser interpolada, a descrição procura mostrar e estabelecer um procedimento simples para a obtenção da função N^{β} para qualquer elemento. As observações feitas para o deslocamento são igualmente válidas para a poro-pressão.

B.1. Função de interpolação N^{β} para um elemento unidimensional

Para demonstrar a obtenção da função de interpolação N^{β} , considere uma barra com comprimento L seccionada por uma descontinuidade no ponto x_d conforme mostrado na figura B-1, página 227. O campo de deslocamento desta barra é indicado pela linha preta com traço cheio. A linha tracejada não tem significado físico. Pretendese mostrar que o deslocamento da barra pode ser definido pelos deslocamentos das extremidades e o salto de deslocamento em x_d .

Fazendo que:

$$u(0) = u_{1}$$

$$u(1) = u_{2}$$

$$u(x_{d}^{-}) = u_{3}$$

$$u(x_{d}^{+}) = u_{4}$$

$$||u|| = u_{4} - u_{3}$$

B.1

Os sinais (+) e (-) na expressão B.1 indicam que o ponto x está no subdomínio Ω + e Ω - respectivamente (figura B-1(b)). Os valores u_1 e u_2 são os deslocamentos dos nós 1 e 2 localizados na extremidade da barra. Os valores u_3 e u_4 são os deslocamentos no ponto x_d nos subdomínios Ω + e Ω - respectivamente. A diferença entre os valores u_3 e u_4 é o salto de deslocamento ||u||. Por hipótese, assume-se que a deformação da barra no ponto x_d obedece à expressão:



Figura B-1: a) deslocamento ao longo da barra, b) barra no sistema global, c) barra no sistema local

A figura B-1(a) mostra que, ao longo do comprimento L, o deslocamento u(x) é uma função descontínua. Porém, ao se observar os subdomínios Ω - (intervalo $0 \le x \le x_d$) e Ω + (intervalo $x_d \le x \le L$) separadamente, o deslocamento u(x) pode ser tratado como contínuo em cada intervalo. Dessa forma, u(x) pode ser escrito em função de duas retas. Utilizando os deslocamentos ($u_1 + ||u||$) e u_2 , o deslocamento u(x) para o subdomínio Ω + é: Apêndice – B

$$u(x)^{+} = \left(1 - \frac{x}{L}\right)u_{1} + \frac{x}{L} \cdot u_{2} + \left(1 - \frac{x}{L}\right)\|u\|$$
 B.3

De modo análogo, os deslocamentos u_1 e $(u_2 - ||u||)$ possibilitam escrever o deslocamento u(x) subdomínio Ω - como:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x})^{-} = \left(1 - \frac{\mathbf{x}}{\mathbf{L}}\right)\mathbf{u}_{1} + \frac{\mathbf{x}}{\mathbf{L}} \cdot \mathbf{u}_{2} - \frac{\mathbf{x}}{\mathbf{L}} \cdot \|\mathbf{u}\| \qquad B.4$$

As expressões B.3 e B.4 estão escritas no sistema de coordenada global. Ao discretizar a barra com apenas um elemento como ilustrado na B-1(c), as expressões são prontamente reescritas no sistema de coordenada local como:

$$u(\xi)^{-} = \frac{1-\xi}{2} \cdot u_{1} + \frac{1+\xi}{2} \cdot u_{2} - \frac{1+\xi}{2} \cdot ||u||$$
B.5

$$u(\xi)^{+} = \frac{1-\xi}{2} \cdot u_{1} + \frac{1+\xi}{2} \cdot u_{2} + \frac{1-\xi}{2} \cdot ||u||$$
B.6

As expressões B.5 e B.6 mostram que o deslocamento em uma barra seccionada por uma descontinuidade pode ser definido pelos graus de liberdade de deslocamento na extremidade da barra, pelo salto de deslocamento em x_d e por duas funções lineares. Deve-se observar que as expressões B.5 e B.6 têm a mesma forma da expressão 2.48.

Observando o terceiro termo das expressões B.5 e B.6, compreende-se que para distribuir ||u|| ao longo do elemento é necessário o uso de duas funções. Essas funções que descrevem ||u|| correspondem à função N^{β} da expressão 2.48. A expressão B.7 mostra a função N^{β} para o elemento unidimensional, a distribuição da função ao longo do elemento unidimensional é ilustrada na figura B-2(b), página 229.

$$N^{\beta} = \begin{cases} N^{\beta-} = -\frac{1}{2}(1+\xi) \Longrightarrow -1 < \xi < \xi d \\ N^{\beta+} = \frac{1}{2}(1-\xi) \Longrightarrow \xi d < \xi < 1 \end{cases}$$
B.7



Figura B-2: Funções de Interpolação para um elemento unidimensional: (a) função de interpolação dos nós 1 e 2, (b) função de interpolação N^{β}

É interessante notar que a função N^{β} é semelhante às funções de interpolação dos nós 1 e 2 do elemento. À direita do ponto ξ_d , N^{β} é igual à função de interpolação do nó 1, enquanto à esquerda, N^{β} é igual ao negativo da função de interpolação do nó 2 como pode ser visto na figura B-2.

Além disso, ao verificar que valores a função N^{β} assume em ξ_{d_i} chega-se a uma observação importante. Substituindo ξ por ξ_d nas duas formas de N^{β} da expressão B.7, temos:

$$\lambda = N^{\beta+}(\xi d) = \frac{1}{2}(1 - \xi d)$$

$$c\lambda = N^{\beta-}(\xi d) = -\frac{1}{2}(1 + \xi d)$$

B.8

Observando a figura B-2(b), os valores λ e c λ da expressão B.8 podem ser interpretados como frações do salto de deslocamento ||u|| nos subdomínios Ω + e Ω -respectivamente. Os valores de λ e c λ variam entre 0 e 1.

Somando o valor absoluto das constantes λ e c λ da expressão B.8, o resultado obtido é igual a 1 como mostrado na expressão B.9.

$$|\lambda| + |c\lambda| = \left|\frac{1}{2}(1 - \xi d)\right| + \left|-\frac{1}{2}(1 + \xi d)\right| = 1$$
 B.9

Isso significa que, se o salto de deslocamento é um grau de liberdade adicional e está associada a um nó próprio, a função N^{β} obedece à regra da função de interpolação de qualquer elemento. Ou seja, a função N^{β} é igual a 1 para o nó que está associado e zero para os demais. Esta dedução simples mostra que é possível estabelecer, por pura inspeção, a função de interpolação N^{β} para qualquer tipo de elemento.

B.2. Função de interpolação N^{β} para o elemento CST

Ao ser atravessado por uma descontinuidade, o elemento CST é dividido em duas regiões ou subdomínios. Uma região possui formato triangular (Ω_1) e a outra um formato retangular (Ω_2) como mostrado na figura B-3(a). Uma distribuição genérica do salto de deslocamento (||u||) sobre os dois subdomínios é ilustrada na figura B-3(b). As letras A e C representam os nós onde o grau de salto de deslocamento (||u||) está posicionado.



Figura B-3: a) Subdomínios do elemento CST, b) Esboço do salto de deslocamento sobre os subdomínios $\Omega_1 e \Omega_2$

Idêntico ao elemento unidimensional, para interpolar ||u|| nos subdomínios Ω_1 e Ω_2 é necessário que a função N^{β} assuma duas formas. Essas duas formas são obtidas

aplicando-se as funções de interpolação dos elementos CST e bilinear nos subdomínios $\Omega_1 \ e \ \Omega_2$ respectivamente. A figura B-4 ilustra o uso das funções de interpolação dos elementos CST e bilinear para interpolar o grau ||u|| (posicionado nos nós A e C) nos subdomínios $\Omega_1 \ e \ \Omega_2$. A expressão B.10 mostra a função de interpolação N^{β} associada aos nós A e C em cada subdomínio. A primeira coluna dos vetores linha na expressão B.10 corresponde à função de interpolação N^{β} do nó A.



Figura B- 4: a) uso da função de interpolação do elemento CST no subdomínio Ω_1 , b) uso da função de interpolação do elemento bilinear no subdomínio Ω_2

$$\begin{split} N_{\Omega_{1}}^{\beta} &= 1 \cdot [N_{2}^{CST} \quad N_{3}^{CST}] = 1 \cdot [r \quad s] \\ N_{\Omega_{2}}^{\beta} &= -1 \cdot [N_{1}^{bilinear} \quad N_{4}^{bilinear}] = -1 \cdot \left[\frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta) \quad \frac{1}{4}(1-\xi)(1=\eta)\right] \end{split} \tag{B.10}$$

Onde:

r, s - coordenada local do subdomínio Ω_1 ;

 ξ , η - coordenada local do subdomínio Ω_2 ;

 $N^{\beta}_{\Omega_1}$ - função de interpolação de ||u|| para o subdomínio Ω_1 ;

 $N_{\Omega_2}^{\beta}$ - função de interpolação de ||u|| para o subdomínio Ω_2 .

Para definir a função que interpola o grau ||u|| nos nós A e C, deve-se verificar primeiro a forma do subdomínio e depois associá-la aos elementos CST ou bi-linear. Após associar o elemento CST e bilinear aos subdomínios Ω_1 e Ω_2 é necessário adotar uma numeração local para os nós em cada subdomínio. Esses nós estão indicados na figura B-4(a) através dos números circunscritos por um círculo. Note que os nós A e C fazem parte desta numeração.

Associado o elemento ao subdomínio, a i-ésima função de interpolação do elemento CST ou bi-linear para o nó A ou C, expressões B.11 e B.12 respectivamente, é selecionada observando a numeração local do nó A ou C no subdomínio. A i-ésima função deve ser diferente de zero apenas para o nó que estiver associado (nó A ou C).

$$\mathbf{N}^{CST} = [N_1 \quad N_2 \quad N_3] = [1 - r - s \quad r \quad s]$$
 B.11

$$\begin{aligned} \mathbf{N}^{\text{bilinear}} &= [N_1 \quad N_2 \quad N_3 \quad N_4] = \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta) & \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta) & \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta) & \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta) \end{bmatrix} \quad B.12 \end{aligned}$$



Figura B- 5: Vetores unitários da descontinuidade (v_d) e centroide (v_c)

A multiplicação das funções de interpolação dos elementos CST e bilinear pelos fatores +1 e -1 (expressão B.10) visa adicionar e subtrair o salto ||u|| ao campo de deslocamento u. Tal procedimento busca reproduzir a expressão B.7. A definição de qual fator aplicar sobre um subdomínio é feita com base no produto vetorial do vetor unitário da descontinuidade (v_d) pelo vetor centroide (v_c) indicados na figura B-5. O vetor v_c é formado pelos pontos médio da descontinuidade (segmento de reta formado pelos nós A e C) e pelo centroide do subdomínio Ω_1 . Se o produto vetorial for positivo, a função $N_{\Omega_1}^{\beta}$ é multiplicada por +1 e $N_{\Omega_2}^{\beta}$ por -1. Caso contrário, o produto é invertido.

A fim de exemplificar esse procedimento, descreve-se a seleção das funções de interpolação do nó A. Observando a figura B-4(a), o número do nó local no subdomínio Ω_1 correspondente ao nó A é 2, logo a i-ésima função será a função de interpolação do nó 2 do elemento CST. Para o subdomínio Ω_2 , o número do nó local correspondente ao

nó A é 1, portanto a i-ésima função é a função de interpolação do nó local 1 do elemento bi-linear.

A função N^{β} da expressão B.10 não está totalmente estabelecida. Observando a figura B-4, nota-se que, nos nós A e C, ao somar o módulo da componente negativa $(N^{\beta}_{\Omega_2})$ à componente positiva $(N^{\beta}_{\Omega_1})$ o resultado é igual a 2. Para ser uma função de interpolação, N^{β} deverá ter valor unitário nestes nós. O valor unitário será obtido pela introdução dos valores λ e c λ na expressão B.10.

Os valores λ e c λ do elemento CST têm significado idêntico aos do elemento unidimensional, isto é, eles são frações do salto ||u||. Para cada nó, A ou C, existe um par de valores λ e c λ . A determinação dos valores de λ e c λ é feita considerando a distribuição de ||u|| ao longo das faces do elemento que contém os nós A ou C.



Figura B- 6: a) função N^{β} procurada, b) função N^{β} sem as constantes λ e c λ

Para ilustrar a obtenção dos valores $\lambda e c\lambda$, considere a face que contém o nó A (figura B-3(a)). Ao definir que a função $N_{\Omega_1}^{\beta}$ é positiva pelo produto vetorial $v_d x v_c$, a função de interpolação N^{β} procurada para esta face deve ter a forma ilustrada na figura B-6(a). Os números circunscritos por um círculo são os nós do elemento CST cortado pela descontinuidade (figura B-3(a)).

A figura B-6(a) mostra que λ é igual ao valor da função de interpolação do nó 2 do elemento CST sobre o nó A. Conhecido λ , o módulo de c λ é obtido através da expressão B.9. Multiplicando as funções de interpolação $N_{\Omega_1}^{\beta}$ e $N_{\Omega_2}^{\beta}$ do nó A, expressão B.10, por λ e c λ respectivamente, a função N^{β} do nó A é completamente definida como indicado na expressão B.13.

$$N^{\beta} = \begin{cases} N_{\Omega_{1}}^{\beta} = 1 \cdot \lambda \cdot N_{2}^{NCST} = 1 \cdot \lambda \cdot r \\ N_{\Omega_{2}}^{\beta} = -1 \cdot |c\lambda| \cdot N_{1}^{bi-linear} = -1 \cdot |c\lambda| \cdot \frac{1}{4} (1-\xi)(1-\eta) \end{cases} B.13$$

Caso o produto vetorial $v_d \ge v_c$ no subdomínio Ω_1 for negativo, a determinação de λ deve ser feita como se o subdomínio Ω_1 fosse positivo. Após determinar a i-ésima função e conhecer λ , o valor de λ deve ser multiplicado por -1. Ao definir que o valor λ é negativo, o valor de c λ passa a ser positivo.

O mesmo procedimento ilustrado para o nó A é seguido para a obtenção da função N^{β} do nó C. A função N^{β} dos nós A e C em cada subdomínio do elemento CST cortado pela descontinuidade é mostrada na expressão B.14.

$$N^{\beta} = \begin{cases} \Omega_{1} \begin{cases} N_{A}^{\beta} = (1) \cdot \lambda_{A} \cdot r \\ N_{C}^{\beta} = (1) \cdot \lambda_{C} \cdot s \end{cases} \\ \\ \Omega_{2} \begin{cases} N_{A}^{\beta} = (-1) \cdot |c\lambda_{A}| \cdot \frac{1}{4} (1 - \xi)(1 - \eta) \\ N_{C}^{\beta} = (-1) \cdot |c\lambda_{C}| \cdot \frac{1}{4} (1 - \xi)(1 + \eta) \end{cases} \end{cases} B.14 \end{cases}$$

Apêndice – C SOLUÇÃO ANALÍTICA PARA UMA COLUNA DE ARENITO UNIDIMENSIONAL COM UMA DESCONTINUIDADE INSERIDA

Visando à validação do elemento enriquecido, uma solução analítica para uma coluna de arenito unidimensional foi estabelecida. A solução analítica permite a determinação dos valores de deslocamento e poro-pressão ao longo da coluna. Sobre a descontinuidade, especificamente são obtidos os saltos de poropressão e de deslocamento na direção normal à descontinuidade.

A coluna de arenito é submetida à ação de uma força prescrita Fs de compressão e a um fluxo prescrito q como ilustrado na figura C-1. A região fora da descontinuidade é formada por um arenito com comportamento linear elástico isotrópico e obedece ao estado plano de deformação, a descontinuidade também é constituída por um material linear elástico isotrópico.



Figura C-1: Coluna unidimensional submetida à força de superfície e fluxo prescrito

Onde:

F_S - força de superfície;

q - fluxo prescrito;

p1- poro-pressão prescrita;

e - espessura da descontinuidade

A força F_S e o fluxo q não são aplicados à coluna no mesmo instante. Em um primeiro estágio, a coluna é submetida unicamente ao carregamento de compressão da força de superfície (F_S). A base da coluna tem o deslocamento na direção y (u_1) restringido, nenhum deslocamento na direção x é permitido ao longo das faces da coluna. A poro-pressão ao longo da coluna tem valor nulo. Idealizando que a base e o topo da coluna são faces drenantes, a aplicação da força F_S não gera poro-pressão. Isso possibilita tratar o primeiro estágio como um problema puramente mecânico.

Ainda submetida à ação da força de superfície F_S , o segundo estágio consiste na imposição de um fluxo prescrito descendente q no topo da coluna em uma situação de regime permanente. Todas as condições de contorno relativas ao comportamento mecânico do primeiro estágio são mantidas. Quanto às condições de contorno referentes ao fluxo, somente a base da coluna permanece como face drenante, isto é, a poro-pressão é nula na base (p₁).

A escolha do fluxo em regime permanente tem por finalidade facilitar a dedução da solução da analítica. Para a condição de regime permanente, todos os termos relacionados à variação de massa de fluido no interior de um meio poroso (equação (3.5)) desaparecem da equação de fluxo incluindo os termos de acoplamento (equações (4.15) e (4.21)). Nesse caso, o fluxo de fluido desacoplase do carregamento mecânico, permitindo que a poro-pressão seja obtida pela integração da Lei de Darcy.

Ao desacoplar a equação de fluxo e possibilitar que os valores de poropressão sejam determinados sem o prévio conhecimento do campo de deslocamento, os termos referentes ao acoplamento na equação de equilíbrio mecânico (4.9) podem ser transferidos para o lado direito da igualdade e tratados como forças de massa. Na condição de regime permanente, o incremento de poropressão passa a ser interpretado como a variação de um valor nulo até o valor de poro-pressão determinado pela solução analítica.

Adotando valores constantes para os parâmetros de material da coluna e observando a linearidade da equação de equilíbrio, o Princípio da Superposição de Efeitos pode ser empregado e o campo de deslocamento devido à ação da força F_S e do fluxo q determinados separadamente pela integração da equação (4.9).

Assim, o deslocamento final da coluna será igual à soma das parcelas de deslocamento referentes ao carregamento mecânico e à ação do fluxo de fluido.

A primeira parte da solução analítica trata da determinação dos valores de poro-pressão. Conhecidos os valores de poro-pressão, são apresentadas as soluções analíticas do deslocamento devido à ação da força de superfície e, posteriormente, do fluxo de fluido. Cabe observar que a convenção de sinal geotécnica não foi adotada na demonstração da solução analítica, isto é, uma tensão negativa indica uma tensão de compressão.

C.1. Solução analítica para a poro-pressão ao longo da coluna unidimensional

A solução analítica para a poro-pressão é obtida pela integração da Lei de Darcy. Considerando que a coluna é formada por dois materiais, isto é, um meio heterogêneo, a integração da Lei de Darcy deve ser feita em partes obedecendo aos três intervalos ou domínios descritos na figura C-2. Os intervalos correspondem a:

I -
$$y_1 \le y \le y_2$$

II - $y_2 \le y \le y_3$ (descontinuidade)
III - $y_3 \le y \le y_4$



Figura C-2: Esboço da coluna de arenito submetida à ação do fluxo prescrito

Indicada como intervalo II na figura C-2, a descontinuidade possui uma espessura (e) igual à diferença entre as ordenadas y_3 e y_2 , sendo esse valor muito pequeno quando comparado ao comprimento L da coluna. Por ter um valor muito pequeno, em algumas partes da dedução da solução analítica, a espessura da descontinuidade será tratada como um valor que tende a zero.

A lei de Darcy diz que:

$$q = -\frac{k}{\mu}\frac{dp}{dy}$$

Para realizar a integração, os incrementos de poro-pressão e ordenada y são separados. Logo:

$$dp = -q\frac{\mu}{k}dy \tag{C.1}$$

Onde:

dp – incremento de poro-pressão;

 μ - viscosidade do fluido;

k - permeabilidade intrínseca (unidade linear ao quadrado);

dy – incremento na ordenada y.

Integrando a equação C.1 do ponto y_1 a um ponto qualquer y_a sobre o intervalo I, tem-se:

$$\int_{p_{1}}^{p_{a}} dp = -\int_{y_{1}}^{y_{a}} -q \frac{\mu}{k_{A}} dy$$

$$p_{a} - p_{1} = -q \frac{\mu}{k_{A}} (y_{a} - y_{1})$$
(C.2)

Onde:

k_A - permeabilidade do arenito;

 p_1 – condição de contorno de poro-pressão aplicada no ponto com ordenada y_1 .

Para simplificar a notação, o subíndice a será omitido da expressão C.2. Logo:

$$p = -q \frac{\mu}{k_A} y + p_1 \quad \text{para } 0 \le y \le y_2$$
 (C.3)

Apêndice – C

Do mesmo modo, a expressão C.1 pode ser integrada para os intervalos II e III, portanto:

$$p = -q \frac{\mu}{k_n} (y - y_2) + p_2 \quad \text{para } y_2 \le y \le y_3$$
 (C.4)

$$p = -q \frac{\mu}{k_A} (y - y_3) + p_3 \quad \text{para } y_3 \le y \le y_4$$
 (C.5)

Onde:

p2 - poro-pressão no ponto com ordenada y2;

p₃ - poro-pressão no ponto com ordenada y₃;

k_A - permeabilidade do arenito;

k_n - permeabilidade da descontinuidade na direção normal.

Uma vez que a poro-pressão p_1 é um valor conhecido, a poro-pressão p_2 pode ser determinada pela expressão C.3 deixando como variável desconhecida apenas a poro-pressão p na expressão C.4. Determinado o valor de p_2 , a poro-pressão p_3 pode ser avaliada pela expressão C.4 permitindo o cálculo de poro-pressão no intervalo III (expressão C.5).

Tendo em mente que o maior interesse é conhecer a poro-pressão para a região fora da descontinuidade, a expressão C.5 pode ser manipulada e uma função geral para a poro-pressão obtida. Substituindo o valor de poro-pressão p_2 na expressão C.4 pela expressão C.3 e, posteriormente, o valor de p_3 na expressão C.5 pela expressão C.4 resultante, a poro-pressão no intervalo III pode ser representada por:

$$p = -q \frac{\mu}{k_A} (y - y_3 + y_2) - q \frac{\mu}{k_n} (y_3 - y_2) + p_1$$
(C.6)

Adotando como hipótese:

$$e = y_3 - y_2 \rightarrow 0$$

E admitindo que:

y≫e

Apêndice - C

A expressão C.6 que representa a poro-pressão no intervalo III é escrita na forma:

$$p = -q \frac{\mu}{k_A} y - q \frac{\mu}{k_n} e + p_1 \quad \text{para } y_3 \le y \le y_4$$
 (C.7)

As expressões C.7 e C.3 são idênticas, exceto pelo segundo termo da expressão C.7. Observando isso e empregando a função *heaviside* (H'), define-se a seguinte expressão geral de poro-pressão para a região fora da descontinuidade:

$$p = -q\frac{\mu}{k_A}y + p_1 - H'(y)q\frac{\mu}{k_n}e , \quad \text{onde} \begin{array}{l} H'(y) = 0 \quad \text{para} \quad y \le y_2 \\ H'(y) = 1 \quad \text{para} \quad y \ge y_3 \end{array}$$
(C.8)

A expressão C.8 permite determinar a poro-pressão em qualquer ponto ao longo da coluna exceto para aqueles situados no interior da descontinuidade. O salto de poro-pressão associado à descontinuidade é representado pelo terceiro termo da expressão C.8. Para designar que o fluxo é descendente, adota-se um sinal negativo para o fluxo q.

Optou-se por não incluir o valor de poro-pressão no intervalo II na expressão C.8 porque a dimensão do intervalo é muito pequena. O valor de poropressão em um ponto qualquer do intervalo II não afeta a interpretação do campo de poro-pressão ao longo da coluna. A principal influência deste intervalo na curva de poro-pressão é a diferença de poro-pressão entre os extremos do intervalo, isto é, o salto de poro-pressão.

C.2. Solução analítica para o deslocamento ao longo da coluna unidimensional devido à ação da força prescrita Fs

A solução analítica para o deslocamento ao longo da coluna devido à ação da força de superfície F_S (ilustrada na figura C-3, página 241) é obtida pela integração do Princípio do Trabalho Virtual (equação 4.9). Devido à superposição de efeitos e o estágio I não apresentar fluxo, o termo de acoplamento é omitido nesta parte da solução analítica. Seguindo o mesmo procedimento do item C.1, o Princípio do Trabalho Virtual (PTV) é integrado sobre os mesmos intervalos I, II e III descritos anteriormente.



Figura C-3: Esboço da coluna de arenito submetida à ação da força de superfície prescrita Fs

Antes de realizar a integração do PTV, a matriz D_f da descontinuidade (equação 4.9) será aproximada pela matriz constitutiva D de um material que obedece ao estado plano de deformação. Essa aproximação visa substituir a força de superfície na descontinuidade (F_T) por um valor de tensão (σ), permitindo a determinação do deslocamento em cada face da descontinuidade.

A substituição de F_T por σ não traz nenhum prejuízo à solução analítica. Ao observar que a força de superfície Fs aplicada no topo da coluna é constante e fazendo uma analogia do seu comportamento ao de uma coluna com material homogêneo, conclui-se que a tensão em qualquer ponto da coluna, inclusive a força de superfície F_T, deverá ter um valor igual à força de superfície Fs.

A matriz D da descontinuidade faz uso das constantes elásticas E e v. Utilizando a mesma relação entre os parâmetros físicos do elemento CPE4P e as propriedades da descontinuidade descrita no apêndice D, a rigidez normal da descontinuidade (r_{nn}) passa a ser representada pelo módulo de Young (E):

 $E = r_{nn} \cdot e$ para o intervalo II

Enquanto o coeficiente de Poisson da descontinuidade é nulo.

241

v = 0 para o intervalo II

Considerando a aproximação de matrizes constitutivas, para qualquer intervalo da coluna, o PTV tem a forma:

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\delta} \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{D} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \, \mathrm{d}\Omega = \int_{\mathrm{S}} F_{\mathrm{s}} \mathrm{d}\mathrm{S} \tag{C.9}$$

Neste apêndice, o domínio Ω representa a descontinuidade e a região fora dela. A expressão C.9 tem sinal contrário em relação à expressão 4.9 devido ao fato da convenção geotécnica não ter sido adotada. A fim de explicitar o deslocamento ao longo da direção y na expressão C.9, as seguintes relações são adotadas:

$$\boldsymbol{\delta \varepsilon} = \begin{cases} \delta \varepsilon_{xx} \\ \delta \varepsilon_{yy} \\ \delta \varepsilon_{xy} \end{cases} = \begin{cases} 0 \\ 1 \\ 0 \end{cases}; \, \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{cases} 0 \\ 1 \\ 0 \end{cases}; \, \boldsymbol{\varepsilon}_{y} \text{ ou } \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{m}' \cdot \varepsilon_{y};$$

$$\boldsymbol{\delta u} = \begin{cases} 0 \\ 1 \\ 0 \end{cases}; \, \mathbf{m}' = \begin{cases} 1 \\ 1 \\ 0 \end{cases}; \, \varepsilon_{y} = \frac{\partial u}{\partial y}$$
(C.10)

Os valores nulos dos vetores δu , $\delta \varepsilon$ e ε na expressão C.10 representam as condições de contorno de deslocamento aplicadas à coluna. Utilizando a relação entre ε e ε_v da expressão C.10, a integral C.9 assume a forma:

$$\int \boldsymbol{\delta} \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{m}' \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{y}} \cdot \mathbf{A} \, d\mathbf{y} = \int_{\mathbf{S}} \mathbf{F}_{\mathbf{s}} d\mathbf{S}$$

Onde:

A - área da seção transversal da coluna.

Como $\delta \epsilon$, **D**, **m**' e F_s são constantes e observando que a integral de dS (lado direito da igualdade) é a própria área da seção transversal da coluna, temos que:

$$\boldsymbol{\delta \varepsilon^{\mathrm{T}}} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{m}' \cdot \int \frac{\partial u}{\partial y} \, \mathrm{d}y = \mathbf{F}_{\mathrm{s}} \tag{C.11}$$

Apêndice – C

Integrando a expressão C.11 da ordenada y_1 até o ponto com ordenada y_a no intervalo I, temos que:

 $u_a = \frac{F_s}{E_A} \cdot y_a + u_1$

Onde:

$$\mathbf{E}_{\mathbf{A}} = \mathbf{\delta} \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{D}_{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{m}' \tag{C.12}$$

Sendo D_A a matriz constitutiva do arenito.

Omitindo o subíndice a e lembrando que u_1 é nulo em y_1 , o deslocamento no intervalo I pode ser reescrito na forma:

$$u = \frac{F_s}{E_A} \cdot y \text{ para } 0 \le y \le y_2 \tag{C.13}$$

Integrando novamente a expressão C.11, mas da ordenada y_2 até o ponto com ordenada y_a (intervalo II) obtém-se:

$$u_a = \frac{F_s}{E_n} \cdot (y_a - y_2) + u_2$$

Sendo:

$$\mathbf{E}_{\mathbf{n}} = \mathbf{\delta} \mathbf{\varepsilon}^{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{D}_{\mathbf{B}} \cdot \mathbf{m}' \tag{C.14}$$

Onde:

 $\boldsymbol{D}_{\boldsymbol{B}}$ - matriz constitutiva da descontinuidade;

 u_2 – valor de deslocamento no ponto com ordenada y_2 calculado pela expressão C.13.

Omitindo o subíndice a, o deslocamento para o intervalo II é definido por:

$$u = \frac{F_s}{E_n} \cdot (y - y_2) + u_2 \text{ para } y_2 \le y \le y_3$$
 (C.15)

Seguindo o mesmo procedimento para integração dos intervalos I e II, o deslocamento para o intervalo III é definido por:

$$u = \frac{F_s}{E_A} \cdot (y - y_3) + u_3 \text{ para } y_3 \le y \le y_4$$
 (C.16)

Onde:

 u_3 - valor de deslocamento no ponto com ordenada y_2 determinado pela expressão C.15.

De modo idêntico à solução analítica de poro-pressão, a expressão C.16 pode ser manipulada e uma função geral para o deslocamento para a região fora da descontinuidade pode ser obtida. Substituindo o valor u_3 da expressão C.16 pela expressão C.15 e, em seguida, o valor u_2 da expressão resultante pela expressão C.13, o deslocamento no intervalo III é reescrito como:

$$u = \frac{F_s}{E_A} \cdot (y - y_3 + y_2) + \frac{F_s}{E_n} \cdot (y_3 - y_2)$$
(C.17)

Adotando a mesma hipótese do item C.1 que diz:

$$e = y_3 - y_2 \rightarrow 0$$

E admitindo que:

O deslocamento para o intervalo III pode ser definido por:

$$u = \frac{F_s}{E_A} \cdot y + \frac{F_s}{E_n} \cdot e \tag{C.18}$$

Comparando as expressões C.18 e C.13, nota-se que a única diferença entre elas é a parcela referente ao salto de deslocamento (segundo termo da expressão C.18). Empregando a função de *heaviside* (H'), o deslocamento para a região fora da descontinuidade é definido por:

$$u = \frac{F_s}{E_A}y + H'(y)\frac{F_s}{E_n}e , \quad \text{onde} \begin{array}{l} H'(y) = 0 \quad \text{para} \quad y \le y_2 \\ H'(y) = 1 \quad \text{para} \quad y \ge y_3 \end{array}$$
(C.19)

Cabe observar que o sinal da força de superfície Fs é negativo, indicando um esforço de compressão.

C.3. Solução analítica para o deslocamento ao longo da coluna unidimensional devido à ação do fluxo prescrito q

A solução analítica para o deslocamento ao longo da coluna devido à ação do fluxo de fluido q (ilustrada na figura C-4) é obtida pela integração do Princípio do Trabalho Virtual (equação 4.9). Utilizando a superposição de efeitos, o termo referente à força de superfície Fs é omitido nesta parte da solução analítica. Seguindo o mesmo procedimento do item C.1 (solução de poro-pressão), o Princípio do Trabalho Virtual (PTV) é integrado sobre os mesmos intervalos I, II e III usados nas últimas deduções.



Figura C-4: Esboço da coluna de arenito submetida à ação do fluxo prescrito

Para realizar a integração do PTV, a mesma aproximação da matriz D_f da descontinuidade por uma matriz D de um material que obedece ao estado plano indicada no item C.2 será utilizada. Além da aproximação, são empregadas as expressões C.10, C.12 e C.14. Feitas essas considerações, o PTV considerando apenas a ação do fluxo de fluido é definido por:

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\delta} \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{D} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \, \mathrm{d}\Omega + \int_{\Omega} \, \boldsymbol{\delta} \mathbf{u}^{\mathrm{T}} \cdot \left(-\mathbf{m} + \frac{\mathbf{D}}{3k_{\mathrm{s}}} \cdot \mathbf{m} \right) \mathrm{p} \, \mathrm{d}\Omega = 0 \tag{C.20}$$

O vetor m da expressão C.20 é o mesmo da expressão (4.2) e não deve ser confundido com o vetor m'. Uma vez que os valores de poro-pressão são conhecidos, o termo de acoplamento pode ser interpretado como uma força de massa. Logo:

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\delta} \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathsf{T}} \cdot \mathbf{D} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \, \mathrm{d}\Omega = \int_{\Omega} \, \boldsymbol{\delta} \mathbf{u}^{\mathsf{T}} \cdot \left(\mathbf{m} - \frac{\mathbf{D}}{3\mathbf{k}_{\mathsf{s}}} \cdot \mathbf{m} \right) \mathrm{p} \, \mathrm{d}\Omega \tag{C.21}$$

Cabe lembrar que a expressão C.21 tem sinal contrário em relação à expressão 4.9 devido ao fato da convenção geotécnica não ter sido adotada. Para integrar a expressão C.21, outras duas relações são adotadas:

$$C_{A} = \boldsymbol{\delta} \mathbf{u}^{T} \cdot \left(\mathbf{m} - \frac{1}{3K_{s}} \cdot \mathbf{D}_{A} \cdot \mathbf{m} \right)$$

$$C_{n} = \boldsymbol{\delta} \mathbf{u}^{T} \cdot \left(\mathbf{m} - \frac{1}{3K_{s}} \cdot \mathbf{D}_{B} \cdot \mathbf{m} \right)$$
(C.22)

Onde:

D_A - matriz constitutiva do arenito;

D_B - matriz constitutiva da descontinuidade.

As variáveis C_A e C_n são valores escalares. Integrando a expressão C.21 no intervalo I temos:

$$E_A \int_{u_1}^{u_a} \varepsilon_y \, dy = C_A \int_{y_1}^{y_a} p \, dy$$

Onde:

 u_1 - deslocamento no ponto com coordenada y_1 ;

 u_a - deslocamento no ponto com coordenada y_a .

A coordenada y_a está associada a um ponto qualquer no intervalo I. Observando que u_1 é igual a zero em y_1 e substituindo p pela expressão C.3. Apêndice – C

$$u_a = \frac{1}{E_A} C_A \left[-q \frac{\mu y_a^2}{k 2} + p_1 \cdot y_a \right]$$

Omitindo o subíndice a, o deslocamento da coluna no intervalo I é definido por:

$$u = \frac{1}{E_A} C_A \left[-q \frac{\mu}{k_A} \frac{y^2}{2} + p_1 \cdot y \right] \text{ para } 0 \le y \le y_2$$
 (C.23)

Seguindo o mesmo procedimento para a integração do intervalo I, a integral do PTV para o intervalo II é igual a:

$$\int_{u_2}^{u_a} \boldsymbol{\delta} \boldsymbol{\epsilon}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{D}_{\mathrm{B}} \cdot \boldsymbol{\epsilon} \, \mathrm{d}\Omega = \int_{y_2}^{y_a} \boldsymbol{\delta} \mathbf{u}^{\mathrm{T}} \cdot \left(\mathbf{m} - \frac{1}{3\mathrm{K}_{\mathrm{s}}} \cdot \mathbf{D}_{\mathrm{B}} \cdot \mathbf{m}\right) \mathrm{p} \, \mathrm{d}\Omega$$

Substituindo a poro-pressão p pela expressão C.4:

$$E_{n}(u_{a} - u_{2}) = C_{n} \left[-q \frac{\mu}{k_{n}} \left(\frac{y^{2}}{2} - y_{2} \cdot y \right) + p_{2} \cdot y \right]_{y_{2}}^{y_{a}}$$

Omitindo o subscrito a, define-se o deslocamento da coluna para o intervalo II por:

$$u = \frac{1}{E_n} C_n \left[-q \frac{\mu}{k_n} \left(\frac{y^2}{2} - y_2 \cdot y \right) + p_2 \cdot y \right] \Big|_{y_2}^{y_a} + u_2 \quad \text{para } y_2 \le y \le y_3 \qquad (C.24)$$

Sendo u_2 o valor de deslocamento para a coordenada y_2 determinado pela expressão C.23 e a poro-pressão p_2 o valor de poro-pressão para a coordenada y_2 prevista pela expressão C.4.

De modo idêntico aos intervalos I e II, a integral do PTV para o intervalo III possui a forma:

$$\int_{u_3}^{u_a} \boldsymbol{\delta \epsilon} \cdot \boldsymbol{D}_{\boldsymbol{A}} \cdot \boldsymbol{\epsilon} \, d\Omega = \int_{y_3}^{y_a} \boldsymbol{\delta u} \left(\boldsymbol{m} - \frac{1}{3k_s} \cdot \boldsymbol{D}_{\boldsymbol{A}} \cdot \boldsymbol{m} \right) p d\Omega$$

Substituindo a poro-pressão p pela expressão C.5

$$E_A(u_a - u_3) = C_A \left[-q \frac{\mu}{k} \left(\frac{y^2}{2} - y_3 \cdot y \right) + p_3 \cdot y \right] \Big|_{y_3}^{y_a}$$

Omitindo o subíndice a, o deslocamento da coluna para o intervalo III é definido por:

$$u = \frac{1}{E_A} C_A \left[-q \frac{\mu}{k} \left(\frac{y^2}{2} - y_3 \cdot y \right) + p_3 \cdot y \right] \Big|_{y_3}^y + u_3 \text{ para } y_3 \le y \le y_4 \qquad (C.25)$$

Na expressão C.25, $u_3 e p_3$ são os valores de deslocamento e poro-pressão avaliados no ponto com ordenada y_3 pelas expressões C.24 e C.5 respectivamente. Para o deslocamento devido ao fluxo, não será estabelecido uma expressão geral. Define-se que o deslocamento devido ao fluxo para a região fora da descontinuidade é representado por:

$$u = \begin{cases} \frac{1}{E_{A}} C_{A} \left[-q \frac{\mu}{k} \frac{y^{2}}{2} + p_{1} \cdot y \right] \text{ para } 0 \le y \le y_{2} \\ \frac{1}{E_{A}} C_{A} \left[-q \frac{\mu}{k} \left(\frac{y^{2}}{2} - y_{3} \cdot y \right) + p_{3} \cdot y \right] \Big|_{y_{3}}^{y} + u_{3} \text{ para } y_{3} \le y \le y_{4} \end{cases}$$
(C.26)

Sendo:

$$u_{3} = \frac{1}{E_{n}}C_{n}\left[-q\frac{\mu}{k_{n}}\left(\frac{y^{2}}{2} - y_{2} \cdot y\right) + p_{2} \cdot y\right]\Big|_{y_{2}}^{y_{3}} + \frac{1}{E_{A}}C_{A}\left[-q\frac{\mu}{k}\frac{y^{2}}{2} + p_{1} \cdot y_{2}\right]$$

O primeiro termo do lado direito da igualdade da expressão que fornece o valor de u_3 é igual ao salto de deslocamento associado à descontinuidade. Idêntico à expressão de poro-pressão, o fluxo descendente q tem valo negativo.

C.4. Resumo das soluções analíticas para uma coluna de arenito unidimensional com uma descontinuidade inserida

Este item agrupa as soluções analíticas de poro-pressão e deslocamento obtidas para a coluna unidimensional ao longo do apêndice visando facilitar a aplicação delas. Seguindo a mesma sequência de desenvolvimento do apêndice, a Apêndice - C

primeira solução a ser ilustrada é a de poro-pressão (expressão C.8). Para um ponto situado fora da descontinuidade, o valor de poro-pressão é definido por:

$$p = -q\frac{\mu}{k_A}y + p_1 - H'(y)q\frac{\mu}{k_n}e , \quad \text{onde } \begin{array}{l} H'(y) = 0 \quad \text{para} \quad y \le y_2 \\ H'(y) = 1 \quad \text{para} \quad y \ge y_3 \end{array}$$
(C.27)
Onde:

p - poro-pressão em um ponto da coluna e que esteja fora da descontinuidade;

q - fluxo prescrito no topo da coluna;

k_A - permeabilidade intrínseca do arenito (unidade de área);

 \boldsymbol{k}_n - permeabilidade intrínseca da descontinuidade (unidade de área);

- μ viscosidade do fluido;
- e espessura da descontinuidade;

y - ordenada de um ponto ao longo da coluna e que esteja situado fora da descontinuidade;

H' - função heaviside.

Observando a figura C-1, as coordenadas y_2 e y_3 representam o início e o fim da descontinuidade ao longo da coluna. Para que o fluxo de fluido seja descendente ao longo da coluna, o sinal do fluxo q deve ser negativo.

Representado o deslocamento da coluna por u e os deslocamentos associados às ações da força prescrita F_S e do fluxo prescrito q por u_m e u_f respectivamente, a superposição de efeitos diz que o deslocamento na coluna é determinado pela soma:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_{\mathrm{m}} + \mathbf{u}_{\mathrm{f}} \tag{C.28}$$

Onde:

u - deslocamento da coluna;

u_m - deslocamento da coluna devido à ação de Fs;

u_f - deslocamento da coluna devido à ação do fluxo prescrito q.

A componente u_m é a expressão C.19 sendo definida por:

$$u_m = \frac{F_s}{E_A}y + H'(y)\frac{F_s}{E_n}e , \quad \text{onde } \begin{array}{l} H'(y) = 0 \quad \text{para} \quad y \le y_2 \\ H'(y) = 1 \quad \text{para} \quad y \ge y_3 \end{array}$$
(C.29)

Onde:

A força de superfície prescrita no topo da coluna F_s tem sinal negativo para indicar a compressão da coluna.

Por sua vez, a componente u_f é a expressão C.26 sendo definida por:

$$u_{f} = \begin{cases} \frac{1}{E_{A}} C_{A} \left[-q \frac{\mu}{k_{A}} \frac{y^{2}}{2} + p_{1} \cdot y \right] \text{ para } 0 \le y \le y_{2} \\ \frac{1}{E_{A}} C_{A} \left[-q \frac{\mu}{k_{A}} \left(\frac{y^{2}}{2} - y_{3} \cdot y \right) + p_{3} \cdot y \right] \Big|_{y_{3}}^{y} + u_{f}^{3} \text{ para } y_{3} \le y \le y_{4} \end{cases}$$
(C.30)

Sendo:

$$u_{f}^{3} = \frac{1}{E_{n}} C_{n} \left[-q \frac{\mu}{k_{n}} \left(\frac{y^{2}}{2} - y_{2} \cdot y \right) + p_{2} \cdot y \right] \Big|_{y_{2}}^{y_{3}} + \frac{1}{E_{A}} C_{A} \left[-q \frac{\mu}{k_{A}} \frac{y^{2}}{2} + p_{1} \cdot y_{2} \right]$$

Onde:

 p_1 – valor prescrito de poro-pressão no ponto com ordenada y_1 ;

 p_2 - poro-pressão no ponto com ordenada y_2 ;

 p_{3} - poro-pressão no ponto com ordenada $\boldsymbol{y}_{3}.$

Os valores de poro-pressão são avaliados com a expressão (C.27). As variáveis E_A , E_n , C_A e C_n são escalares cujos valores são:

$$E_{A} = \boldsymbol{\delta} \boldsymbol{\varepsilon}^{T} \cdot \mathbf{D}_{A} \cdot \mathbf{m}'$$

$$E_{n} = \boldsymbol{\delta} \boldsymbol{\varepsilon}^{T} \cdot \mathbf{D}_{B} \cdot \mathbf{m}'$$

$$C_{A} = \boldsymbol{\delta} \mathbf{u}^{T} \cdot \left(\mathbf{m} - \frac{1}{3K_{s}} \cdot \mathbf{D}_{A} \cdot \mathbf{m}\right)$$

$$C_{n} = \boldsymbol{\delta} \mathbf{u}^{T} \cdot \left(\mathbf{m} - \frac{1}{3K_{s}} \cdot \mathbf{D}_{B} \cdot \mathbf{m}\right)$$

$$C.31$$

Onde:

$$\boldsymbol{\delta \varepsilon} = \begin{cases} 0\\1\\0 \end{cases}; \, \mathbf{m}' = \begin{cases} 0\\1\\0 \end{cases}; \, \boldsymbol{\delta u} = \begin{cases} 0\\1\\0 \end{cases}; \, \mathbf{m} = \begin{cases} 1\\1\\0 \end{cases}$$

As matrizes $D_A e D_B$ são as matrizes constitutivas para o estado plano de deformação do arenito e da descontinuidade respectivamente. Para a

descontinuidade, adota-se que coeficiente de Poisson é nulo e o Módulo de Young definido pela expressão:

$$\mathbf{E} = \mathbf{r}_{nn} \cdot \mathbf{e}$$

Onde:

 r_{nn} - rigidez normal da descontinuidade.

Apêndice – D RELAÇÃO ENTRE OS PARÂMETROS DOS ELEMENTOS CPE4P E *COHESIVE* COM AS PROPRIEDADES FÍSICAS DE UMA DESCONTINUIDADE

O capítulo 5 ilustrou comparações entre os elementos CPE4P, *cohesive* e enriquecido. Para permitir que os elementos CPE4P e *cohesive* descrevessem a descontinuidade conforme as hipóteses de movimento e fluxo estabelecidas, os parâmetros de material destes elementos foram relacionados às propriedades físicas da descontinuidade.

A primeira relação a ser apresentada é referente ao elemento CPE4P. Como mencionado na introdução do capítulo 5, o elemento CPE4P descreve o fluxo na descontinuidade de modo equivalente ao elemento enriquecido, mas não o comportamento mecânico. As propriedades a serem relacionadas são os módulos de Young (E) e Cisalhamento (G) do elemento CPE4P e rigidez normal (r_{nn}) e tangencial (r_{ss}) da descontinuidade.

Citada por Pande et al, 1990, a relação associa os parâmetros E e G à rigidez do elemento de junta (Goodman, 1968). Os valores de E e G são definidos pela expressão D.1.

$$E = r_{nn} \cdot e$$

$$G = r_{ss} \cdot e$$

D.1

sendo:

e - espessura da descontinuidade

Esta relação assume como hipótese que os parâmetros r_{ns} e r_{sn} são nulos. A hipótese implica que a força de superfície em uma direção da descontinuidade não provoque nenhum movimento na direção normal à força. Para impor este comportamento no elemento CPE4P, um coeficiente de Poisson nulo é adotado. Considerando um material ortotrópico, os parâmetros de material do elemento CPE4P para o problema bidimensional são:

$$E_{xx} = r_{nn} \cdot e$$

$$G_{xy} = r_{ss} \cdot e$$

$$v_{xy} = 0$$

$$E_{yy} = E_{zz} = E_{xx}$$

$$v_{xz} = v_{yz} = 0$$

$$G_{xz} = G_{yz} \approx 0$$
D.2

Os valores de G_{xz} e G_{yz} na expressão D.2 são próximos de zero.

A segunda aproximação de propriedades trata do elemento *cohesive*. Há uma equivalência do comportamento mecânico descrito pelos elementos *cohesive* e enriquecido, mas não no fluxo. A documentação do ABAQUS não é clara a respeito, mas o uso do elemento *cohesive* em relação ao fluxo de fluido parece ter sido idealizado para representar uma cavidade preenchida apenas por fluido.

O elemento *cohesive* não utiliza a permeabilidade como parâmetro físico, mas os coeficientes *Leak Off* (LO) e *Gap Flow* (GF). O coeficiente *Leak Off* (LO) é interpretado como um parâmetro similar à permeabilidade na direção normal, enquanto o coeficiente GF é similar à permeabilidade tangencial. Semelhante ao elemento enriquecido, o ABAQUS trata o fluxo normal e tangencial no elemento *cohesive* de forma separada.



Figura D-1: Fluxo no elemento cohesive

Observando a figura D-1, o coeficiente LO relaciona o fluxo normal (q_n) através de uma da face do elemento *cohesive* à diferença de poro-pressão entre os pontos I e II

como indicado na expressão D.3. O ponto I encontra-se exatamente na metade da espessura do elemento *cohesive*, o ponto II pertence à face do elemento *cohesive* atravessada pelo fluxo q_n .

$$q_n = LO \cdot (p_I - p_{II}) \qquad D.3$$

Associando o fluxo normal à face do elemento cohesive à Lei de Darcy, tem-se:

$$q_n = \frac{k_n}{\mu} \cdot \frac{(p_I - p_{II})}{(e/2)} \qquad D.4$$

Onde:

 k_n - permeabilidade intrínseca associada ao elemento *cohesive* (expressa em unidade de área);

 μ - viscosidade do fluido que ocupa o meio poroso (fora do elemento *cohesive*);

e - espessura da descontinuidade.

Substituindo a expressão D.3 em D.4, o coeficiente LO é definido por:

$$LO = 2 \cdot \frac{k_n}{\mu} \cdot \frac{1}{e}$$
 D.5

Para cada face do elemento *cohesive* é necessário adotar um coeficiente LO. Admitindo um fluxo normal q_n constante através do elemento *cohesive* (fluxo que entra é igual ao que sai), os coeficientes LO são considerados iguais.

Quanto ao coeficiente GF, ele representa apenas a viscosidade do fluido no interior do elemento *cohesive*. O fluido pode ter um comportamento Newtoniano ou obedecer a uma lei de potência. Caso o fluido seja do tipo Newtoniano, o ABAQUS associa o valor de permeabilidade tangencial à resistência do fluido ao movimento. Usando a equação de Reynolds, o valor da permeabilidade tangencial é aproximado por:

$$k_{\rm T} = \frac{e^3}{12 \cdot \mu} \qquad \qquad \text{D.6}$$

Onde:

k_T - permeabilidade tangencial;

Aparentemente, o uso da relação D.6 não é necessário, pois ao modelar o fluxo tangencial, o programa ABAQUS solicita apenas os valores de viscosidade do fluido e permeabilidade tangencial.