3
Modelos constitutivos

3.1.
Introdução

3.2.
Modelos constitutivos elasto-plásticos

Surgiram da deficiência dos modelos elásticos, hiperelásticos e hipoelásticos, até então existentes, para representar consistentemente os processos de escoamento e os estados de descarregamento / recarregamento. A teoria da plasticidade foi o baseamento para o desenvolvimento destes modelos, inicialmente voltados para o comportamento de metais e posteriormente estendidos para materiais com atrito interno, como o caso de materiais geológicos.

3.2.1.
Modelo de Mohr-Coulomb

Define a resistência ao cisalhamento τ na iminência da ruptura, no plano de ruptura, pela equação:

$$\tau = c + \sigma \tan\phi \qquad 3.1$$

onde c é a coesão e ϕ o ângulo de atrito interno do material. Ambos os parâmetros podem ser determinados a partir de ensaios de compressão triaxial convencional (CTC) levando o material até a condição de ruptura.

Graficamente esta representada na Figura 3.1:

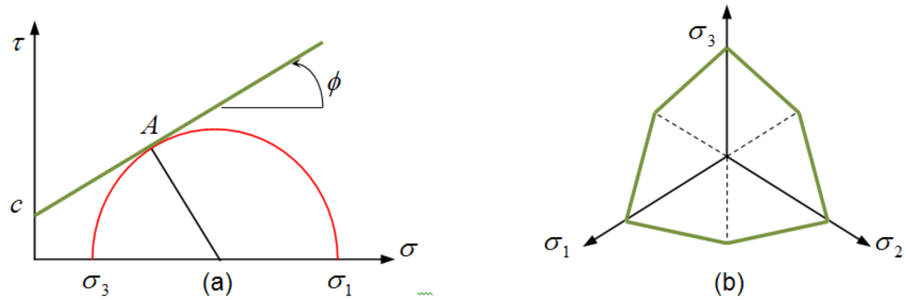

Figura 3.1- Critério de escoamento de Mohr-Coulomb: a) no plano (σ, τ); b) em plano octaédrico (Ibañez, 2003).

A função de escoamento do critério de Mohr Coulomb pode ser expressa em termos das tensões principais σ_1 e σ_3, a tensão principal maior e a tensão principal menor, respectivamente.

$$F = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} - \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} \operatorname{sen} \phi - c \cos \phi = 0 \qquad 3.2$$

No espaço das tensões principais, a função de escoamento da equação anterior, representa uma pirâmide de seção transversal hexagonal irregular em um plano octaédrico como mostra a Figura 3.1b. De acordo com o critério e segundo se aprecia na figura, a tensão de escoamento sob compressão é maior do que sob extensão, refletindo, portanto a influência do terceiro invariante das tensões de desvio J_{3D}. Cabe ressaltar também que o critério de Mohr-Coulomb não leva em conta os efeitos da tensão principal intermediária σ_2.

3.2.2.
Modelo hardening soil model - HSM

O modelo HSM-Hardening Soil Model, planteado por Schanz et al. (1997), praticamente reformula o modelo constitutivo hiperbólico com fundamentação na teoria da plasticidade, ao qual adicionou a representação do fenômeno de dilatância de solos. É um modelo com endurecimento isotrópico que reproduz com maior precisão o comportamento elasto-plástico progressivo apresentado na resposta experimental dos materiais (Figura 3.2), a diferença de outros modelos elasto-plásticos como o modelo Mohr Coulomb, que idealiza a relação tensão deformação como mostrada na mesma figura com um tramo elástico y logo outro perfeitamente plástico (trecho OAB), que não assemelham se a realidade, induzindo a possíveis erros nas caraterísticas próprias do solo como a rigidez, a fluência, resistência e/ou dilatância.

Pode-se dizer que o modelo HSM, reúne dos modelos clássicos: hiperbólico e Mohr-Coulomb muito difundidos e empregados no ambiente da geotecnia, conserva a simplicidade e experiência desses modelos e os aperfeiçoa. Os seus parâmetros provem dos ensaios triaxiais convencionais.

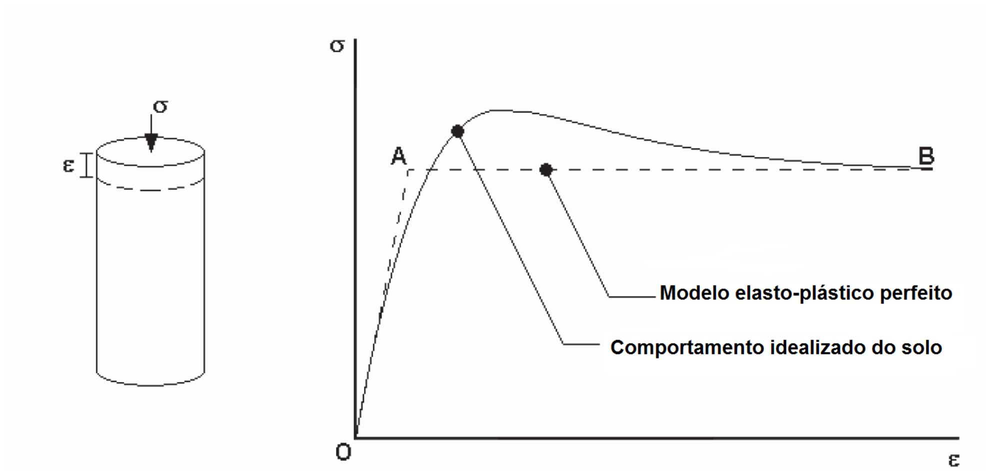

Figura 3.2 - Idealização da relação tensão-deformação do modelo de elasto-plasticidade perfeita.

O modelo HSM considera uma superfície de fluência no espaço das tensões principais não fixa (Figura 3.3), que se pode expandir devido a deformações plásticas. Portanto este modelo é capaz de simular o comportamento de vários tipos de solos, tanto os coesivos como granulares.

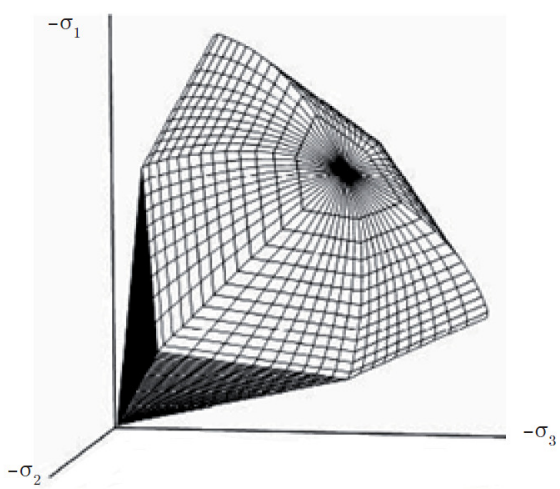

Figura 3.3 Superfície de fluência no espaço das tensões principais. (Nieto, 2009)

3.2.2.1.
Características do modelo.

Segundo o PLAXIS (2010), sua característica básica é permitir a variação da rigidez do solo com o estado de tensão, através do parâmetro m, que controla os valores do módulo triaxial de carregamento E_{50}, do módulo de descarregamento / recarregamento E_{ur} e do módulo de compressão confinada E_{oed} conforme equações 3.3 a 3.5 respectivamente. Esta caraterística constitui uma vantagem do modelo HSM sobre o Modelo Mohr-Coulomb, no qual tem que se definir um valor fixo do módulo de Young que seja compatível como o nível de tensão atuante do projeto ou definir manualmente um fator de incremento da rigidez E_{ref} que vai variando com a tensão de referencia, no entanto no modelo HSM, só precisa definir o módulo de carregamento referido à tensão principal menor $\sigma_3'=p_{ref}$ (Figura 3.4).

$$E_{50} = E_{50}^{ref}\left(\frac{c\cos\phi + \sigma_3' sen\phi}{c\cos\phi + p^{ref}\, sen\phi}\right)^m \tag{3.3}$$

$$E_{ur} = E_{ur}^{ref}\left(\frac{c\cos\phi + \sigma_3'\,\mathrm{sen}\,\phi}{c\cos\phi + p^{ref}\,\mathrm{sen}\,\phi}\right)^m \tag{3.4}$$

$$E_{oed} = E_{oed}^{ref}\left(\frac{c\cos\phi + \sigma_1'\,\mathrm{sen}\,\phi}{c\cos\phi + p^{ref}\,\mathrm{sen}\,\phi}\right)^m \tag{3.5}$$

Onde: *m* é o parâmetro que controla a variação com o estado de tensão da rigidez do solo e E_{50}^{ref} , E_{ur}^{ref} e E_{oed}^{ref} são módulos de referência, correspondentes a valores de σ'_1 ou σ'_3 iguais à pressão de referência p^{ref}, adotada arbitrariamente. O valor de *m* geralmente varia entre 0,5 e 1.

Com a definição do módulo de rigidez de carregamento e descarregamento E_{ur}^{ref} e módulo confinado E_{oed}^{ref}, permite simular o comportamento do solo em situações de carga e descarga e compressão unidimensional. O modelo HSM também inclui efeitos da dilatância dos solos e trabalha com dois tipos de superfícies de escoamento plástico: de cisalhamento, controladas pelo módulo triaxial E_{50} (Figura 3.5) e de compressão (caps), controladas pelo módulo de compressão confinada E_{oed}. A componente elástica das deformações é determinada pelo módulo de elasticidade E_{ur} obtido em trajetórias de descarregamento / recarregamento.

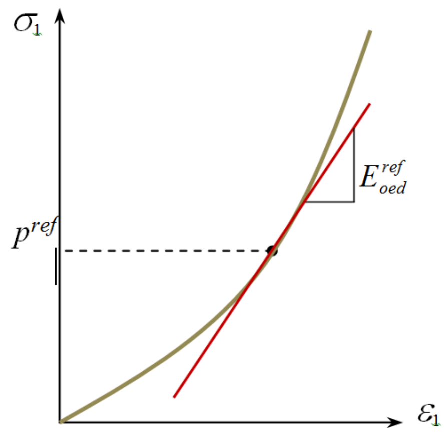

Figura 3.4 - Módulo E_{oed}^{ref} obtido a partir do ensaio odométrico (PLAXIS, 2010)

De dados experimentais de vários tipos de solos se conhecem as relações típicas entre os módulos elásticos, no entanto não são validas para solos muito rígidos ou muito moles.

$$E_{ur}^{ref} = 3E_{50}^{ref} \tag{3.6}$$

$$E_{oed}^{ref} = E_{50}^{ref} \tag{3.7}$$

As componentes elásticas de deformações axiais e radiais são dadas pelas expressões:

$$\varepsilon_a^e = \frac{q}{E_{ur}} \qquad \varepsilon_r^e = \nu_{ur}\frac{q}{E_{ur}} \tag{3.8}$$

onde: ν_{ur} coeficiente de Poisson em carregamento/descarregamento.

3.2.2.2.
Relação tensão deformação

Quando uma mostra de solo é submetida a uma tensão desviadora, o solo apresenta um decréscimo na rigidez e se desenvolvem simultaneamente deformações plásticas irreversíveis. Num ensaio triaxial convencional drenado num solo normalmente consolidado, o comportamento da curva tensão deformação poderia ser bem representado pela hipérbole como foi formulado por Kondner (Apud Romanel, 1963) e posteriormente no modelo de Duncan & Changer (1970 Apud Romanel, 2011). A formulação do modelo HSM esta baseado na relação hiperbólica entre a deformação axial e a tensão desviadora do modelo hiperbólico (Figura 3.5), mais o supera em três aspectos: usa a teoria da plasticidade no lugar da teoria da elasticidade, inclui o efeito da dilatância do solo e introduz o yield cap (fecha a superfície de fluência sobre o eixo da tensão isótropa p' no espaço de Cambridge).

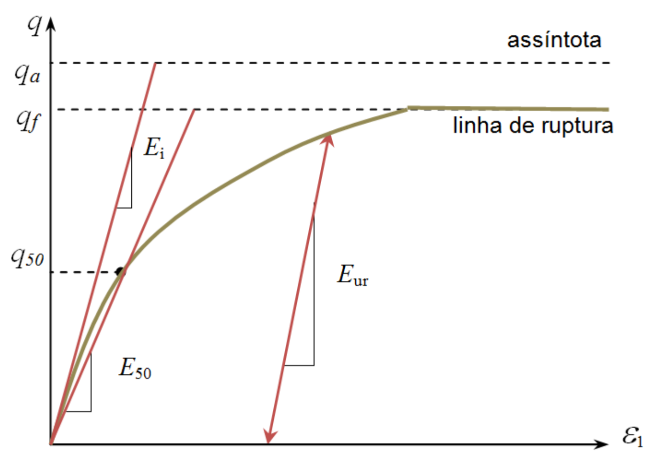

Figura 3.5 - Relação tensão-deformação hiperbólica para ensaios triaxiais consolidados drenados (PLAXIS, 2010)

A seguinte expressão descreve a relação tensão deformação dos ensaios triaxiais drenados:

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{2E_{50}} \frac{q}{1 - q / q_a} \qquad para\ q < q_f \tag{3.9}$$

Onde: q_a é o valor assintótico da resistência cisalhante, E_{50} e o módulo de Young correspondente aos 50% da tensão desviadora da ruptura q_f (Figura 3.5). Estes valores são definidos a partir do critério de ruptura de Mohr-Coulomb da seguinte forma:

$$q_f = (p + c' cotan\emptyset') \frac{6sen\emptyset'}{3 - sen\emptyset'} \qquad q_a = \frac{q_f}{R_f} \tag{3.10}$$

Onde: *c'* e *ϕ'* são valores de resistência do critério Mohr Coulomb, R_f, é a razão de ruptura entre q_f e q_a a qual deve ser obviamente menor de 1 (como simplificação se pode adotar R_f = 0,9).

Como acontece nos modelos de plasticidade, o modelo HSM mantem uma relação entre a deformação plástica volumétrica e plástica cisalhante, da qual deduze o ângulo de dilatância determinado da seguinte expressão:

$$Sen\,\psi = \frac{Sen\,\varphi_m - Sen\,\varphi_{cs}}{1 - Sen\,\varphi_m\,Sen\,\varphi_{cs}} \qquad 3.11$$

Sánchez (2004), determinou experimentalmente, a partir de ensaios triaxiais de compressão simples em areias limosas a diferentes graus de sobreconsolidação, que não existe um único valor para o ângulo de dilatância, este aumenta al aumentar o grau de sobreconsolidação OCR. A relação entre ψ e *OCR* parece responder a uma equação logarítmica apresentada a seguir:

$$\psi = 3{,}23 + 12{,}51\,log10\,OCR \qquad 3.12$$

O coeficiente de pressão lateral dos solos para solos normalmente consolidados, é estimado pela expressão:

$$K_o^{nc} = 1 - sen\theta \qquad 3.13$$

3.2.2.3. Parâmetros do modelo

Tabela 3.1 - Parâmetros do modelo HSM (PLAXIS, 2010)

Resistencia	c	kPa	Coesão	
	ϕ	°	Angulo de atrito interno	
	ψ	°	Angulo de dilatância	
Rigidez	E_{50}^{ref}	kPa	Rigidez secante em ensaios triaxiais	
	E_{eod}^{ref}	kPa	Rigidez tangente em ensaios de edométricos.	$E_{50}^{ref} = E_{eod}^{ref}$
	E_{ur}^{ref}	kPa	Rigidez de carregamento-descarregamento	* $E_{ur}^{ref} = 3E_{50}^{ref}$
	m	-	Dependência da rigidez com o estado de tensão do solo.	entre 0,5 e 1 0,5 para argilas 1,0 para areias
Avançados	ν_{ur}	-	Coeficiente de Poisson carregamento descarregamento.	* ν_{ur}=0.2
	p'_{ref}	kPa	Tensão de referencia	*p'_{ref} = 100 kPa
	K_o^{nc}	-	Coeficiente de pressão lateral dos solos	*$K_o^{nc} = 1 - sen\theta$
	R_f	-	Razão de ruptura, relação entre q_f e q_a	*R_f = 0.90

(* Valores By default)

O modelo consta de onze parâmetros básicos, que podem se agrupar como se aprecia na Tabela 3.1.

3.2.2.4. Superfície de escoamento.

O modelo incorpora o critério de ruptura de Mohr-Coulomb que tradicionalmente admite um comportamento elasto-perfeitamente plástico do material. Antes de atingir esta envoltória, o solo passa por sucessivas superfícies de escoamento, com ocorrência de endurecimento. As deformações plásticas associadas à trajetória de carregamento são obtidas a partir da função de escoamento *F* definida como $F = \bar{f} - \gamma^p$, onde γ^p é a deformação plástica de desvio ou de distorção.

$$\bar{f} = \frac{1}{E_{50}} \frac{q}{1 - q/q_a} - \frac{2q}{E_{ur}} \qquad 3.14$$

$$\gamma^p = (2\varepsilon_1^p - \varepsilon_v^p) \approx 2\varepsilon_1^p \qquad 3.15$$

sendo a aproximação da equação (3.15) válida especialmente para solos de grande rigidez. Desta maneira a deformação axial plástica pode ser expressa por $\varepsilon_1^p \approx \frac{1}{2}\bar{f}$.

Já as componentes elásticas de deformação são determinadas como

$$\varepsilon_1^e = q/E_{ur} \qquad 3.16$$

$$\varepsilon_2^e = \varepsilon_3^e = -\nu_{ur}\, q/E_{ur} \qquad 3.17$$

onde o parâmetro ν_{ur} é o coeficiente de Poisson na condição de descarregamento/recarregamento, assumido constante .

Assim, para um dado valor da função de endurecimento γ^p, existirá uma superfície de escoamento ($\bar{f}_1 = 0$), a qual descreve uma linha reta no plano *p´-q* para *m* = 1 ou linha de baixa curvatura para *m* < 1 (Figura 3.6)

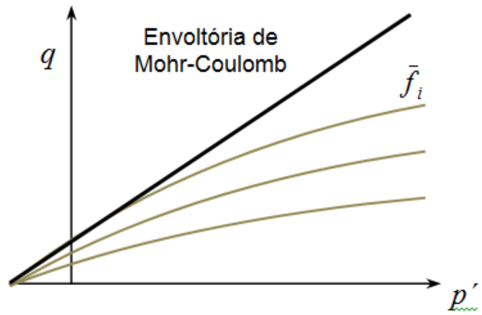

Figura 3.6 - Modelo HSM. Superfícies de escoamento para vários valores de γ^p. (Ibañez, 2003)

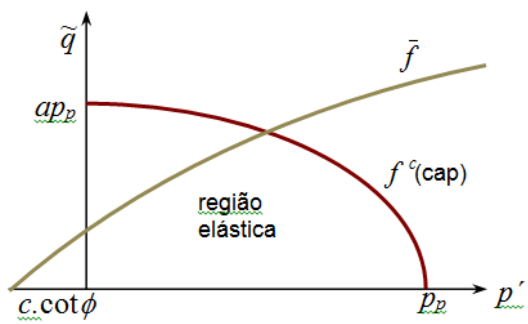

Figura 3.7 - Modelo HSM. Superfície “cap” no plano p´-q. (Ibañez, 2003)

Quanto às deformações plásticas volumétricas, faz-se uso da teoria da dilatância de Rowe (1962) para vinculá-las às deformações plásticas de desvio, através do ângulo de dilatância mobilizado ψ_m

$$\dot{\varepsilon}_v^p = -\operatorname{sen}\psi_m \dot{\gamma}^p = -\frac{\operatorname{sen}\phi_m - \operatorname{sen}\phi_{cv}}{1 - \operatorname{sen}\phi_m \operatorname{sen}\phi_{cv}} \dot{\gamma}^p \qquad 3.18$$

onde ϕ_m é o ângulo de atrito interno mobilizado e ϕ_{cv} o ângulo de atrito interno nas condições de estado crítico (fluxo plástico sem variação de volume):

$$\operatorname{sen}\phi_m = \frac{\sigma_1' - \sigma_3'}{\sigma_1' + \sigma_3' - 2c\cot\phi} \qquad 3.19$$

$$\operatorname{sen}\phi_{cv} = \frac{\operatorname{sen}\phi - \operatorname{sen}\psi}{1 - \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\psi} \qquad 3.20$$

sendo ϕ e ψ os ângulos de atrito interno e dilatância na ruptura, respectivamente, os parâmetros a serem fornecidos no modelo. Desta forma, o material experimentará contração caso $\phi_m < \phi_{cv}$ ou expansão quando $\phi_m > \phi_{cv}$.

3.2.2.5. Superfície *cap.*

Esta segunda superfície de escoamento, que fecha a região elástica na direção do eixo hidrostático *p´* (Figura 3.7), foi introduzida no modelo HSM para descrever as deformações volumétricas plásticas sob compressão isotrópica, sendo controlada pelo módulo edométrico $E_{oed.}$

A superfície *cap* é definida como uma elipse no plano *p´-q,* matematicamente descrita por

$$f^c = \frac{\tilde{q}^2}{\alpha^2} + p^2 - p_p^2 \qquad 3.21$$

onde α é um parâmetro auxiliar relacionado com o coeficiente de empuxo no repouso K_0^{NC}, podendo ser adotado, como aproximação, o valor $\alpha = K_0^{NC} = 1 - \mathrm{sen}\,\phi$. A variável $\tilde{q}$ representa uma medida especial da tensão de desvio,

$$(\tilde{q} = \sigma_1 + (\delta - 1)\sigma_2 - \delta\sigma_3 \qquad 3.22$$

onde $\delta = (3 + \mathrm{sen}\,\phi)/(3 - \mathrm{sen}\,\phi)$ e recuperando-se o valor $\tilde{q} = \sigma_1 - \sigma_3 = q$ no caso do ensaio triaxial de compressão convencional.

A pressão de pré-adensamento isotrópico p_p determina o tamanho do *cap*, e se relaciona com as deformações volumétricas plásticas pela seguinte lei de endurecimento:

$$\varepsilon_v^{pc} = \frac{\beta}{1-m}\left(\frac{p_p}{p^{ref}}\right)^{1-m} \qquad 3.23$$

onde β é um segundo parâmetro auxiliar, relacionado com o módulo edométrico de referência E_{oed}^{ref}.

A superfície *cap* de escoamento é também admitida como um potencial plástico (fluxo associado), possibilitando o cálculo do vetor incremento de deformação plástica pela lei de fluxo

$$d\varepsilon^{pc} = d\lambda \frac{\partial f^c}{\partial \sigma}$$ 3.24

$$d\lambda = \frac{\beta}{2p}\left(\frac{p_p}{p^{ref}}\right)^m \frac{\dot{p}_p}{p^{ref}}$$ 3.25

3.2.2.6. Controle da dilatância.

Os solos experimentam, após um cisalhamento prolongado, um estado de densidade crítica (constante) sem variação de volume (estado crítico). O modelo HSM permite reproduzir este fenômeno através de um corte na curva de deformação volumétrica (*cut-off*), quando o índice de vazios atingir um valor máximo e_{max} pré-estabelecido.

É necessário fornecer-se os valores inicial e máximo do índice de vazios do material, de tal forma que o índice de vazios atual possa ser calculado de acordo com

$$\left(\varepsilon_v - \varepsilon_v^{inicial}\right) = \ln\left(\frac{1+e}{1+e_{inicial}}\right)$$ 3.26

Quando e_{max} é atingido, o valor do ângulo de dilatância mobilizado cai para zero a fim de reproduzir a condição de estado crítico ($d\varepsilon_v = 0$).

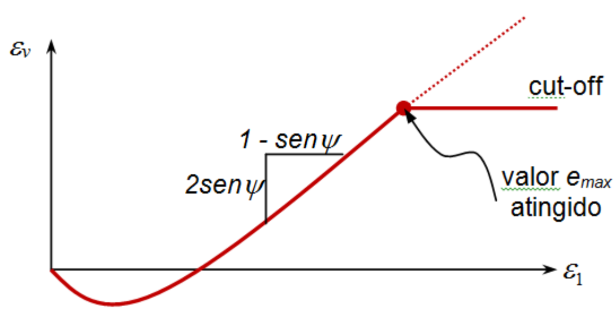

Figura 3.8 - Modelo HSM. Curva de deformação volumétrica para ensaio triaxial drenado com indicação de *cut-off*. (PLAXIS, 2010)

3.2.3. Modelo linear equivalente

Um solo típico submetido a um carregamento cíclico simétrico, exibe um comportamento tensão-deformação não-linear da forma de um laço de histerese como mostra a Figura 3.9, onde a diferença entre as curvas de carregamento e de descarregamento representa a energia dissipada no solo (amortecimento do material). Este laço de histerese pode ser descrito de duas maneiras: pela trajetória do laço em si mesmo e, pelos parâmetros que descrevam sua forma geral. Dois são as principais características do laço de histerese, sua inclinação que depende da rigidez do solo e largura que está relacionada com sua área $A_{laço}$, que é uma medida da dissipação de energia.

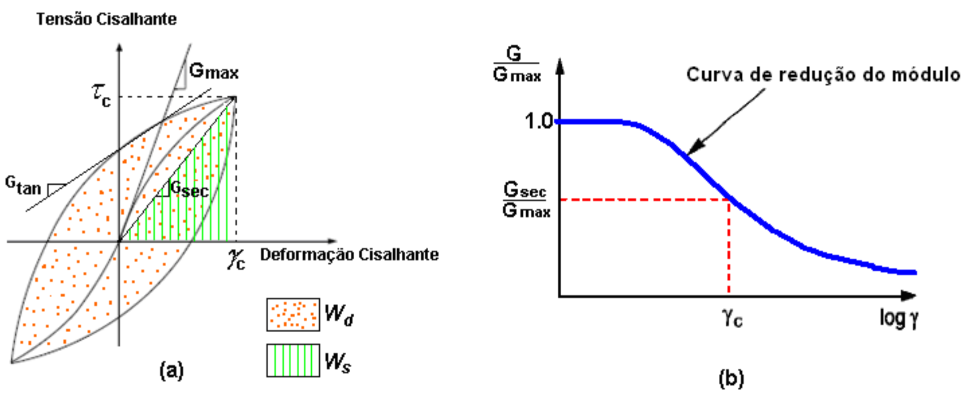

Figura 3.9 - Comportamento cíclico típico dos solos (Kramer, 1996): a) Relação tensão - deformação cisalhante para o primeiro ciclo de carregamento. b) Variação da rigidez em função do nível de deformação por cisalhamento.

Durante os terremotos os materiais da uma barragem, experimentam deformações cisalhantes relativamente grandes que a sua vez introduzem efeitos não lineares significativos. Este problema foi estudado por Seed e Idriss (1969), eles introduziram a noção do método linear equivalente em geotecnia. O método propõe que uma solução não linear aproximada pode ser obtida mediante uma análise linear na qual as propriedades de rigidez e de amortecimento do solo sejam compatíveis com as amplitudes das deformações cisalhantes efetivas em todos os pontos considerados do sistema. A partir de estudos para solos granulares e coesivos, com resultados de deformações compatíveis sob forma de curvas de variação do amortecimento e do módulo cisalhante, podem ser incorporados no programa computacional através da seguinte sistémica.

Os valores iniciais do módulo cisalhante e do amortecimento são estimados para cada elemento finito da discretização da barragem. O sistema é então analisado utilizando estas propriedades, sendo a deformação cisalhante máxima na história do tempo calculada em cada elemento. A partir destes resultados estimam-se as amplitudes da deformação cisalhante efetiva em cada elemento, consultando-se as curvas do material correspondente para observar se o nível de deformação é compatível com os valores das propriedades dinâmicas utilizadas na avaliação da resposta. Se as propriedades do solo não foram compatíveis, admite-se então que as curvas forneçam valores do módulo cisalhante e do amortecimento para a próxima iteração, e o processo é repetido até atingir a convergência, o que ocorre geralmente após 3 a 5 iterações. A resposta da última iteração é considerada como a resposta não linear do sistema.

O método linear equivalente é uma aproximação do comportamento não linear do solo, o qual implica que não pode ser usado em problemas com deformações permanentes de falha, modelos lineares equivalentes implicam que a deformação retorna a zero depois o carregamento cíclico e como o material linear não tem resistência limite, a falha não pode acontecer. Sua aplicação se deve principalmente à facilidade de implementação computacional e à rapidez de processamento na análise de respostas dinâmicas, razões pelas quais é ainda bastante utilizado por alguns programas desenvolvidos na Universidade de Califórnia (Berkeley), tais como SHAKE, QUAD-4, LUSH, FLUSH, entre outros. Análises da resposta sísmica feitas em diversas barragens através deste método (Abdel-Ghaffar e Scott, 1979; Makdisi et al., 1982; Mejia et al., 1982; Mejia e Seed, 1982) sugerem que este procedimento iterativo pode simular o comportamento real da obra de forma bastante razoável.

Em resumo o método linear equivalente faz uso das curvas de variação do módulo cisalhante, prévio o conhecimento do módulo cisalhante máximo, o qual será posteriormente modificado em função das deformações cisalhantes efetivas. A estimativa do módulo cisalhante máximo pode ser feito através de procedimentos descritos na literatura.