

3

ADAPTAÇÃO DA FORMULAÇÃO MECÂNICA DO ELEMENTO ENRIQUECIDO EXPLICITAMENTE PARA O PROBLEMA DE FLUXO DE FLUIDO

O capítulo anterior mostrou a formulação mecânica do elemento enriquecido. Neste capítulo, a formulação mecânica será adaptada para o fluxo de fluido. Destaca-se que a formulação introduz uma descontinuidade no campo de poro-pressão resultante do contraste de propriedades físicas entre o meio poroso e uma descontinuidade física (falha ou fratura), aspecto que não foi contemplado no trabalho de Borst et al (2008).

3.1. Equação de fluxo

O principal motivo para a adoção da formulação proposta por Wan et al (1995) é a possibilidade de inserir a propriedade física da descontinuidade na formulação do elemento enriquecido. Tal aspecto é muito relevante no caso do fluxo de fluido, pois a existência do salto de poro-pressão está relacionada ao contraste entre as propriedades físicas da descontinuidade e do meio poroso ao seu redor.

Outro aspecto importante no fluxo de fluido é que a variação brusca ou salto de poro-pressão existe apenas na direção normal à descontinuidade. A variação de poro-pressão é brusca nesta direção porque, além do contraste de permeabilidade, o caminho que o fluido percorre (espessura da descontinuidade) é muito pequeno, isto é, o gradiente de poro-pressão é alto. Ao longo da direção tangencial, o comprimento da descontinuidade é muito maior do que a espessura fazendo com que a variação de poro-pressão seja suave, ou seja, o gradiente é baixo.

Essa característica conduziu a tratar o fluxo normal e tangencial na descontinuidade separadamente. Ao longo da direção tangencial, utiliza-se a equação de fluxo. Na direção normal, o tratamento dado ao fluxo é análogo à força de superfície F_T do problema mecânico.

Para apresentar a equação de fluxo monofásico, considere o corpo cortado por uma descontinuidade ilustrado na Figura 3-1(a). O corpo ou meio poroso (Ω) encontra-se dividido nos subdomínios Ω^- e Ω^+ .

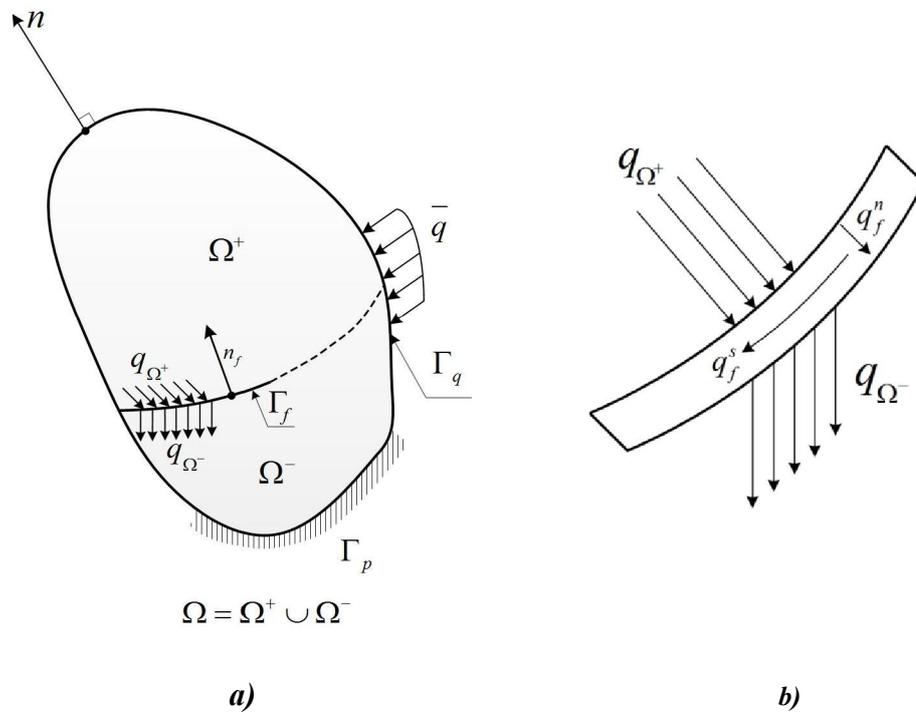


Figura 3-1: Esboço de fluxo: a) corpo cortado por uma descontinuidade, b) ampliação da descontinuidade

Sendo:

Ω - domínio do corpo cortado por uma descontinuidade;

Ω^- , Ω^+ - subdomínio negativo e positivo respectivamente;

Γ_p - porção do contorno onde é aplicada a condição de contorno de poro-pressão;

Γ_q - porção do contorno onde é aplicado o fluxo prescrito;

Γ_f - superfície que representa a descontinuidade;

n - vetor normal à superfície do corpo;

\bar{q} - fluxo prescrito no contorno Γ_q ;

\bar{q}_f^n - fluxo na direção normal à descontinuidade;

\bar{q}_f^s - fluxo na direção tangencial à descontinuidade;

n_f - vetor normal à descontinuidade.

Para um volume infinitesimal de meio poroso no interior do domínio Ω , ilustrado na Figura 3-2, o fluxo de massa de fluido que atravessa as faces do volume infinitesimal nas direções x, y e z é respectivamente:

$$\begin{aligned}(\rho v_x) dydz &= \left(\rho v_x + \frac{\partial \rho v_x}{\partial x} \right) dydz \\(\rho v_y) dx dz &= \left(\rho v_y + \frac{\partial \rho v_y}{\partial y} \right) dx dz \\(\rho v_z) dx dy &= \left(\rho v_z + \frac{\partial \rho v_z}{\partial z} \right) dx dy\end{aligned}\tag{3.1}$$

Onde:

ρ - massa específica de fluido;

v_x, v_y, v_z - fluxo de fluido nas direções x, y e z.

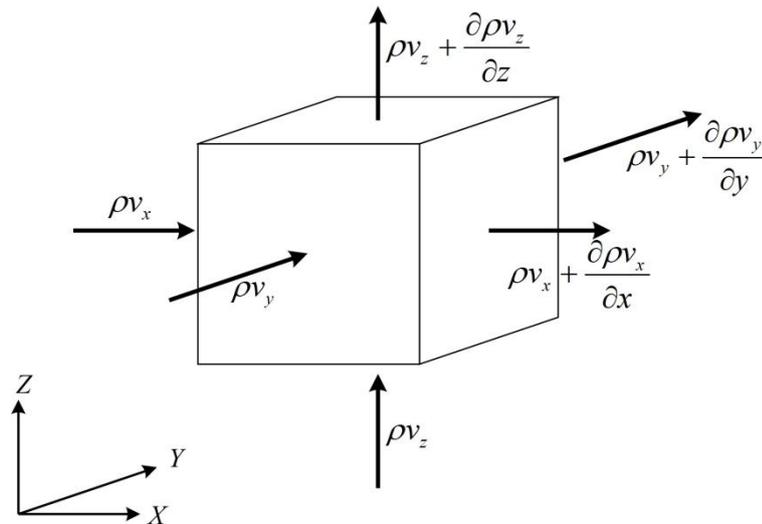


Figura 3-2: Volume infinitesimal de meio poroso

Somando as três componentes de fluxo da expressão (3.1):

$$\nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = \frac{\partial \rho v_x}{\partial x} + \frac{\partial \rho v_y}{\partial y} + \frac{\partial \rho v_z}{\partial z} = 0\tag{3.2}$$

A equação (3.2), dependente apenas da posição no espaço, representa o fluxo de fluido no regime permanente. Se o fluxo de fluido varia ao longo do tempo, isso significa que a quantidade de fluido no interior do volume infinitesimal mudou. Representando esta mudança por:

$$\text{Variação de fluido} = \frac{dm}{dt} \quad (3.3)$$

dm - variação infinitesimal de massa de fluido;

dt - variação infinitesimal de tempo.

Assim, isso permite dizer que se a quantidade de fluido que atravessa um volume infinitesimal varia em um infinitésimo de tempo (dt), esta variação deverá ser igual à mudança de massa de fluido no interior do volume no mesmo intervalo de tempo. Igualando as expressões (3.2) e (3.3) obtém-se:

$$\nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = - \frac{dm}{dt} \quad (3.4)$$

O sinal negativo na expressão (3.4) indica que para um aumento de fluxo através do volume infinitesimal, ocorre, ao mesmo tempo, uma redução de massa no seu interior. Introduzindo a lei de Darcy na expressão (3.4):

$$\nabla \cdot \left(- \frac{\mathbf{k}}{\mu} \cdot \nabla (p + \rho gh) \right) = - \frac{dm}{dt} \quad (3.5)$$

Onde:

\mathbf{k} – tensor de permeabilidade intrínseca (expressa em unidade de área);

μ - viscosidade dinâmica do fluido;

p - poro-pressão;

g - gravidade;

h - carga de elevação em relação a um referencial.

A taxa de variação de fluido no interior do volume infinitesimal com o tempo (expressão (3.3)) está relacionada a diversos fatores. Para a equação de fluxo do acoplamento fluido-mecânico, Lewis e Schrefler (1982) apontaram os seguintes fatores:

(a) Taxa de deformação volumétrica do meio poroso:

$$\frac{\partial \varepsilon_v}{\partial t} = \mathbf{m}^T \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}{\partial t} \quad (3.6)$$

(b) Taxa de variação volumétrica das partículas sólidas devido à mudança de poro-pressão:

$$\frac{(1 - \phi)}{3K_s} \frac{\partial p}{\partial t} \quad (3.7)$$

(c) Taxa de variação da saturação do fluido:

$$\phi \rho \frac{\partial S'}{\partial t} \quad (3.8)$$

(d) Taxa de variação da massa específica do fluido:

$$\phi S' \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (3.9)$$

(e) Taxa de variação volumétrica do grão devido à mudança na tensão efetiva:

$$-\frac{1}{3K_s} \mathbf{m}^T \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}'}{\partial t} \quad (3.10)$$

Onde:

ε_v - deformação volumétrica;

ϕ - porosidade;

S - saturação de fluido;

K_s - módulo de variação volumétrica do grão;

\mathbf{m} - vetor usado para identificar a componente normal e cisalhante do tensor de tensão;

$\boldsymbol{\sigma}'$ - tensor de tensão efetiva.

Abordando apenas o fluxo de fluido monofásico sem a influência do carregamento mecânico, alguns destes fatores podem ser eliminados ou reescritos. A expressão (3.8) referente à variação de saturação de fluido pode ser eliminada, pois, por hipótese, existe somente um fluido no meio poroso (saturação igual a 1).

O mesmo acontece com as expressões (3.6) e (3.10), pois a ação da deformação volumétrica do meio poroso e a tensão efetiva não é considerada.

Dividindo a expressão (3.9) por ρ , a taxa de variação de massa específica passa a depender apenas da poro-pressão.

$$\phi S \frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\phi}{K_f} \frac{\partial p}{\partial t} \quad (3.11)$$

Sendo:

K_f - módulo de variação volumétrica do fluido

Somando os fatores (3.7) e (3.11), substituindo a variação de massa da expressão (3.5) por esta soma e dividindo a equação resultante por ρ , a equação de fluxo para um meio poroso saturado por um único fluido é definida como:

$$-\nabla \cdot \left\{ \frac{\mathbf{k}}{\mu} \cdot \nabla (p + \rho gh) \right\} + \left(\frac{\phi}{K_f} + \frac{1 - \phi}{K_s} \right) \frac{\partial p}{\partial t} = 0 \quad (3.12)$$

Definindo o termo entre parênteses da expressão (3.12) como o parâmetro de armazenamento s .

$$s = \frac{\phi}{K_f} + \frac{1 - \phi}{K_s} \quad (3.13)$$

A equação de fluxo (3.12) pode ser escrita como:

$$-\nabla \cdot \left\{ \frac{\mathbf{k}}{\mu} \cdot \nabla (p + \rho gh) \right\} + s \frac{\partial p}{\partial t} = 0 \quad (3.14)$$

É interessante observar na expressão (3.12) que, mesmo desconsiderando a ação do carregamento mecânico, ainda persiste a parcela de deformação volumétrica das partículas sólidas. Associada à variação de poro-pressão, essa parcela de deformação permite exprimir certo grau de acoplamento fluido-mecânico.

Juntamente com a expressão (3.14), definem-se as condições de contorno de fluxo e poro-pressão nas expressões (3.15) e (3.16) respectivamente.

$$\mathbf{n} \cdot \frac{\mathbf{k}}{\mu} \cdot \nabla(p + \rho gh) - \bar{q} = 0 \text{ sobre } \Gamma_q \quad (3.15)$$

$$p = \bar{p} \text{ sobre } \Gamma_p \quad (3.16)$$

A equação de fluxo (3.14) é aplicada tanto no domínio Ω quanto ao longo da direção tangencial da descontinuidade (Γ_F).

Semelhante ao problema mecânico, o fluxo na direção normal à descontinuidade é interpretado como um fluxo prescrito. Assumindo esta hipótese define-se:

$$q_{\Omega^+} \cdot \mathbf{n}_F = q_{\Omega^-} \cdot (-1) \cdot \mathbf{n}_F = q_F^n \text{ sobre } \Gamma_F \quad (3.17)$$

As expressões (3.14) a (3.17) definem o fluxo de fluido pontualmente em um corpo cortado por uma descontinuidade. O próximo passo é aplicar a equação de fluxo para o corpo inteiro.

A hipótese de igualdade de fluxo na direção normal nos pontos imediatamente à direita e à esquerda da descontinuidade, expressão (3.17), é um dos pontos que diferem a formulação de fluxo de fluido do elemento enriquecido em relação à formulação proposta por de Borst et al (2008). A expressão (3.17) permite relacionar o salto de poro-pressão ao contraste de permeabilidade entre a descontinuidade física e o meio poroso ao redor. A próxima seção ilustrará essa relação.

3.2.

Aplicação do Método de Elementos Finitos à equação de fluxo

Para estabelecer a equação de fluxo para o corpo cortado por uma descontinuidade, uma idealização diferente da formulação mecânica será utilizada. Ao invés de trabalhar com os subdomínios Ω^- e Ω^+ separadamente, esta idealização considera o corpo da Figura 3-1(a) por inteiro e a descontinuidade (Γ_F) agindo como uma superfície ou contorno interno.

Lembrando que a expressão (3.14) representa pontualmente o fluxo no domínio Ω e ao longo da descontinuidade (Γ_F), o campo de poro-pressão por todo o corpo é determinado através da integral da expressão (3.14) sobre as regiões Ω e Γ_F . Logo:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left(-\nabla \cdot \left\{ \frac{\mathbf{k}}{\mu} \cdot \nabla(p + \rho gh) \right\} + s \frac{\partial p}{\partial t} \right) d\Omega \\ & + \int_{\Gamma_F} \left(-\nabla \cdot \left\{ \frac{\mathbf{k}_t}{\mu} \cdot \nabla(p + \rho gh) \right\} + s_F \frac{\partial p}{\partial t} \right) d\Gamma_F = 0 \end{aligned} \quad (3.18)$$

Onde:

k_t - permeabilidade intrínseca na direção tangencial à descontinuidade;

s_F - parâmetro de armazenamento da descontinuidade.

A fim de facilitar a manipulação da equação de fluxo (3.18), as integrais sobre o domínio Ω e no contorno Γ_F serão representadas pelos termos C' e C'' , respectivamente. Após essa substituição, a equação (3.18) assume a forma:

$$C' + C'' = 0 \quad (3.19)$$

Assumindo que a poro-pressão pode ter seu valor aproximado por:

$$p \cong p^h \quad (3.20)$$

Aplicando o teorema de Green aos termos com derivada segunda e aproximando a equação (3.18) pelo Método de Galerkin, os termos C' e C'' da equação (3.19) para o elemento cortado pela descontinuidade podem ser reescritos como:

$$\begin{aligned} C'_e &= \int_{\Omega_e} \nabla \mathbf{A} \cdot \frac{\mathbf{k}}{\mu} \cdot \nabla \mathbf{p}^h d\Omega_e + \int_{\Omega_e} \mathbf{A} s \frac{\partial \mathbf{p}^h}{\partial t} d\Omega_e + \int_{\Omega_e} \nabla \mathbf{A} \cdot \frac{\mathbf{k}}{\mu} \cdot \nabla \rho gh d\Omega_e \\ &+ \int_{\Gamma_{qe}} \mathbf{A} \cdot \bar{\mathbf{q}} d\Gamma_{qe} + \int_{\Gamma_{fe}} \mathbf{A} \cdot (\mathbf{n}_F \cdot \mathbf{q}_{\Omega^-}) d\Gamma_{fe} \end{aligned} \quad (3.21)$$

$$\begin{aligned} C''_e &= \int_{\Gamma_{fe}} \nabla \mathbf{A} \cdot \frac{\mathbf{k}_t}{\mu} \cdot \nabla \mathbf{p}^h d\Gamma_{fe} + \int_{\Gamma_{fe}} \mathbf{A} s_F \frac{\partial \mathbf{p}^h}{\partial t} d\Gamma_{fe} + \int_{\Gamma_{fe}} \nabla \mathbf{A} \cdot \frac{\mathbf{k}_t}{\mu} \cdot \nabla \rho gh d\Gamma_{fe} \\ &+ \int_{\Gamma_{fe}} \mathbf{A} \cdot \bar{\mathbf{q}} d\Gamma_{fe} \end{aligned} \quad (3.22)$$

Sendo:

A - função de ponderação arbitrária;

Ω_e - domínio do elemento enriquecido;

Γ_{f_e} - descontinuidade no interior do elemento enriquecido;

$\Gamma_{\Gamma_{f_e}}$ - extremidade da descontinuidade.

Ao usar o Teorema de Green, uma componente relacionada ao fluxo através da descontinuidade é introduzida. Tal componente surge da interpretação de que a descontinuidade age como uma superfície interna ou contorno (semelhante à formulação mecânica). Este valor corresponde ao último termo do lado direito da expressão (3.21). Usando a condição definida na expressão (3.17), o termo C'_e torna-se:

$$C'_e = \int_{\Omega_e} \nabla \mathbf{A} \cdot \frac{\mathbf{k}}{\mu} \cdot \nabla \mathbf{p}^h d\Omega_e + \int_{\Omega_e} \mathbf{A} s \frac{\partial \mathbf{p}^h}{\partial t} d\Omega_e + \int_{\Omega_e} \nabla \mathbf{A} \cdot \frac{\mathbf{k}}{\mu} \cdot \nabla \rho g h d\Omega_e + \int_{\Gamma_{q_e}} \mathbf{A} \cdot \bar{\mathbf{q}} d\Gamma_{q_e} + \int_{\Gamma_{f_e}} \mathbf{A} \cdot \mathbf{q}_F^n d\Gamma_{f_e} \quad (3.23)$$

A fim de permanecer com a mesma definição de C' e C'' da equação (3.18), o termo referente ao contorno Γ_{f_e} em C' será transferido para C'' , logo:

$$C'_e = \int_{\Omega_e} \nabla \mathbf{A} \cdot \frac{\mathbf{k}}{\mu} \cdot \nabla \mathbf{p}^h d\Omega_e + \int_{\Omega_e} \mathbf{A} s \frac{\partial \mathbf{p}^h}{\partial t} d\Omega_e + \int_{\Omega_e} \nabla \mathbf{A} \cdot \frac{\mathbf{k}}{\mu} \cdot \nabla \rho g h d\Omega_e + \int_{\Gamma_{q_e}} \mathbf{A} \cdot \bar{\mathbf{q}} d\Gamma_{q_e} \quad (3.24)$$

$$C''_e = \int_{\Gamma_{f_e}} \mathbf{A} \cdot \mathbf{q}_F^n d\Gamma_{f_e} + \int_{\Gamma_{f_e}} \nabla \mathbf{A} \cdot \frac{\mathbf{k}_t}{\mu} \cdot \nabla \mathbf{p}^h d\Gamma_{f_e} + \int_{\Gamma_{f_e}} \mathbf{A} s_F \frac{\partial \mathbf{p}^h}{\partial t} d\Gamma_{f_e} + \int_{\Gamma_{f_e}} \nabla \mathbf{A} \cdot \frac{\mathbf{k}_t}{\mu} \cdot \nabla \rho g h d\Gamma_{f_e} + \int_{\Gamma_{\Gamma_{f_e}}} \mathbf{A} \bar{\mathbf{q}} d\Gamma_{\Gamma_{f_e}} \quad (3.25)$$

Referente à expressão (3.25), o primeiro termo descreve o fluxo perpendicular à descontinuidade, enquanto os demais tratam do fluxo ao longo dela. O último termo representa um fluxo prescrito nas extremidades da descontinuidade. A equação de fluxo para o elemento enriquecido é definida por:

$$C'_e + C''_e = 0 \quad (3.26)$$

3.2.1. Decomposição do campo de poro-pressão

A aproximação da equação de fluxo estará completa após a decomposição do campo de poro-pressão. Seguindo o conceito de descontinuidade forte, a poro-pressão é decomposta em duas parcelas como mostrado na expressão (3.27).

$$p = \bar{p} + \|p\| \quad (3.27)$$

onde:

p – poro-pressão;

\bar{p} - componente contínua de poro-pressão;

$\|p\|$ - salto de poro-pressão.

Além da poro-pressão, define-se o seu gradiente como:

$$\nabla p = \nabla \bar{p} + \nabla \|p\| \quad (3.28)$$

Sendo:

∇p – gradiente de poro-pressão;

$\nabla \bar{p}$ - componente contínua do gradiente de poro-pressão;

$\nabla \|p\|$ – componente do gradiente de poro-pressão relacionada ao salto.

Para estabelecer as matrizes de permeabilidade e armazenamento do elemento enriquecido, é preciso definir a lei de fluxo através da descontinuidade.

Baseado na Lei de Darcy, o fluxo na direção normal pode ser escrito como:

$$q_n = \frac{k_n}{\mu} \cdot \frac{1}{e} \cdot \|p\| \quad (3.29)$$

Onde:

q_n - fluxo na direção normal da descontinuidade;

k_n - permeabilidade na direção normal da descontinuidade;

e - espessura da descontinuidade.

A divisão do salto de poro-pressão ($\|p\|$) pela espessura da descontinuidade (e) na expressão (3.29) reproduz o gradiente de poro-pressão da lei de Darcy.

Aplicado o conceito de descontinuidade forte, as duas componentes de poro-pressão da expressão (3.27) podem ser aproximadas conforme as expressões (3.30) e (3.31). Os conjuntos I e J são os mesmos da Figura 2-11.

$$\bar{p} \cong \bar{p}^h = \sum_{i \in I} N_i^\alpha \cdot p_i^\alpha \quad (3.30)$$

$$\|p\| \cong \|p^h\| = \sum_{j \in J} N_j^\beta \cdot p_j^\beta \quad (3.31)$$

Onde:

\bar{p}^h – aproximação da componente contínua de poro-pressão;

$\|p^h\|$ – aproximação do salto de poro-pressão;

p^α – grau de liberdade de poro-pressão relacionado à componente contínua;

p^β – grau de liberdade de salto de poro-pressão;

N^α - função de interpolação associada ao grau p^α ;

N^β - função de interpolação associada ao salto de deslocamento p^β ;

i - i-ésimo nó da malha; exceto os nós associados à descontinuidade;

j - j-ésimo nó associado à descontinuidade.

I - conjunto dos nós da malha, exceto aqueles associados à descontinuidade;

J - conjunto dos nós associados à descontinuidade.

Logo, aproximação da expressão (3.27) pelo MEF é:

$$p \cong p^h = \sum_{i \in I} N_i^\alpha \cdot p_i^\alpha + \sum_{j \in J} N_j^\beta \cdot p_j^\beta \quad (3.32)$$

Sendo:

p^h - valor aproximado de poro-pressão.

Similar ao campo de deslocamento, a poro-pressão será descrita a nível de elemento. Omitindo o sinal de somatório para simplificar a notação, a expressão (3.32) é reescrita como:

$$p \cong p^h = \mathbf{N}^\alpha \cdot \mathbf{p}^\alpha + \mathbf{N}^\beta \cdot \mathbf{p}^\beta \quad (3.33)$$

Utilizando a expressão (3.33), a forma aproximada do gradiente de poro-pressão (expressão (3.28)) a nível de elemento é:

$$\nabla \mathbf{p} \cong \nabla \mathbf{p}^h = \nabla \bar{\mathbf{p}}^h + \nabla \|\mathbf{p}^h\| \quad (3.34)$$

Sendo:

$$\nabla \bar{\mathbf{p}}^h = \frac{\partial \mathbf{N}^\alpha}{\partial x} \mathbf{p}^\alpha = \mathbf{B}_p^\alpha \cdot \mathbf{p}^\alpha \quad (3.35)$$

$$\nabla \|\mathbf{p}^h\| = \frac{\partial \mathbf{N}^\beta}{\partial x} \mathbf{p}^\beta = \mathbf{B}_p^\beta \cdot \mathbf{p}^\beta \quad (3.36)$$

Onde:

$\nabla \mathbf{p}^h$ – gradiente de poro-pressão aproximado;

$\nabla \bar{\mathbf{p}}^h$ – aproximação da componente contínua do gradiente de poro-pressão;

$\nabla \|\mathbf{p}^h\|$ – aproximação do gradiente de poro-pressão relacionado ao salto;

x – vetor coordenada espacial;

\mathbf{B}_p^α - matriz gradiente de poro-pressão relativa à componente contínua;

\mathbf{B}_p^β - matriz gradiente de poro-pressão relativa ao salto.

Reescrevendo as expressões (3.33) e (3.34) na forma matricial, temos que:

$$\mathbf{p} \cong \mathbf{p}^h = [\mathbf{N}^\alpha \quad \mathbf{N}^\beta] \cdot \begin{Bmatrix} \mathbf{p}^\alpha \\ \mathbf{p}^\beta \end{Bmatrix} \quad (3.37)$$

$$\nabla \mathbf{p} \cong \nabla \mathbf{p}^h = [\mathbf{B}_p^\alpha \quad \mathbf{B}_p^\beta] \cdot \begin{Bmatrix} \mathbf{p}^\alpha \\ \mathbf{p}^\beta \end{Bmatrix} \quad (3.38)$$

Introduzindo as expressões (3.29), (3.37) e (3.38) e substituindo a função arbitrária A pelas funções de interpolação \mathbf{N}^α e/ou \mathbf{N}^β de acordo com o domínio da integral na equação (3.26), a forma aproximada dos termos C'_e e C''_e da equação de fluxo assume a forma:

$$\begin{aligned} C'_e &= \int_{\Omega^e} [\mathbf{B}_p^\alpha \quad \mathbf{B}_p^\beta]^T \cdot \frac{\mathbf{k}}{\mu} \cdot [\mathbf{B}^\alpha \quad \mathbf{B}^\beta] d\Omega^e \begin{Bmatrix} \mathbf{p}^\alpha \\ \mathbf{p}^\beta \end{Bmatrix} \\ &+ \int_{\Omega^e} [\mathbf{N}^\alpha \quad \mathbf{N}^\beta]^T \cdot s \cdot [\mathbf{N}^\alpha \quad \mathbf{N}^\beta] d\Omega^e \frac{\partial}{\partial t} \begin{Bmatrix} \mathbf{p}^\alpha \\ \mathbf{p}^\beta \end{Bmatrix} \\ &+ \int_{\Omega^e} [\mathbf{B}_p^\alpha \quad \mathbf{0}]^T \cdot \frac{\mathbf{k}}{\mu} \cdot \nabla \rho g h d\Omega^e + \int_{\Gamma_q^e} [\mathbf{N}^\alpha \quad \mathbf{N}^\beta]^T \cdot \bar{\mathbf{q}} d\Gamma_q^e \end{aligned} \quad (3.39)$$

$$\begin{aligned}
 C_e'' &= \int_{\Gamma_F^e} (\mathbf{N}^\beta)^T \cdot \frac{k_n}{\mu} \cdot \frac{1}{e} \cdot \mathbf{N}^\beta d\Gamma_F^e \mathbf{p}^\beta + \int_{\Gamma_F^e} (\mathbf{B}_p^f)^T \cdot \frac{\mathbf{k}_t}{\mu} \cdot \mathbf{B}_p^f d\Gamma_F^e \left\{ \mathbf{p}^\alpha \right\} \\
 &+ \int_{\Gamma_F^e} (\mathbf{N}^f)^T \cdot s_F \cdot \mathbf{N}^f d\Gamma_F^e \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \mathbf{p}^\alpha \right\} + \int_{\Gamma_F^e} (\mathbf{B}_p^f)^T \cdot \frac{\mathbf{k}_t}{\mu} \cdot \nabla \rho g h d\Gamma_F^e \\
 &+ \int_{\Gamma_F^e} (\mathbf{N}^f)^T \bar{\mathbf{q}} d\Gamma_F^e
 \end{aligned} \tag{3.40}$$

A função \mathbf{N}^f na expressão (3.40) permite descrever a poro-pressão ao longo da direção tangencial à descontinuidade. Duas funções \mathbf{N}^f são estabelecidas: uma relacionando graus de liberdade de poro-pressão contínuos e saltos de poro-pressão e outra com apenas graus de liberdade contínuos de poro-pressão. A matriz gradiente correspondente a \mathbf{N}^f é indicada por \mathbf{B}_p^f . A função \mathbf{N}^f é descrita na próxima seção do texto.

Usando as expressões (3.26), (3.39) e (3.40), a equação de fluxo é colocada na seguinte forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}_e^{\alpha\alpha} & \mathbf{H}_e^{\alpha\beta} \\ \mathbf{H}_e^{\beta\alpha} & \mathbf{H}_e^{\beta\beta} \end{bmatrix} \cdot \left\{ \mathbf{p}^\alpha \right\} + \begin{bmatrix} \mathbf{S}_e^{\alpha\alpha} & \mathbf{S}_e^{\alpha\beta} \\ \mathbf{S}_e^{\beta\alpha} & \mathbf{S}_e^{\beta\beta} \end{bmatrix} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \mathbf{p}^\alpha \right\} = \left\{ \mathbf{Q}_e^\alpha \right\} \tag{3.41}$$

sendo:

$$\mathbf{H}_e^{\alpha\alpha} = \int_{\Omega^e} (\mathbf{B}_p^\alpha)^T \cdot \frac{\mathbf{k}}{\mu} \cdot \mathbf{B}_p^\alpha d\Omega^e \tag{3.42}$$

$$\mathbf{H}_e^{\alpha\beta} = \int_{\Omega^e} (\mathbf{B}_p^\alpha)^T \cdot \frac{\mathbf{k}}{\mu} \cdot \mathbf{B}_p^\beta d\Omega^e \tag{3.43}$$

$$\mathbf{H}_e^{\beta\alpha} = \int_{\Omega^e} (\mathbf{B}_p^\beta)^T \cdot \frac{\mathbf{k}}{\mu} \cdot \mathbf{B}_p^\alpha d\Omega^e \tag{3.44}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{H}_e^{\beta\beta} &= \int_{\Omega^e} (\mathbf{B}_p^\beta)^T \cdot \frac{\mathbf{k}}{\mu} \cdot \mathbf{B}_p^\beta d\Omega^e + \int_{\Gamma_F^e} (\mathbf{N}^\beta)^T \cdot \frac{k_n}{\mu} \cdot \frac{1}{e} \cdot \mathbf{N}^\beta d\Gamma_F^e \\
 &+ \int_{\Gamma_F^e} (\mathbf{B}_p^f)^T \cdot \frac{\mathbf{k}_t}{\mu} \cdot \mathbf{B}_p^f d\Gamma_F^e
 \end{aligned} \tag{3.45}$$

$$\mathbf{S}_e^{\alpha\alpha} = \int_{\Omega^e} (\mathbf{N}^\alpha)^T \cdot s \cdot \mathbf{N}^\alpha d\Omega^e \tag{3.46}$$

$$\mathbf{S}_e^{\alpha\beta} = \int_{\Omega^e} (\mathbf{N}^\alpha)^T \cdot \mathbf{s} \cdot \mathbf{N}^\beta d\Omega^e \quad (3.47)$$

$$\mathbf{S}_e^{\beta\alpha} = \int_{\Omega^e} (\mathbf{N}^\beta)^T \cdot \mathbf{s} \cdot \mathbf{N}^\alpha d\Omega^e \quad (3.48)$$

$$\mathbf{S}_e^{\beta\beta} = \int_{\Omega^e} (\mathbf{N}^\beta)^T \cdot \mathbf{s} \cdot \mathbf{N}^\beta d\Omega^e + \int_{\Gamma_F^e} (\mathbf{N}^f)^T \cdot \mathbf{s}_F \cdot \mathbf{N}^f d\Gamma_F^e \quad (3.49)$$

$$\mathbf{Q}_e^\alpha = \int_{\Omega^e} (\mathbf{B}_p^\alpha)^T \cdot \frac{\mathbf{k}}{\mu} \cdot \nabla \rho g h d\Omega^e + \int_{\Gamma_q^e} (\mathbf{N}^\alpha)^T \cdot \bar{\mathbf{q}} d\Gamma_q^e + \int_{\Gamma_q^f} (\mathbf{N}^\alpha)^T \bar{\mathbf{q}} d\Gamma_q^f \quad (3.50)$$

$$\mathbf{Q}_e^\beta = \int_{\Omega^e} (\mathbf{0})^T \cdot \frac{\mathbf{k}_t}{\mu} \cdot \nabla \rho g h d\Omega^e + \int_{\Gamma_q^e} (\mathbf{N}^\beta)^T \cdot \bar{\mathbf{q}} d\Gamma_q^e + \int_{\Gamma_q^f} (\mathbf{N}^\beta)^T \bar{\mathbf{q}} d\Gamma_q^f \quad (3.51)$$

Visando à formulação do elemento com acoplamento fluido-mecânico, a expressão (3.41) é reescrita em uma forma mais compacta:

$$\mathbf{H}_e \cdot \mathbf{p}_e + \mathbf{S}_e \cdot \dot{\mathbf{p}}_e + \mathbf{Q}_e = \mathbf{0} \quad (3.52)$$

onde:

$$\mathbf{H}_e = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_e^{\alpha\alpha} & \mathbf{H}_e^{\alpha\beta} \\ \mathbf{H}_e^{\beta\alpha} & \mathbf{H}_e^{\beta\beta} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{S}_e = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_e^{\alpha\alpha} & \mathbf{S}_e^{\alpha\beta} \\ \mathbf{S}_e^{\beta\alpha} & \mathbf{S}_e^{\beta\beta} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{p}_e = \begin{Bmatrix} \mathbf{p}^\alpha \\ \mathbf{p}^\beta \end{Bmatrix}$$

$$\dot{\mathbf{p}}_e = \frac{\partial}{\partial t} \begin{Bmatrix} \mathbf{p}^\alpha \\ \mathbf{p}^\beta \end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{Q}_e = \begin{Bmatrix} \mathbf{Q}_e^\alpha \\ \mathbf{Q}_e^\beta \end{Bmatrix}$$

As matrizes \mathbf{H}_e e \mathbf{S}_e são as matrizes de permeabilidade e armazenamento do elemento enriquecido, \mathbf{p}_e , $\dot{\mathbf{p}}_e$ e \mathbf{Q}_e são os vetores de poro-pressão, taxa de variação de poro-pressão e fluxo nodal respectivamente. Se o elemento não for cortado por uma descontinuidade, as funções \mathbf{N}^β e \mathbf{N}^f , a matriz \mathbf{B}_p^f e o grau de liberdade \mathbf{p}^β serão nulos fazendo com que a expressão (3.52) seja reduzida à formulação de um elemento comum.

3.2.2. Aproximação do campo de poro-pressão ao longo da direção tangencial à descontinuidade

Ao considerar a existência de fluxo nas duas direções da descontinuidade, uma dificuldade com que se depara é como descrever os termos de fluxo e armazenamento ao longo da descontinuidade (expressão (3.25)) tendo em mãos apenas o grau de liberdade de salto de poro-pressão. A dificuldade encontra-se no fato de que para descrevê-los é necessário conhecer a poro-pressão (valor total) e não o salto.

Nesta seção são apresentadas as duas formas da função N^f (expressão (3.40)) que permitem estimar a poro-pressão na descontinuidade. A primeira forma considera que a poro-pressão na descontinuidade é dependente dos graus de liberdade de salto de poro-pressão e de poro-pressão dos nós vizinhos à descontinuidade. A segunda introduz um grau de liberdade de poro-pressão próprio para a descontinuidade, tornando-o independente dos demais. Para cada forma são definidas as funções de interpolação e os respectivos gradientes.

3.2.2.1. Poro-pressão na descontinuidade como variável interpolada

Assumindo uma variação brusca e linear de poro-pressão através da direção normal à descontinuidade conforme a ilustrada na Figura 3-3, considera-se como valor representativo de poro-pressão na descontinuidade a média dos valores de poro-pressão imediatamente à esquerda (p_{Ω^-}) e à direita (p_{Ω^+}) da descontinuidade. A expressão (3.53) mostra o valor de poro-pressão idealizado.

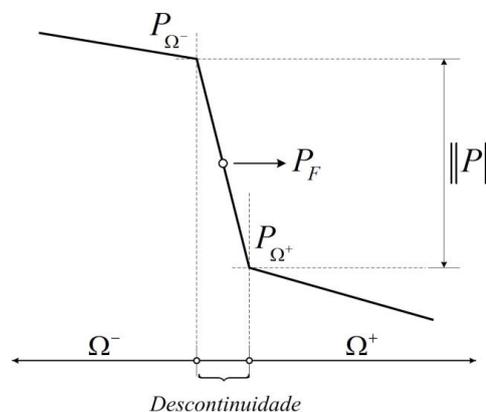


Figura 3-3: Idealização da variação de poro-pressão através da direção normal à descontinuidade

$$p_F = \frac{p_{\Omega^+} + p_{\Omega^-}}{2} \quad (3.53)$$

Onde:

p_F - poro-pressão na descontinuidade;

p_{Ω^-} , p_{Ω^+} - poro-pressão à esquerda e à direita da descontinuidade respectivamente.

Para estimar os valores p_{Ω^-} e p_{Ω^+} , emprega-se a técnica do elemento drenante apresentada por Andrade (2003). A técnica foi proposta com o objetivo de eliminar a discretização de drenos (elementos 1D) em um malha de elementos finitos 2D ou 3D permitindo a geração de malhas independente do modo como os drenos atravessem os elementos.

A ideia dessa técnica consiste em substituir o valor de poro-pressão em um ponto do dreno pelo valor resultante da interpolação dos graus de liberdade de poro-pressão do elemento atravessado pelo dreno no mesmo ponto. Adotando a mesma hipótese para o fluxo tangencial à descontinuidade e utilizando a aproximação de poro-pressão definida na expressão (3.33), os valores p_{Ω^-} e p_{Ω^+} podem ser estimados por:

$$\begin{aligned} p_{\Omega^-} &= \mathbf{N}^{\alpha^-}(\mathbf{r}_d, \mathbf{s}_d) \cdot \mathbf{p}^\alpha + \mathbf{N}^{\beta^-}(\mathbf{r}_d, \mathbf{s}_d) \cdot \mathbf{p}^\beta \\ p_{\Omega^+} &= \mathbf{N}^{\alpha^+}(\mathbf{r}_d, \mathbf{s}_d) \cdot \mathbf{p}^\alpha + \mathbf{N}^{\beta^+}(\mathbf{r}_d, \mathbf{s}_d) \cdot \mathbf{p}^\beta \end{aligned} \quad (3.54)$$

Onde:

r_d, s_d - coordenadas locais de um ponto sobre a descontinuidade.

Na expressão (3.54), r_d e s_d são as coordenadas locais de um ponto sobre a descontinuidade referenciadas ao eixo local do elemento enriquecido. Cabe lembrar que N^α e N^β são o conjunto de funções que interpolam os graus de liberdade p^α e p^β no interior do elemento enriquecido respectivamente. Os sobrescritos (-) e (+) indicam que as funções N^α e N^β são avaliadas à esquerda e à direita da descontinuidade.

Considerando que a diferença de valores de N^α dos pontos imediatamente à esquerda e à direita da descontinuidade é desprezível devido à continuidade da

função N^α e introduzindo a expressão (3.54) na expressão (3.53), a poro-pressão na descontinuidade é definida por:

$$p_F = \mathbf{N}^\alpha(r_d, s_d) \cdot \mathbf{p}^\alpha + \frac{1}{2} \{ \mathbf{N}^{\beta-}(r_d, s_d) + \mathbf{N}^{\beta+}(r_d, s_d) \} \cdot \mathbf{p}^\beta \quad (3.55)$$

A fim de simplificar a notação de p_F , a expressão (3.55) pode ser reescrita como:

$$p_F = \mathbf{N}^f \cdot \begin{Bmatrix} \mathbf{p}^\alpha \\ \mathbf{p}^\beta \end{Bmatrix} \quad (3.56)$$

Sendo:

$$\mathbf{N}^f = \left[\mathbf{N}^\alpha \quad \frac{1}{2} (\mathbf{N}^{\beta-} + \mathbf{N}^{\beta+}) \right] \quad (3.57)$$

Conhecido p_F , o gradiente de poro-pressão ao longo da descontinuidade torna-se:

$$\nabla p_F = \mathbf{B}_p^f \cdot \begin{Bmatrix} \mathbf{p}^\alpha \\ \mathbf{p}^\beta \end{Bmatrix} \quad (3.58)$$

Sendo:

$$\mathbf{B}_p^f = \mathbf{u}_F \cdot \nabla \left[\mathbf{N}^\alpha \quad \frac{1}{2} (\mathbf{N}^{\beta-} + \mathbf{N}^{\beta+}) \right] \quad (3.59)$$

Onde:

\mathbf{u}_F - vetor unitário colinear à descontinuidade;

∇ - operador gradiente;

\mathbf{B}_p^f - matriz gradiente relacionada ao fluxo unidimensional na descontinuidade.

Com referência à expressão (3.59), o vetor unitário \mathbf{u}_F permite determinar o gradiente de poro-pressão ao longo da direção tangencial à descontinuidade. Deve-se lembrar de que as funções N^α e N^β estão definidas em relação ao eixo local do elemento enriquecido e não em relação ao eixo da descontinuidade.

A estimativa de poro-pressão na descontinuidade como uma variável interpolada é atraente, pois ela dispensa a adição de um grau de liberdade extra. Porém, cabe observar que ela pode ter o seu uso limitado para descontinuidades que tenham um valor de permeabilidade tangencial muito maior do que a permeabilidade do meio poroso vizinho à descontinuidade.

A razão disso encontra-se na combinação de dois fatores. O primeiro fator é que, ao usar a interpolação, a ordem da submatriz referente ao fluxo tangencial (segundo termo da expressão (3.40)) passa a ser a mesma da matriz de permeabilidade do elemento enriquecido (primeiro termo da expressão (3.39)). O segundo fator é que os valores da matriz de permeabilidade podem se tornar muito pequenos, quando comparados aos valores da submatriz, caso a permeabilidade tangencial tenha um valor muito alto.

Combinados os dois fatores, ao somar a matriz de permeabilidade do elemento à submatriz de permeabilidade tangencial, a matriz resultante será praticamente igual à submatriz. Fisicamente, isto significa que toda a região fora da descontinuidade passará a ter a mesma permeabilidade da direção tangencial à descontinuidade.

Dois situações devem ser avaliadas com critério neste caso. A primeira delas é que para malhas com refinamento grosseiro, frequentemente o caso de um modelo de reservatório, uma área grande do modelo pode se tornar muito mais permeável do que realmente é. Isso implicaria, por exemplo, na obtenção de valores de poro-pressão mais baixos do que o esperado.

A segunda situação é que, caso a descontinuidade tenha uma permeabilidade na direção normal muito baixa, o efeito do salto poderia ser reduzido ou mesmo desaparecer. A segunda forma da função N^f visa minimizar tal limitação.

3.2.2.2.

Poropressão na descontinuidade como grau de liberdade independente

No item anterior, a poro-pressão na descontinuidade foi obtida através da interpolação de valores de pontos localizados fora da descontinuidade. Usando essa alternativa, ao montar a matriz de permeabilidade do elemento enriquecido, mencionou-se que altos valores de permeabilidade tangencial à descontinuidade podem tornar o elemento muito mais permeável do que realmente ele é.

A questão a ser abordada é como inserir a submatriz de permeabilidade referente ao fluxo tangencial de modo que a matriz de permeabilidade do elemento enriquecido não seja afetada como um todo. Observando que essa limitação surge do uso da interpolação, neste item a poro-pressão na descontinuidade será tratada como um grau de liberdade independente. Ao adotar essa hipótese, a submatriz passará a ter uma ordem menor do que a matriz de permeabilidade do elemento.

Para estabelecer a segunda aproximação, considera-se que a poro-pressão na descontinuidade está referenciada unicamente à parcela contínua do campo de poro-pressão. Ao somar o campo contínuo de poro-pressão resultante ao campo descontínuo, a poro-pressão na descontinuidade comporta-se de modo semelhante ao valor médio citado anteriormente.

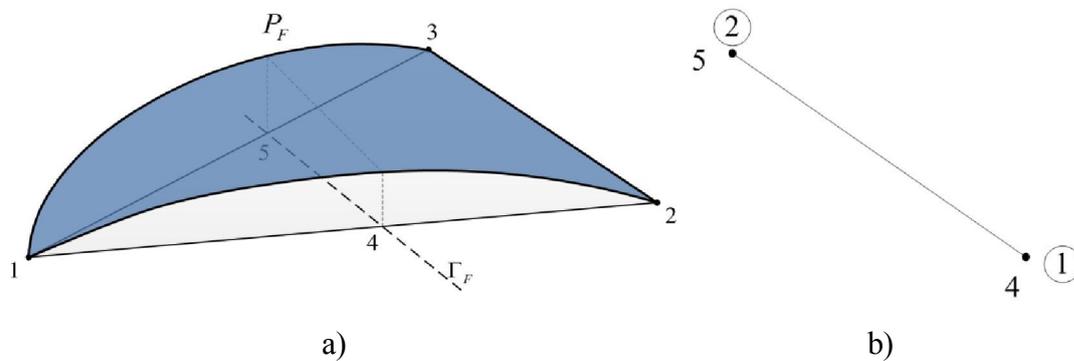


Figura 3-4: a) Esboço da poro-pressão (p_F) interpolada por uma função quadrática, b) Elemento virtual unidimensional

Admitindo, em um primeiro momento, que a descontinuidade apresente apenas fluxo tangencial é possível afirmar que a poro-pressão nos pontos imediatamente à esquerda, à direita da descontinuidade e sobre ela mesma (p_F) seja igual. Imaginando um elemento cortado por uma descontinuidade, um modo para obter esta condição de poro-pressão é o uso de uma função de interpolação quadrática. A Figura 3-4 ilustra a condição que se pretende representar.

Observando a Figura 3-4(a), ao usar uma função quadrática, um grau de liberdade de poro-pressão deve ser adicionado em cada extremidade da descontinuidade (nós 4 e 5). Esse grau representa exatamente a poro-pressão na descontinuidade (p_F) sendo independente dos demais graus do elemento.

Além de garantir uma estimativa de poro-pressão na descontinuidade, a adição de dois graus de liberdade de poro-pressão (nós 4 e 5) permite inserir as funções de interpolação de um elemento unidimensional para descrever o fluxo

tangencial. Como apenas dois graus são envolvidos na descrição do fluxo tangencial, a ordem da submatriz de permeabilidade passa a ser menor do que a matriz de permeabilidade do elemento enriquecido.

Fazendo referência à Figura 3-4(b) e associando os nós 4 e 5 aos nós 1 e 2 de um elemento unidimensional, indicados por um círculo na figura, a poro-pressão ao longo da direção tangencial à descontinuidade (p_F) pode ser expressa por:

$$p_F = [N_1 \quad N_2] \cdot \begin{Bmatrix} p_4 \\ p_5 \end{Bmatrix} \quad (3.60)$$

Onde:

N_1, N_2 –funções de interpolação de um elemento unidimensional;

p_4, p_5 – graus de liberdade de poro-pressão dos nós 4 e 5.

A expressão (3.60) pode ser reescrita na forma geral:

$$p_F = \mathbf{N}^f \cdot \begin{Bmatrix} \mathbf{p}^\alpha \\ \mathbf{p}^\beta \end{Bmatrix} \quad (3.61)$$

Sendo:

$$\mathbf{N}^f = [\mathbf{0}_{1 \times nv} \quad \mathbf{N}^{1D}_{1 \times 2} \quad \mathbf{0}_{1 \times 2}]$$

$$\mathbf{N}^{1D} = [N_1 \quad N_2] \quad (3.62)$$

$$\mathbf{p}^\alpha = \begin{Bmatrix} \mathbf{p}_{nv \times 1}^\alpha \\ \mathbf{p}_{2 \times 1}^\alpha \end{Bmatrix}$$

Onde:

nv - número de nós localizados nos vértices do elemento enriquecido;

$\mathbf{0}$ - vetor linha nulo.

Na expressão (3.61), o vetor \mathbf{p}^α é montado de modo a agrupar os graus de liberdade de poro-pressão localizados nos nós do vértice primeiro (nós 1, 2 e 3 da Figura 3-4(a)), para, em seguida, incluir os graus de liberdade localizados nas extremidades da descontinuidade (nós 4 e 5). Os vetores linhas nulo à esquerda e à direita de \mathbf{N}^{1D} são inseridos apenas por uma questão de notação matricial.

Conhecido p_F para a segunda forma da função N^f , define-se o gradiente de poro-pressão ao longo da descontinuidade por:

$$\nabla p_F = \mathbf{B}_p^f \cdot \begin{Bmatrix} p^\alpha \\ p^\beta \end{Bmatrix} \quad (3.63)$$

Sendo:

$$\mathbf{B}_p^f = \nabla [\mathbf{0}_{1 \times n_V} \quad \mathbf{N}_{1 \times 2}^{1D} \quad \mathbf{0}_{1 \times 2}] \quad (3.64)$$

Onde:

∇ - operador gradiente;

\mathbf{B}_p^f - matriz gradiente relacionada ao fluxo unidimensional.

Referente à integração das submatrizes de permeabilidade e armazenamento ao longo da descontinuidade, se a espessura e as propriedades de material forem constantes, soluções analíticas podem ser obtidas.

Cabe observar que a adição de um grau de liberdade de poro-pressão contorna as limitações que podem surgir caso a descontinuidade tenha uma permeabilidade tangencial alta. Porém, ao trabalhar com uma função quadrática, insere-se a necessidade de se trabalhar com um elemento triangular de cinco nós ou retangular com seis nós.

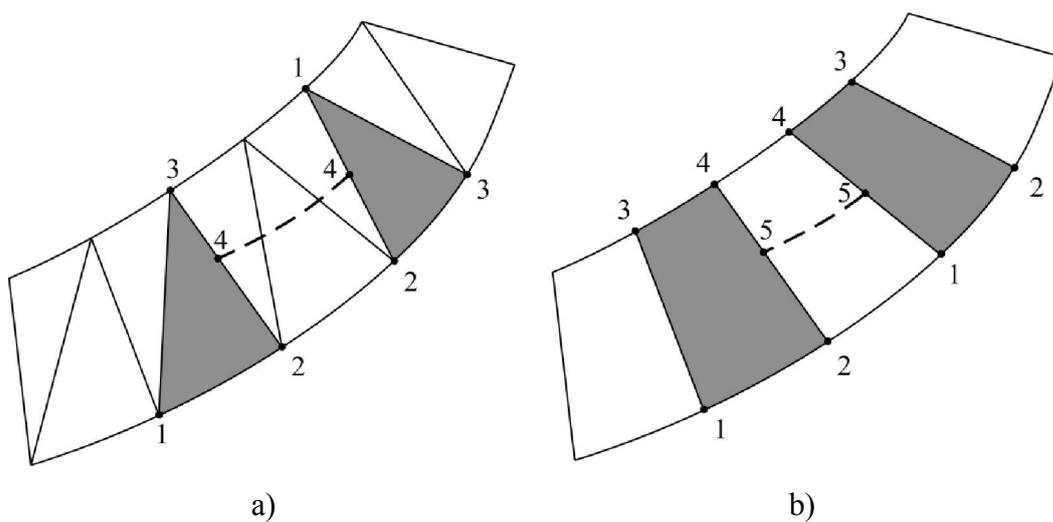


Figura 3-5: Elementos de transição: a) elemento triangular, b) elemento retangular

A introdução de elementos com dois nós adicionais é relativamente simples, pois a determinação da posição e a numeração dos nós da descontinuidade já são tarefas exigidas pela descrição do salto de poro-pressão.

O inconveniente desta abordagem é a necessidade de acrescentar um elemento de transição em cada extremidade da descontinuidade a fim de garantir a compatibilidade do grau p^α do elemento enriquecido com o restante da malha. Indicados pela cor cinza na Figura 3-5, os elementos de transição têm um nó a mais do que um elemento convencional. Por exemplo, elementos triangulares de transição têm quatro nós e elementos retangulares têm cinco nós.