

3 Mecânica da Fratura Computacional

É sempre desejável do ponto de vista da mecânica dos sólidos determinar os campos de tensão e deformação em um corpo que está sujeito a carregamento externos ou deslocamentos. No caso limite, é possível obter uma solução analítica para os campos de tensão e deformação. Na maioria dos casos as soluções fechadas não são possíveis e as tensões em um corpo têm de ser modeladas numericamente ou por outro método com fotoelasticidade. Usando certas aproximações, Westergaard e Williams encontraram a solução para a tensão e deformação nas vizinhanças da trinca em um material elástico e conseqüentemente a definição do fator de intensidade de tensões K . Várias soluções para K foram publicadas na literatura para diversas configurações de geometria e carregamento, porém para a maioria dos casos reais de engenharia K não está disponível (exemplos na Figura 1.1).

Uma grande variedade de técnicas numéricas tem sido aplicada em problemas da mecânica dos sólidos, incluindo o método das diferenças finitas, elementos finitos e elementos de contorno. Os dois últimos métodos têm sido aplicados mais exaustivamente. A grande maioria das vezes utiliza-se o método dos elementos finitos, embora o método dos elementos de contorno apresente uma facilidade maior de modelagem.

No caso específico de um modelo discretizado em elementos finitos, os fatores de intensidade de tensão são calculados com uso de elementos apropriados na ponta da trinca. Usando critérios para avaliação da direção de propagação pode-se então simular uma propagação dando pequenos incrementos na ponta da trinca, repetindo passo-a-passo os cálculos, até que se tenha um tamanho desejável de trinca, ou que atinja limites de tenacidade ou plasticidade. A cada novo incremento de trinca a malha do modelo de elementos finitos pode ser refeita localmente ou globalmente com a utilização de técnicas adaptativas de análise.

Este capítulo descreve os elementos especiais de ponta de trinca, métodos e critérios mais comumente utilizados para calcular fatores de intensidade de tensão

e direção de propagação da trinca em geometria arbitrária utilizando o método dos elementos finitos.

Esse capítulo resume desenvolvimentos feitos por Araújo (1999) e Carvalho (1998) em trabalhos anteriores da linha de pesquisa em que este trabalho está inserido e incorpora novas informações obtidas pelo autor do presente trabalho. Esses trabalhos apresentam comparações dos resultados numéricos com soluções analíticas encontrados na literatura.

3.1 Elementos Finitos Especiais

Na Mecânica da Fratura Linear Elástica (MFLE), o cálculo dos fatores de intensidade de tensão é um dos principais objetivos da análise. Estes fatores definem a magnitude dos campos de tensões na ponta da trinca e auxiliam na predição dos ângulos e incrementos da trinca propagante. As tensões, neste caso, apresentam uma singularidade $1/\sqrt{r}$ na ponta da trinca.

Chan et al. (1970) foram uns dos primeiros a utilizar o MEF para determinar os fatores de intensidade de tensão. A principal dificuldade encontrada por esses autores foi representar a singularidade da ponta da trinca com elementos convencionais. A partir de então, vários pesquisadores procuraram criar elementos especiais para modelar esta singularidade (Hellen, 1986; Zienkiewicz et al., 1990). Os elementos singulares *quarter-points*, isoparamétricos, sugeridos independentemente por Henshell & Shaw (1975) e Barsoum (1976), tornaram-se populares entre os pesquisadores por serem mais simples e proporcionarem resultados mais precisos com malhas relativamente grosseiras.

Vários estudos foram realizados com o intuito de investigar as condições ideais de uso destes elementos. O efeito do tamanho do elemento (L) com relação ao comprimento da trinca (a) sobre o cálculo dos fatores de intensidade de tensão (Harrop, 1982; Lynn & Ingraffea, 1978) e do critério de fratura (Yehia & Shephard, 1985) foi um dos problemas estudados. Saouma & Schwemmer (1984) avaliaram esse efeito numericamente, obtendo deste estudo várias recomendações referentes à relação (L/a) e à quantidade de elementos.

Os elementos singulares *quarter-points* (QP) são formados pelos elementos isoparamétricos convencionais, triangulares ou quadrilaterais, de ordem

quadrática, cuja singularidade $1/\sqrt{r}$ é introduzida desviando o nó do meio do lado para a posição de $1/4$ do lado (Figura 3.1). Barsoum (1976) mostrou que o elemento triangular proporciona melhores resultados que o elemento quadrilateral. No triangular, a singularidade é encontrada tanto no contorno quanto no interior do elemento, enquanto que no quadrilateral, só é encontrada no interior do elemento.

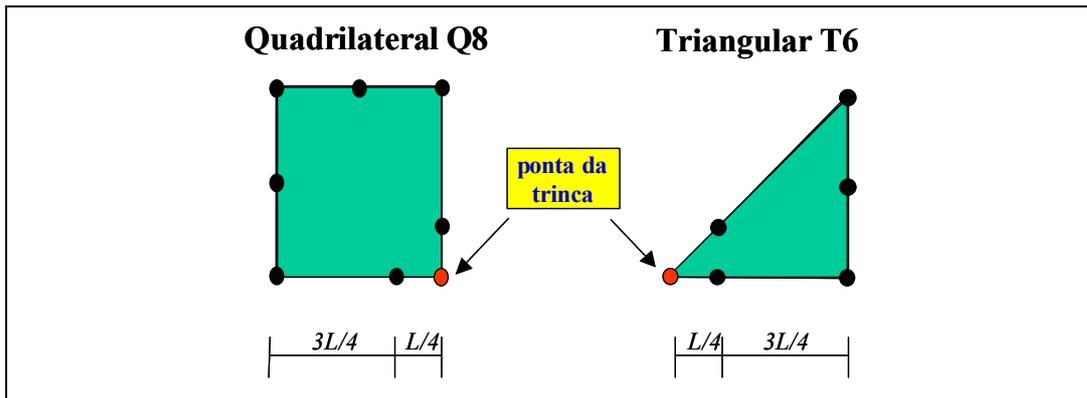


Figura 3.1. - Elementos singulares quarter-points quadrilateral e triangular.

Estes elementos são dispostos na ponta da trinca em forma de uma roseta. A roseta padrão é formada por oito elementos que formam entre si um ângulo de 45° , normalmente alinhada com a trinca (Fig. 3.2a). Outras configurações de rosetas podem ser formadas, como a roseta de elementos com ângulo de 40° (Fig. 3.2b) e com ângulo de 30° (Fig. 3.2c). Um exemplo de como a roseta se posiciona na malha de elementos finitos é mostrado na Figura 3.3. Nesta figura duas rosetas estão posicionadas em duas pontas de trinca.

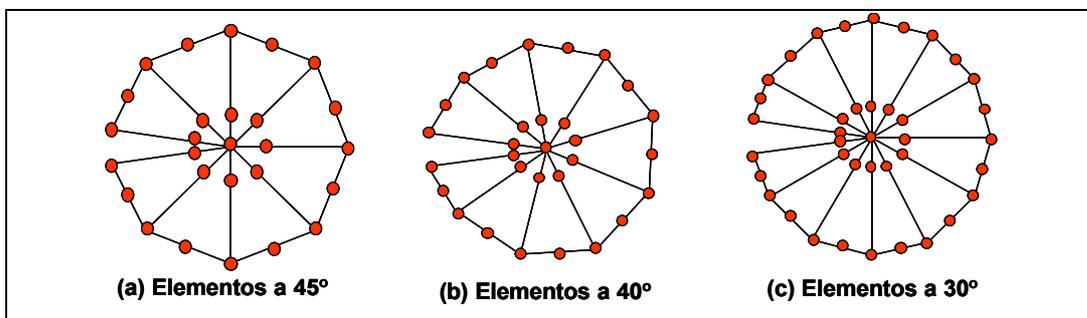


Figura 3.2. Rosetas de elementos finitos. (a) Roseta padrão; (b) Roseta com elementos a 40° ; (c) Roseta com elementos a 30° .

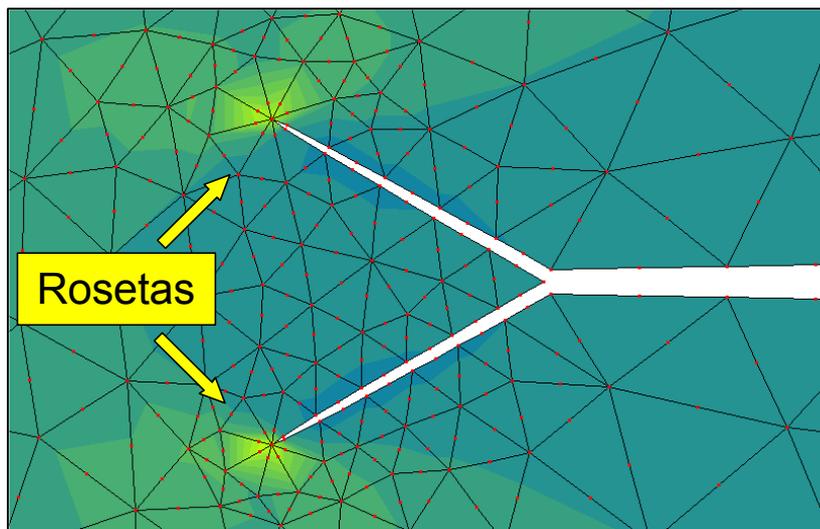


Figura 3.3. Posição de duas rosetas em duas pontas de trinca.

3.2 Cálculo Numérico do Fator de Intensidade de Tensões

Os valores numéricos dos fatores de intensidade de tensão podem ser calculados substituindo os deslocamentos, ou as tensões, provenientes da análise de elementos finitos nas soluções teóricas (Chan, 1970). Esta técnica, apesar de simples e direta, proporciona resultados com pouca precisão. Quando os elementos singulares *quarter-points* são usados, a técnica de correlação dos deslocamentos, proposta por Shih et al. (1976), proporciona resultados mais exatos. Esta técnica foi generalizada por Ingraffea & Manu (1980) para problemas com modo misto de carregamento. Outras técnicas de extrapolação dos deslocamentos (Zhu & Smith, 1995), que procuram melhorar a precisão, podem ser encontradas na literatura.

A taxa de alívio de energia, G , proveniente da teoria de Griffith (1920), foi relacionada aos fatores de intensidade de tensão por Irwin (1948) e tornou-se uma das variáveis mais importantes na determinação destes fatores. Os métodos existentes, baseados neste conceito, proporcionam resultados mais exatos para os fatores de intensidade de tensão, sem a necessidade de uma malha tão refinada. Por esta razão, o método da extensão virtual da trinca tornou-se tão atrativo. Contudo, a necessidade de se efetuar duas análises de elementos finitos para o mesmo modelo, com dois comprimentos de trinca diferentes, torna-o desvantajoso. Outros métodos, que utilizam apenas uma análise de elementos finitos no cálculo de G , foram propostos (Lin & Abel, 1988). Um destes métodos

está baseado no método de fechamento virtual da trinca de Irwin. Raju (1987), baseando-se nessa formulação, propôs um método modificado. No método original, as tensões na frente da ponta da trinca e os deslocamentos atrás desta mesma ponta são usados para este cálculo. No método modificado de Raju, os deslocamentos de abertura da trinca e as forças nodais na frente da ponta da trinca são utilizados. Este procedimento foi aplicado para vários tipos de elementos, singulares e não singulares, de qualquer ordem.

Em um modelo bidimensional de elementos finitos, três métodos podem ser escolhidos para calcular o fator de intensidade de tensões de um trinca: (a) Técnica de Correlação dos Deslocamentos (Shih et al, 1976) (*Displacement Correlation Technique – DCT*), (b) a taxa de liberação de energia calculado pelo Método de Fechamento da Trinca Modificado (Rybick, 1977; Raju, 1987) (*Modified Crack-Closure Integral technique – MCC*), e (c) pela integral J calculada pelo Método da Integral de Domínio Equivalente (*Equivalent Domain Integral – EDI*) juntamente com a decomposição dos modos (Bui, 1983; Dodds, 1988; Banks-Sills, 1986; Nikishkov, 1987; Chen, 1989). Os três métodos são descritos a seguir.

3.2.1 Técnica de Correlação dos Deslocamentos

Na Técnica de Correlação dos Deslocamentos, os deslocamentos determinados de pontos nodais da trinca, obtidos pela análise de elementos finitos, são correlacionados com as soluções analíticas a fim de que os fatores de intensidade de tensão sejam obtidos. Esta técnica é comumente utilizada quando a roseta de elementos singulares *quarter-points* está presente na ponta da trinca. Ela permite calcular, separadamente, os fatores de intensidade de tensão quando a estrutura está submetida ao modo misto de carregamento. Maiores detalhes sobre este método podem ser encontrados nas referências (Barsoum, 1977; Shih, 1976; Tracey, 1971). O deslocamento na ponta da trinca aberta para um elemento singular *quarter-point* d é dado por (Figura 3.4):

$$d(r) = (4v_{j-1} - v_{j-2}) \sqrt{\frac{r}{L}} \quad (3.1)$$

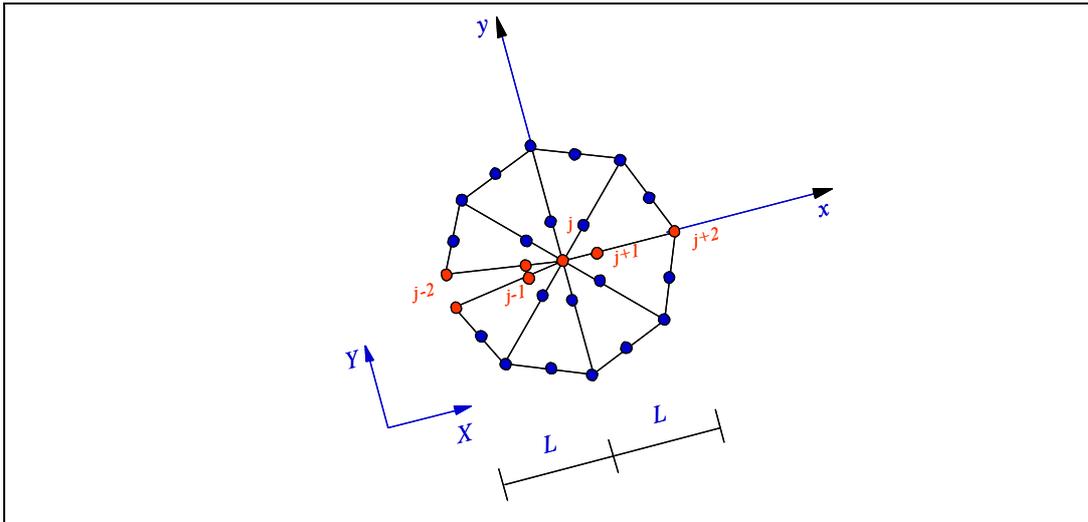


Figura 3.4 - Elemento *quarter-point* na ponta da trinca.

onde v_{j-1} e v_{j-2} são os deslocamentos relativos na direção y , nos nós $j-1$ e $j-2$, e L é o tamanho do elemento. A expressão analítica para \mathbf{d} , em $x=r$, é dada pela seguinte equação:

$$\mathbf{d}(r) = K_I \left(\frac{\mathbf{k}+1}{\mathbf{m}} \right) \sqrt{\frac{r}{2p}} \quad (3.2)$$

Igualando as expressões (3.1) e (3.2), o fator de intensidade de tensão para o modo I pode ser avaliado por:

$$K_I = \left(\frac{\mathbf{m}}{\mathbf{k}+1} \right) \sqrt{\frac{2p}{L}} (4v_{j-1} - v_{j-2}) \quad (3.3)$$

Seguindo os mesmos passos descritos para o modo I, encontra-se a expressão para a avaliação do fator de intensidade de tensão no modo II que é dado por:

$$K_{II} = \left(\frac{\mathbf{m}}{\mathbf{k}+1} \right) \sqrt{\frac{2p}{L}} (4u_{j-1} - u_{j-2}) \quad (3.4)$$

onde u_{j-1} e u_{j-2} são os deslocamentos relativos na direção x , nos nós $j-1$ e $j-2$.

3.2.2 Método de Fechamento da Trinca Modificado

O Método de Fechamento da Trinca Modificado é baseado no conceito de Irwin da integral de fechamento da trinca. Este conceito supõe que, no modo I de carregamento, quando uma trinca propaga de a para $a + da$ (Figura 3.5), sendo da

infinitesimal, o deslocamento de abertura da nova ponta da trinca será aproximadamente igual ao deslocamento da ponta da trinca original. Então, o trabalho necessário para aumentar a trinca de a para $a + da$ é o mesmo necessário para fechá-la de $a + da$ para a . Baseado nisto, Irwin obteve as seguintes expressões:

$$\mathcal{G}_I = \lim_{da \rightarrow 0} \frac{1}{2da} \int_0^{da} v(r) s_y(r) dr \quad (3.5)$$

$$\mathcal{G}_{II} = \lim_{da \rightarrow 0} \frac{1}{2da} \int_0^{da} u(r) s_{xy}(r) dr \quad (3.6)$$

Nesta equação, da é o acréscimo virtual da trinca; s_y e s_{xy} são as distribuições de tensão normal e cisalhante na frente da ponta da trinca (Figura); $v(r)$ e $u(r)$ são o deslocamento de abertura da trinca a uma distância r , atrás da nova ponta da trinca. Na forma original, os resultados são obtidos de duas análises: uma com o comprimento de trinca a e outra com comprimento de trinca $a + da$.

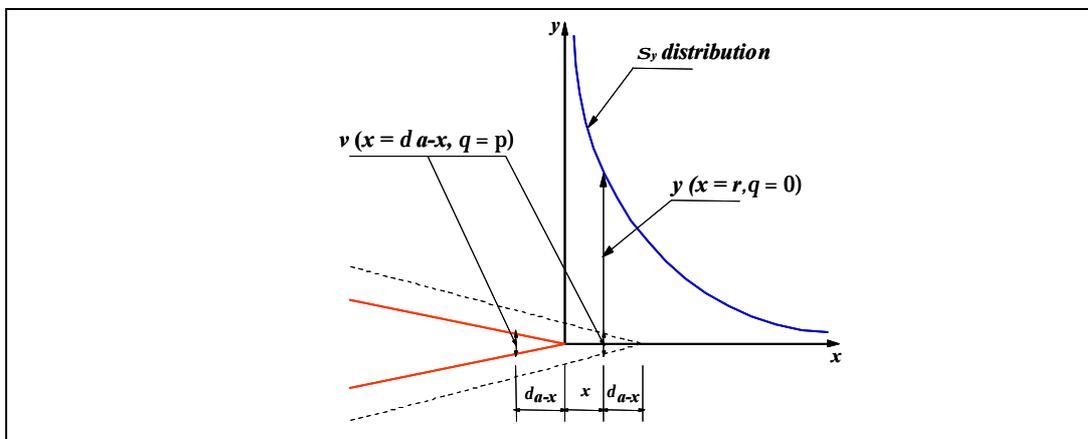


Figura 3.5 – Método de Fechamento da Trinca Modificado.

Rybicki e Kanninen (1977) foram os primeiros a utilizar essa aproximação com a análise simples de elementos finitos, usando modelos com elementos quadriláteros de 4 nós. Raju (1987) estendeu este método para elementos não singulares de qualquer ordem. Este procedimento é baseado na simetria do elemento ao longo da ponta da trinca. O cálculo numérico de \mathcal{G}_I e \mathcal{G}_{II} , a taxa de liberação de energia dado por (3.5) e (3.6), o campo de tensões é (com uma distribuição clássica $1/\sqrt{r}$) e os deslocamentos $u(r)$ e $v(r)$ são determinados por

interpolação dos deslocamentos nodais usando as funções de forma do elemento. As tensões normais e de cisalhamento são obtidas das forças nodais na frente da trinca.

Como mostrado por Raju (1987), expressões simplificadas para elementos singulares podem ser aplicados, que são mais fáceis de usar que expressões consistentes. As componentes G_I e G_{II} para o Modo I e Modo II, e para condições de modos mistos são dados como:

$$G_I = -\frac{1}{2L} [F_{y_i} \{t_{11}(v_m - v_{m'}) + t_{12}(v_l - v_{l'})\} + F_{y_j} \{t_{21}(v_m - v_{m'}) + t_{22}(v_l - v_{l'})\}] \quad (3.7)$$

$$G_{II} = -\frac{1}{2L} [F_{x_i} \{t_{11}(u_m - u_{m'}) + t_{12}(u_l - u_{l'})\} + F_{x_j} \{t_{21}(u_m - u_{m'}) + t_{22}(u_l - u_{l'})\}] \quad (3.8)$$

onde F_{x_i} , F_{x_j} , F_{y_i} , e F_{y_j} são forças nodais consistentes atuando nos nós i e j (Figura 3.6) nas direções x e y ; u e v são deslocamentos nodais nos nós m , m' , l e l' ; e $t_{11} = 6 - 3\frac{p}{2}$, $t_{12} = 6p - 20$, $t_{21} = \frac{1}{2}$ e $t_{22} = 1$.

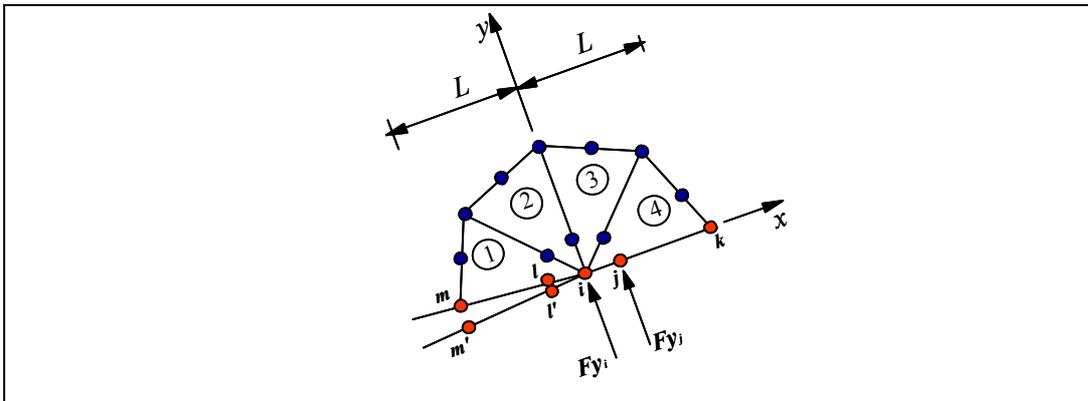


Figura 3.6 – Elementos na ponta da trinca e força nodais consistentes na frente da ponta da trinca.

A força nodal F_{x_i} e F_{y_i} são calculadas do elemento 1, 2, 3 e 4, porém as forças F_{x_j} e F_{y_j} são calculadas do elemento 4 somente. Sob condições da Mecânica da Fratura Linear Elástica (LEFM), os fatores de intensidade de tensão são relacionados com a taxa de alívio de energia pela equação (2.14).

3.2.3 Método da Integral de Domínio Equivalente

A integral J foi introduzida por Rice (1968) para estudar materiais elásticos não-lineares. É uma integral de linha independente do caminho, definida como (mesma equação 2.16 do capítulo 2):

$$J = \int_C \left[W n_x - s_{ij} n_j \frac{\partial u_i}{\partial x} \right] ds \quad (3.9)$$

onde W é a densidade de energia de deformação; s_{ij} são as tensões e n_j é o vetor unitário normal ao contorno de integração C , que é qualquer caminho em volta da ponta da trinca; u_i são os deslocamentos correspondentes ao eixo local e s é o comprimento de arco do contorno.

A integral de domínio equivalente troca a integração ao longo do contorno por outra integral sobre um domínio de tamanho finito usando o teorema da divergência. Esta definição é mais conveniente para análise por elementos finitos. Para problemas bidimensionais a integral de contorno é trocada por uma integral de área (Figure 3.7) e a equação (3.11) é reescrita como:

$$J = - \int_A \left[W \frac{\partial q}{\partial x} - s_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x} \frac{\partial q}{\partial x} \right] dA - \int_A \left\{ \frac{\partial W}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \left[s_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x} \right] \right\} q dA - \int_S t_i \frac{\partial u_i}{\partial x} q ds \quad (3.10)$$

onde q é uma função contínua que permite a integral de domínio equivalente ser tratada na formulação dos elementos finitos, e t_i é uma carga de pressão na face da trinca. Usualmente, uma função linear é escolhida para q , que assume um valor unitário na ponta da trinca e um valor nulo ao longo do contorno. Para caso especial de material elástico linear, o segundo termo da equação (3.10) desaparece. O terceiro termo desaparecerá se as faces da trinca não forem carregadas, ou se $q = 0$ nos trechos carregados.

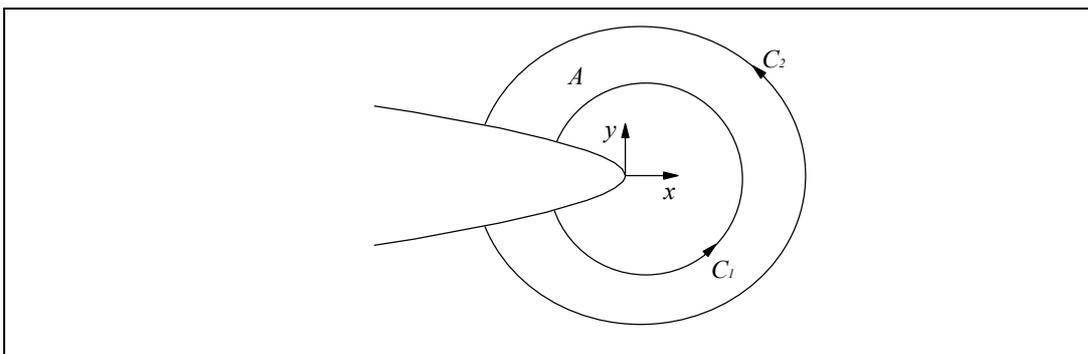


Figura 3.7 – Domínio equivalente na ponta da trinca.

A definição da integral J considera um balanço de energia mecânica somente para uma translação local da frente da trinca na direção no eixo x . No caso de ambos o Modo I ou Modo II puros, a equação (3.10) permite o cálculo dos fatores de intensidade de tensão K_I ou K_{II} . Entretanto, no caso de modo misto de carregamento, K_I e K_{II} não podem ser calculados separadamente somente desta equação. Neste caso, outras integrais invariantes são usadas. Usualmente, a expressão definida por Knowles & Sternberg (1972) é usada:

$$J_k = - \int_A \left[W \frac{\mathcal{I}q}{\mathcal{I}x_k} - \mathcal{S}_{ij} \frac{\mathcal{I}u_i}{\mathcal{I}x_k} \frac{\mathcal{I}q}{\mathcal{I}x_j} \right] dA - \int_A \left[\frac{\mathcal{I}W}{\mathcal{I}x_k} - \mathcal{S}_{ij} \frac{\mathcal{I}}{\mathcal{I}x_j} \left(\frac{\mathcal{I}u_i}{\mathcal{I}x_k} \right) \right] q dA - \int_S t_i \frac{\mathcal{I}u_i}{\mathcal{I}x_k} q ds \quad (3.11)$$

onde k é um índice para o eixo local na ponta da trinca (x, y). Essas integrais foram inicialmente introduzidas para pequenas deformações (Rice, 1968) e foi estendida para por Atluri (1982) para deformações finitas.

A integral é avaliada em elementos escolhidos para representar o domínio. Neste trabalho, o domínio escolhido é a rosseta de elementos *quarter-point* na ponta da trinca (Figura 3.1), e a quadratura Gaussiana padrão é usada sobre cada elemento.

Para problemas lineares, Bui (1983) propôs campos associados para decompor os modos de abertura de trinca. Neste caso, o primeiro elemento da equação (3.11) é independente de caminho, porém o segundo elemento não é. Entretanto, a dependência do caminho pode ser eliminada se os deslocamentos e os campos de tensão forem decompostos em partes simétricas e antissimétricas. Desta forma, o campo de deslocamento é reescrito como:

$$\begin{aligned} u &= u^I + u^{II} = \frac{1}{2}(u + u') + \frac{1}{2}(u - u') \\ v &= v^I + v^{II} = \frac{1}{2}(v - v') + \frac{1}{2}(v + v') \end{aligned} \quad (3.12)$$

onde u e v são deslocamentos nas direções x e y , respectivamente, $u'(x, y) = u'(x, -y)$, e $v'(x, y) = v'(x, -y)$; e os subscrito I e II correspondem as componentes do campo de deslocamentos simétrico e antissimétrico, respectivamente. O campo de tensão é decomposto em:

$$\begin{aligned}
\mathbf{s}_{xx} &= \mathbf{s}_{xx}^I + \mathbf{s}_{xx}^{II} = \frac{I}{2}(\mathbf{s}_{xx} + \mathbf{s}'_{xx}) + \frac{I}{2}(\mathbf{s}_{xx} - \mathbf{s}'_{xx}) \\
\mathbf{s}_{yy} &= \mathbf{s}_{yy}^I + \mathbf{s}_{yy}^{II} = \frac{I}{2}(\mathbf{s}_{yy} + \mathbf{s}'_{yy}) + \frac{I}{2}(\mathbf{s}_{yy} - \mathbf{s}'_{yy}) \\
\mathbf{s}_{zz} &= \mathbf{s}_{zz}^I + \mathbf{s}_{zz}^{II} = \frac{I}{2}(\mathbf{s}_{zz} + \mathbf{s}'_{zz}) \\
\mathbf{s}_{xy} &= \mathbf{s}_{xy}^I + \mathbf{s}_{xy}^{II} = \frac{I}{2}(\mathbf{s}_{xy} - \mathbf{s}'_{xy}) + \frac{I}{2}(\mathbf{s}_{xy} + \mathbf{s}'_{xy})
\end{aligned} \tag{3.13}$$

onde $\mathbf{s}'_{ij}(x, y) = \mathbf{s}'_{ij}(x, -y)$ e $\mathbf{s}_{zz}^{II} = 0$.

Novas integrais J_I e J_{II} são obtidas, que satisfazem a condição:

$$J = J_I + J_{II} \tag{3.14}$$

onde J_I é associado com o campo simétrico (Modo I) e J_{II} é associado com o campo antissimétrico (Modo II):

$$J_I = - \int_A \left[W(u_i^I) \frac{\mathbb{I}q}{\mathbb{I}x_k} - \mathbf{s}_{ij}(u_i^I) \frac{\mathbb{I}u_i^I}{\mathbb{I}x_k} \frac{\mathbb{I}q}{\mathbb{I}x_j} \right] dA - \int_S t_i \frac{\mathbb{I}u_i^I}{\mathbb{I}x_k} q ds \tag{3.15}$$

$$J_{II} = - \int_A \left[W(u_i^{II}) \frac{\mathbb{I}q}{\mathbb{I}x_k} - \mathbf{s}_{ij}(u_i^{II}) \frac{\mathbb{I}u_i^{II}}{\mathbb{I}x_k} \frac{\mathbb{I}q}{\mathbb{I}x_j} \right] dA - \int_S t_i \frac{\mathbb{I}u_i^{II}}{\mathbb{I}x_k} q ds \tag{3.16}$$

Esta aproximação foi também aplicada por Chen (1989) com alta precisão dos resultados para problemas em modo misto. Adicionalmente, Eischen (1987), Kienzler & Kordisch (1990) sugeriram outros métodos para obter a integral J para problemas em modo misto. Essas técnicas de modificações e decomposição permitem usar a integral J e Integral de Domínio Equivalente para uma grande variedade de problemas de deformação linear e não-linear.

Na LEFM, J é igual à taxa de liberação de energia \mathcal{G} , e seus componentes J_I e J_{II} podem ser usados para calcular os fatores de intensidade de tensão por meio das equações (3.9) e (3.10).

3.3 Cálculo Numérico da Direção de Propagação

Na análise de elementos finitos bidimensionais, três critérios são mais usados para o cálculo numérico da direção de crescimento de propagação da trinca no regime linear elástico (Carvalho, 1998): (a) Máxima Tensão Circunferencial

($S_{q_{m\acute{a}x}}$), (b) Máxima Taxa de Liberaao de Energia Potencial ($G_{q_{m\acute{a}x}}$) e (c) Mínima Densidade de Energia de Deformaao ($S_{q_{min}}$). No primeiro critério, Erdogan & Sih (1963) consideraram que a trinca propagará na direao que maximiza a tensão circunferencial em uma região fechada na ponta da trinca. No segundo critério, Hussain (1974) sugeriu que a propagaao da trinca ocorrerá na direao que causa a máxima taxa de liberaao de energia de propagaao. E por último, Sih (1974) assumiu que a direao de crescimento da trinca é determinada por um mínimo valor de densidade energia de deformaao perto da ponta da trinca. Bittencourt (1996) mostrou que, se é permitido mudar a orientaao da trinca em uma simulaao de fratura automática, os três critérios fornecem basicamente os mesmos resultados.

3.3.1

Critério da Máxima Tensão Circunferencial ($S_{q_{m\acute{a}x}}$)

As tensões na ponta da trinca para o modo I e II são dadas pela soma das tensões obtidas para cada modo separadamente (Barsom & Rolfe, 1987). Como resultado são obtidas as seguintes equaoes em coordenadas polares (Figura 3.8):

$$s_r = \frac{1}{\sqrt{2pr}} \cos(q/2) \left\{ K_I [1 + \text{sen}^2(q/2)] + \frac{3}{2} K_{II} \text{sen} q - 2K_{II} \text{tg}(q/2) \right\} \quad (3.17)$$

$$s_q = \frac{1}{\sqrt{2pr}} \cos(q/2) \left[K_I \cos^2(q/2) - \frac{3}{2} K_{II} \text{sen} q \right] \quad (3.18)$$

$$t_{rq} = \frac{1}{\sqrt{2pr}} \cos(q/2) [K_I \text{sen} q + K_{II} (3\cos q - 1)] \quad (3.19)$$

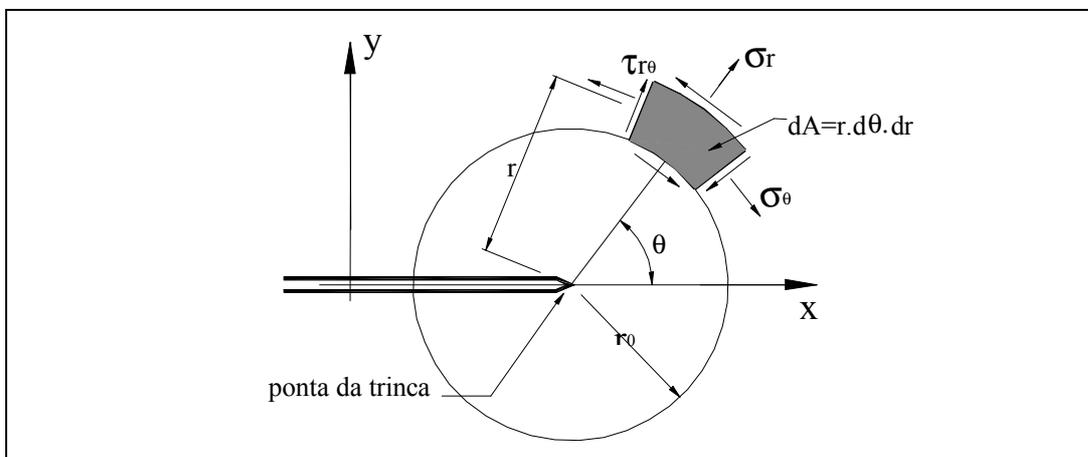


Figura 3.8 – Tensões na ponta da trinca em coordenadas polares.

Essas expressões são válidas para tanto para o estado plano de tensão quanto para o estado plano de deformação. O critério da Máxima Tensão Circunferencial estabelece que a extensão da trinca começará no plano perpendicular à direção no qual s_q é máximo, sendo de modo $t_{r,q} = 0$, e que a extensão monotônica (sem fadiga) ocorrerá quando s_{qmax} atingir um valor crítico correspondente a uma propriedade do material (K_{IC} para o Modo I). Sabendo que $t_{r,q} = 0$:

$$\cos(q/2) [K_I \operatorname{sen} q + K_{II} (3 \cos q - 1)] = 0 \quad (3.20)$$

e da equação (3.19):

$$\cos(q/2) [K_I \cos^2(q/2) - \frac{3}{2} K_{II} \operatorname{sen} q] = s_q \sqrt{2pr} \quad (3.21)$$

Resolvendo essas equações, encontra-se uma solução trivial:

$$q = \pm p \text{ para } \cos(q/2) = 0 \quad (3.22)$$

e uma solução não trivial:

$$K_I \operatorname{sen} q + K_{II} (3 \cos q - 1) = 0 \quad (3.23)$$

Analisando a equação (3.23) para os dois modos puros, encontra-se para o Modo I puro:

$$K_{II} = 0 \quad (3.24)$$

$$K_I \operatorname{sen} q = 0 \quad (3.25)$$

$$q = 0^\circ \quad (3.26)$$

e para o Modo II puro

$$K_I = 0 \quad (3.27)$$

$$K_{II} (3 \cos q - 1) = 0 \quad (3.38)$$

$$q = \pm 70.5^\circ \quad (3.19)$$

Considerando o modo misto, a equação (3.23) pode ser resolvida para q , resultando em:

$$q = 2 \operatorname{arctg} \left(\frac{1}{4} \frac{K_I}{K_{II}} \pm \frac{1}{4} \sqrt{\left(\frac{K_I}{K_{II}} \right)^2 + 8} \right) \quad (3.30)$$

O sinal do ângulo nas expressões (3.29) e (3.30) é dependente do sinal de K_{II} :

$$\text{Se } K_{II} > 0, \text{ então } \mathbf{q} < 0 \quad (3.31)$$

$$\text{Se } K_{II} < 0, \text{ então } \mathbf{q} > 0 \quad (3.32)$$

As equações (3.26) e (3.29) mostram, respectivamente, os limites inferior e superior (em módulo) do ângulo de propagação da trinca, e seus valores intermediários são dados pela expressão (3.30).

3.3.2

Critério da Máxima Taxa de Liberação de Energia Potencial ($G_{q\text{máx}}$)

Este critério se baseia na taxa de alívio de energia, G , que mede a energia potencial que é liberada durante o processo de fraturamento. Para propagações colineares (que não mudam de direção) em regime elástico linear, o fator de intensidade de tensões pode ser facilmente relacionado com G através das seguintes expressões, onde $G = G_I + G_{II}$, sendo G_I a taxa para modo I puro e G_{II} a taxa para modo II puro:

Porém, nem sempre a propagação da trinca é colinear, como no fraturamento em modo misto, por exemplo. Neste caso a extensão da fissura ocorre em uma direção arbitrária. Hussain (1974) sugeriram que esta extensão ocorre na direção que provoca a máxima taxa de liberação de energia de fraturamento. Para isso estabeleceram uma equação em G (total) utilizando uma função de mapeamento com variáveis complexas, onde q define uma direção radial com respeito à ponta da trinca corrente. Utilizando essa técnica encontra-se a seguinte expressão:

$$G(\mathbf{q}) = \frac{4}{E} \left(\frac{1}{3 + \cos^2 \mathbf{q}} \right)^2 \left(\frac{1 - \mathbf{q}/\mathbf{p}}{1 + \mathbf{q}/\mathbf{p}} \right)^{q/p} \left[(1 + 3\cos^2 \mathbf{q})K_I^2 + 8\sin \mathbf{q} \cos \mathbf{q} K_I K_{II} + (9 - 5\cos^2 \mathbf{q})K_{II}^2 \right] \quad (3.33)$$

Observa-se que a expressão resultante para $G(\mathbf{q})$ não diferencia o estado plano de tensão e o estado plano de deformação. Da mesma forma como $G(\mathbf{q})$, os fatores de intensidade de tensões K_I e K_{II} também foram definidos como funções de q , conforme as equações abaixo.

$$K_I(\mathbf{q}) = \left(\frac{4}{3 + \cos^2 \mathbf{q}} \right) \left(\frac{1 - \mathbf{q}/\mathbf{p}}{1 + \mathbf{q}/\mathbf{p}} \right)^{q/2p} \left(K_I \cos \mathbf{q} + \frac{3}{2} K_{II} \sin \mathbf{q} \right) \quad (3.34)$$

$$K_{II}(\mathbf{q}) = \left(\frac{4}{3 + \cos^2 \mathbf{q}} \left(\frac{1 - \mathbf{q}/\mathbf{p}}{1 + \mathbf{q}/\mathbf{p}} \right)^{9/2\mathbf{p}} \left(K_{II} \cos \mathbf{q} - \frac{1}{2} K_I \sin \mathbf{q} \right) \right) \quad (3.35)$$

Os fatores $K_I(\mathbf{q})$ e $K_{II}(\mathbf{q})$ representam os valores de K_I e K_{II} para uma direção de propagação dada por \mathbf{q} , no limite quando o incremento de propagação tende a zero (Hussain, 1974).

Desse modo pode-se estender a interpretação das equações (3.33) e (3.34), colocando \mathcal{G}_I , \mathcal{G}_{II} , K_I e K_{II} como função de \mathbf{q} usando a equação (2.14):

$$\mathcal{G}(\mathbf{q})_I = \frac{K_I^2(\mathbf{q})}{E'} \quad \text{e} \quad \mathcal{G}(\mathbf{q})_{II} = \frac{K_{II}^2(\mathbf{q})}{E'} \quad (3.36)$$

A taxa de liberação total de energia é dada por:

$$\mathcal{G}(\mathbf{q}) = \mathcal{G}_I(\mathbf{q}) + \mathcal{G}_{II}(\mathbf{q}) \quad (3.37)$$

Logo o critério da máxima Taxa de Liberação de Energia Potencial ($G(\mathbf{q})_{\text{máx}}$), estabelece que a extensão monotônica (sem fadiga) da fissura ocorrerá na direção \mathbf{q} em que há uma máxima liberação de energia e quando a taxa de liberação de energia é igual a um valor crítico \mathcal{G}_c , onde \mathcal{G}_c é a tenacidade do material.

3.3.3

Critério da Mínima Densidade de Energia de Deformação (S_{qmin})

Neste critério, proposto por Sih (1974), a direção do crescimento da trinca é governada pelo valor da densidade de energia de deformação, S , nas proximidades da trinca. A Figura 3.5 mostra as tensões em coordenadas polares na ponta da trinca, que são dadas pelas equações (3.19), (3.20) e (3.21).

As componentes dos deslocamentos na direção radial e circunferencial (Anderson, 1995) são descritas por:

$$u_r = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{r}{2\mathbf{m}}} \left\{ K_I \left[(2k-1) \cos(\mathbf{q}/2) - \cos(3\mathbf{q}/2) \right] - K_{II} \left[(2k-1) \sin(\mathbf{q}/2) - 3 \sin(3\mathbf{q}/2) \right] \right\} \quad (3.38)$$

$$v_q = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{r}{2\mathbf{m}}} \left\{ K_I \left[-(2k-1) \sin(\mathbf{q}/2) + \sin(3\mathbf{q}/2) \right] - K_{II} \left[(2k-1) \cos(\mathbf{q}/2) - 3 \cos(3\mathbf{q}/2) \right] \right\} \quad (3.39)$$

A energia de deformação do elemento de área $dA = r d\mathbf{q} dr$ é dada por

$$dW = \frac{1}{2} \left[\mathbf{s}_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \mathbf{s}_q \left(\frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_q}{\partial q} \right) + \mathbf{t}_{rq} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial q} + \frac{\partial v_q}{\partial r} - \frac{v_q}{r} \right) \right] dA \quad (3.40)$$

Substituindo as equações (3.17), (3.18), (3.19), (3.38) e (3.39) na equação (3.46) e fazendo algumas operações algébricas, chega-se à expressão da energia de deformação na forma quadrática mostrada na equação seguinte:

$$\frac{dW}{dA} = \frac{1}{r} (a_{11} K_I^2 + 2a_{12} K_I K_{II} + a_{22} K_{II}^2) \quad (3.41)$$

onde os coeficientes a_{ij} ($i, j = 1, 2$) são dados por:

$$a_{11} = \frac{1}{16m} [(1 + \cos q)(k - \cos q)] \quad (3.42)$$

$$a_{12} = \frac{1}{16m} \operatorname{sen} q [2\cos q - (k - 1)] \quad (3.43)$$

$$a_{22} = \frac{1}{16m} [(k + 1)(1 - \cos q) + (1 + \cos q)(3\cos q - 1)] \quad (3.44)$$

A expressão que multiplica o termo $1/r$ na equação (3.41) é denominada de fator de densidade de energia de deformação que é denominado S :

$$S(\mathbf{q}) = a_{11} K_I^2 + 2a_{12} K_I K_{II} + a_{22} K_{II}^2 \quad (3.45)$$

O valor de S representa a intensidade de dW/dA no interior do elemento infinitesimal, e deixa de ser válido para valores de r muito pequeno, sendo limitado por um valor crítico r_o . Sih *et al.* propuseram que a extensão monotônica (sem fadiga) da fissura ocorrerá quando $S(\mathbf{q})$ for igual a um valor crítico S_{cr} que é uma constante do material e na direção em que a densidade de energia de deformação for mínima.

3.4

Simulação de Propagação de Trincas em Elementos Finitos

Os modelos numéricos descritos anteriormente foram implementados em um programa chamado **Quebra2D** (Araújo, 1999; Carvalho 1998), que é um programa gráfico interativo para simulação de processos bidimensionais de fraturamento estrutural, baseado em uma estratégia de geração adaptativa de malhas de elementos finitos (Paulino, 1999). O processo adaptativo primeiramente requer os resultados da análise de uma malha inicial de elementos finitos, geralmente grosseira, com as descrições geométricas, as condições de contorno e

seus atributos. Posteriormente é feita uma discretização do contorno das regiões do domínio com base nas propriedades geométricas e nos tamanhos característicos dos elementos de bordo (vizinhos às curvas do contorno), determinadas a partir da estimativa de erro calculada pelo método de análise.

Com o contorno discretizado é feita a geração da nova malha. Essa geração é baseada na técnica de *quadtree* e por uma técnica de triangulação de Delaunay, onde a *quadtree* é utilizada apenas para dar uma gradação de transição na geração de elementos (Miranda, 1999). Esse processo é repetido até que o erro de discretização estimado atinja um valor pré-definido.

A seguir são destacadas algumas funcionalidades do programa: obtenção das isofaixas ou isolinhas de resultados escalares nos nós e em pontos de Gauss; disponibilidade do cálculo do fator de intensidade de tensões por três métodos (Técnica de Correlações dos Deslocamentos, Método de Fechamento da Trinca Modificado e Método da Integral de Domínio Equivalente); disponibilidade do cálculo da direção de propagação da trinca por três critérios (Máxima Tensão Circunferencial, Máxima Taxa de Liberação de Energia Potencial, Mínima Densidade de Energia de Deformação); plotagem de barras (vetores) para a visualização de resultados vetoriais; visualização de configuração deformada do modelo; especificação de zoom, distorção e translação; visualização dos atributos dos nós e dos elementos.

O presente autor vem trabalhando no programa para que o usuário do mesmo possa desenhar o modelo geométrico, como um programa CAD, e também continue com as facilidades apresentadas no parágrafo anterior, como um programa CAE. Tudo dentro de um ambiente amigável de muitas facilidades para com o usuário. Nos capítulos seguintes o programa **Quebra2D** será mostrado resolvendo análise de elementos finitos dentro da mecânica da fratura.