2
FORMULAÇÃO MECÂNICA DE ELEMENTOS FINITOS COM DESCONTINUIDADE DO TIPO FORTE

Ao longo do capítulo de introdução, vários trabalhos a respeito dos elementos XFEM, AES e *embedded* foram citados. Todos eles usando o conceito de descontinuidade do tipo forte. Visando um entendimento rápido desses elementos, este capítulo apresenta um breve resumo de duas formulações mecânicas. Serão apontadas as hipóteses básicas das formulações e suas aproximações pelo MEF. Detalhes sobre a introdução em um código ou aspectos de não-linearidade não são comentados.

Cada formulação possui várias abordagens, não sendo possível apresentar todas elas. A escolha de quais abordagens a serem descritas obedeceu apenas a um critério didático. As formulações selecionadas foram o XFEM apresentada por Moës et al, 1999 e o elemento *embedded* proposto por Manzoli e Shing, 2006.

Além dos elementos *embedded* e XFEM, a descrição da formulação proposta por Wan et al (1995) será incluída neste capítulo, pois ela aplica o conceito de descontinuidade forte também. Essa formulação será discutida com maior detalhamento, porque é a partir dela que a formulação mecânica é estendida para o acoplamento fluido-mecânico.

2.1. Elemento estendido (XFEM)

O elemento estendido tem origem com o trabalho de Black e Belystchko (1999), mas é com o uso da função *heaviside* introduzida por Moës et al (1999) que foi possível eliminar totalmente a necessidade de geração sucessiva de malhas da modelagem numérica de propagação de fratura. O elemento baseia-se na hipótese de que o Princípio do Trabalho Virtual (expressão (2.1), página 43) é capaz de reproduzir o comportamento de um corpo fraturado cujas faces estejam livres de força de superfície (ilustrado na Figura 2-1, página 43).

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\delta\varepsilon} \cdot \dot{\boldsymbol{\sigma}} d\Omega = \int_{\Omega} \boldsymbol{\delta u} \cdot \dot{\mathbf{F}}_{\mathbf{b}} d\Omega_e + \int_{\Gamma_s} \boldsymbol{\delta u} \cdot \dot{\mathbf{F}}_{\mathbf{s}} \, d\Gamma_s \tag{2.1}$$

onde:

$\boldsymbol{\delta\varepsilon}$ - variação virtual de deformação;

$\boldsymbol{\delta u}$ - variação virtual de deslocamento;

$\dot{\boldsymbol{\sigma}}$ – incremento do vetor de tensão;

$\dot{\mathbf{F}}_{\mathbf{b}}$ – incremento do vetor força de massa;

$\dot{\mathbf{F}}_{\mathbf{s}}$ – incremento do vetor força de superfície;

Ω - domínio do corpo;

Γ_s – porção do contorno do corpo onde atua F_s;

Γ_u - porção do contorno do corpo onde é aplicada a condição de contorno de deslocamento.

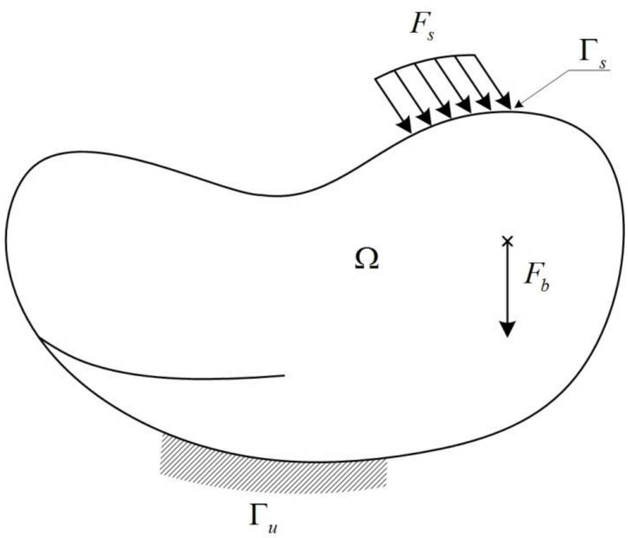


Figura 2-1: Corpo cortado por uma fratura

O incremento do vetor de tensão descreve a força interna no domínio Ω e é relacionado ao incremento do vetor deformação ($\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$) pela seguinte lei constitutiva:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{D} \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \tag{2.2}$$

Moës et al (1999) assumiram que o campo de deslocamento em um corpo fraturado é a soma de três parcelas: uma representando a parcela de deslocamento contínuo e outras duas referentes ao salto de deslocamento. Seguindo essa hipótese, a aproximação do deslocamento pelo MEF proposta tem a forma:

$$\mathbf{u} \cong \sum_{i=1}^{I} \mathbf{N}_i \mathbf{u}_i^{\boldsymbol{\alpha}} + \sum_{j=1}^{J} \mathbf{N}_j \mathbf{H}_j' \mathbf{u}_j^{\boldsymbol{\beta}} + \sum_{k1=1}^{K1} \mathbf{N}_{K1} \left(\sum_{l1}^{L1} \mathbf{F}_{l1} \mathbf{u}_{k1}^{\boldsymbol{\omega}\, l1} \right) \tag{2.3}$$

Onde:

$\mathbf{u}^{\boldsymbol{\alpha}}$ – vetor grau de liberdade de deslocamento (componente contínua);

$\mathbf{u}^{\boldsymbol{\beta}}$ – vetor grau de liberdade de salto de deslocamento através das faces da fratura (primeira componente descontínua);

$\mathbf{u}^{\boldsymbol{\omega}}$ – vetor grau de liberdade relacionado ao salto de deslocamento na ponta da fratura (segunda componente descontínua);

N - função de interpolação do elemento;

$\mathbf{H}'$ - função *heaviside*;

$\mathbf{F}'$ - função *crack tip*;

I – número de nós do elemento associados ao deslocamento nodal u^{α};

J – número de nós do elemento associados ao salto de deslocamento nodal u^{β};

K1 – número de nós do elemento associados ao grau de liberdade u^{ω};

L1 – número de coeficientes do grau de liberdade u^{ω}.

Com referência à expressão (2.3), é válido observar que as últimas duas parcelas do lado direito, relacionadas aos graus u^{β} e u^{ω}, podem ser interpretadas como uma decomposição do último termo da expressão (1.1).

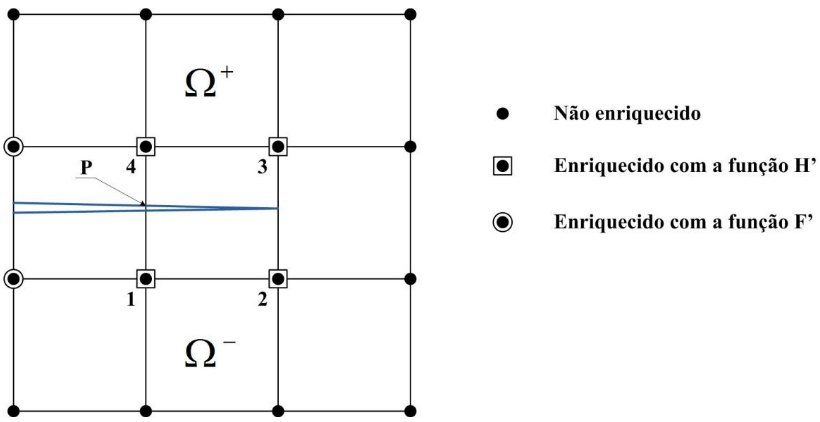


Figura 2-2 – Nós enriquecidos pelas funções heaviside (H’) e crack tip (F’) em uma malha cortada por uma fratura (Moës et al, 1999)

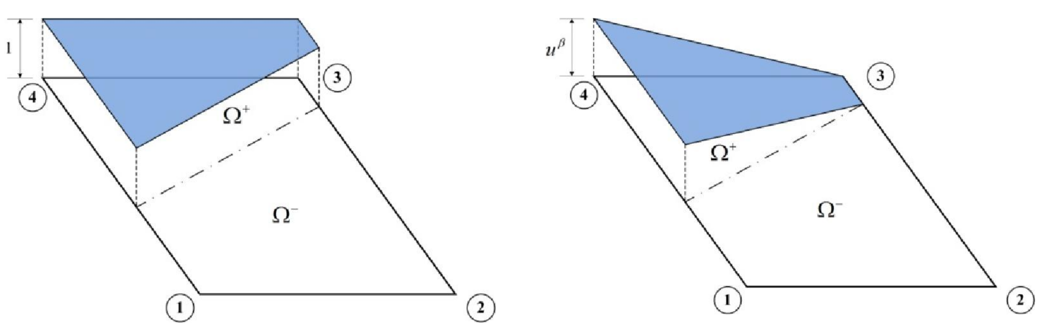
As funções F’ e H’ que interpolam os graus de liberdade $\mathbf{u}^{\boldsymbol{\beta}}$ e $\mathbf{u}^{\boldsymbol{\omega}}$ são aplicadas somente para os elementos cortados pela fratura. A Figura 2-2 ilustra uma pequena malha onde alguns nós têm suas funções de interpolação acrescidas (ou enriquecidas) pelas funções F’ e H’.

A função H' é aplicada a todos os nós dos elementos cortados por uma fratura, exceto aqueles pertencentes a elementos que contêm a ponta da fratura. Os nós enriquecidos pela função H’ são indicados por um quadrado branco com um círculo preto inscrito. A função F’ é aplicada aos nós do elemento que contém a ponta da fratura. Esses nós são indicados por dois círculos concêntricos: um preto e outro branco.

Para utilizar a função H’ é necessário estabelecer, empregando algum critério geométrico, os subdomínios Ω^+ e Ω^- como os indicados na Figura 2-2. Desse modo, a função H’ pode ser definida como:

$$\mathrm{H}'(\mathrm{x}) = \begin{cases} 1 & \forall\, \mathrm{x} \in \Omega^+ \\ 0 & \forall\, \mathrm{x} \in \Omega^- \end{cases} \tag{2.4}$$

O papel da função H’ é simplesmente criar o salto de deslocamento no interior do elemento cortado por uma fratura. A Figura 2-3(a) ilustra a função H’ da expressão (2.4) para o elemento bilinear. De acordo com as expressões (2.4) e (2.3), qualquer ponto no subdomínio Ω^- não sofrerá ação do salto $\mathbf{u}^{\boldsymbol{\beta}}$ porque o produto $N \cdot H'$ é nulo. Ao contrário do subdomínio Ω^+, em que o produto $N \cdot H'$ é a igual à própria função N, garantindo uma distribuição de $\mathbf{u}^{\boldsymbol{\beta}}$ não nula. A Figura 2-3(b) mostra a distribuição de $\mathbf{u}^{\boldsymbol{\beta}}$ associada ao nó local 4.



(a) (b)

Figura 2-3: Esboço do salto de deslocamento para o elemento bilinear: (a) função heaviside, (b) salto u^β associado ao nó local 4

Möes et al (1999) aplicaram a função H' para interpolar o grau de liberdade u^{β}, mas outras funções podem ser empregadas na formulação do XFEM como a *step function* e a *shifted heaviside* apresentada por Belytschko et al (2001).

Semelhantemente à função H', a função F' também cria um salto de deslocamento no interior do elemento pela interpolação do grau de liberdade $\mathbf{u}^{\boldsymbol{\omega}}$. Esse salto está relacionado ao movimento da ponta da fratura e para descrevê-lo em uma direção qualquer, são necessários quatro graus de liberdade $\mathbf{u}^{\boldsymbol{\omega}}$ em cada nó do elemento. Para cada grau $\mathbf{u}^{\boldsymbol{\omega}}$, há um termo da função F' associado. A expressão (2.5) mostra os quatro termos da função F'. O índice L1 da expressão (2.3) corresponde ao número de termos da função F'.

$$F'(r,\theta) = \sqrt{r}\cdot\left\{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right), \mathrm{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right), \mathrm{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)\cdot\mathrm{sen}(\theta), \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\cdot\mathrm{sen}(\theta)\right\} \quad (2.5)$$

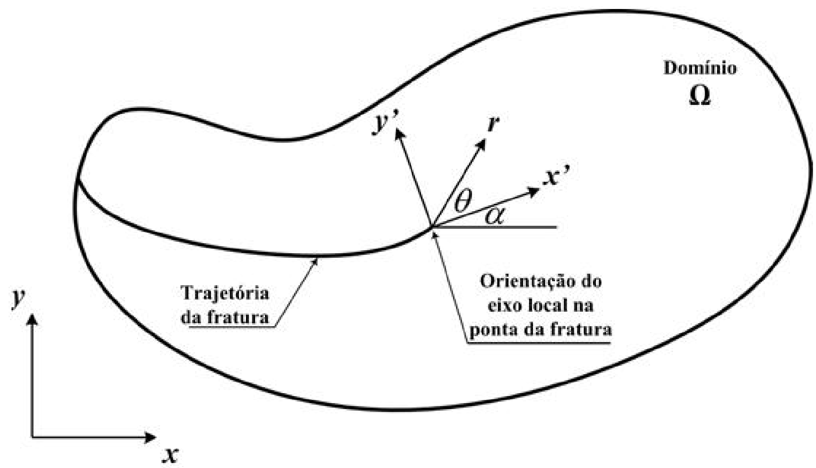


Figura 2-4: Sistema de coordenada polar na ponta da fratura

As variáveis r e θ da função F′ são coordenadas de um sistema polar cuja origem está situada na ponta da fratura. O eixo r é tangente à ponta da fratura sendo o sentido positivo do eixo orientado para o interior do corpo. A Figura 2-4 mostra o posicionamento e a orientação do sistema em um corpo fraturado. Observando a Figura 2-4, o termo de F' responsável pela descontinuidade é o valor $\cos(\theta/2)$. Uma ilustração da função F' é apresentada na Figura 2-5, página 47.

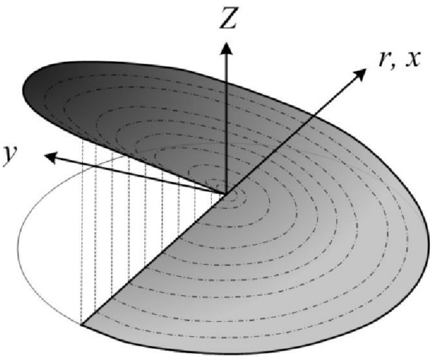


Figura 2-5: Esboço da função crack tip (Belytschko et al, 2001)

As funções H′ e F′ enriquecem os nós dos elementos cortados por uma fratura, porém esse enriquecimento não deve afetar o deslocamento dos demais nós da malha. A fim de eliminar o efeito do enriquecimento, elementos de transição (*blending elements*) são usados ao redor dos elementos cortados por uma fratura como ilustrado na Figura 2-6.

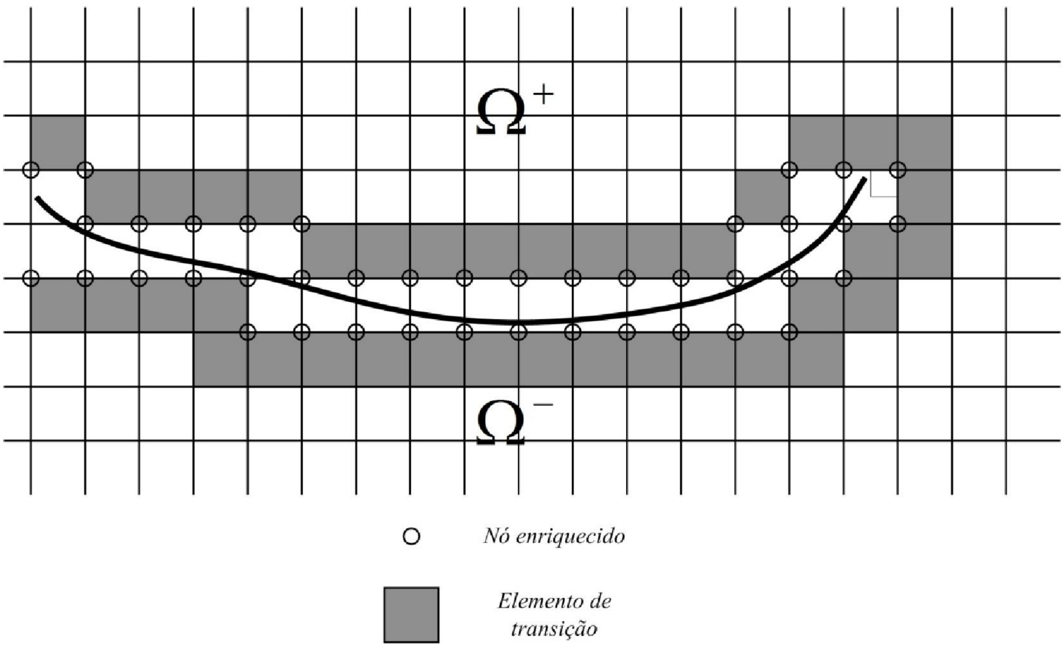


Figura 2-6: Elementos de transição (Mohammadi, 2008)

Como pode ser observado na Figura 2-6, apenas alguns nós são enriquecidos nos elementos de transição. Ao fazer isso, garante-se que somente os nós vizinhos à fratura apresentem graus de liberdade referente ao salto de deslocamento.

A quantidade de elementos de transição varia conforme a função aplicada para interpolar os graus de liberdade de salto. Belytschko et al (2001) mostraram que a função *shifted heaviside* pode eliminar a maior parte dos elementos de transição da malha. Essa função zera o salto de deslocamento $\mathbf{u}_j^{\boldsymbol{\beta}}$ sobre os nós do elemento XFEM, fazendo com que os elementos de transição que tenham apenas este grau de liberdade adicional possam ser retirados da malha. Um procedimento semelhante pode ser aplicado à função F', mas, segundo os autores, devido a particularidades da função F', elementos de transição ainda são necessários na ponta da fratura.

A Figura 2-6 também permite ter uma ideia do número de graus de liberdade necessários no XFEM. Para um elemento bilinear onde a função H' é aplicada são necessários dezesseis graus de liberdade, oito deles associados ao grau $\mathbf{u}^{\boldsymbol{\beta}}$. Para o elemento que contém a ponta da fratura são necessários vinte e quatro graus de liberdade, dezesseis deles associados ao grau u^{ω}.

Conhecidas as funções F' e H', a aproximação dos campos de deformação e tensão pelo MEF pode ser definida. Antes de apresentá-las, será introduzida uma notação matricial para o deslocamento da expressão (2.3). Omitindo o sinal de somatório e seus índices, a forma matricial pode ser escrita como:

$$\mathbf{u} \cong [\mathbf{N} \quad \mathbf{N}\cdot\mathbf{H}' \quad \mathbf{N}\cdot\mathbf{F}'] \cdot \begin{Bmatrix} \mathbf{u}^{\boldsymbol{\alpha}} \\ \mathbf{u}^{\boldsymbol{\beta}} \\ \mathbf{u}^{\boldsymbol{\omega}} \end{Bmatrix} \tag{2.6}$$

Para as expressões seguintes, o vetor de graus de liberdade nodal da expressão (2.6) será representado por:

$$\mathbf{u_e} = [\mathbf{u}^{\boldsymbol{\alpha}} \quad \mathbf{u}^{\boldsymbol{\beta}} \quad \mathbf{u}^{\boldsymbol{\omega}}]^{\mathrm{T}} \tag{2.7}$$

Usando a matriz de deformação B, o incremento no campo de deformação pode ser aproximado por:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \cong \mathbf{B}\cdot\dot{\mathbf{u}}_{\mathbf{e}} \tag{2.8}$$

No caso do elemento XFEM, a matriz **B** é formada pela união de três submatrizes, sendo cada uma delas ligada aos graus de liberdade $\mathbf{u}^{\alpha}$, $\mathbf{u}^{\beta}$ e $\mathbf{u}^{\omega}$ respectivamente. Define-se a matriz **B** como:

$$\mathbf{B} = [\mathbf{B}^{\alpha} \quad \mathbf{B}^{\beta} \quad \mathbf{B}^{\omega}] \tag{2.9}$$

sendo:

$$\mathbf{B}^{\alpha} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N}{\partial y} \\ \frac{\partial N}{\partial y} & \frac{\partial N}{\partial x} \end{bmatrix}, \mathbf{B}^{\beta} = \begin{bmatrix} \frac{\partial (N \cdot H')}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial (N \cdot H')}{\partial y} \\ \frac{\partial (N \cdot H')}{\partial y} & \frac{\partial (N \cdot H')}{\partial x} \end{bmatrix},$$
$$\mathbf{B}^{\omega} = \begin{bmatrix} \frac{\partial (N \cdot F')}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial (N \cdot F')}{\partial y} \\ \frac{\partial (N \cdot F')}{\partial y} & \frac{\partial (N \cdot F')}{\partial x} \end{bmatrix} \tag{2.10}$$

Onde:

x, y - coordenada espacial no sistema cartesiano.

Referente à matriz $\mathbf{B}^{\omega}$, para derivar a função F' é necessário realizar a transformação do sistema de coordenada polar para um sistema cartesiano.

As submatrizes foram definidas para um corpo bidimensional. Para aplicá-las a um corpo tridimensional é necessário apenas incluir a derivada em relação à coordenada espacial z.

Com o campo de deformação, o incremento de tensão pode ser aproximado por:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} \cong \mathbf{D} \cdot \mathbf{B} \cdot \dot{\mathbf{u}}_{\mathbf{e}} \tag{2.11}$$

Definido os campos de deformação e tensão e fazendo referência à expressão (2.1), a matriz de rigidez do XFEM pode ser escrita como a união de nove submatrizes, permitindo escrevê-la como:

$$\mathbf{K}_{\mathbf{e}} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{\mathbf{e}}^{\alpha\alpha} & \mathbf{K}_{\mathbf{e}}^{\alpha\beta} & \mathbf{K}_{\mathbf{e}}^{\alpha\omega} \\ \mathbf{K}_{\mathbf{e}}^{\beta\alpha} & \mathbf{K}_{\mathbf{e}}^{\beta\beta} & \mathbf{K}_{\mathbf{e}}^{\beta\omega} \\ \mathbf{K}_{\mathbf{e}}^{\omega\alpha} & \mathbf{K}_{\mathbf{e}}^{\omega\beta} & \mathbf{K}_{\mathbf{e}}^{\omega\omega} \end{bmatrix} \tag{2.12}$$

Cada submatriz é definida como a integral:

$$\mathbf{K}_{\mathrm{e}}^{\mathrm{ab}} = \int_{\Omega_{\mathrm{e}}} (\mathbf{B}^{\mathrm{a}})^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{B}^{\mathrm{b}} d\Omega_{\mathrm{e}} \tag{2.13}$$

Os superescritos a e b da expressão (2.13) representam os coeficientes α, β e ω relativos aos graus de liberdade $\mathbf{u}^{\alpha}$, $\mathbf{u}^{\beta}$ e $\mathbf{u}^{\omega}$.

Do mesmo modo que a matriz de rigidez, o vetor de força nodal pode ser escrito como:

$$\mathbf{F}_{\mathbf{e}} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{\mathbf{e}}^{\alpha} & \mathbf{F}_{\mathbf{e}}^{\beta} & \mathbf{F}_{\mathbf{e}}^{\omega} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \tag{2.14}$$

Sendo:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{\mathbf{e}}^{\alpha} &= \int_{\Omega_{\mathrm{e}}} \mathbf{N}^{\mathbf{T}} \cdot \dot{\mathbf{F}}_{\mathbf{b}}\, d\Omega_{\mathrm{e}} + \int_{\Gamma_{\mathrm{s}}} \mathbf{N}^{\mathbf{T}} \cdot \dot{\mathbf{F}}_{\mathbf{s}}\, d\Gamma_{\mathrm{s}} \\ \mathbf{F}_{\mathbf{e}}^{\beta} &= \int_{\Omega_{\mathrm{e}}} (\mathbf{N} \cdot \mathbf{H}')^{\mathrm{T}} \cdot \dot{\mathbf{F}}_{\mathbf{b}}\, d\Omega_{\mathrm{e}} + \int_{\Gamma_{\mathrm{s}}} (\mathbf{N} \cdot \mathbf{H}')^{\mathrm{T}} \cdot \dot{\mathbf{F}}_{\mathbf{s}}\, d\Gamma_{\mathrm{s}} \\ \mathbf{F}_{\mathbf{e}}^{\omega} &= \int_{\Omega_{\mathrm{e}}} (\mathbf{N} \cdot \mathbf{F}')^{\mathrm{T}} \cdot \dot{\mathrm{F}}_{\mathrm{b}}\, d\Omega_{\mathrm{e}} + \int_{\Gamma_{\mathrm{s}}} (\mathbf{N} \cdot \mathbf{F}')^{\mathrm{T}} \cdot \dot{\mathbf{F}}_{\mathbf{s}}\, d\Gamma_{\mathrm{s}} \end{aligned} \tag{2.15}$$

Com relação à integração numérica, o elemento XFEM deve ser dividido em subdomínios, normalmente triangulares. A divisão é necessária para que os termos da matriz de rigidez e vetor de força nodal, relacionados às funções H' e F', possam ser integrados corretamente.

Originalmente, o elemento XFEM não representa a existência de forças de superfície na face da fratura. Característica comum na modelagem de materiais granulares, Dolbow et al (2001) adicionaram um termo de dissipação de energia ao Princípio do Trabalho Virtual da expressão (2.1) para representar esse efeito. O referido termo é representado pelas duas últimas parcelas do lado direito da expressão (2.16).

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\delta\varepsilon} \cdot \dot{\boldsymbol{\sigma}} d\Omega_e = \int_{\Omega} \boldsymbol{\delta u} \cdot \dot{\mathbf{F}}_{\mathbf{b}} d\Omega_e + \int_{\Gamma_s} \boldsymbol{\delta u} \cdot \dot{\mathbf{F}}_{\mathbf{s}}\, d\Gamma_s$$
$$+ \int_{\Gamma_F^+} \boldsymbol{\delta w}^+ \cdot \dot{\mathbf{F}}_{\mathbf{T}}^+ d\Gamma_F^+ + \int_{\Gamma_F^-} \boldsymbol{\delta w}^- \cdot \dot{\mathbf{F}}_{\mathbf{T}}^- d\Gamma_F^- \tag{2.16}$$

Onde:

Γ_F^+ - face da fratura no subdomínio Ω+;

Γ_F^- - face da fratura no subdomínio Ω-;

$\boldsymbol{\delta w}^+$ - variação virtual de deslocamento ao longo de Γ_F^+;

$\boldsymbol{\delta w}^-$ - variação virtual de deslocamento ao longo de Γ_F^-;

$\dot{\mathbf{F}}_{\mathbf{T}}^+$ - incremento do vetor força de superfície ao longo da face de Γ_F^+;

$\dot{\mathbf{F}}_{\mathbf{T}}^-$ - incremento do vetor força de superfície ao longo de Γ_F^-;

As forças de superfície $\mathbf{F}_{\mathbf{T}}^+$ e $\mathbf{F}_{\mathbf{T}}^-$ são determinadas utilizando o deslocamento de cada face e por uma lei de contato qualquer. Segundo Dolbow et al (2001), esse deslocamento não é um grau adicional, mas o resultado da interpolação do deslocamento u sobre cada face da fratura. Uma lei de contato foi introduzida para restringir a tensão na fratura e, ao mesmo tempo, o deslocamento. Essa lei usa parâmetros de penalidade, interpretado por eles como parâmetros de rigidez. Maiores detalhes desse método podem ser encontrados no respectivo artigo.

Cabe ressaltar que a interpolação do deslocamento permitiu inserir indiretamente a descrição do que ocorre na fratura. O que não foi mostrado pelos autores é se essa interpolação quantifica bem ou não o salto de deslocamento que ocorre ao longo das faces da fratura.

Independente dessa característica, o XFEM tem mostrado uma capacidade notável na modelagem de propagação de fratura sem o uso de geração sucessiva de malhas. A adição de funções descontínuas à função de interpolação de um elemento comum mostrou ser um procedimento eficaz.

A adição eliminou a necessidade de discretização da fratura, mas ela inseriu outras duas: a criação de subdomínios para integração numérica e a inclusão de elementos de transição ao longo de toda a fratura. O número de elementos de transição pode ser minimizado de acordo com a função descontínua empregada, mas a integração numérica torna a introdução do XFEM em um código de elemento finito um pouco trabalhosa.

2.2.
Embedded element

Semelhante ao XFEM, o elemento *embedded* utiliza graus de liberdade adicionais para representar a descontinuidade no campo de deslocamento. Duas características o diferenciam do XFEM. A primeira característica é o uso de duas equações para estabelecer o equilíbrio mecânico, a segunda é a não compatibilidade do elemento.

Com o intuito de definir o equilíbrio mecânico, são utilizados o Princípio do Trabalho Virtual (expressão (2.1)) e a equação da continuidade de tensão. Essa equação impõe que, em um corpo cortado por uma superfície de descontinuidade, as tensões imediatamente à esquerda e à direita da superfície sejam iguais. Observando a Figura 2-7 e usando a mesma nomenclatura de subdomínios Ω^+ e Ω^- do XFEM, a equação da continuidade é definida por:

$$\mathbf{N_n} \cdot \boldsymbol{\sigma}_{\Omega^+} = \mathbf{N_n} \cdot \boldsymbol{\sigma}_{\Omega^-} \tag{2.17}$$

Onde:

Ω^+ - subdomínio à direita de Γ_F;

Ω^- - subdomínio à esquerda de Γ_F;

$\boldsymbol{\sigma}_{\Omega^+}$ - tensor de tensão no subdomínio Ω^+;

$\boldsymbol{\sigma}_{\Omega^-}$ - tensor de tensão no subdomínio Ω^-;

$\mathbf{N_n}$ - matriz que transforma o vetor de tensão em um vetor de força de superfície;

Γ_F - superfície de descontinuidade.

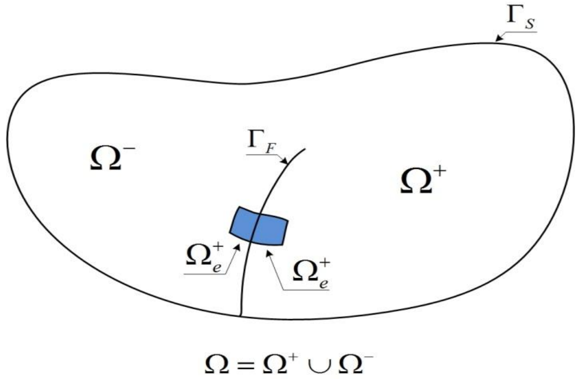


Figura 2-7 – Corpo cortado parcialmente por uma superfície (Manzoli e Shing, 2006)

Manzoli e Shing (2006) reescreveram a equação da continuidade permitindo relacionar a tensão no corpo (fora da descontinuidade) à força de superfície na descontinuidade como:

$$\mathbf{F_T} - \mathbf{N_n} \cdot \boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{\Omega}} = 0 \tag{2.18}$$

Onde:

$\mathbf{N_n}$ - matriz que transforma o vetor de tensão em um vetor de força de superfície;

$\mathbf{F_T}$ – Vetor força de superfície na descontinuidade;

$\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{\Omega}}$ – Vetor tensão atuante no corpo imediatamente à esquerda ou à direita da descontinuidade (Γ_F).

Como mencionado no capítulo de introdução, o elemento *embedded* faz uso de um ponto de colocação. Por hipótese, a descontinuidade Γ_F passa por esse ponto, local do elemento em que o grau de liberdade de salto é posicionado e onde a equação de continuidade de tensão é avaliada. A adoção dessa hipótese e a uniformidade do salto no interior do elemento conferem ao elemento *embedded* a característica de ser não compatível.

Em relação ao Princípio do Trabalho Virtual, Manzoli e Shing (2006) aplicaram o princípio apenas à porção do corpo fora da descontinuidade. Para utilizá-lo, eles admitiram que o deslocamento é a composição de duas parcelas, consequentemente, a deformação e a tensão também.

Considerando o elemento sombreado indicado na Figura 2-7, o deslocamento ($\mathbf{u}$) no interior do elemento pode ser decomposto em duas partes: uma associada à deformação do corpo fora da região de descontinuidade ($\tilde{\mathbf{u}}$) e outra relativa ao movimento de corpo rígido ($\hat{\mathbf{u}}$) entre as duas partes do elemento (subdomínios Ω_e^+ e Ω_e^-) cortado pela descontinuidade. A expressão (2.19) mostra a definição do deslocamento.

$$\mathbf{u} = \tilde{\mathbf{u}} + \hat{\mathbf{u}} \tag{2.19}$$

onde:

$\mathbf{u}$ - vetor de deslocamento;

$\tilde{\mathbf{u}}$ - componente do vetor deslocamento associado à deformação do corpo fora da descontinuidade;

$\hat{\mathbf{u}}$ - componente do vetor deslocamento associado ao movimento de corpo rígido entre as duas partes do elemento.

Assumindo que o movimento relativo na interface entre os subdomínios Ω_e^+ e Ω_e^- seja uniforme, a componente de deslocamento de corpo rígido pode ser expressa como:

$$\hat{\mathbf{u}} = \mathrm{H}' \cdot \|\mathbf{u}\| \quad (2.20)$$

Onde:

H' - função *heaviside*;

$\|\mathbf{u}\|$ - vetor de salto de deslocamento.

De modo idêntico ao XFEM, a função *heaviside* é igual a 1 para o subdomínio Ω^+ e 0 para o subdomínio Ω^-.

Manzoli e Shing (2006) aproximaram os deslocamentos descontínuos $\mathbf{u}$ e $\hat{\mathbf{u}}$ através dos campos contínuos $\mathbf{u_h}$ e $\hat{\mathbf{u}}_\mathbf{h}$ respectivamente. Baseado na expressão (2.19), o deslocamento $\tilde{\mathbf{u}}$ pode ser aproximado por:

$$\tilde{\mathrm{u}}_\mathrm{h} = \mathrm{u}_\mathrm{h} - \hat{\mathrm{u}}_\mathrm{h} \quad (2.21)$$

Onde:

$\mathbf{u_h}$ – vetor deslocamento aproximado;

$\tilde{\mathbf{u}}_\mathbf{h}$ - aproximação da componente do vetor deslocamento associado à deformação do corpo;

$\hat{\mathbf{u}}_\mathbf{h}$ - aproximação da componente do vetor deslocamento associado ao movimento de corpo rígido.

A fim de ilustrar a decomposição do campo de deslocamento, o elemento sombreado na Figura 2-7 será ampliado como mostrado na Figura 2-8, página 55. A Figura 2-8(a) mostra o elemento sem nenhum deslocamento, podendo ser interpretada como uma configuração indeformada. O elemento é dividido nos subdomínios Ω_e^+ e Ω_e^- pela descontinuidade Γ_F (indicada pela linha traço-ponto).

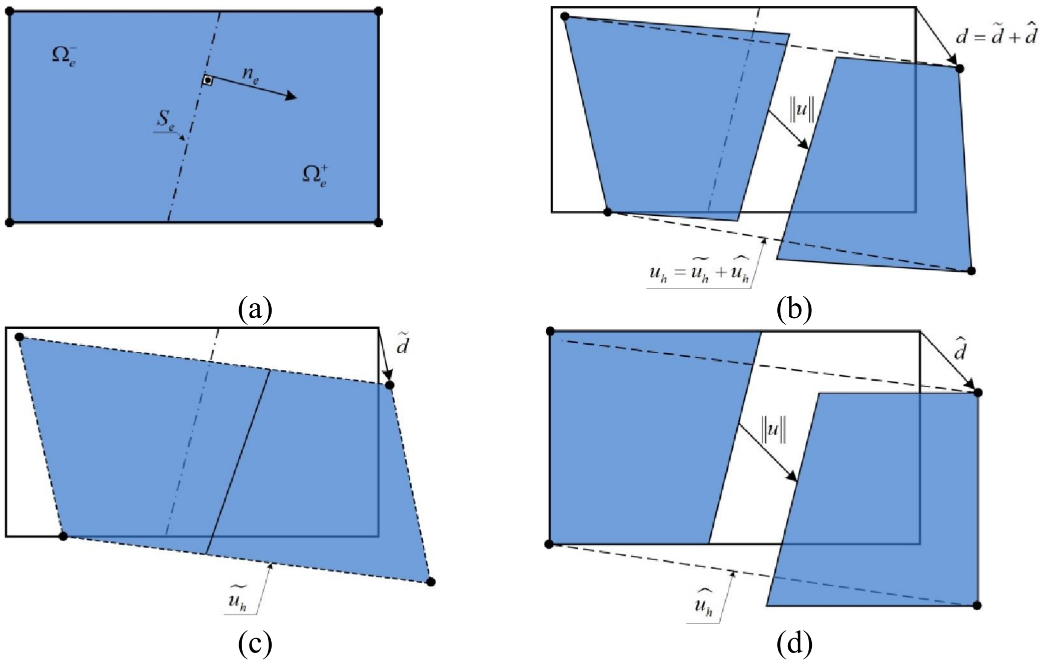


Figura 2-8: Decomposição do campo de deslocamento (Manzoli e Shing, 2006)

Submetido a um carregamento qualquer, o elemento deforma-se assumindo a configuração da Figura 2-8(b). Essa configuração mostra o deslocamento total sofrido pelo elemento. Há três representações nela. A primeira representação é a do elemento indeformado, a qual é indicada por uma linha cheia com traço grosso. Indicada por uma linha cheia com traço fino, a segunda representação mostra o deslocamento total sofrido pelo elemento, inclusive a separação dos subdomínios Ω_e^+ e Ω_e^- (paralelogramos na cor azul). Essa representação refere-se ao deslocamento total (u) da expressão (2.19). A terceira, indicada por um paralelogramo com linha tracejada, reproduz a idealização do deslocamento total ($\mathrm{u_h}$) na qual não há separação dos subdomínios.

Utilizando a mesma simbologia da Figura 2-8(b), a Figura 2-8(c) mostra o deslocamento associado somente à deformação do corpo. Nessa configuração, as representações do elemento relativas aos deslocamentos $\tilde{\mathbf{u}}$ e $\tilde{\mathbf{u}}_\mathbf{h}$ tem a mesma forma, pois os dois campos de deslocamento são contínuos.

Por fim, a Figura 2-8(d) mostra a configuração do elemento referente ao deslocamento de corpo rígido. Observa-se que apenas o subdomínio Ω_e^+ mudou de posição como indicado pela representação em linha cheia com traço fino, caracterizando o movimento relativo. O paralelogramo em linha tracejada indica a aproximação contínua do deslocamento ($\hat{\mathbf{u}}_\mathbf{h}$).

Seguindo essa idealização, são introduzidos os vetores de deslocamento nodal $\mathbf{d}$, $\tilde{\mathbf{d}}$ e $\hat{\mathbf{d}}$ associados às aproximações $\mathbf{u_h}$, $\tilde{\mathbf{u}}_\mathbf{h}$ e $\hat{\mathbf{u}}_\mathbf{h}$ respectivamente. Esses vetores estão representados na Figura 2-8. De modo análogo à expressão (2.20), o vetor $\hat{\mathbf{d}}$ pode ser escrito como:

$$\hat{\mathbf{d}} = \mathbf{P} \cdot \|\mathbf{u}\| \tag{2.22}$$

Sendo:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} H'_{Se}(\boldsymbol{x_1}) & 0 \\ 0 & H'_{Se}(\boldsymbol{x_1}) \\ \vdots & \vdots \\ H'_{Se}(\boldsymbol{x_n}) & 0 \\ 0 & H'_{Se}(\boldsymbol{x_n}) \end{bmatrix}$$

Onde:

$\boldsymbol{x}$ - coordenada espacial do i-ésimo nó do elemento;

H'_{Se} - função *heaviside* avaliada nos nós do elemento;

A matriz $\mathbf{P}$ permite distribuir o salto deslocamento do interior do elemento para os seus nós. Este artifício cria um vetor de salto fictício nos nós do elemento ($\hat{\mathbf{d}}$). Cabe observar que tal procedimento não eliminou o grau de liberdade de salto associado ao ponto de colocação.

Introduzidos os vetores de deslocamento nodal $\mathbf{d}$ e $\hat{\mathbf{d}}$, as aproximações para os deslocamentos $\mathbf{u_h}$ e $\hat{\mathbf{u}}_\mathbf{h}$ podem ser escritas como:

$$\begin{gathered} \mathbf{u_h} = \mathbf{N} \cdot \mathbf{d} \\ \hat{\mathbf{u}}_\mathbf{h} = \mathbf{N} \cdot \hat{\mathbf{d}} \\ ou\ \hat{\mathbf{u}}_\mathbf{h} = \mathbf{N} \cdot \mathbf{P} \cdot \|\mathbf{u}\| \end{gathered} \tag{2.23}$$

Onde:

$\mathbf{N}$ – matriz com a função de interpolação do elemento.

Com os deslocamentos $\mathbf{u_h}$ e $\hat{\mathbf{u}}_\mathbf{h}$, os respectivos campos de deformação são:

$$\begin{gathered} \boldsymbol{\varepsilon}_\mathbf{h} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{d} \\ \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_\mathbf{h} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{P} \cdot \|\mathbf{u}\| \end{gathered} \tag{2.24}$$

sendo $\mathbf{B}$ a matriz de deformação de um elemento comum.

De modo análogo ao deslocamento $\tilde{\mathbf{u}}_{\mathbf{h}}$ da expressão (2.21), pode-se aproximar a deformação $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\mathbf{h}}$ por:

$$\begin{aligned} \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\mathbf{h}} &= \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{h}} - \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\mathbf{h}} \\ ou\ \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\mathbf{h}} &= \mathbf{B} \cdot (\mathbf{d} - \mathbf{P} \cdot \|\mathbf{u}\|) \end{aligned} \tag{2.25}$$

onde:

$\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{h}}$ – aproximação do vetor de deformação;

$\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\mathbf{h}}$ – aproximação da componente do vetor de deformação do corpo;

$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\mathbf{h}}$ – aproximação da componente de deformação associada ao movimento de corpo rígido.

Determinadas as deformações $\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{h}}$, $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\mathbf{h}}$ e $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\mathbf{h}}$, o vetor tensão relativo à deformação do corpo (fora da descontinuidade) é definido por:

$$\begin{aligned} \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathbf{h}} &= \mathbf{D} \cdot \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\mathbf{h}} \\ ou\ \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathbf{h}} &= \mathbf{D} \cdot \mathbf{B} \cdot (\mathbf{d} - \mathbf{P} \cdot \|\mathbf{u}\|) \end{aligned} \tag{2.26}$$

Conhecidos os campos $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\mathbf{h}}$ e $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathbf{h}}$, o Princípio do Trabalho Virtual para o elemento *embedded* é aproximado por:

$$\mathbf{K_e} \cdot (\mathbf{d} - \mathbf{P} \cdot \|\mathbf{u}\|) = \mathbf{F_e} \tag{2.27}$$

Sendo:

$$\begin{aligned} \mathbf{K_e} &= \int_{\Omega_e} \mathbf{B}^{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{B}\, d\Omega \\ \mathbf{F_e} &= \int_{\Omega_e} \mathbf{N}^{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{F_B}\, d\Omega_e + \int_{\Gamma_S} \mathbf{N}^{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{F_S}\, d\Gamma_S \end{aligned} \tag{2.28}$$

Onde:

K_e - matriz de rigidez do elemento *embedded*;

F_e - vetor de força nodal do elemento *embedded*.

Baseado na hipótese de que o material da descontinuidade pode ser representado por uma lei constitutiva relacionando tensão e deformação, Manzoli e Shing (2006) aproximaram a força de superfície ($\mathbf{F_{T_h}}$) para o elemento *embedded*.

$$\mathbf{F_{T_h}} = \mathbf{N_n} \cdot \mathbf{D} \cdot \left[\mathbf{B}(\mathbf{d} - \mathbf{P} \cdot \|\mathbf{u}\|) + \frac{1}{e} \cdot \mathbf{N_n}^{\mathbf{T}} \cdot \|\mathbf{u}\|\right] \tag{2.29}$$

Onde:

e – espessura da descontinuidade

Usando as expressões (2.26) e (2.29), a equação de continuidade de tensão (expressão (2.17)) para o elemento *embedded* assume a forma:

$$\mathbf{F_{T_e}} - \mathbf{N_n} \cdot \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathbf{e}} = \mathbf{0} \tag{2.30}$$

Onde:

$\mathbf{F_{T_e}}$ - Vetor força de superfície avaliada no ponto de colocação;

$\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathbf{e}}$ – Vetor tensão referente à deformação do corpo (fora da descontinuidade) avaliada no ponto de colocação.

Duas observações podem ser feitas em relação à descrição da força de superfície ($\mathbf{F_{T_e}}$). A primeira é que o material da descontinuidade e o da região fora dela são os mesmos. A diferença está no regime em que o material se encontra. Por hipótese, somente a descontinuidade encontra-se em um regime de plastificação. A região fora da descontinuidade tem comportamento elástico.

A segunda observação é que, ao usar uma lei constitutiva de material contínuo ($\mathbf{D}$), as grandezas envolvidas são deformação ($\boldsymbol{\varepsilon}$) e tensão ($\boldsymbol{\sigma}$). Desse modo, é necessário introduzir a matriz N_n para transformar o vetor tensão em um vetor de força de superfície. Ao adotar esse procedimento, impõe-se o equilíbrio de forças nas duas faces da descontinuidade.

As expressões (2.27) e (2.30) formam o conjunto completo das equações do elemento finito *embedded*. Para retirar o grau de liberdade $\|\mathbf{u}\|$ da solução do sistema de equações, Manzoli e Shing sugeriram o uso da condensação estática.

O elemento *embedded* permite representar uma descontinuidade em uma malha evitando a sua discretização. Em relação ao XFEM, ele apresenta a vantagem de dispensar a criação de subdomínios para realizar a integração da matriz de rigidez, tornando a introdução em um código mais simples.

Um ponto peculiar do elemento é o posicionamento do grau de liberdade de salto no ponto de colocação (interior do elemento). Esse posicionamento faz com que a compatibilidade associada ao grau de liberdade de salto de deslocamento não seja garantida entre elementos vizinhos. A garantia da compatibilidade permite interpolar o salto em um grau maior, mas a ausência dela não compromete a descrição cinemática do corpo. Outro ponto é a descrição do material que compõe a descontinuidade. Manzoli e Shing indicaram a possibilidade de trocar a lei constitutiva relacionando tensão e deformação por uma lei de interface. Essa troca sugere o uso de materiais diferentes, porém esse procedimento não foi investigado por eles. Ainda não é possível afirmar algo sobre a eficiência de tal procedimento.

2.3. Formulação mecânica do elemento enriquecido explicitamente

O capítulo de introdução mencionou algumas formulações de elemento enriquecido que têm sido aplicadas na modelagem de materiais geológicos. Concebidas inicialmente para a modelagem de processos de ruptura, essas formulações apresentam algumas limitações na descrição física de descontinuidades.

No contexto de meios geológicos, a descrição física da descontinuidade é um aspecto relevante, pois os saltos de deslocamento e de poro-pressão são diretamente relacionados ao contraste de propriedades físicas da falha e do meio poroso ao seu redor. Procurando atender a essa necessidade, buscou-se na literatura uma formulação que naturalmente introduzisse uma relação constitutiva para a descontinuidade.

Wan et al (1995) propuseram modelar a ruptura de uma massa de solo através de um elemento finito que reproduzisse um campo descontínuo de deslocamento e dispensasse a geração automática de malha. Vista como resultado de um processo cumulativo de deformação plástica localizada, a ruptura manifesta-se fisicamente na forma de uma banda de cisalhamento. Devido à pequena espessura da banda em relação à massa de solo, Wan et al idealizaram a banda como uma superfície na qual ocorrem apenas deslocamentos relativos.

A formulação do elemento faz uso de uma modificação do Princípio do Trabalho Virtual, descrita por Malvern (1969). Seguindo esta modificação e adicionando novos termos à função de interpolação de elementos comuns, Wan et al conseguiram representar a descontinuidade no campo de deslocamento devido à presença da banda de cisalhamento. Diferentemente de outras formulações, uma lei constitutiva foi introduzida para descrever o caráter de contato ou atrito na banda de cisalhamento.

A naturalidade com que uma relação constitutiva é introduzida na banda de cisalhamento é o principal motivo que levou à adoção dessa formulação para o desenvolvimento do elemento cortado por uma falha. A adição de graus de liberdade de deslocamento extras é o fator que sugeriu nomear a referida formulação como elemento enriquecido explicitamente.

2.3.1. Equação de equilíbrio

Malvern (1969) apresentou o Principio do Trabalho Virtual modificado para um corpo totalmente seccionado por uma superfície onde apenas deslocamentos tangenciais podiam ocorrer. O mesmo procedimento é mostrado neste texto, porém para um corpo parcialmente seccionado e com a superfície deslizando em qualquer direção como ilustrado na Figura 2-9.

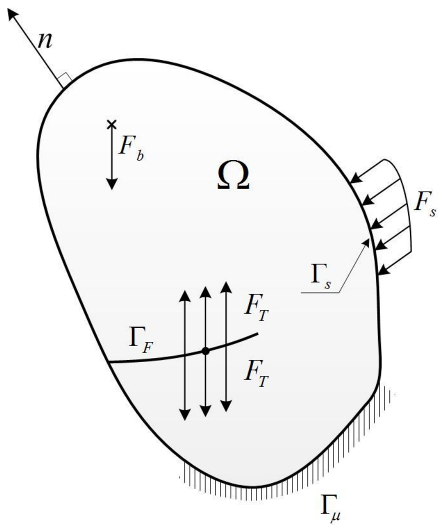


Figura 2-9: Corpo parcialmente seccionado por uma superfície

Sendo:

Ω - domínio do corpo cortado por uma descontinuidade;

Γ_u - porção do contorno onde é aplicada a condição de contorno de deslocamento;

Γ_S - porção do contorno onde é aplicada a força de superfície;

Γ_F – superfície de deslocamento relativo (falha ou descontinuidade);

n - vetor normal à superfície do corpo;

$\mathbf{F_b}$ – força de massa;

$\mathbf{F_s}$ – força de superfície atuante no contorno Γ_S;

$\mathbf{F_T}$ – força de superfície atuante na descontinuidade.

O corpo encontra-se em equilíbrio e está submetido à ação de forças de massa e superfície. A descontinuidade é idealizada como uma superfície interna sendo indicada na Figura 2-9 pela linha cheia Γ_F. Para um elemento infinitesimal do domínio Ω, a equação de equilíbrio estático é escrita como:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{F_b} = \mathbf{0} \tag{2.31}$$

onde:

$\boldsymbol{\sigma}$ - tensor de tensão;

$\mathbf{F_b}$ - força de massa;

O tensor $\boldsymbol{\sigma}$ é relacionado à deformação através de uma lei constitutiva como indicado na expressão (2.32). A expressão (2.33) mostra a compatibilidade entre deformação e deslocamento.

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \tag{2.32}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \nabla \cdot \mathbf{u} \tag{2.33}$$

Onde:

$\mathbf{D}$ - matriz constitutiva;

$\boldsymbol{\varepsilon}$ - tensor de deformação;

$\mathbf{u}$ – deslocamento.

Para restringir o deslocamento do corpo, aplica-se em Γ_u a condição de contorno de deslocamento.

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} \text{ sobre } \Gamma_u \tag{2.34}$$

As forças de superfície nos contornos Γ_s e Γ_F são:

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{F_s} \text{ sobre } \Gamma_s \tag{2.35}$$

$$\mathbf{F}_\mathbf{T}^{+} = -\mathbf{F}_\mathbf{T}^{+} \; sobre \; \Gamma_f \tag{2.36}$$

Com relação à expressão (2.36), a força de superfície $\mathbf{F_T}$ é interpretada como uma força que se opõe ao movimento da descontinuidade, isto é, atrito. Malvern colocou esta condição de contorno natural para garantir que a terceira Lei de Newton fosse obedecida. Essa condição diz que se uma face da falha exerce uma força $\mathbf{F_T}$ sobre a outra, então a segunda face irá exercer sobre a primeira uma força $\mathbf{F_T}$ igual em módulo e direção, mas com sentido contrário.

A equação diferencial (expressão (2.31)) descreve o equilíbrio em cada ponto do domínio Ω. Para definir o equilíbrio em todo o domínio Ω, outra equação na forma de integral deve ser estabelecida. Esta equação, que contém implicitamente a equação diferencial e as condições de contorno, é o Princípio do Trabalho Virtual.

Malvern afirmou que o Princípio do Trabalho Virtual não pode ser aplicado diretamente sobre todo o domínio Ω (Figura 2-9) devido à descontinuidade no campo de deslocamento e de sua derivada primeira. Porém, é possível aplicá-lo em regiões do corpo onde o deslocamento e sua derivada primeira são contínuos.

Seguindo esta recomendação, o domínio Ω é dividido imaginariamente nos subdomínios Ω+ e Ω- conforme mostrado na Figura 2-10, página 63. A divisão é feita pela união dos contornos Γ_f e Γ_v, sendo este último imaginário. Sobre o contorno Γv, em cada subdomínio, existe uma força de superfície interna $\mathbf{F_i}$ representando a ação que um subdomínio exerce sobre outro. Como o corpo está em equilíbrio, qualquer parte dele também está. Isso exige que $\mathbf{F_i}$ exista aos pares, ou seja, duas forças iguais em módulo e direção, mas com sentidos contrários.

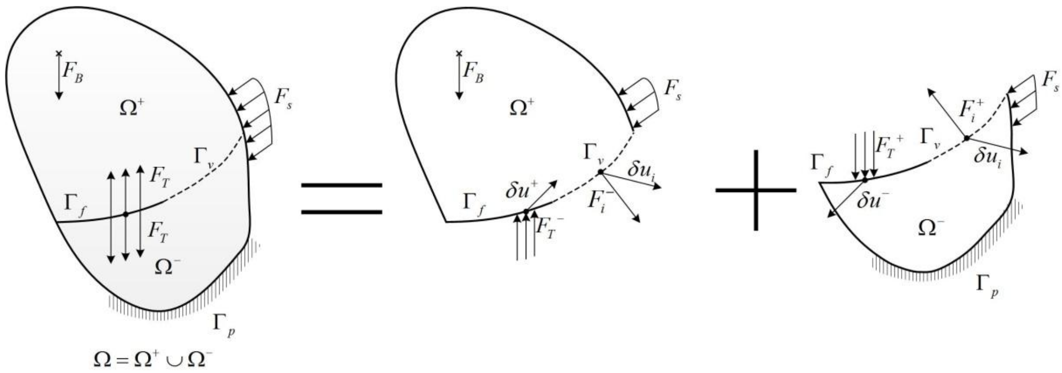


Figura 2-10: Divisão do domínio **Ω** *nos subdomínios* **Ω+** *e* **Ω-**

Onde:

Ω^+, Ω^- - subdomínios positivo e negativo;

Γ_V - contorno imaginário;

$\mathbf{F_T^+}$ - força de superfície na descontinuidade exercida pelo subdomínio Ω+ sobre Ω-;

$\mathbf{F_T^-}$ - força de superfície na descontinuidade exercida pelo subdomínio Ω- sobre Ω+;

$\mathbf{F_i^+}$ - força de superfície interna exercida pelo subdomínio Ω+ sobre Ω-;

$\mathbf{F_i^-}$ - força de superfície interna exercida pelo subdomínio Ω- sobre Ω+;

$\boldsymbol{\delta}\mathbf{u}^+$, $\boldsymbol{\delta}\mathbf{u}^-$ - variação de deslocamento virtual dos subdomínios Ω+ e Ω- ao longo da descontinuidade Γ_f;

$\boldsymbol{\delta}\mathbf{u_i}$ - variação de deslocamento virtual sobre o contorno Γv.

Dividido o domínio Ω, o Princípio do Trabalho Virtual para cada subdomínio é escrito conforme as expressões (2.37) e (2.38). $\boldsymbol{\delta}\mathbf{u}^+$ e $\boldsymbol{\delta}\mathbf{u}^-$ são variações virtuais de deslocamento de cada face da falha, podendo ser diferentes uma da outra. A variação virtual $\boldsymbol{\delta}\mathbf{u_i}$ é a mesma para os dois subdomínios, pois o deslocamento é único e contínuo em Γv.

$$\int_{\Omega^+} \boldsymbol{\delta\varepsilon} \cdot \boldsymbol{\sigma} d\Omega^+ = \int_{\Omega^+} \boldsymbol{\delta}\mathbf{u} \cdot \mathbf{F_b} d\Omega^+ + \int_{\Gamma_s^+} \boldsymbol{\delta}\,\mathbf{u} \cdot \mathbf{F_s} d\Gamma_s^+ + \int_{\Gamma_f^+} \boldsymbol{\delta}\,\mathbf{u}^+ \cdot \mathbf{F_T^-} d\Gamma_f^+ + \int_{\Gamma_v} \boldsymbol{\delta}\,\mathbf{u_i} \cdot \mathbf{F_i^-} d\Gamma_v \tag{2.37}$$

$$\int_{\Omega^-} \boldsymbol{\delta\varepsilon} \cdot \boldsymbol{\sigma} d\Omega^- = \int_{\Omega^-} \boldsymbol{\delta u} \cdot \mathbf{F_b} d\Omega^- + \int_{\Gamma_s^-} \boldsymbol{\delta u} \cdot \mathbf{F_s} d\Gamma_t^- + \int_{\Gamma_f^-} \boldsymbol{\delta u^-} \cdot \mathbf{F_T^+} d\Gamma_f^- + \int_{\Gamma_v} \boldsymbol{\delta u_i} \cdot \mathbf{F_i^+} d\Gamma_v \quad (2.38)$$

Onde:

$\boldsymbol{\delta\varepsilon}$ - variação virtual do campo de deformação;

$\boldsymbol{\delta u}$ - variação virtual do campo de deslocamento;

Obedecendo à condição de contorno da expressão (2.36) e à existência de um par de forças sobre Γv, as expressões (2.37) e (2.38) podem ser reescritas como:

$$\int_{\Omega^+} \boldsymbol{\delta\varepsilon} \cdot \boldsymbol{\sigma} d\Omega^+ = \int_{\Omega^+} \boldsymbol{\delta u} \cdot \mathbf{F_b} d\Omega^+ + \int_{\Gamma_s^+} \boldsymbol{\delta u} \cdot \mathbf{F_s} d\Gamma_s^+ + \int_{\Gamma_f^+} \boldsymbol{\delta u^+} \cdot (-\mathbf{F_T^+})\, d\Gamma_f^+ + \int_{\Gamma_v} \boldsymbol{\delta u_i} \cdot (-\mathbf{F_i^+})\, d\Gamma_v \quad (2.39)$$

$$\int_{\Omega^-} \boldsymbol{\delta\varepsilon} \cdot \boldsymbol{\sigma} d\Omega^- = \int_{\Omega^-} \boldsymbol{\delta u} \cdot \mathbf{F_b} d\Omega^- + \int_{\Gamma_s^-} \boldsymbol{\delta \bar{u}} \cdot \mathbf{F_s} d\Gamma_s^- + \int_{\Gamma_f^-} \boldsymbol{\delta u^-} \cdot \mathbf{F_T^+} d\Gamma_f^- + \int_{\Gamma_v} \boldsymbol{\delta u_i} \cdot \mathbf{F_i^+} d\Gamma_v \quad (2.40)$$

Somando as expressões (2.39) e (2.40).

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\delta\varepsilon} \cdot \boldsymbol{\sigma} d\Omega = \int_{\Omega} \boldsymbol{\delta u} \cdot \mathbf{F_b} d\Omega + \int_{\Gamma_s} \boldsymbol{\delta u} \cdot \mathbf{F_s} d\Gamma_s + \int_{\Gamma_f} (\boldsymbol{\delta u^-} - \boldsymbol{\delta u^+}) \cdot \mathbf{F_T^+} d\Gamma_f \quad (2.41)$$

Fazendo:

$$\boldsymbol{\delta}\|\mathbf{u}\| = \boldsymbol{\delta u^-} - \boldsymbol{\delta u^+} \qquad \mathbf{F_T} = \mathbf{F_T^+} \quad (2.42)$$

O Princípio do Trabalho Virtual modificado assume a forma:

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\delta\varepsilon} \cdot \boldsymbol{\sigma} d\Omega = \int_{\Omega} \boldsymbol{\delta u} \cdot \mathbf{F_b} d\Omega + \int_{\Gamma_s} \boldsymbol{\delta u} \cdot \mathbf{F_s} d\Gamma_s + \int_{\Gamma_f} \boldsymbol{\delta} \|\mathbf{u}\| \cdot \mathbf{F_T} d\Gamma_F \qquad (2.43)$$

Na expressão (2.42), a variável $\|\boldsymbol{u}\|$ representa o deslocamento relativo das faces da descontinuidade ou, simplesmente, o salto de deslocamento que ocorre através da descontinuidade. A variável $\boldsymbol{\delta}\|\boldsymbol{u}\|$ representa uma variação virtual deste salto.

A respeito da expressão (2.43), Malvern diz que quando uma superfície que permite deslizamento existe no interior de um corpo, o trabalho devido à força de atrito deve ser adicionado ao trabalho das forças externas no Princípio do Trabalho Virtual. Pelo fato do atrito se opor ao movimento do corpo, este trabalho é negativo.

Visando a aplicação do Princípio do Trabalho Virtual modificado em problemas não lineares, a expressão pode ser reescrita na forma incremental por:

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\delta\varepsilon} \cdot \dot{\boldsymbol{\sigma}} d\Omega = \int_{\Omega} \boldsymbol{\delta u} \cdot \dot{\mathbf{F}}_{\mathbf{b}} d\Omega + \int_{\Gamma_s} \boldsymbol{\delta u} \cdot \dot{\mathbf{F}}_{\mathbf{s}} d\Gamma_s + \int_{\Gamma_f} \boldsymbol{\delta} \|\mathbf{u}\| \cdot \dot{\mathbf{F}}_{\mathbf{T}} d\Gamma_F \qquad (2.44)$$

Onde:

$\boldsymbol{\delta\varepsilon}$ - variação virtual de deformação;

$\boldsymbol{\delta u}$ - variação virtual de deslocamento;

$\dot{\boldsymbol{\sigma}}$ – incremento do tensor de tensão;

$\dot{\mathbf{F}}_{\mathbf{b}}$ – incremento do vetor força de massa;

$\dot{\mathbf{F}}_{\mathbf{s}}$ – incremento do vetor força de superfície;

$\dot{\mathbf{F}}_{\mathbf{T}}$ – incremento do vetor força de superfície atuante na descontinuidade.

2.3.2. Aproximação do campo de deslocamento

Antes de aplicar o MEF ao Princípio do Trabalho Virtual modificado, será apresentada a aproximação do campo de deslocamento para um corpo cortado por uma descontinuidade de acordo com o ilustrado na Figura 2-9. Feita a aproximação, posteriormente, serão definidos os campos de deformação, tensão, matriz de rigidez e vetor de força do elemento enriquecido explicitamente.

Seguindo o conceito de descontinuidade forte, o deslocamento é decomposto em duas parcelas: uma contínua e outra descontínua (salto) conforme mostrado na expressão (2.45).

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} + \|\mathbf{u}\| \tag{2.45}$$

Onde:

$\mathbf{u}$ – vetor deslocamento;

$\bar{\mathbf{u}}$ - componente contínua do vetor deslocamento;

$\|\mathbf{u}\|$ – vetor de salto de deslocamento.

Wan et al (1995) assumiram que o grau de liberdade associado ao salto pode ocupar qualquer posição na face do elemento interceptado pela descontinuidade. Isso difere do XFEM, pois nele os saltos estão sempre posicionados nos vértices do elemento. A Figura 2-11 mostra uma malha interceptada por uma descontinuidade. A descontinuidade é representada por uma linha cheia na cor preta, os elementos cortados por ela são indicados pela cor cinza.

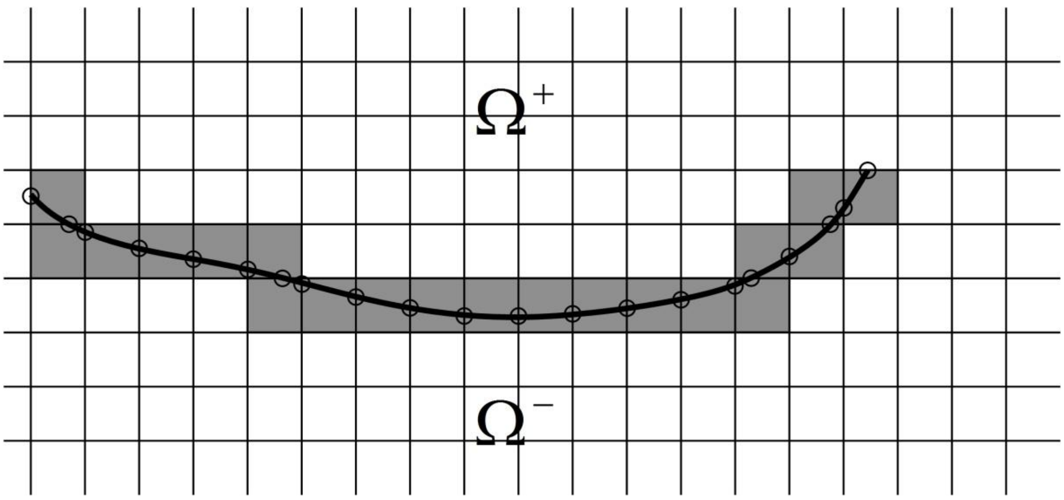


Figura 2-11: Malha interceptada por uma descontinuidade

Ao cruzar um elemento, a descontinuidade é idealizada como um segmento de reta. Em cada elemento cortado, a descontinuidade é limitada por dois nós como indicado pelos círculos brancos na Figura 2-11. Esses nós não interferem no mapeamento do elemento. Considerando a presença desses nós na malha, as aproximações das duas componentes de deslocamento da expressão (2.45) são:

$$\bar{\mathbf{u}} \cong \bar{\mathbf{u}}^{\mathbf{h}} = \sum_{i \in I} \mathbf{N}_i^{\boldsymbol{\alpha}} \cdot \mathbf{u}_i^{\boldsymbol{\alpha}} \tag{2.46}$$

$$\|\mathbf{u}\| \cong \|\mathbf{u}^{\mathbf{h}}\| = \sum_{j \in J} \mathbf{N}_j^{\boldsymbol{\beta}} \cdot \mathbf{u}_j^{\boldsymbol{\beta}} \tag{2.47}$$

Onde:

$\bar{\mathbf{u}}^{\mathbf{h}}$ – aproximação da componente contínua de deslocamento;

$\|\mathbf{u}^{\mathbf{h}}\|$ – aproximação do salto de deslocamento;

$\mathbf{u}^{\boldsymbol{\alpha}}$ – grau de liberdade de deslocamento associado à componente contínua;

$\mathbf{u}^{\boldsymbol{\beta}}$ – grau de liberdade de salto;

$\mathbf{N}^{\boldsymbol{\alpha}}$ – matriz contendo a função de interpolação associada ao grau $\mathbf{u}^{\boldsymbol{\alpha}}$;

$\mathbf{N}^{\boldsymbol{\beta}}$ – matriz contendo a função de interpolação associada ao salto de deslocamento $\mathbf{u}^{\boldsymbol{\beta}}$;

i - i-ésimo nó da malha; exceto o nó que associado à descontinuidade;

j - j-ésimo nó associado à descontinuidade.

I - conjunto dos nós da malha, exceto aqueles associados à descontinuidade;

J - conjunto dos nós associados à descontinuidade.

Logo, o deslocamento aproximado pelo MEF da expressão (2.45) é:

$$\mathbf{u} \cong \mathbf{u}^{\mathbf{h}} = \sum_{i \in I} \mathbf{N}_i^{\boldsymbol{\alpha}} \cdot \mathbf{u}_i^{\boldsymbol{\alpha}} + \sum_{j \in J} \mathbf{N}_j^{\boldsymbol{\beta}} \cdot \mathbf{u}_j^{\boldsymbol{\beta}} \tag{2.48}$$

Sendo:

$\mathbf{u}^{\mathbf{h}}$ – deslocamento aproximado pelo MEF.

A função de interpolação N^{α} é uma função de interpolação comum. N^{β} é a função que interpola o salto de deslocamento no interior de um elemento cortado por uma descontinuidade, assumindo diferentes formas de acordo com o tipo de elemento (CST, bilinear).

Wan et al (1995) apresentaram funções de interpolação N^{β} para os elementos bilinear e CST. A função N^{β} do elemento CST pode interpolar o salto independente da forma como elemento é cortado pela descontinuidade. Quanto ao elemento bilinear, a função apresenta uma limitação quando a descontinuidade corta duas faces que são unidas pelo mesmo nó (faces adjacentes). Neste caso, Wan et al sugeriram a substituição do elemento bilinear por dois elementos CST, sendo um deles cortado pela descontinuidade. Devido a esta característica, optou-se trabalhar com a formulação do elemento CST.

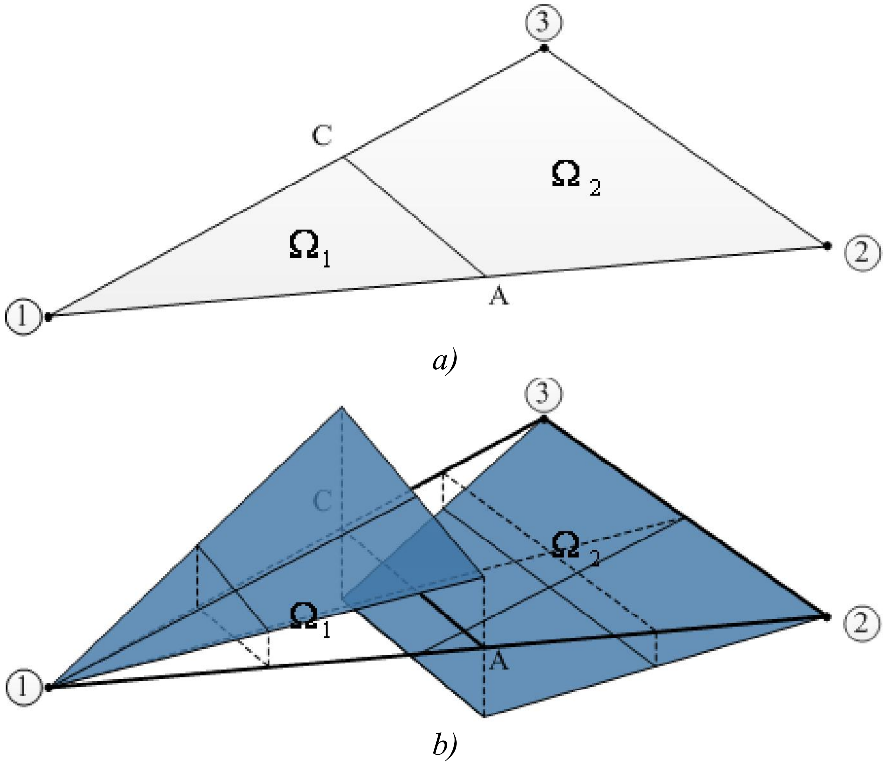


Figura 2-12: a) subdomínios do elemento CST, b) salto de deslocamento

Ao ser cortado por uma descontinuidade, o elemento CST é dividido em duas regiões ou subdomínios: uma região com formato triangular (Ω_1) e outra retangular (Ω_2) conforme mostrado na Figura 2-12(a). A Figura 2-12(b) ilustra como o salto ($\|\mathbf{u}\|$) se distribui no interior do elemento CST.

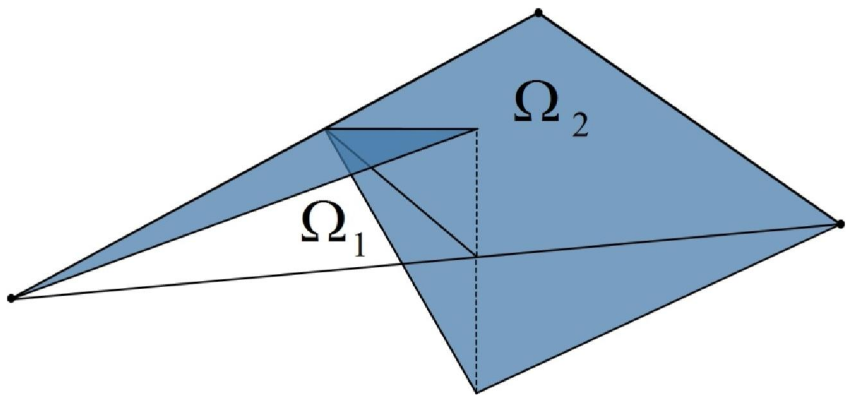


Figura 2-13: Esboço da função de interpolação N^{β} para o elemento CST

Para que o salto $\|\mathbf{u}\|$ seja interpolado, a função N^{β} deve obedecer à mesma regra da função de interpolação N^{α}, isto é, ela deve ser igual a 1 no nó associado ao grau de liberdade do salto e nulo nos demais. A Figura 2-13 mostra um esboço da função N^{β} para o elemento CST. Detalhes a respeito da função N^{β} são apresentados no apêndice B.

2.3.3. Discretização via Método dos Elementos Finitos

Aproximado o campo de deslocamento, a matriz de rigidez e o vetor de força do elemento enriquecido explicitamente podem ser estabelecidos. Para montá-los, são necessárias a equação de compatibilidade deslocamento-deformação e duas relações constitutivas. Observando a expressão (2.45), a deformação do corpo fora da descontinuidade assume a forma:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} + \|\boldsymbol{\varepsilon}\| \tag{2.49}$$

Onde:

$\boldsymbol{\varepsilon}$ - deformação;

$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$ - componente contínua da deformação;

$\|\boldsymbol{\varepsilon}\|$ – componente de deformação relacionada ao salto de deslocamento.

Sobre a descontinuidade, não há deformação. Apenas o salto de deslocamento é definido.

Duas relações constitutivas são estabelecidas para o corpo: uma para a descontinuidade e outra para a região fora dela. A tensão no corpo, fora da descontinuidade, é relacionada à deformação pela expressão (2.32). Para a descontinuidade, Wan et al (1995) relacionaram diretamente a força de superfície na descontinuidade ao salto de deslocamento como mostrado na expressão (2.50). O sinal negativo foi introduzido para indicar que esta força se opõe ao movimento das faces da descontinuidade conforme apontado por Malvern (1969).

$$\mathbf{F_T} = \begin{Bmatrix} F_{T_s} \\ F_{T_n} \end{Bmatrix} = -\mathbf{D_f} \cdot \|\mathbf{u}\| = -\begin{bmatrix} r_{ss} & r_{sn} \\ r_{ns} & r_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \|u_s\| \\ \|u_n\| \end{Bmatrix} \tag{2.50}$$

Onde:

F_{T_s} – componente tangencial da força de superfície F_T;

F_{T_n} - componente normal da força de superfície F_T;

$\|u_s\|$ - componente tangencial do salto de deslocamento;

$\|u_n\|$ - componente normal do salto de deslocamento;

$\mathbf{D_f}$ - matriz constitutiva da descontinuidade;

r_{ss} - rigidez na direção tangencial da descontinuidade;

r_{nn} - rigidez na direção normal da descontinuidade;

r_{sn} – rigidez da descontinuidade relacionando a ação de F_{T_s} sobre u_n;

r_{ns} – rigidez da descontinuidade relacionando a ação de F_{T_n} sobre u_s.

Considerando o campo de deslocamento a nível de elemento e omitindo o sinal de somatório para simplificar a notação, a expressão (2.48) pode ser reescrita como:

$$\mathbf{u} \cong \mathbf{u^h} = \mathbf{N^\alpha} \cdot \mathbf{u^\alpha} + \mathbf{N^\beta} \cdot \mathbf{u^\beta} \tag{2.51}$$

Utilizando as expressões (2.49) e (2.51), a equação de compatibilidade deslocamento-deformação é aproximada por:

$$\boldsymbol{\varepsilon} \cong \boldsymbol{\varepsilon}^\mathbf{h} = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^\mathbf{h} + \left\|\boldsymbol{\varepsilon}^\mathbf{h}\right\| \tag{2.52}$$

Sendo:

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^\mathbf{h} = \frac{\partial \mathbf{N^\alpha}}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{u^\alpha} = \mathbf{B^\alpha} \cdot \mathbf{u^\alpha} \tag{2.53}$$

$$\left\|\boldsymbol{\varepsilon}^\mathbf{h}\right\| = \frac{\partial \mathbf{N^\beta}}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{u^\beta} = \mathbf{B^\beta} \cdot \mathbf{u^\beta} \tag{2.54}$$

Onde:

$\boldsymbol{\varepsilon}^\mathbf{h}$ – deformação aproximada;

$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^\mathbf{h}$ – aproximação da componente contínua de deformação;

$\left\|\boldsymbol{\varepsilon}^\mathbf{h}\right\|$ – aproximação da deformação relacionada ao salto de deslocamento;

$\mathbf{x}$ - coordenada espacial;

$\mathbf{B^\alpha}$ - matriz de compatibilidade deslocamento-deformação relativa à componente contínua do deslocamento;

$\mathbf{B}^{\beta}$ - matriz de compatibilidade deslocamento-deformação relativa ao salto de deslocamento.

Reescrevendo as expressões (2.51) e (2.52) na forma matricial, temos que:

$$\mathbf{u} \cong \mathbf{u}^{\mathbf{h}} = [\mathbf{N}^{\alpha} \quad \mathbf{N}^{\beta}] \cdot \begin{Bmatrix} \mathbf{u}^{\alpha} \\ \mathbf{u}^{\beta} \end{Bmatrix} \tag{2.55}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} \cong \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{h}} = [\mathbf{B}^{\alpha} \quad \mathbf{B}^{\beta}] \cdot \begin{Bmatrix} \mathbf{u}^{\alpha} \\ \mathbf{u}^{\beta} \end{Bmatrix} \tag{2.56}$$

Introduzindo as expressões (2.55), (2.56) e as relações constitutivas (2.32) e (2.50) na expressão (2.44), a equação de equilíbrio aproximada pelo MEF para o elemento enriquecido é:

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega^e} [\mathbf{B}^{\alpha} \quad \mathbf{B}^{\beta}]^T \cdot \mathbf{D} \cdot [\mathbf{B}^{\alpha} \quad \mathbf{B}^{\beta}]\, d\Omega^e \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{u}}^{\alpha} \\ \dot{\mathbf{u}}^{\beta} \end{Bmatrix} + \int_{\Gamma_f^e} \left(\mathbf{N}^{\beta}\right)^T \cdot \mathbf{D_F} \cdot \mathbf{N}^{\beta}\, d\Gamma_f^e\ \dot{\mathbf{u}}^{\beta} \\ &= \int_{\Omega^e} [\mathbf{N}^{\alpha} \quad \mathbf{N}^{\beta}]^{\mathrm{T}} \cdot \dot{\mathbf{F}}_{\mathbf{b}} d\Omega^e + \int_{\Gamma_s^e} [\mathbf{N}^{\alpha} \quad \mathbf{N}^{\beta}]^{\mathbf{T}} \cdot\ \dot{\mathbf{F}}_{\mathbf{s}} d\Gamma_s^e \end{aligned} \tag{2.57}$$

Colocando a expressão (2.57) na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{\mathbf{e}}^{\alpha\alpha} & \mathbf{K}_{\mathbf{e}}^{\alpha\beta} \\ \mathbf{K}_{\mathbf{e}}^{\beta\alpha} & \mathbf{K}_{\mathbf{e}}^{\beta\beta} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{u}}^{\alpha} \\ \dot{\mathbf{u}}^{\beta} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{F}}_{\mathbf{e}}^{\alpha} \\ \dot{\mathbf{F}}_{\mathbf{e}}^{\beta} \end{Bmatrix} \tag{2.58}$$

Onde:

$$\mathbf{K}_{\mathbf{e}}^{\alpha\alpha} = \int_{\Omega^e} (\mathbf{B}^{\alpha})^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{B}^{\alpha}\, \mathrm{d}\Omega^e \tag{2.59}$$

$$\mathbf{K}_{\mathbf{e}}^{\alpha\beta} = \int_{\Omega^e} (\mathbf{B}^{\alpha})^T \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{B}^{\beta}\, d\Omega^e \tag{2.60}$$

$$\mathbf{K}_{\mathbf{e}}^{\beta\alpha} = \int_{\Omega^e} \left(\mathbf{B}^{\beta}\right)^T \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{B}^{\alpha}\, d\Omega^e \tag{2.61}$$

$$\mathbf{K}_{\mathbf{e}}^{\beta\beta} = \int_{\Omega^e} \left(\mathbf{B}^{\beta}\right)^T \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{B}^{\beta}\, d\Omega^e + \int_{\Gamma_F^e} \left(\mathbf{N}^{\beta}\right)^T \cdot \mathbf{D_F} \cdot \mathbf{N}^{\beta}\, d\Gamma_F^e \tag{2.62}$$

$$\dot{\mathbf{F}}_{\mathbf{e}}^{\alpha} = \int_{\Omega^e} (\mathbf{N}^{\alpha})^T \cdot \dot{\mathbf{F}}_{\mathbf{b}} d\Omega^e + \int_{\Gamma_s^e} (\mathbf{N}^{\alpha})^T \cdot\ \dot{\mathbf{F}}_{\mathbf{s}} d\Gamma_s^e \tag{2.63}$$

$$\dot{\mathbf{F}}_{\mathbf{e}}^{\boldsymbol{\beta}} = \int_{\Omega^e} \left(\mathbf{N}^{\boldsymbol{\beta}}\right)^T \cdot \dot{\mathbf{F}}_{\mathbf{b}} d\Omega^e + \int_{\Gamma_s^e} \left(\mathbf{N}^{\boldsymbol{\beta}}\right)^T \cdot \dot{\mathbf{F}}_{\mathbf{s}} d\Gamma_s^e \tag{2.64}$$

Em relação à submatriz $\mathbf{K}_{\mathbf{e}}^{\boldsymbol{\beta\beta}}$, expressão (2.62), deve-se atentar que a integral ao longo de Γ_F^e está expressa em termos do sistema global de coordenadas. Caso a integral ao longo de Γ_F^e seja resolvida no sistema de coordenadas da descontinuidade, antes de adicioná-la à matriz de rigidez do elemento enriquecido expressa no sistema global, é necessário pré-multiplicar e pós-multiplicar essa integral pela matriz de rotação.

Visando à formulação do elemento com acoplamento fluido-mecânico, a expressão (2.58) é reescrita em uma forma mais compacta:

$$\mathbf{K}_{\mathbf{e}} \cdot \dot{\mathbf{d}}_{\mathbf{e}} = \dot{\mathbf{F}}_{\mathbf{e}} \tag{2.65}$$

Onde:

$$\mathbf{K}_{\mathbf{e}} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{\mathbf{e}}^{\boldsymbol{\alpha\alpha}} & \mathbf{K}_{\mathbf{e}}^{\boldsymbol{\alpha\beta}} \\ \mathbf{K}_{\mathbf{e}}^{\boldsymbol{\beta\alpha}} & \mathbf{K}_{\mathbf{e}}^{\boldsymbol{\beta\beta}} \end{bmatrix}$$

$$\dot{\mathbf{d}}_{\mathbf{e}} = \begin{Bmatrix} \mathbf{u}^{\boldsymbol{\alpha}} \\ \mathbf{u}^{\boldsymbol{\beta}} \end{Bmatrix}$$

$$\dot{\mathbf{F}}_{\mathbf{e}} = \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{F}}_{\mathbf{e}}^{\boldsymbol{\alpha}} \\ \dot{\mathbf{F}}_{\mathbf{e}}^{\boldsymbol{\beta}} \end{Bmatrix}$$

A matriz $\mathbf{K}_{\mathbf{e}}$ é a matriz de rigidez do elemento enriquecido, $\mathbf{d}_{\mathbf{e}}$ e $\mathbf{F}_{\mathbf{e}}$ são os vetores de incremento de deslocamento e de força externa nodal respectivamente. Para um elemento que não é cortado por uma descontinuidade, a função N^{β} e o grau de liberdade $\mathbf{u}^{\boldsymbol{\beta}}$ são nulos fazendo com que a expressão (2.57) seja reduzida para a formulação de um elemento comum.

2.4. Quadro comparativo das formulações de elemento finito com descontinuidade do tipo forte

A descrição dos elementos XFEM, *embedded* e enriquecido forneceu uma rápida compreensão do modo como uma descontinuidade física é introduzida em uma malha de elementos finitos sem discretizá-la. Visando explicitar a razão da escolha do elemento enriquecido para estender o problema mecânico ao acoplamento fluido-mecânico, as características mais relevantes das formulações são citadas e listadas na Tabela 2-1. As características são:

- Equação empregada para representar a descontinuidade;
- Compatibilidade no campo de deslocamento;
- Número de graus de liberdade por elemento para representar o salto de deslocamento para um elemento CST;
- Uso de elementos de transição;
- Divisão do elemento em subdomínios para realizar a integração numérica;
- Introdução de uma lei contato ou interface para a descontinuidade.

Deve-se ressaltar que as características enumeradas não impedem a aplicação das formulações dos elementos XFEM e *embedded* no acoplamento fluido-mecânico. Elas indicam simplesmente quais fatores influenciaram na adoção do elemento enriquecido neste trabalho de pesquisa.

Tabela 2-1: Quadro comparativo dos elementos com descontinuidade do tipo forte

Características		**X-FEM**	***Embedded***	**Enriquecido**
Equações	Princípio do Trabalho Virtual	Sim	Sim	Sim
	Continuidade de tensão na descontinuidade	Não	Sim	Não
Garantia de compatibilidade		Sim	Não	Sim
Número de graus de liberdade de salto		6	2	4
Uso de elementos de transição		Sim	Não	Não
Uso de subdomínios		Sim	Não	Sim
Uso de uma lei de contato ou interface na descontinuidade		Sim	Sim	Sim

Observando a Tabela 2-1, o elemento que desperta maior interesse do ponto de vista computacional é o *embedded*. A sua formulação evita a divisão do elemento em dois subdomínios para realizar a integração numérica, facilitando a introdução do elemento em um código. Além disso, essa característica reduz o tempo de simulação, principalmente em problemas não lineares, já que a matriz de rigidez é avaliada em um número menor de pontos de integração.

Em relação ao uso da equação de continuidade de tensão na descontinuidade, ela reproduz a mesma hipótese associada aos termos de dissipação de energia e atrito introduzidos no Princípio do Trabalho Virtual para os elementos XFEM e enriquecido. Ao adotar a continuidade de tensão o que se procura é garantir o equilíbrio de forças nas duas faces da descontinuidade. Essa condição já está implícita nas formulações dos elementos XFEM e enriquecido, pois ao admitir a igualdade das forças de superfície atuantes em cada face da descontinuidade, o que está sendo feito é a imposição do equilíbrio mecânico na descontinuidade.

Quanto à introdução de uma lei de interface no elemento *embedded*, deve-se frisar que a citação na Tabela 2-1 está baseada em uma afirmação existente do trabalho apresentado por Manzoli e Shing (2006). A representação da descontinuidade por um material que obedeça a esta lei não foi investigada por eles.

A respeito da compatibilidade do salto de deslocamento, mesmo ela não sendo obedecida, nota-se que o elemento *embedded* consegue reproduzir adequadamente a cinemática (movimento) de corpos em processos de ruptura. Diante dessa exposição, a razão da escolha do elemento enriquecido em relação ao *embedded* está associada a dois motivos. O primeiro motivo é que, ao garantir a compatibilidade do salto de deslocamento e, portanto, descrevendo-o em um grau maior, acredita-se que o elemento enriquecido pode obter, em termos quantitativos, uma resposta muito próxima ou, por vezes, a mesma de um modelo numérico em que uma descontinuidade é discretizada. O segundo motivo é que a relação força de superfície e salto de deslocamento já foi investigada por Wan et al (1995), permitindo a sua pronta aplicação.

Ao comparar as características dos elementos XFEM e enriquecido citadas na Tabela 2-1, observa-se que existem poucas diferenças entre eles. Os dois elementos garantem a compatibilidade do salto de deslocamento, usam subdomínios para a integração numérica e podem utilizar uma lei de contato para representar a descontinuidade física.

Com relação à lei de contato, cabe ressaltar que o uso de parâmetros de penalidade para representar a rigidez da descontinuidade no elemento XFEM é uma abordagem muito similar à matriz D_f (equação (2.50)) do elemento enriquecido.

A ausência de elementos de transição é uma vantagem do elemento enriquecido em relação ao elemento XFEM, porém ela existe somente quando a função *shifted heaviside* não é empregada. Independentemente da função adotada para interpolar o salto, outra vantagem é que, ao posicionar os graus de liberdade de salto exatamente sobre a descontinuidade, o número de graus de liberdade adicionais do elemento enriquecido é menor do que o exigido pelo elemento XFEM. Uma vantagem do ponto de vista computacional.

Esse posicionamento não reduz apenas o número de graus de liberdade adicionais do elemento enriquecido, mas, para o problema de fluxo de fluido, ele permite estabelecer uma relação clara entre o fluxo normal à descontinuidade e o salto de poro-pressão.

Dentro do contexto de formulação mecânica, nota-se que não há diferenças significativas entre os elementos XFEM e enriquecido. Sob certo aspecto, o elemento enriquecido poderia ser interpretado como um caso particular do XFEM. Praticamente, a única característica que pode diferenciar o elemento enriquecido do elemento XFEM é o posicionamento do grau de liberdade de salto exatamente sobre a descontinuidade.

A possibilidade de introduzir parâmetros físicos da descontinuidade na formulação do elemento, a ausência de elementos de transição e a aparente facilidade em relacionar o fluxo de fluido através da descontinuidade ao salto de poro-pressão são os principais fatores que levaram à adoção do elemento enriquecido em relação ao XFEM.