

**Deibi Eric García Campos**

**Estudo da instabilidade de ondas na interface do escoamento estratificado laminar-laminar em um canal**

**Tese de Doutorado**

Tese apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica da PUC-Rio como requisito parcial para obtenção do grau de Doutor em Engenharia Mecânica.

Orientador : Prof. Igor Braga de Paula  
Co-orientadora: Profa. Angela Ourivio Nieckele

Rio de Janeiro  
Maio de 2018



**Deibi Eric García Campos**

**Estudo da instabilidade de ondas na interface do escoamento estratificado laminar-laminar em um canal**

Tese apresentada como requisito parcial para a obtenção do grau de Doutor pelo Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica da PUC-Rio. Aprovada pela Comissão Examinadora abaixo assinada.

**Prof. Igor Braga de Paula**

Orientador

Departamento de Engenharia Mecânica – PUC-Rio

**Profa. Angela Ourivio Nieckele**

Co-orientadora

Departamento de Engenharia Mecânica – PUC-Rio

**Prof. Oscar Mauricio Hernandez Rodriguez**

Departamento de Engenharia Mecânica – USP

**Dr. João Neuenschwander Escosteguy Carneiro**

ISDB FlowTech

**Prof. Daniel Rodríguez Álvarez**

Centro Tecnológico, Escola de Engenharia – UFF

**Prof. Márcio da Silveira Carvalho**

Departamento de Engenharia Mecânica – PUC-Rio

**Prof. Márcio da Silveira Carvalho**

Coordenador Setorial do Centro

Técnico Científico – PUC-Rio

Rio de Janeiro, 11 de maio de 2018

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, do autor e dos orientadores.

### **Deibi Eric García Campos**

Engenheiro Mecânico pela Universidad Nacional de Trujillo UNT (Perú) e Mestre em Engenharia Mecânica pela Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro PUC-Rio (Brasil).

#### Ficha Catalográfica

García Campos, Deibi Eric

Estudo da instabilidade de ondas na interface do escoamento estratificado laminar-laminar em um canal / Deibi Eric García Campos; orientador: Igor Braga de Paula; co-orientadora: Angela Ourivio Nieckele. – 2018.

256 f. : il. color. ; 30 cm

Tese (doutorado)–Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Engenharia Mecânica, 2018.

Inclui bibliografia

1. Engenharia Mecânica – Teses. 2. Escoamento bifásico. 3. Estabilidade linear e não linear. 4. Interação de ondas interfaciais. 5. Estabilização não linear. 6. Método VOF. I. Paula, Igor Braga de. II. Nieckele, Angela Ourivio. III. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Engenharia Mecânica. IV. Título.

CDD: 621

Dedicado à minha família.



## Agradecimentos

À PUC-Rio, pela concessão de isenção de pagamento no programa de Doutorado em Engenharia Mecânica.

À CAPES e a ANP, pela concessão da bolsa de Doutorado.

Ao Departamento de Engenharia Mecânica da PUC-Rio, pela oportunidade.

A meu Orientador, Professor Igor Braga de Paula pela confiança, ajuda e ensinamentos.

A minha Co-orientadora, Professora Angela Ourivio Nieckele pela oportunidade, apoio, ensinamentos e por ter sido fundamental no início da tese.

Ao Professor Daniel Rodríguez Álvarez, pelas ajudas e sugestões no desenvolvimento inicial da tese.

Aos colegas da PUC Rio, pela convivência e intercâmbio de experiência acadêmica.

A minha família por ter sido a coluna vertebral para ter vencido todos os desafios que encontrado na minha vida.

## Resumo

García Campos, Deibi Eric; Braga de Paula, Igor (Orientador); Ourivio Nieckele, Angela (Co-orientadora). **Estudo da instabilidade de ondas na interface do escoamento estratificado laminar-laminar em um canal.** Rio de Janeiro, 2018. 256p. Tese de Doutorado - Departamento de Engenharia Mecânica, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

No presente trabalho estudou-se numericamente a instabilidade das ondas na interface do escoamento estratificado de água e óleo em um canal plano. Esse padrão de escoamento, associado ao estágio inicial da formação de golfada, é comum em aplicações industriais, de áreas como produção de petróleo, nuclear, química e muitas outras. Através da introdução de perturbações controladas na interface do escoamento estratificado, analisou-se a evolução dessas perturbações à luz das teorias de estabilidade hidrodinâmica. Os experimentos numéricos foram realizados utilizando o método de *Volume of Fluid* (VOF) do simulador comercial ANSYS Fluent® versão 15.0. Analisou-se o comportamento do escoamento em dois regimes distintos com relação a amplitude das ondas interfaciais. No primeiro regime, empregaram-se ondas pequenas o suficiente para que efeitos não lineares fossem desprezíveis. Os resultados obtidos apresentaram boa concordância com as previsões fornecidas por um “solver” das equações de Orr-Sommerfeld, para escoamento bifásico estratificado em um canal, indicando que a ferramenta numérica foi capaz de reproduzir o comportamento das ondas interfaciais. Mostrou-se que existe uma faixa de amplitudes, em torno de 0,2% da altura do canal, a partir da qual os efeitos não lineares se tornam relevantes. No regime não linear foram avaliados diferentes cenários de interação não linear entre ondas, os quais geralmente são associados a transição do regime do escoamento estratificado para golfadas. Identificou-se o cenário mais relevante, analisando-se a eficiência de cada uma dessas interações isoladamente. Observou-se que interações não lineares entre ondas de comprimento parecido são as que crescem mais rapidamente. Esse mecanismo parece ser dominante também na presença de um grande número de ondas, como é o caso esperado em um evento “natural”.

Utilizou-se um modelo fracamente não linear, baseado nas equações de Stuart-Landau, para modelar o comportamento das ondas no escoamento, obtendo-se excelente concordância com os resultados das simulações. Isso é interessante do ponto de vista prático, pois sugere que modelos não lineares simples, como é o caso da equação de Stuart-Landau, podem ser implementados para melhorar as ferramentas utilizadas para prever mudanças de regime em escoamentos bifásicos.

### **Palavras-chave**

Escoamento bifásico; estabilidade linear e não linear; interação de ondas interfaciais; estabilização não linear; método VOF.

## Abstract

García Campos, Deibi Eric; Braga de Paula, Igor (Advisor); Ourivio Nieckele, Angela (Co-advisor). **Study of instability of interfacial waves in stratified laminar-laminar channel flow**. Rio de Janeiro, 2018. 256p. Tese de Doutorado – Departamento de Engenharia Mecânica, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

In the present work, the instability of waves at the interface of the stratified flow of water and oil in a plane channel was numerically studied. This flow pattern, which is associated with the initial stages of slug formation, is common in industrial application in areas such as oil production, nuclear, chemical and many others. Through the introduction of controlled perturbations at the interface of a stratified flow, the evolution of the perturbations was analyzed based on hydrodynamics stability theories. Numerical experiments were performed using the Volume of Fluid (VOF) method of the ANSYS Fluent® release 15.0 commercial simulator. The behavior of the flow in two different regimes with respect to the amplitude of the interfacial waves was analyzed. In the first regime, small enough waves were employed so that non-linear effects were negligible. The results obtained presented good agreement with the predictions provided by a solver of the Orr-Sommerfeld equations for stratified two-phase flow in a channel, indicating that the numerical tool was able to reproduce the behavior of the interfacial waves. It was shown that there is a range of amplitudes, around 0.2% of the channel height, above which the non-linear effects become relevant. In the nonlinear regime, different scenarios of nonlinear interaction between waves, which are usually associated with transition from stratified flow pattern to slug flow, were evaluated. The most relevant scenario was identified, based on the efficiency of each independent interaction. It was observed that non-linear interactions between waves of similar length present the fastest growth. This mechanism seems to be dominant also in the presence of a large number of waves, as present in "natural" events. A weakly nonlinear model, based on the Stuart-Landau equations, was employed to model the wave behavior in the flow,

obtaining an excellent agreement with the results of the simulations. This is interesting from a practical point of view, since it suggests that simple nonlinear models, such as the Stuart-Landau equation, can be implemented to improve the tools used to predict regime changes in two-phase flows.

## **Keywords**

Two-phase flow; linear and non-linear stability; interfacial waves interaction; non-linear stabilization; VOF method.

## Sumário

1 Introdução	40
1.1. Objetivo	44
1.2. Metodologia	44
1.3. Estrutura da Tese	45
2. Revisão Bibliográfica	47
2.1. Resumo Introdutório	47
2.2. Modelos Mecanicistas	50
2.3. Modelos de Estabilidade Linear	55
2.4. Modelos de Estabilidade Não Linear	57
2.5. Modulação da Amplitude de Ondas	60
2.6. Simulação Numérica	62
2.7. Investigações Suplementares	66
2.8. Conclusão do Capítulo	69
3. Fundamentos Teóricos	72
3.1. Onda Simples	72
3.2. Ondas Dispersivas e o Conceito de Velocidade de Grupo	73
3.3. Estabilidade Hidrodinâmica	75
3.3.1. Teoria de estabilidade linear	75
3.3.2. Análise local da teoria de estabilidade linear	76
3.3.3. Método dos modos normais	77
3.3.4. Equações de Orr-Sommerfeld, Squire e Rayleigh	78
3.3.5. Transformação e teorema de Squire	79
3.3.6. Estabilidade temporal	79
3.3.7. Estabilidade espacial	80
3.3.8. Transformada de Gaster	81
3.3.9. Estabilidade convectiva e absoluta	82

3.3.10. Teoria de estabilidade não linear	82
3.3.11. Equação de Stuart-Landau	83
3.3.12. Bifurcação supercrítica e subcrítica	83
4. Modelagem	86
4.1. Modelo Matemático	86
4.1.1. Método VOF (Volume of Fluid)	86
4.1.2. Condições de contorno	89
4.1.3. Condição inicial	91
4.1.4. Parâmetros do problema e adimensionalização	91
4.1.5. Caracterização do escoamento em um mapa de padrão de escoamento	93
4.1.6. Solução analítica do escoamento base	95
4.1.7. Perturbações controladas na interface	96
4.2. Modelo Numérico	99
4.2.1. Discretização da equação da fração volumétrica	99
4.2.2. Discretização da equação de quantidade de movimento linear	101
4.2.2.1. Discretização espacial	101
4.2.2.2. Discretização temporal	102
4.2.3. Discretização da equação de continuidade global	103
4.2.4. Acoplamento da pressão - velocidade	103
4.2.5. Tratamento do sistema algébrico	104
5. Pós-processamento das Simulações Numéricas	105
5.1. Cálculo da Interface	105
5.2. Análise Linear	106
5.2.1. Velocidade de fase e amplificação, cenário de estabilidade temporal	108
5.2.2. Velocidade de fase e amplificação, cenário de estabilidade espacial	110
5.2.2.1. Velocidade de grupo, cenário de estabilidade espacial	112

5.2.3. Sincronização de fases	114
5.3. Análise Não Linear	116
5.3.1. Bicoerência	116
5.4. Análises da Teoria Estabilidade Linear: Dados Referenciais	119
5.5. Parâmetros Numéricos	120
5.5.1. Teste de malha	120
5.5.2. Resolução do passo de tempo	123
5.6. Tempos de Processamento	124
5.7. Conclusão do Capítulo	125
6. Resultados do Regime Linear	126
6.1. Caso com Escoamento Base Fracamente Instável ( $h_{eq}=0,558$ )	127
6.1.1. Sistema não perturbado com comprimento do domínio igual a $L=2$	127
6.1.2. Sistema perturbado com comprimento do domínio igual a $L=2$	132
6.1.3. Casos com excitação de ondas curtas, médias e longas	135
6.2. Caso com Escoamento Base Instável ( $h_{eq}=0,7$ )	138
6.3. Comparação com a Teoria Linear	143
6.4. Evolução das Fases	146
6.5. Resumo do Capítulo	146
7. Estágios Não Lineares	148
7.1. Limiar de Estabilidade Linear – Testes com Canal Curto	148
7.2. Evolução Não Linear - Caso Fracamente Instável ( $h_{eq}=0,558$ )	153
7.3. Evolução Não Linear - Caso Instável ( $h_{eq}=0,7$ )	158
7.4. Evolução dos Harmônicos no Regime Linear – Testes com Canal Curto	162



7.5. Evolução dos Harmônicos na Região Não-Linear – Testes com Canal Curto	163
7.6. Transferência de Energia entre Ondas – Testes com Canal Curto	165
7.7. Estágio de Saturação do Crescimento das Ondas	167
7.8. Análise da Interação de Ondas em Canal Longo	169
7.8.1. Interação entre harmônicos	170
7.8.2. Interação entre onda curta e seu subharmônico	176
7.8.3. Interação entre onda curta e onda longa	183
7.8.4. Interação entre duas ondas com frequência próximas (modulação)	188
7.8.4.1. Influência da amplitude efetiva inicial	194
7.8.4.2. Sincronização de fases	198
7.8.5. Evolução de um espectro de banda larga com fases aleatórias	199
7.8.6. Equivalência das amplitudes efetivas dos casos avaliados	205
7.9. Não Linearidade através da Equação de Stuart-Landau	207
7.10. Evolução Espacial de um Pacote de Ondas	208
7.11. Resumo do Capítulo	214
8. Comentários Finais	216
8.1. Recomendações para trabalhos futuros	220
9. Referências bibliográficas	222
Apêndice A : Códigos Fluent (User-Defined Function UDF)	235
A.1. Forçante instantânea	235
A.2. Forçante periódica para o pacote de ondas	236
A.3. Scripts dos UDF para execução paralela (cluster)	236
Apêndice B : Escoamento Base	238
B.1. Simulações em canais não periódicos	238

B.2. Simulações em canais periódicos	239
Apêndice C : Excitação de ondas	242
C.1. Excitação de ondas – Estágios Lineares	242
C.1.1. Caso com escoamento base fracamente instável ( $h_{eq}=0,558$ )	242
C.1.2. Caso com escoamento base instável ( $h_{eq}=0,7$ )	247
C.2. Excitação de ondas – Estágios Não Lineares	250
C.2.1. Caso com escoamento base fracamente instável ( $h_{eq}=0,558$ )	250
C.2.2. Caso com escoamento base instável ( $h_{eq}=0,7$ )	254

## Lista de Figuras

Figura 1.1 - Padrões do escoamento bifásico em tubulações horizontais e verticais, em um sistema líquido-gás. Adaptado de Brennen (2005).	40
Figura 1.2 - Padrões de escoamento devido a instabilidades interfaciais. a) Golfada no sistema líquido-gás (Andritsos et al., 1989). b) Ondulado no sistema líquido-líquido (Castro & Rodriguez, 2015).	41
Figura 2.1 - Mapa de padrão clássico para sistema água-ar, escoamento horizontal em dutos. Surgimento de diferentes padrões é considerado função das velocidades superficiais dos fluidos. Adaptado de Mandhane et al., 1974.	48
Figura 2.2 - Modelo mecanicista da formação de golfada (Taitel & Dukler, 1976).	49
Figura 2.3 - Padrões de escoamento horizontal em dutos, sistema água-óleo. Trallero et al. (1997).	54
Figura 3.1 - Onda periódica espacial com detalhe do comportamento no tempo (para a posição fixa $x_c$ ).	73
Figura 3.2 - Trem de ondas. Ondas individuais se propagando com velocidade $c=\omega/\alpha$ (velocidade de fase) são moduladas em amplitude pelo envelope se propagando com velocidade $c_g=d\omega/d\alpha$ (Velocidade de grupo). Extraído de Kundu et al. (2012).	74
Figura 3.3 - Curvas clássicas da análise de estabilidade linear para o escoamento de Poiseuille entre placas paralelas. a) Autovalores da análise espectral para $Re=10000$ , $\alpha=1$ e $\alpha_z=0$ . b) Isolinhas de amplificação constante e curva de estabilidade neutra. Extraído de Schmid & Henningson (2001).	80

- Figura 3.4 - Tipo de instabilidades segundo sua propagação. (a) Instabilidade absoluta, (b) Instabilidade convectiva. (Drazin, 2002). 82
- Figura 3.5 - Estabilidade supercrítica ( $\bar{\mu}_2 < 0$ ). a) Amplitude como função do tempo para duas amplitudes iniciais  $A_0$ . b) A curva de bifurcação representa a amplitude de equilíbrio como função de  $Re$  (Drazin & Reid, 1981). 84
- Figura 3.6 - Estabilidade subcrítica ( $\bar{\mu}_2 > 0$ ). a) Amplitude como função do tempo para duas amplitudes iniciais  $A_0$ . b) A curva de bifurcação representa a amplitude de equilíbrio como função de  $Re$  (Drazin & Reid, 1981). 85
- Figura 4.1 - Configuração do escoamento. a) Cenário temporal. b) Cenário espacial. 89
- Figura 4.2 - Mapa de padrão de escoamento de sistemas água-óleo equivalentes. Dados experimentais obtidos em duto de diâmetro de 5,6mm (Wegmann & von Rohr, 2006) e numéricos em canal com altura de 2,8mm (Gada & Sharma, 2012).  $H_i$  representa a altura da fase aquosa na entrada do canal longo avaliado por Gada & Sharma (2012), entanto que  $U_{in}$  é a velocidade constante imposta na entrada do mesmo canal para cada uma das fases. 94
- Figura 5.1 - Interface entre os fluidos em um instante de tempo. 106
- Figura 5.2 - Espectro espacial mostrando amplitude versus serie harmônica no instante  $t=20$ . Exemplo corresponde ao caso perturbado com  $\lambda=2$  ( $\alpha=\pi$ ) no domínio  $L=2$ . 109
- Figura 5.3 - Evolução da amplitude da interface perturbada (fundamental e primeiros harmônicos) ao longo do tempo. Taxa de amplificação é obtida na faixa  $12 \leq t \leq 27$ . Exemplo corresponde ao caso perturbado com  $\lambda=2$  no domínio  $L=2$ . 110

- Figura 5.4 - Evolução da fase do modo fundamental ao longo do tempo. Frequência angular é obtida da linha tracejada considerada na mesma faixa da taxa de amplificação ( $12 \leq t \leq 27$ ). Exemplo corresponde ao caso perturbado com  $\lambda=2$  no domínio  $L=2$ . 110
- Figura 5.5 - Espectro temporal mostrando amplitude versus serie harmônica na posição  $x=20$ . Exemplo corresponde ao caso perturbado com  $\omega=4,6434$  no domínio  $L=30$ . 111
- Figura 5.6 - Evolução da amplitude da interface perturbada (fundamental e primeiros harmônicos) ao longo de  $x$ . Taxa de amplificação é obtida na faixa  $17 \leq x \leq 30$ . Exemplo corresponde ao caso perturbado com  $\omega=4,6434$  no domínio  $L=30$ . 112
- Figura 5.7 - Evolução da fase do modo fundamental ao longo do  $x$ . Número de onda é obtido da linha tracejada considerada na mesma faixa da taxa de amplificação (faixa  $17 \leq x \leq 30$ ). Exemplo corresponde ao caso perturbado com  $\omega=4,6434$  no domínio  $L=30$ . 112
- Figura 5.8 - Função correlação cruzada dos envelopes dos sinais  $x(t)_1$  e  $x(t)_2$ , obtidas nas posições  $x=29$  e  $x=30$ . Exemplo corresponde ao caso perturbado com  $\omega=4,6434$  no domínio  $L=30$ . 114
- Figura 5.9 - Sinal no tempo (a), magnitude (b) e fase(c). Exemplo de resultado da transformada Wavelet de um sinal conhecido. 115
- Figura 5.10 - Região de computação do biespectro. 117
- Figura 5.11 - Espectro e Bicoerência. Caso A indicando não linearidade (a, b, c). Caso B indicando linearidade (d, e, f). Máxima coerência entre fases em 2 e 3 rad/s ( $b^2 \approx 1$ ). 118
- Figura 5.12 - Análise de estabilidade temporal. (a) Parte real; (b) imaginária da frequência angular complexa  $\omega$  como função do número de onda  $\alpha_r$ . 119

- Figura 5.13 - Análise de estabilidade espacial. (a) Parte imaginária do número de onda  $\alpha$  como função da frequência angular  $\omega$ . b) Espectro de autovalores no plano complexo da velocidade de fase para  $\lambda=3$ . O círculo vermelho indica o modo instável. 120
- Figura 5.14 - Comparativo da evolução temporal das amplitudes de onda para as quatro resoluções avaliadas. Caso referencial L3xH1. 121
- Figura 5.15 - Teste de malha do caso referencial L3xH1. a) Convergência avaliando velocidade de onda. b) Convergência avaliando taxa de amplificação temporal. Último ponto corresponde à extrapolação de Richardson. 122
- Figura 5.16 - Teste para o passo de tempo, caso referencial  $L=\lambda=3$ . Convergência dos resultados da velocidade de onda em função do número de Courant  $Co$ . 123
- Figura 6.1 - Flutuação da velocidade normal à parede  $v'$ , obtida a partir da solução das equações de O-S (teoria linear), caso com comprimento de onda  $\lambda=2$ . 128
- Figura 6.2 - Evolução temporal da amplitude de oscilação da interface para um domínio  $L=2$ . Perturbações iniciadas pelo ruído numérico. Contornos da flutuação  $v'$  são apresentados para alguns instantes da simulação. 129
- Figura 6.3 - Evolução temporal da amplitude de oscilação da interface para uma onda com comprimento ( $\lambda$ ) igual a 2. Perturbações iniciadas pelo ruído numérico. Contornos da flutuação  $v'$  são apresentados para alguns instantes da simulação. 130
- Figura 6.4 - Evolução temporal da amplitude do modo fundamental ( $\lambda=2$ ). São comparados os perfis de magnitude de  $v'$  da simulação (curva contínua preta) em alguns instantes de tempo, com a autofunção da teoria linear (curva tracejada vermelha). 131

- Figura 6.5 - Evolução temporal da amplitude do modo fundamental ( $\lambda=2$ ). Diferentes instantes dos iso-contornos da flutuação  $v'$  com referência da interface mostram o comportamento qualitativo da onda avaliada. 133
- Figura 6.6 - Evolução temporal da amplitude do modo fundamental ( $\lambda=2$ ). São comparados os perfis de magnitude de  $v'$  da simulação (curva contínua preta) em alguns instantes de tempo com a autofunção da teoria linear (curva tracejada vermelha). 134
- Figura 6.7 - Evolução temporal da amplitude do modo fundamental ( $\lambda=4$ ). Instantes da flutuação  $v'$  mostram o comportamento qualitativo da onda avaliada. 136
- Figura 6.8 - Evolução temporal da amplitude do modo fundamental ( $\lambda=15$ ). Instantes da flutuação  $v'$  mostram o comportamento qualitativo da onda avaliada. 136
- Figura 6.9 - Evolução temporal da amplitude de onda ( $\lambda=4$ ). Perfis de magnitude de  $v'$  (curva contínua preta) são comparados com a teoria linear (curva tracejada vermelha). 137
- Figura 6.10 - Evolução temporal da amplitude de onda ( $\lambda=15$ ). Perfis de magnitude de  $v'$  (curva contínua preta) são comparados com a teoria linear (curva tracejada vermelha). 138
- Figura 6.11 - Evolução temporal da amplitude do modo fundamental ( $\lambda=1,5$ ). Instantes da flutuação  $v'$  mostram o comportamento qualitativo da onda avaliada. 140
- Figura 6.12 - Evolução temporal da amplitude do modo fundamental ( $\lambda=3$ ). Instantes da flutuação  $v'$  mostram o comportamento qualitativo da onda avaliada. 140
- Figura 6.13 - Evolução temporal da amplitude do modo fundamental ( $\lambda=15$ ). Instantes da flutuação  $v'$  mostram o comportamento qualitativo da onda avaliada. 141

- Figura 6.14 - Evolução temporal da amplitude de onda ( $\lambda=1,5$ ). Perfis de magnitude de  $v'$  (curva contínua preta) são comparados com a teoria linear (curva tracejada vermelha). 141
- Figura 6.15 - Evolução temporal da amplitude de onda ( $\lambda=3$ ). Perfis de magnitude de  $v'$  (curva contínua preta) são comparados com a teoria linear (curva tracejada vermelha). 142
- Figura 6.16 - Evolução temporal da amplitude de onda ( $\lambda=15$ ). Perfis de magnitude de  $v'$  (curva contínua preta) são comparados com a teoria linear (curva tracejada vermelha). 142
- Figura 6.17 - Comparação das simulações e teoria linear, caso  $h_{eq}=0,558$ . a) Frequência angular vs número de onda. b) Taxa de amplificação vs número de onda. 145
- Figura 6.18 - Comparação das simulações e teoria linear, caso  $h_{eq}=0,7$ . a) Frequência angular vs número de onda. b) Taxa de amplificação vs número de onda. 145
- Figura 6.19 - Evolução temporal das fases das ondas avaliadas. a) Caso  $h_{eq}=0,558$ . b) Caso  $h_{eq}=0,7$ . 146
- Figura 7.1 - Evolução do componente de frequência zero, caso  $h_{eq}=0,558$ . Modos: (a)  $\lambda=1,5$ ; (b)  $\lambda=2$ ; (c)  $\lambda=3$ ; (d)  $\lambda=4$ . 150
- Figura 7.2 - Evolução do componente de frequência zero, caso  $h_{eq}=0,7$ . Modos: (a)  $\lambda=1,5$ ; (b)  $\lambda=3$ . 150
- Figura 7.3 - Amplitude versus comprimento de onda, na condição  $Ur=1$ . No caso de ondas curtas e médias, o limiar de instabilidade linear é sobrestimado. No caso de onda longa, esse limiar, é subestimado. 152



- Figura 7.4 - Relação entre amplitudes  $A_{Ur}$  e  $A=2 \times 10^{-3}$ , para  $h_{eq}=0,558$ . Amplitude  $A_{Ur}$  é obtida a partir do número de Ursell na condição  $Ur=1$ . a) Caso  $\lambda=2$ , o valor  $A_{Ur}$  é 11 vezes maior do limiar  $A=2 \times 10^{-3}$ . b) Caso  $\lambda=4$ , o valor  $A_{Ur}$  é 3 vezes maior do limiar  $A=2 \times 10^{-3}$ . 152
- Figura 7.5 - Relação entre amplitudes  $A_{Ur}$  e  $A=2 \times 10^{-3}$ , para  $h_{eq}=0,7$ . Amplitude  $A_{Ur}$  é obtida a partir do número de Ursell na condição  $Ur=1$ . a) Caso  $\lambda=1,5$ , o valor  $A_{Ur}$  é 38 vezes maior do limiar  $A=2 \times 10^{-3}$ . b) Caso  $\lambda=3$ , o valor  $A_{Ur}$  é 10 vezes maior do limiar  $A=2 \times 10^{-3}$ . 152
- Figura 7.6 - Evolução temporal da amplitude do modo fundamental ( $\lambda=2$ ). Caso  $h_{eq}=0,558$ . Instantes da flutuação  $v'$  mostram o comportamento qualitativo da onda. 154
- Figura 7.7 - Evolução temporal da amplitude do modo fundamental ( $\lambda=4$ ). Caso  $h_{eq}=0,558$ . Instantes da flutuação  $v'$  mostram o comportamento qualitativo da onda. 154
- Figura 7.8 - Evolução temporal da amplitude do modo fundamental ( $\lambda=15$ ). Caso  $h_{eq}=0,558$ . Instantes da flutuação  $v'$  mostram o comportamento qualitativo da onda. 155
- Figura 7.9 - Evolução da amplitude para  $\lambda=2$ . Perfis de magnitude de  $v'$  (curva contínua preta) são comparados com o perfil de  $t=20$  (curva tracejada vermelha). 156
- Figura 7.10 - Evolução da amplitude para  $\lambda=4$ . Perfis de magnitude de  $v'$  (curva contínua preta) são comparados com o perfil de  $t=30$  (curva tracejada vermelha). 156
- Figura 7.11 - Evolução da amplitude para  $\lambda=15$ . Perfis de magnitude de  $v'$  (curva contínua preta) são comparados com o perfil de  $t=50$  (curva tracejada vermelha). 157

- Figura 7.12 - Evolução temporal da amplitude do modo fundamental ( $\lambda=1,5$ ). Caso  $h_{eq}=0,7$ . Instantes da flutuação  $v'$  mostram o comportamento qualitativo da onda. 158
- Figura 7.13 - Evolução temporal da amplitude do modo fundamental ( $\lambda=3$ ). Caso  $h_{eq}=0,7$ . Instantes da flutuação  $v'$  mostram o comportamento qualitativo da onda. 159
- Figura 7.14 - Evolução temporal da amplitude do modo fundamental ( $\lambda=15$ ). Caso  $h_{eq}=0,7$ . Instantes da flutuação  $v'$  mostram o comportamento qualitativo da onda. 159
- Figura 7.15 - Evolução da amplitude para  $\lambda=1,5$ . Perfis de magnitude de  $v'$  (curva contínua preta) são comparados com o perfil de  $t=8$  (curva tracejada vermelha). 160
- Figura 7.16 - Evolução da amplitude para  $\lambda=3$ . Perfis de magnitude de  $v'$  (curva contínua preta) são comparados com o perfil de  $t=10$  (curva tracejada vermelha). 161
- Figura 7.17 - Evolução da amplitude para  $\lambda=15$ . Perfis de magnitude de  $v'$  (curva contínua preta) são comparados com o perfil de  $t=15$  (curva tracejada vermelha). 161
- Figura 7.18 - Evolução temporal da amplitude dos primeiros quatro harmônicos perturbados.  $h_{eq}=0,558$ . a) Caso  $L=2$ . b) Caso  $L=3$ . 163
- Figura 7.19 - Evolução e interação de ondas, caso  $L=\lambda=2$  ( $h_{eq}=0,558$ ). a) Evolução temporal da interface. b) Evolução da amplitude no espectro. c) Bicoerência mostrando interação entre modos. 164
- Figura 7.20 - Evolução e interação de ondas, caso  $L=\lambda=1,5$  ( $h_{eq}=0,7$ ). a) Evolução temporal da interface. b) Evolução da amplitude no espectro. c) Bicoerência mostrando interação entre modos. 165

- Figura 7.21 - Evolução não linear das ondas  $\lambda=2$ ,  $\lambda=4$  ( $h_{eq}=0,558$ ) e  $\lambda=1,5$ ,  $\lambda=3$  ( $h_{eq}=0,7$ ). Evolução temporal da amplitude até a saturação (a, c, e, g). Razão de amplitudes dos harmônicos em relação da interação da onda fundamental (b, d, f, h). 166
- Figura 7.22 - Amplitude de saturação das ondas avaliadas. a) Caso  $h_{eq}=0,558$ . b) Caso  $h_{eq}=0,7$ . 168
- Figura 7.23 - Comparação da evolução da onda perturbada  $\alpha_0$  ( $\lambda_0=2$ ) em canal longo ( $L=30$ ) e curto ( $L=2$ ). Através dos perfis de  $v'$ , três instantes comparam a faixa linear ( $t=20$ ), fracamente não linear ( $t=40$ ) e saturação ( $t=60$ ). Harmônico  $2\alpha_0$  é referencial. 172
- Figura 7.24 - Comparação da evolução da onda perturbada  $\alpha_0$  ( $\lambda_0=1,5$ ) em canal longo ( $L=30$ ) e curto ( $L=2$ ). Através dos perfis de  $v'$ , três instantes comparam a faixa linear ( $t=8$ ), fracamente não linear ( $t=12$ ) e saturação ( $t=20$ ). Harmônico  $2\alpha_0$  é referencial. 172
- Figura 7.25 - (a) Interface; (b) espectro e (c) bicoerência para alguns instantes representativos ( $h_{eq}=0,558$ ). Números de onda ( $\alpha_0$ ,  $2\alpha_0$ ,  $3\alpha_0$ ,  $4\alpha_0$ ) e limiar linear ( $2 \times 10^{-3}$ ) são mostrados para referência. 173
- Figura 7.26 - (a) Interface; (b) espectro e (c) bicoerência para alguns instantes representativos ( $h_{eq}=0,7$ ). Números de onda ( $\alpha_0$ ,  $2\alpha_0$ ,  $3\alpha_0$ ,  $4\alpha_0$ ) e limiar linear ( $2 \times 10^{-3}$ ) são mostrados para referência. 174
- Figura 7.27 - Evolução temporal da amplitude  $A(t)$  e velocidades de fase  $c_p(t)$  para a onda fundamental  $\alpha_0$  ( $\lambda_0=2$ ) e o subharmônico  $0,5\alpha_0$  ( $2\lambda_0=4$ ). Teste em canal longo ( $L=8$ ). 177
- Figura 7.28 - Evolução temporal da amplitude  $A(t)$  e velocidades de fase  $c_p(t)$  para a onda fundamental  $\alpha_0$  ( $\lambda_0=1,5$ ) e o subharmônico  $0,5\alpha_0$  ( $2\lambda_0=3$ ). Teste em canal longo ( $L=30$ ). 177

Figura 7.29 - Evolução de ondas  $\alpha_0$  ( $\lambda_0=2$ ) e  $0,5\alpha_0$  ( $2\lambda_0=4$ ) em um canal  $L=8$ . Através dos perfis de  $v'$ , a onda  $\alpha_0$  é comparada aos resultados no canal  $L=2$  nos instantes linear ( $t=10$ ), fracamente não linear ( $t=20$ ) e saturação ( $t=50$ ). Nesses instantes, o subharmônico  $0,5\alpha_0$  é comparado com o perfil linear de  $v'$  do canal  $L=4$ . Harmônico  $2\alpha_0$  é referencial.

179

Figura 7.30 - Evolução de ondas  $\alpha_0$  ( $\lambda_0=1,5$ ) e  $0,5\alpha_0$  ( $2\lambda_0=3$ ) em um canal  $L=30$ . Através dos perfis de  $v'$ , a onda  $\alpha_0$  é comparada aos resultados no canal  $L=1,5$  nos instantes linear ( $t=4$ ), fracamente não linear ( $t=8$ ) e saturação ( $t=16$ ). Nesses instantes, o subharmônico  $0,5\alpha_0$  é comparado com o perfil linear de  $v'$  do canal  $L=3$ . Harmônico  $2\alpha_0$  é referencial.

179

Figura 7.31 - (a) Interface, (b) espectro e (c) bicoerência para alguns instantes representativos ( $h_{eq}=0,558$ ). Números de onda ( $0,5\alpha_0$ ,  $\alpha_0$ ,  $1,5\alpha_0$ ,  $2\alpha_0$ ,  $3\alpha_0$ ,  $4\alpha_0$ ) e limiar linear ( $2 \times 10^{-3}$ ) são mostrados para referência.

181

Figura 7.32 - (a) Interface, (b) espectro e (c) bicoerência para alguns instantes representativos ( $h_{eq}=0,7$ ). Números de onda ( $0,5\alpha_0$ ,  $\alpha_0$ ,  $1,5\alpha_0$ ,  $2\alpha_0$ ,  $3\alpha_0$ ,  $4\alpha_0$ ) e limiar linear ( $2 \times 10^{-3}$ ) são mostrados para referência.

182

Figura 7.33 - Evolução das ondas  $\alpha_0$  ( $\lambda_0=2$ ) e  $\alpha_1$  ( $\lambda_1=15$ ) em um canal  $L=30$ . Através dos perfis de  $v'$ , a onda  $\alpha_0$  é comparada aos resultados no canal  $L=2$  nos instantes linear ( $t=20$ ), fracamente não linear ( $t=35$ ) e saturação ( $t=60$ ). Nesses instantes, a onda longa  $\alpha_1$  é comparada com o perfil linear de  $v'$  do canal  $L=15$ . Harmônico  $2\alpha_0$  é referencial.

184

Figura 7.34 - Evolução das ondas  $\alpha_0$  ( $\lambda_0=1,5$ ) e  $\alpha_1$  ( $\lambda_1=15$ ) em um canal  $L=30$ . Através dos perfis de  $v'$ , a onda  $\alpha_0$  é comparada aos resultados no canal  $L=1,5$  nos instantes linear ( $t=8$ ), fracamente não linear ( $t=12$ ) e saturação ( $t=20$ ). Nesses instantes, a onda longa  $\alpha_1$  é comparada com o perfil linear de  $v'$  do canal  $L=15$ . Harmônico  $2\alpha_0$  é referencial. 184

Figura 7.35 - (a) Interface, (b), espectro e (c) bicoerência para alguns instantes representativos ( $h_{eq}=0,558$ ). Números de onda ( $\alpha_1$ ,  $\alpha_0$ ,  $2\alpha_0$ ,  $3\alpha_0$ ,  $4\alpha_0$ ) e limiar linear ( $2 \times 10^{-3}$ ) são mostrados para referência. 186

Figura 7.36 - (a) Interface, (b) espectro e (c) bicoerência para alguns instantes representativos ( $h_{eq}=0,7$ ). Números de onda ( $\alpha_1$ ,  $\alpha_0$ ,  $2\alpha_0$ ,  $3\alpha_0$ ,  $4\alpha_0$ ) e limiar linear ( $2 \times 10^{-3}$ ) são mostrados para referência. 187

Figura 7.37 - Evolução das ondas  $\alpha_1$  ( $\lambda_1=2,143$ ) e  $\alpha_2$  ( $\lambda_2=1,875$ ) em um canal  $L=30$ . Através dos perfis de  $v'$ , as ondas  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  são comparadas aos resultados nos canais  $L=2,143$  e  $L=1,875$ . São comparados os instantes linear ( $t=20$ ), fracamente não linear ( $t=40$ ) e saturação ( $t=60$ ). Nos instantes  $t=30$  e  $40$  são mostrados os perfis de  $v'$  da onda longa  $\Delta\alpha$  gerada pela modulação, e os perfis de  $v'$  obtidos do canal  $L=15$  nesses instantes. 189

Figura 7.38 - Evolução das ondas  $\alpha_1$  ( $\lambda_1=1,579$ ) e  $\alpha_2$  ( $\lambda_2=1,429$ ) em um canal  $L=30$ . Através dos perfis de  $v'$ , as ondas  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  são comparadas aos resultados nos canais  $L=1,579$  e  $L=1,429$ . São comparados os instantes linear ( $t=8$ ), fracamente não linear ( $t=12$ ) e saturação ( $t=20$ ). Nos instantes  $t=10$  e  $14$  são mostrados os perfis de  $v'$  da onda longa  $\Delta\alpha$  gerada pela modulação, e os perfis de  $v'$  obtidos do canal  $L=15$  nesses instantes. 190

Figura 7.39 - (a) Interface, (b) espectro e (c) bicoerência para alguns instantes representativos ( $h_{eq}=0.558$ ). Números de onda ( $\Delta\alpha$ ,  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ , e harmônicos de  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$ ) e limiar linear ( $2 \times 10^{-3}$ ) são mostrados para referência. 192

Figura 7.40 - (a) Interface, (b) espectro e (c) bicoerência para alguns instantes representativos ( $h_{eq}=0,7$ ). Números de onda ( $\Delta\alpha$ ,  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ , e harmônicos de  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$ ) e limiar linear ( $2 \times 10^{-3}$ ) são mostrados para referência. 193

Figura 7.41 - Evolução temporal da amplitude efetiva considerando  $\alpha_1$  ( $\lambda_1=2,143$ ) e  $\alpha_2$  ( $\lambda_2=1,875$ ), caso  $h_{eq}=0,558$ . Amplitudes iniciais segundo Tabela 7.4. 195

Figura 7.42 - Ondas interficiais e seu espectro espacial. Três instantes são mostrados para referência. Os pontos marcados em  $t=60$  indicam os componentes considerados na obtenção das amplitudes efetivas:  $A_{efe(\Delta\alpha)}$  (o),  $A_{efe1}$  (+),  $A_{efe2}$  (x),  $A_{efe3}$  (\*),  $A_{efe4}$  (.). 195

Figura 7.43 - Evolução das amplitudes efetivas para diferentes magnitudes iniciais. (a)  $A_{efe1}$ ; (b)  $A_{efe(\Delta\alpha)}$ ; (c)  $A_{efe2}$ ; e (d)  $A_{efe3}$ . 197

Figura 7.44 - a) Evolução das amplitudes efetivas  $A_{efe(\Delta\alpha)}$ ,  $A_{efe1}$ ,  $A_{efe2}$ ,  $A_{efe3}$  e  $A_{efe4}$ . b) Evolução da relação  $A_{efen} / (A_{efe1})^n$ . 198

Figura 7.45 - (a) Contornos de magnitude da amplitude, (b) fase e (c) traço do sinal da interface, no instante  $t=60$ . As figuras indicam que as fases dos modos mais dominantes do espectro estão próximas de uma sincronização entre fases fornecendo um pico de amplitude em  $x=14,6$  e  $x=29,6$ . 199

Figura 7.46 - Espectro de banda larga do caso  $h_{eq}=0,558$ . a) Evolução das amplitudes efetivas  $A_{efe(\Delta\alpha)}$ ,  $A_{efe1}$ ,  $A_{efe2}$  e  $A_{efe3}$ . b) Evolução da relação  $A_{efen} / (A_{efe1})^n$ . 201

- Figura 7.47 - Espectro de banda larga do caso  $h_{eq}=0,7$ . a) Evolução das amplitudes efetivas  $A_{efe(\Delta\alpha)}$ ,  $A_{efe1}$ ,  $A_{efe2}$  e  $A_{efe3}$ . b) Evolução da relação  $A_{efen} / (A_{efe1})^n$ . 201
- Figura 7.48 - (a) Interface, (b) espectro e (c) bicoerência para alguns instantes representativos ( $h_{eq}=0,558$ ). Números de onda ( $\Delta\alpha_{if}$ ,  $\alpha_i$ ,  $\alpha_f$ ,  $2\alpha_i$ ,  $2\alpha_f$ ,  $3\alpha_i$ ,  $3\alpha_f$ ) e limiar linear ( $2 \times 10^{-3}$ ) são mostrados para referência. 203
- Figura 7.49 - (a) Interface, (b) espectro e (c) bicoerência para alguns instantes representativos ( $h_{eq}=0,7$ ). Números de onda ( $\Delta\alpha_{if}$ ,  $\alpha_i$ ,  $\alpha_f$ ,  $2\alpha_i$ ,  $2\alpha_f$ ,  $3\alpha_i$ ,  $3\alpha_f$ ) e limiar linear ( $2 \times 10^{-3}$ ) são mostrados para referência. 204
- Figura 7.50 - Equivalência do caso modulado ( $\lambda_1=2,143$  e  $\lambda_2=1,875$ ) e o caso fundamental  $\lambda_0=2$ . (a) Interfaces nos instantes  $t=10$ ,  $40$  e  $60$ . (b). Evolução da amplitude efetiva em relação da amplitude da onda fundamental  $\lambda_0=2$ . Caso com  $h_{eq}=0,558$ . 206
- Figura 7.51 - Equivalência do caso banda larga  $\lambda=[1,667:2,5]$  e o caso fundamental  $\lambda_0=2$ . (a) Interfaces nos instantes  $t=10$ ,  $40$  e  $60$ . (b) Evolução da amplitude efetiva em relação da amplitude da onda fundamental  $\lambda_0=2$ . Caso com  $h_{eq}=0,558$ . 206
- Figura 7.52 - Evolução não linear vs previsões equação de Stuart-Landau. Caso  $h_{eq}=0,558$ :  $\lambda=1,875$  (a),  $\lambda=2$  (c),  $\lambda=2,143$  (e). Caso  $h_{eq}=0,7$ :  $\lambda=1,429$  (b),  $\lambda=1,5$  (d),  $\lambda=1,579$  (f). 209
- Figura 7.53 - Frequência perturbada  $\omega=4,6434$ . a) Evolução das amplitudes efetivas  $A_{efe(\Delta\omega)}$ ,  $A_{efe1}$ ,  $A_{efe2}$  e  $A_{efe3}$ . b) Evolução da relação  $A_{efen} / (A_{efe1})^n$ . 210

Figura 7.54 - Frequência perturbada  $\omega=2,9613$ . a) Evolução das amplitudes efetivas  $A_{efe(\Delta\omega)}$ ,  $A_{efe1}$ ,  $A_{efe2}$  e  $A_{efe3}$ . b) Evolução da relação  $A_{efen} / (A_{efe1})^n$ . 210

Figura 7.55 - (a) Séries temporal, (b) espectro e (c) bicoerência para algumas posições representativas ( $\omega=4,6434$ ). Frequências angulares ( $\Delta\omega_{if}$ ,  $\omega_{1i}$ ,  $\omega_{1f}$ ,  $\omega_{2i}$ ,  $\omega_{2f}$ ,  $\omega_{3i}$ ,  $\omega_{3f}$ ) e limiar linear ( $2 \times 10^{-3}$ ) são mostrados para referência. 212

Figura 7.56 - (a) Séries temporal, (b) espectro e (c) bicoerência para algumas posições representativas ( $\omega=2,9613$ ). Frequências angulares ( $\Delta\omega_{if}$ ,  $\omega_{1i}$ ,  $\omega_{1f}$ ,  $\omega_{2i}$ ,  $\omega_{2f}$ ,  $\omega_{3i}$ ,  $\omega_{3f}$ ) e limiar linear ( $2 \times 10^{-3}$ ) são mostrados para referência. 213

Figura B.1 - Regime permanente para obter o escoamento base no canal  $L=30$ . Malha  $L30 \times H1$  ( $4200 \times 140$ ), caso  $h_{eq}=0,7$ . (a) Canal não periódico, ruído é gerado na entrada e saída. (b) Canal periódico, ruído é suprimido. 239

Figura B.2 - Escoamento base obtido no regime permanente em um canal  $L=2$  periódico. Para baixar o ruído numérico que aparece na interface, a solução é convergida até a velocidade  $V_y$  atingir resíduo em torno de  $\pm 5 \times 10^{-7}$ . Malha  $L2 \times H1$  ( $560 \times 280$ ), caso  $h_{eq}=0,558$ . 240

Figura B.3 - Evolução temporal da amplitude para  $L=\lambda=3$ , para diversos estados de convergência do escoamento base. Evolução da amplitude é sensível ao nível de ruído interfacial contido no escoamento base. Malha  $L3 \times H1$  ( $210 \times 70$ ), caso  $h_{eq}=0,558$ . 241

Figura C.1 - Evolução temporal da amplitude do modo fundamental ( $\lambda=1,5$ ). Instantes da flutuação  $v'$  mostram o comportamento qualitativo da onda avaliada. 242



Figura C.2 - Evolução temporal da amplitude do modo fundamental ( $\lambda=1,875$ ). Instantes da flutuação $v'$ mostram o comportamento qualitativo da onda avaliada.	243
Figura C.3 - Evolução temporal da amplitude do modo fundamental ( $\lambda=2,143$ ). Instantes da flutuação $v'$ mostram o comportamento qualitativo da onda avaliada.	243
Figura C.4 - Evolução temporal da amplitude do modo fundamental ( $\lambda=3$ ). Instantes da flutuação $v'$ mostram o comportamento qualitativo da onda avaliada.	244
Figura C.5 - Evolução temporal da amplitude do modo fundamental ( $\lambda=1$ ). Instantes da flutuação $v'$ mostram o comportamento qualitativo da onda avaliada.	244
Figura C.6 - Evolução temporal da amplitude de onda ( $\lambda=1,5$ ). Perfis de magnitude de $v'$ (curva contínua preta) são comparados com a teoria linear (curva tracejada vermelha).	245
Figura C.7 - Evolução temporal da amplitude de onda ( $\lambda=1,875$ ). Perfis de magnitude de $v'$ (curva contínua preta) são comparados com a teoria linear (curva tracejada vermelha).	245
Figura C.8 - Evolução temporal da amplitude de onda ( $\lambda=2,143$ ). Perfis de magnitude de $v'$ (curva contínua preta) são comparados com a teoria linear (curva tracejada vermelha).	246
Figura C.9 - Evolução temporal da amplitude de onda ( $\lambda=3$ ). Perfis de magnitude de $v'$ (curva contínua preta) são comparados com a teoria linear (curva tracejada vermelha).	246
Figura C.10 - Evolução temporal da amplitude de onda ( $\lambda=1$ ). Perfis de magnitude de $v'$ (curva contínua preta) são comparados com a teoria linear (curva tracejada vermelha).	247

- Figura C.11 - Evolução temporal da amplitude do modo fundamental ( $\lambda=1,429$ ). Instantes da flutuação  $v'$  mostram o comportamento qualitativo da onda avaliada. 248
- Figura C.12 - Evolução temporal da amplitude do modo fundamental ( $\lambda=1,579$ ). Instantes da flutuação  $v'$  mostram o comportamento qualitativo da onda avaliada. 248
- Figura C.13 - Evolução temporal da amplitude de onda ( $\lambda=1,429$ ). Perfis de magnitude de  $v'$  (curva contínua preta) são comparados com a teoria linear (curva tracejada vermelha). 249
- Figura C.14 - Evolução temporal da amplitude de onda ( $\lambda=1,579$ ). Perfis de magnitude de  $v'$  (curva contínua preta) são comparados com a teoria linear (curva tracejada vermelha). 249
- Figura C.15 - Evolução temporal da amplitude do modo fundamental ( $\lambda=1,5$ ). Caso  $h_{eq}=0,558$ . Instantes da flutuação  $v'$  mostram o comportamento qualitativo da onda. 250
- Figura C.16 - Evolução temporal da amplitude do modo fundamental ( $\lambda=1,875$ ). Caso  $h_{eq}=0,558$ . Instantes da flutuação  $v'$  mostram o comportamento qualitativo da onda. 251
- Figura C.17 - Evolução temporal da amplitude do modo fundamental ( $\lambda=2,143$ ). Caso  $h_{eq}=0,558$ . Instantes da flutuação  $v'$  mostram o comportamento qualitativo da onda. 251
- Figura C.18 - Evolução temporal da amplitude do modo fundamental ( $\lambda=3$ ). Caso  $h_{eq}=0,558$ . Instantes da flutuação  $v'$  mostram o comportamento qualitativo da onda. 252
- Figura C.19 - Evolução da amplitude para  $\lambda=1,5$ . Perfis de magnitude de  $v'$  (curva contínua preta) são comparados com o perfil de  $t=30$  (curva tracejada vermelha). 252

- Figura C.20 - Evolução da amplitude para  $\lambda=1,875$ . Perfis de magnitude de  $v'$  (curva contínua preta) são comparados com o perfil de  $t=20$  (curva tracejada vermelha). 253
- Figura C.21 - Evolução da amplitude para  $\lambda=2,143$ . Perfis de magnitude de  $v'$  (curva contínua preta) são comparados com o perfil de  $t=20$  (curva tracejada vermelha). 253
- Figura C.22 - Evolução da amplitude para  $\lambda=3$ . Perfis de magnitude de  $v'$  (curva contínua preta) são comparados com o perfil de  $t=20$  (curva tracejada vermelha). 254
- Figura C.23 - Evolução temporal da amplitude do modo fundamental ( $\lambda=1,429$ ). Caso  $h_{eq}=0,7$ . Instantes da flutuação  $v'$  mostram o comportamento qualitativo da onda. 255
- Figura C.24 - Evolução temporal da amplitude do modo fundamental ( $\lambda=1,579$ ). Caso  $h_{eq}=0,7$ . Instantes da flutuação  $v'$  mostram o comportamento qualitativo da onda. 255
- Figura C.25 - Evolução da amplitude para  $\lambda=1,429$ . Perfis de magnitude de  $v'$  (curva contínua preta) são comparados com o perfil de  $t=8$  (curva tracejada vermelha). 256
- Figura C.26 - Evolução da amplitude para  $\lambda=1,579$ . Perfis de magnitude de  $v'$  (curva contínua preta) são comparados com o perfil de  $t=8$  (curva tracejada vermelha). 256

## Lista de Tabelas

Tabela 5.1 - Resultados do teste de malha. Domínio LxH=3x1	122
Tabela 5.2 - Tempos de processamento	124
Tabela 6.1 - Matriz resumo das ondas avaliadas	127
Tabela 6.2 - Resultados do caso não perturbado para L=2	132
Tabela 6.3 - Resultados comparativos para $\lambda=2$	134
Tabela 6.4 - Resultados comparativos dos casos perturbados	144
Tabela 7.1 - Matriz resumo das ondas avaliadas	149
Tabela 7.2 - Valores médios referenciais das amplitudes de saturação da onda fundamental e da interface	169
Tabela 7.3 - Geração do modo de baixa frequência $\Delta\alpha$	189
Tabela 7.4 - Amplitudes iniciais utilizadas nos testes	195
Tabela 7.5 - Faixa de ondas perturbadas	200
Tabela 7.6 - Perturbação inicial para a geração do pacote de ondas	210

## Lista de Variáveis

$A^*$	-	Amplitude
$A$	-	Amplitude adimensional
$A_0$	-	Amplitude adimensional inicial
$A_{sat}$	-	Amplitude adimensional de saturação
$A_{rea}^*$	-	Área da seção transversal do duto
$A_{env}$	-	Função amplitude da onda (envelope)
$B$	-	Biespectro
$b$	-	Bicoerência
$Co$	-	Número de Courant
$c_p^*$	-	Velocidade de onda (ou fase)
$c_p$	-	Velocidade de onda (ou fase) adimensional
$c_g$	-	Velocidade de grupo adimensional
$c$	-	Velocidade de onda no plano complexo
$c_r$	-	Velocidade de onda, componente real
$c_i$	-	Taxa de amplificação adimensional no tempo
c.c.	-	Conjugada complexa
$D$	-	Operador $d/dy$ da equação de Orr-Sommerfeld
$d$	-	Diâmetro do duto
$d_h$	-	Diâmetro hidráulico
$dt$	-	Passo de tempo adimensional
$dp^*/dx^*$	-	Queda de pressão
$dp/dx$	-	Queda de pressão adimensional
$FT$	-	Transformada discreta de Fourier
$FT^{-1}$	-	Transformada inversa discreta de Fourier
$Fr$	-	Número de Froude

$f_y$	-	Força de corpo na direção y
$f^*$	-	Frequência de onda
$f$	-	Frequência de onda adimensional
$f_{\text{adq}}$	-	Frequência de aquisição
$f_{\text{extrap}}$	-	Variável estimada pela extrapolação de Richardson
$f_k$	-	Vetor de frequências discretas
$\bar{g}^*$	-	Vetor aceleração da gravidade
$\bar{g}$	-	Vetor aceleração da gravidade adimensional
$H^*$	-	Altura do canal
$H$	-	Altura do canal adimensional
$h_{\text{eq}}^*$	-	Altura de equilíbrio (fluido inferior)
$h_{\text{eq}}$	-	Altura de equilíbrio (fluido inferior) adimensional
$h_L$	-	Altura de equilíbrio do líquido
$h_G$	-	Altura de equilíbrio do gás
$\mathbf{I}$	-	Tensor identidade
$i$	-	Componente imaginária ( $\sqrt{-1}$ )
$k$	-	Módulo do vetor número de onda
$L^*$	-	Comprimento do canal
$L$	-	Comprimento do canal adimensional
$\bar{L}$	-	Vetor de comprimento periódico do domínio
$\hat{n}$	-	Vetor normal à interface
$n_w$	-	Número de períodos que formam o pacote de ondas
$P^*$	-	Pressão do estado base
$\tilde{p}(\vec{r})$	-	Flutuação da pressão
$p^*$	-	Pressão
$q$	-	Variável qualquer (velocidade normal, pressão, etc)
$\bar{q}$	-	Componente média da variável qualquer
$q'$	-	Flutuação da variável qualquer
$\hat{q}$	-	Função amplitude (complexa)

$\hat{q}_r$	-	Função amplitude (real)
$R_{x_1 x_2}$	-	Função correlação cruzada
Re	-	Número de Reynolds
$Re_c$	-	Número de Reynolds crítico
$Re_0$	-	Número de Reynolds na curva neutra
$\bar{r}$	-	Vetor posição
TH	-	Transformada de Hilbert
$T^*$	-	Período
$t^*$	-	Tempo
t	-	Tempo adimensional
$t_{fin}$	-	Tempo de duração da perturbação do pacote de ondas
$U^*$	-	Velocidade do estado base
U	-	Velocidade do estado base adimensional
$U_m^*$	-	Velocidade de mistura
$U_m$	-	Velocidade de mistura adimensional
$U_{int}$	-	Velocidade interfacial adimensional do escoamento base
$U_{s1}^*, U_{s2}^*$	-	Velocidades superficiais do fluido 1 e 2
$U_{s1}, U_{s2}$	-	Velocidades superficiais adimensionais do fluido 1 e 2
$U_1^*, U_2^*$	-	Velocidades do fluido 1 e 2 (na direção x)
$U_1, U_2$	-	Velocidades adimensionais do fluido 1 e 2 (na direção x)
$u^*$	-	Componente do vetor velocidade na direção x
$u^*$	-	Flutuação da velocidade em x
$u'$	-	Flutuação da velocidade em x adimensional
$u_i$	-	Vetor velocidade em notação indicial
$\bar{V}$	-	Vetor velocidade
$v^*$	-	Velocidade normal à parede
$v'^*$	-	Flutuação da velocidade normal à parede
$v'$	-	Flutuação da velocidade normal à parede adimensional
$v_o$	-	Flutuação da velocidade normal à parede em $t = 0$
$\bar{v}(y)$	-	Função amplitude da velocidade

$We$	-	Número de Weber
$w(t)$	-	Função janela
$w$	-	Componente do vetor velocidade na direção z
$X$	-	Transformada de Fourier
$x_n$	-	Transformada inversa de Fourier
$x^*, y^*$	-	Coordenadas cartesianas, horizontal e vertical
$x, y$	-	Coordenadas cartesianas adimensionais
$z(t)$	-	Função analítica da amplitude do envelope

### Caracteres gregos

$\alpha^*$	-	Número de onda
$\alpha$	-	Número de onda adimensional
$\alpha_r$	-	Número de onda, componente real
$\alpha_i$	-	Taxa de amplificação adimensional no espaço
$\alpha_x$	-	Número de onda na direção longitudinal (streamwise)
$\alpha_z$	-	Número de onda na direção transversal (spanwise)
$\alpha_i, \alpha_f$	-	Número de onda inicial e final de uma faixa
$\alpha_0, \omega_0, \lambda_0$	-	Número, frequência e comprimento de uma onda
$\bar{\alpha}_0, \bar{\omega}_0$	-	Número e frequência de onda na estabilidade neutra
$\bar{\beta}$	-	Fração volumétrica
$\bar{\beta}_1$	-	Fração volumétrica do fluido 1
$\beta$	-	Função marcadora do método VOF
$\beta_1$	-	Função marcadora do fluido 1
$\beta_f$	-	Função marcadora do fluido avaliada na face
$\beta_d$	-	Função marcadora do fluido na célula doadora
$\gamma_0$	-	Componente de variação linear da pressão (simulador)
$\delta(n)$	-	Função delta aplicada na interface
$\delta(t)$	-	Instante de tempo



$\hat{\eta}$	-	Vorticidade normal
$\hat{\eta}_0$	-	Vorticidade normal em $t = 0$
$\bar{\eta}(y)$	-	Função amplitude da vorticidade normal
$\eta$	-	Razão de viscosidades
$\eta_{int}$	-	Função da forma da onda
$\theta$	-	Fase da onda
$\kappa$	-	Curvatura da interface
$\lambda^*$	-	Comprimento de onda
$\lambda$	-	Comprimento de onda adimensional
$\lambda_{int}$	-	Comprimento obtido da velocidade interfacial
$\Delta\lambda$	-	Comprimento de onda longa
$\lambda_i, \lambda_f$	-	Comprimento de onda inicial e final de uma faixa
$\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2$	-	Coefficientes da equação de Stuart-Landau
$\bar{\mu}_1, \bar{\mu}_2$	-	Coefficientes da equação de Stuart-Landau
$\mu^*$	-	Viscosidade dinâmica
$\mu$	-	Viscosidade dinâmica adimensional
$\rho^*$	-	Massa específica
$\rho$	-	Massa específica adimensional
$\rho \bar{f}$	-	Forças de corpo
$\sigma^*$	-	Tensão interfacial
$\sigma$	-	Tensão interfacial adimensional
$\tau$	-	Escala de tempo da amplitude na equação de Landau
$\varphi$	-	Fase da onda
$\chi$	-	Razão de massas específicas
$\psi$	-	Função wavelet
$\omega^*$	-	Frequência angular de onda
$\omega$	-	Frequência angular de onda adimensional
$\omega_r$	-	Frequência angular de onda, componente real
$\omega_i$	-	Taxa de amplificação temporal

- $\nabla^2$  - Operador Laplaciano  
 $\nabla$  - Volume da célula  
 $\dot{V}_f$  - Fluxo volumétrico através da face

### Subscritos

- 0 - Referido a onda fundamental  
1 - Referente ao fluido 1 (menos denso)  
2 - Referente ao fluido 2 (mais denso)  
eq - Referido a equilíbrio  
efe - Referido a efetivo  
g - Fase gasosa  
int - Referido a interface  
i - Componente imaginária  
k - Fase 1 ou 2  
l - Fase líquida  
max - Máximo  
min - Mínimo  
m - Referido a mistura  
r - Componente real

### Sobrescritos

- \* - Referente a uma grandeza dimensional  
- - Referente a uma grandeza média  
T - Vetor transposto

## Siglas

CFD	-	<i>Computational Fluid Dynamics</i>
CSF	-	<i>Continuum Surface Force</i>
CS	-	<i>Compressive scheme</i>
CWT	-	<i>Continuous Wavelet Transform</i>
DIM	-	<i>Diffuse Interface Method</i>
DNS	-	<i>Direct Numerical Simulation</i>
FCC	-	<i>Function Cross Correlation</i>
FFT	-	<i>Fast Fourier Transform</i>
FTM	-	<i>Front Tracking Method</i>
HOSA-		<i>Higher-Order Spectral Analysis</i>
LS	-	<i>Level Set</i>
LST	-	<i>Linear Stability Theory</i>
MUSCL		<i>Monotone Upstream-Center Schemes for Conservation Laws</i>
O-S	-	<i>Orr-Sommerfeld</i>
PIV	-	<i>Particle Image Velocimetry</i>
SST	-	<i>Shear Stress Transport</i>
SS	-	<i>Stratified Smooth</i>
SW	-	<i>Stratified Wavy</i>
TVD	-	<i>Total Variation Diminishing</i>
UDF	-	<i>User-Defined Function</i>
VLW	-	<i>Viscous Long Wave</i>
VOF	-	<i>Volume of Fluid</i>

# 1 Introdução

Escoamentos multifásicos apresentam duas ou mais fases escoando simultaneamente. As fases podem corresponder a fluidos diferentes ou iguais em estados distintos (líquido, gasoso ou sólido). Esse tipo de escoamento pode ser encontrado em diversas situações, seja na natureza ou em aplicações industriais.

No transporte de fluidos através de tubulações, as fases podem se arranjar de diferentes formas, podendo apresentar uma natureza contínua ou dispersa. A distribuição das fases permite classificar três grandes grupos como escoamentos (Hubbard & Dukler, 1966): *i*) de fases separadas, *ii*) intermitentes e *iii*) dispersos. Os escoamentos bifásicos apresentam maior complexidade quando comparado aos escoamentos monofásicos, devido à presença de interfaces continuamente deformáveis (Ishii & Hibiki, 2011).

A distribuição das fases depende das propriedades dos fluidos, da geometria da tubulação e das vazões (Brennen, 2005; Shoham, 2005). A Figura 1.1 ilustra diferentes padrões que podem ser observados em tubulações horizontais e verticais em um sistema líquido-gás, por exemplo. Os padrões mais comuns são escoamento estratificado, ondulado e anular (fases separadas); bolhas alongadas e golfadas (intermitentes); e bolhas ou gotas suspensas em um meio contínuo (dispersos).

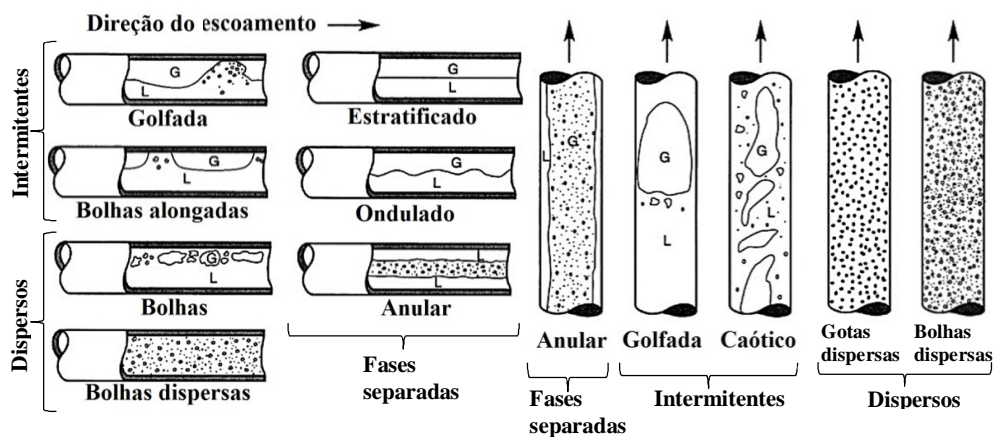


Figura 1.1: Padrões do escoamento bifásico em tubulações horizontais e verticais, em um sistema líquido-gás. Adaptado de Brennen (2005).

Na disposição horizontal, a aparição de ondas interfaciais instáveis em um escoamento de fases separadas líquido-gás é usualmente associado à transição do padrão estratificado para o padrão golfada (Wu & Ishii, 1996; McCready & Uphold, 1997), o qual é mostrado na Figura 1.2(a). No caso dos sistemas líquido-líquido, essas estruturas interfaciais são relacionadas à transição para regimes de escoamento onde alguma forma de dispersão aparece inicialmente em torno da interface (Barral & Angeli, 2014; Zhai et al., 2017). Nesta condição, as diferentes formas interfaciais ressaltam sua importância ao influenciar na formação de dispersões e padrões de escoamento como o ondulado (Trallero et al. 1997; Al-Wahaibi & Angeli, 2011; Barral & Angeli, 2014). Este padrão é mostrado na Figura 1.2(b). Em ambos os sistemas (líquido-gás e líquido-líquido), os padrões de escoamento afetam fortemente a queda de pressão e a transferência de calor (Castro & Rodriguez, 2015). O sistema líquido-líquido, que é comum na produção de petróleo durante o transporte de fluidos (óleo-agua) em condições turbulentas, também é comum em sistemas de menor escala. Nestes sistemas, geralmente os fluidos são mantidos em regime laminar como ocorre em alguns processos de co-extrusão (Nordberg & Winter, 1988), assim como nos processos de recobrimentos “*slot coating*” (Maza & Carvalho, 2015), que incluem fluidos newtonianos e não newtonianos cujo comportamento dinâmico condiciona uma vasta gama de aplicações industriais e científicas (Papaefthymiou et al., 2013).

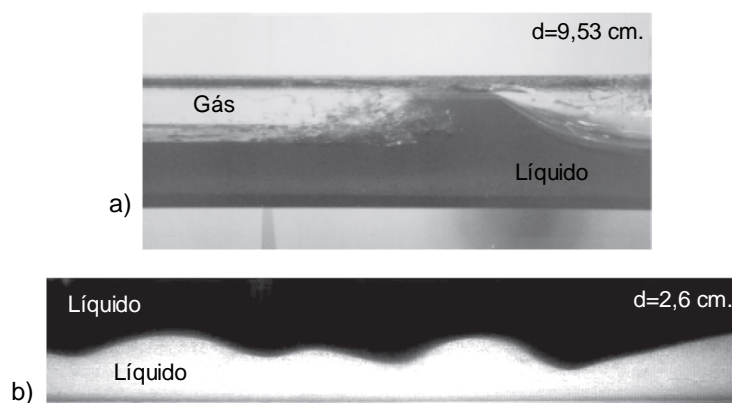


Figura 1.2: Padrões de escoamento devido a instabilidades interfaciais. a) Golfada no sistema líquido-gás (Andritsos et al., 1989). b) Ondulado no sistema líquido-líquido (Castro & Rodriguez, 2015).

A influência desses padrões nas condições do escoamento é um tema amplamente estudado. Isto deriva da necessidade das indústrias alimentícia, farmacêutica, nuclear e petroleira, dentre outras, de maximizar a eficiência e de baixar os custos relacionados com processos de produção e projeto de

equipamentos (Lin & Hanratty, 1986; Issa & Kempf, 2003; Ishii & Hibiki, 2011). Escoamento bifásicos com diferentes escalas são encontradas nas diversas indústrias. Por exemplo, algumas dessas indústrias estudam o fenômeno bifásico na escala onde os diâmetros das tubulações são de alguns milímetros como por exemplo, na produção farmacêutica e química através de reatores tubulares de pequeno diâmetro (Wegmann & von Rohr, 2006), ou em outras que incluem trocadores de calor (CHEs) e sistemas de resfriamento compactos, entre outros (Venkatesan et al., 2010). Além disso, em uma escala ainda menor, o avanço das novas tecnologias na área microfluídica (*lab-on-chip*) há gerado numerosas aplicações envolvendo escoamentos multifásicos através de micro-canais, os quais têm-se tornado populares em áreas como a biomédica, eletrônica e inclusive a aeroespacial (Papaefthymiou et al., 2013).

De um modo geral, os estudos relacionados à formação e evolução desses padrões podem ser experimentais e/ou numéricos. Os estudos experimentais buscam reproduzir o fenômeno de forma controlada e simplificada. Características como repetitividade e reprodutibilidade da experiência incluindo as técnicas de aquisição de dados e posterior processamento são os pontos críticos que devem ser considerados para garantir baixas incertezas nos resultados. Já nos estudos numéricos, diferentes modelos são usualmente empregados para prever o comportamento do escoamento. Estes podem ser classificados em modelos de “um fluido” e em modelos de “médias nas fases”. Nos modelos de “um fluido”, utiliza-se somente um conjunto de equações de conservação, considerando o fluido com propriedades variáveis, com um conjunto para cada fase do fluido. No segundo grupo, um conjunto de equações de conservação é resolvido para cada fase. Dentro de cada grupo, diversos modelos podem ser encontrados, com vantagens e desvantagens para cada tipo de aplicação (Prosperetti & Tryggvason, 2007).

Uma técnica que vem sendo muito utilizada nos últimos anos, em especial para análise de escoamentos separados, é o método VOF (*Volume of Fluid*). Este método pertence ao grupo dos modelos de “um fluido” e utiliza uma variável auxiliar para identificar a posição da interface a cada instante de tempo.

A teoria de estabilidade hidrodinâmica tem sido usada por décadas para avaliar a transição do escoamento estratificado de duas fases para outros padrões diferentes como golfada, *roll-waves* ou escoamento anular (Barnea & Taitel, 1993; Kuru et al., 1995). Vários estudos associam a instabilidade do escoamento base à mudança de padrão. Para perturbações infinitesimais impostas sobre um escoamento base, o fenômeno é tipicamente modelado

através da teoria de estabilidade linear (Yiantsios & Higgins, 1988; Kuru et al., 1995; Boomkamp & Miesen, 1996; Cao et al., 2004; Valluri et al., 2008; Barmak et al., 2016). O estado da arte na previsão do aparecimento de golfadas em escoamentos bifásicos ainda é baseado na teoria linear (Barmak et al., 2016). No entanto, os critérios derivados dessa teoria frequentemente falham na previsão do aparecimento de golfadas, principalmente em condições próximas a transição de regimes (Valluri et al., 2008).

A teoria de estabilidade linear é baseada na premissa de que as variáveis de interesse podem ser decompostas em termos não perturbados e em termos de perturbações de pequena amplitude. Estas variáveis são adicionadas à equação de Navier-Stokes, e os termos que envolvem produtos entre perturbações de pequena amplitude são desprezados. Isso faz com que termos não lineares da equação de Navier-Stokes possam ser desconsiderados (Drazin & Reid, 1981). No entanto, essa hipótese pode ser muito restrita, pois na prática, a amplitude das perturbações não é necessariamente muito pequena. Nesse caso, efeitos não lineares podem se tornar relevantes e a teoria linear deixa de ser um bom modelo para o problema (Schmid & Henningson, 2001).

Na faixa não linear, diferentes mecanismos de transferência de energia podem acontecer levando a uma estabilização (ex.: escoamento estratificado ondulado), ou mesmo a uma rápida desestabilização do sistema (Renardy & Renardy, 1993; McCready & Uphold, 1997; King & McCready, 2000). Nessa última condição, a oscilação da interface pode crescer até atingir a parede superior da tubulação, formando golfadas (Mata et al., 2002). No entanto, os mecanismos que conduzem a estabilização ou desestabilização do sistema ainda não são claros (Jurman et al., 1992; Sangalli et al., 1997).

Para entender como se dá a interação não linear, perturbações sobrepostas a um escoamento base podem ajudar a descrever os diferentes mecanismos de transferência de energia envolvidos no processo. No caso de camadas limite, uma das formas encontradas para se investigar sistematicamente os regimes não lineares foi através do estudo da evolução de ondas moduladas (Kachanov et al., 1982; Medeiros & Gaster, 1999a; de Paula et al., 2013; de Paula et al., 2015). Naqueles trabalhos, a excitação controlada de ondas *Tollmien–Schlichting* permitiu descrever diversos mecanismos possíveis de interação não-linear entre perturbações. No caso de escoamento bifásico estratificado, os trabalhos de Jurman et al. (1992), Cheng & Chang (1992), McCready et al. (2000), Valluri et al. (2008) e Campbell et al. (2016) reportaram resultados que sugerem a ocorrência de mecanismos similares àqueles já

observados em camadas limites. No entanto, devido ao maior número de parâmetros envolvidos no caso bifásico, os resultados ainda carecem de um estudo paramétrico detalhado.

A partir do que foi exposto nessa breve introdução, pode-se inferir que o problema da transição entre os regimes de escoamento estratificado liso e de golfadas ou estratificado ondulado ainda não é bem compreendida. Com isso, as previsões de mudança de regimes ainda podem falhar devido a falta de ferramentas que permitam modelar os efeitos não lineares mais relevantes do problema. Dessa forma, a principal motivação do presente trabalho consiste em contribuir com o conhecimento do processo de transição, através do estudo da evolução de instabilidades em um escoamento estratificado.

## 1.1 Objetivo

Estudar mediante simulações numéricas o processo de evolução de perturbações em um escoamento bifásico estratificado. A ideia é investigar a evolução de perturbações com conteúdo espectral conhecido, partindo de perturbações simples, contendo somente uma onda, até casos com diversas ondas. A descrição dos mecanismos mais relevantes observados nos estágios não lineares de evolução dessas perturbações será a contribuição principal do presente trabalho.

A geometria escolhida, por sua simplicidade, foi a de placas paralelas. Nessa geometria, buscaram-se analisar a evolução de instabilidades interfaciais em um sistema água-óleo com o objetivo de se observar os mecanismos físicos envolvidos no processo de transição para outro padrão (golfada ou ondulado). O sistema água-óleo foi escolhido por ser instável às perturbações interfaciais, ainda no regime de escoamento laminar de cada uma das fases (Gada & Sharma, 2012; Rodríguez, 2015). Assim, evitou-se a influência dos modelos de turbulência nos resultados obtidos.

No presente trabalho, as perturbações são impostas na interface entre as fases do escoamento de maneira controlada. Os resultados são analisados à luz das teorias de estabilidade linear e fracamente não linear.

## 1.2 Metodologia

Simulações numéricas baseadas na introdução de perturbações em um



escoamento estratificado, com frequência e amplitude controladas, são utilizadas neste trabalho para estudar o comportamento de instabilidades interfaciais. Não foram encontrados na literatura, simulações numéricas com aplicação sistemática desta metodologia. O crescimento ou decaimento das perturbações ao longo do tempo ou espaço são algumas das principais características avaliadas. Estes experimentos numéricos foram baseados no método VOF para o qual se utilizou o software comercial ANSYS Fluent® versão 15.0.

Neste trabalho, dividiu-se o problema em dois estágios separados, de acordo com a amplitude das perturbações no canal. No primeiro estágio, as amplitudes das ondas eram pequenas o suficiente para que os resultados pudessem ser comparados com a teoria de estabilidade linear. No segundo estágio, os efeitos não lineares tinham alguma influência na evolução das perturbações. Diferentes técnicas foram utilizadas para descrever como a interação não linear entre diferentes ondas acontece. As investigações foram realizadas considerando dois escoamentos base, ambos instáveis de acordo com a teoria de estabilidade linear.

### **1.3 Estrutura da Tese**

A estrutura da tese é formulada em oito capítulos na seguinte organização: No capítulo 1 é apresentada a parte introdutória e a metodologia a seguir para atingir o objetivo proposto. A revisão bibliográfica dos trabalhos mais relevantes na investigação deste fenômeno de transição encontra-se no capítulo 2.

O capítulo 3 apresenta fundamentos teóricos e alguns conceitos complementares relacionados a ondas e a estabilidade hidrodinâmica.

O modelo matemático é apresentado no capítulo 4, com uma descrição do modelo VOF. São detalhados o modelo físico de estudo, as condições iniciais e de contorno, os parâmetros do problema e adimensionalização, a caracterização do escoamento em um mapa de padrões, assim como o cálculo do escoamento base analítico. Neste capítulo se apresenta a metodologia para a criação de perturbações artificiais na interface entre dois fluidos e as condições necessárias para o sucesso das simulações. O capítulo termina descrevendo o modelo numérico utilizado.

No capítulo 5, informações sobre o pós-processamento das simulações numéricas são detalhadas. São apresentadas as técnicas utilizadas para obter os parâmetros que caracterizam a estabilidade de um escoamento, como taxa

de amplificação, velocidade de fase e velocidade de grupo, dependendo do tipo de estabilidade (temporal ou espacial) a ser avaliado. Inclui-se a descrição da técnica empregada para avaliar a sincronização de fases (Transformada de wavelet). A técnica de bicoerência, para avaliar efeitos não lineares, também é descrita em detalhe. Na seção final do capítulo, apresenta-se o teste de malha e a resolução para o passo de tempo. Uma referência dos tempos de processamento das simulações é fornecida nesta seção.

O capítulo 6 está focado no regime linear da evolução das perturbações estudadas. As simulações consideram ondas individuais curtas, médias e longas que evoluem em um canal com igual comprimento. Dois escoamentos base são avaliados, um mais instável do que o outro. Os resultados são comparados com a teoria linear, qualitativa e quantitativamente. O capítulo finaliza com a avaliação da evolução das fases das ondas perturbadas.

O estágio de evolução não linear das perturbações é estudado em detalhe no capítulo 7. Inicialmente, são consideradas as ondas individuais avaliadas no capítulo anterior que atingiram estabilização do crescimento, obtendo-se o limiar de instabilidade linear. Em seguida, são estabelecidas as mudanças nas características da evolução destas ondas individuais em relação ao seu comportamento linear. Uma avaliação da evolução dos harmônicos é incluída nesta seção, descrevendo-se o mecanismo de transferência de energia dominante obtido desses sistemas estudados. Uma análise das amplitudes de saturação atingidas pelas ondas avaliadas fecha a primeira parte do capítulo. A seguir, seis casos foram investigados, considerando um canal com comprimento maior aos comprimentos, até aqui, utilizados. Nesta parte o objetivo é facilitar condições, através das quais novos mecanismos de transferência de energia podem aparecer da interação de ondas conhecidas. Os seis casos particulares considerados são: interação entre harmônicos, interação entre onda curta e seu subharmônico, interação entre onda curta e longa, interação entre duas ondas próximas (modulação), um caso composto de espectro de ondas com banda larga, e finalmente um caso com um pacote de ondas.

Finalmente, as conclusões e recomendações de trabalhos futuros são apresentadas no Capítulo 8. Algumas informações como o detalhe dos códigos referentes às subrotinas do usuário UDF utilizados com o Ansys Fluent, a obtenção do escoamento base, assim como detalhes de todos os casos analisados são apresentados nos Apêndices.

## 2 Revisão Bibliográfica

A dinâmica das ondas interfaciais em regimes próximos da transição estratificado-golfada depende de inúmeras variáveis, o que a torna um tópico difícil de ser analisado. Consequentemente, o entendimento do fenômeno ainda permanece incompleto (Lin, 1945; Russell & Charles, 1959; Kao & Park, 1972; Brauner & Maron, 1992; Shoham, 2005; Ayati et al., 2017). Neste capítulo é apresentada a revisão bibliográfica relacionada ao presente estudo com algumas conclusões atingidas pelos diferentes autores que têm contribuído ao entendimento do fenômeno. A revisão começa com um resumo introdutório que vai desde os trabalhos pioneiros até os avanços dos últimos anos. A seguir, os trabalhos mais importantes indicados no resumo são agrupados de acordo com o tema principal e discutidos em detalhe. Para cada grupo, as características gerais assim como suas condições, limitações e principais conclusões atingidas são descritas.

### 2.1 Resumo Introdutório

A comunidade científica aceita que a formação dos diferentes padrões de escoamento bifásico é um problema iniciado por instabilidades, embora não exista consenso em relação aos mecanismos mais relevantes do fenômeno (Drazin & Reid, 1981; Joseph & Renardy, 1993). O primeiro a formular e estudar um modelo para o problema de estabilidade foi Kelvin (1871), na agora chamada estabilidade de Kelvin-Helmholtz. No experimento de Reynolds (1883) já se observou que a transição de um escoamento laminar para um turbulento é sensível à presença de perturbações, ilustrando a essência dos estudos de estabilidade hidrodinâmica (Drazin & Reid, 1981).

No início do século passado, as pesquisas acerca da instabilidade de escoamentos evoluíram consideravelmente, motivadas principalmente pelo estudo da origem da turbulência (Schlichting, 1979). Nesse período, as investigações foram, em sua maior parte, experimentais e analíticas. A partir dos anos quarenta, iniciaram-se os estudos numéricos exploratórios que eram

restritos em escopo (Lin, 1945), devido às limitações dos sistemas computacionais da época (Baker, 1954; Rider & Kothe, 1998; Wachem & Almstedt, 2003).

Mapas de padrões de escoamento eram criados, indicando para qual conjunto de parâmetros determinado padrão de escoamento poderia acontecer. No entanto, de acordo com Wallis (1969), a distribuição das fases dependia de efeitos inerciais, viscosos, interfaciais e geométricos. Devido ao elevado número de variáveis que influenciam no escoamento, os primeiros mapas de padrões eram puramente baseados em dados experimentais, e a maioria considerando sistemas água-ar (Alves, 1954; White & Huntington, 1955; Hoogendoorn, 1959; Govier & Omer, 1962). Embora algumas simples correções estenderam seu uso para outros fluidos (Baker, 1954; Govier & Aziz, 1972; Mandhane et al., 1974), sua aplicação era pouco precisa e muito limitada. A mudança de alguma variável (diâmetro, pressão, etc) mudava drasticamente a área que representava um regime particular no mapa, fazendo-o inclusive desaparecer. Na Figura 2.1 é mostrado um mapa de padrão clássico, adaptado do trabalho de Mandhane et al. (1974).

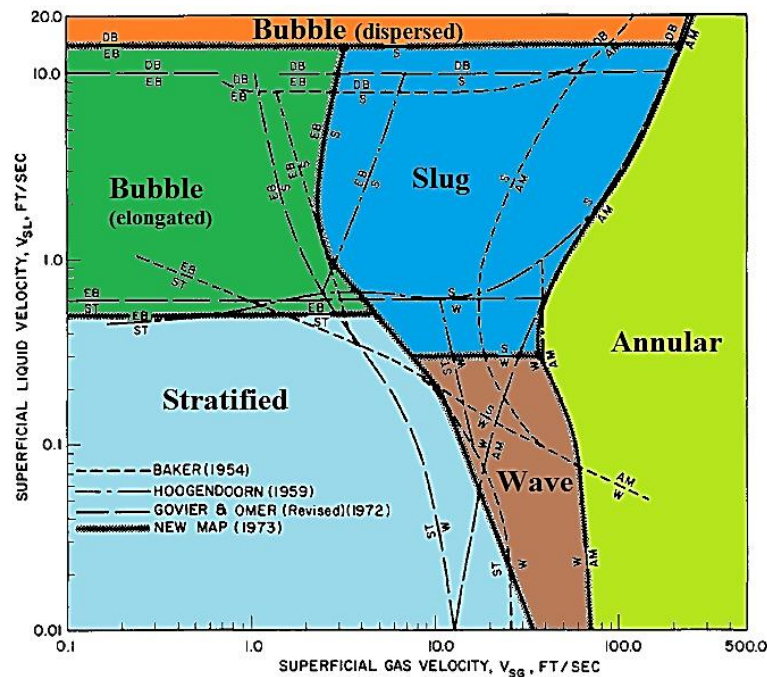


Figura 2.1: Mapa de padrão clássico para sistema água-ar, escoamento horizontal em dutos. Surgimento de diferentes padrões é considerado função das velocidades superficiais dos fluidos. Adaptado de Mandhane et al., 1974.

Os mapas de padrões desenvolvidos pelo modelo teórico mecanicista de Taitel & Dukler (1976) são capazes de prever transições entre diversos regimes

de escoamento para tubulações horizontais e levemente inclinadas, apresentando relativa concordância com dados experimentais, como àqueles reportados por Mandhane et al. (1974). A metodologia proposta é baseado no modelo semi-analítico 1-D que considera os dois fluidos. Na Figura 2.2 é mostrado um desenho esquemático do escoamento bifásico entre placas paralelas, referido por Taitel & Dukler (1976) para a formação de golfada. As alturas de equilíbrio de líquido e gás são  $h_L$  e  $h_G$ , respectivamente, enquanto as alturas respectivas associadas ao pico da onda são  $h'_L$  e  $h'_G$ . No mesmo trabalho, a análise é estendida para duto circular. Para prever a formação de golfada, o modelo assume que o crescimento da onda, e consequente formação da golfada, ocorre sempre que a força de sucção do efeito Bernoulli (na fase gasosa) provocado pela crista finita inicial de uma onda interfacial supera os efeitos estabilizadores da gravidade (na fase líquida). Este mecanismo, combinado a uma condição de estabilidade do tipo Kelvin–Helmholtz, é o fundamento do modelo. O efeito Bernoulli condiciona que a onda em crescimento seja de comprimento relativamente curto. Utilizando a mesma linha de hipóteses que Taitel & Dukler (1976), outros modelos analíticos foram os propostos por Kordyban & Ranov (1970), Wallis & Dobson (1973), Mishima & Ishii (1980), e Kordyban (1985), entre outros.

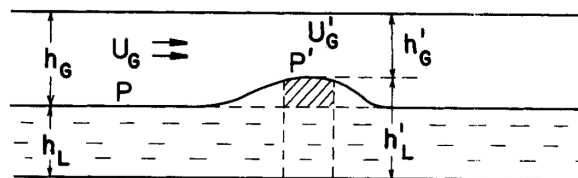


Figura 2.2: Modelo mecanicista da formação de golfada (Taitel & Dukler, 1976).

Diversos trabalhos experimentais e analíticos foram realizados no cenário comparativo aos modelos teóricos da época, investigando a influência de diferentes variáveis na dinâmica das ondas interfaciais e, conseqüentemente, na transição e formação de golfada, tais como: viscosidade das fases (Andritsos et al., 1989), influência do diâmetro (Lin & Hanratty, 1987a; Song et al., 1991; Nydal et al. 1992; Jepson & Taylor, 1993), inclinação da tubulação (Dukler & Hubbard, 1975; Barnea et al., 1980), medições de pressão (Lin & Hanratty, 1987b) e o uso de canais retangulares (Wallis & Dobson, 1973), entre outros.

Nos anos seguintes, alguns trabalhos foram desenvolvidos para prever a formação de golfada, buscando reunir informações do grupo mecanicista baseado na forma 1-D do modelo de dois fluidos, com o grupo baseado nas

soluções das equações de Orr-Sommerfeld (McCready & Uphold, 1997; Kaffel & Riaz, 2015).

No contexto da estabilidade linear, diversos trabalhos têm considerado estender as análises de perturbações bidimensionais (canais planos) para sua contraparte tridimensional (dutos retangulares) considerando efeitos de parede (Rodríguez & Gennaro, 2016), por exemplo. Outras análises e estudos têm sido realizados, visando considerar na transição estratificado-golfada efeitos não lineares, tais como os trabalhos de Náraigh et al.(2014) e Campbell et al (2016). Não obstante, esses efeitos não lineares também podem levar a uma transição estratificado-ondulado, se ocorrer uma saturação do crescimento das ondas (Sangalli et al., 1997; King & McCready, 2000).

A simulação numérica é outra forma de prever e avaliar o comportamento de escoamentos bifásicos, tanto para escoamento de fases separadas ou dispersas. Simulações 1-D são mais rápidas e baratas, mas só fornecem valores médios na seção transversal das tubulações das grandezas de interesse. As simulações 2-D e 3-D são menos restritivas embora com um custo computacional maior do que os casos 1-D. Diferentes modelos podem ser encontrados. Prosperetti & Tryggvason (2007) classifica os modelos em “modelos de um fluido”, que utilizam somente um conjunto de equações de conservação junto com uma função marcadora para identificar a região onde cada fluido encontra-se e “modelos de dois-fluidos”, baseados na solução de um conjunto de equações de conservação para cada fase, as quais são acopladas, com funções interfaciais, geralmente empíricas. A primeira abordagem é especialmente interessante, pois tem um custo computacional menor em comparação com o modelo de dois fluidos 2-D e 3-D, não introduzindo a necessidade de introduzir modelos para avaliar fluxos interfaciais. A seguir, os trabalhos utilizando as diferentes modelagens são descritos com maiores detalhes.

## **2.2**

### **Modelos Mecanicistas**

De forma geral, os trabalhos incluídos no grupo dos modelos mecanicistas são baseados nas diferentes formas unidimensionais do modelo de dois fluidos (Ishii & Hibiki, 2011). Tipicamente, esses modelos são obtidos a partir das equações de conservação das perturbações na forma linearizada. As previsões de mudança de regime desses modelos se baseiam em algum critério de

estabilidade. A formulação destes modelos assume que uma onda longa instável de pequena amplitude cresce até a golfada ser formada. Outros critérios mecanicistas podem ser considerados para incluir mudanças para outros padrões, próprios da disposição horizontal, como ondulado, *roll waves* ou anular, entre outros. O sucesso destes modelos está nas correlações utilizadas para obter os fatores de atrito na interface e paredes, que são necessários ao tratar as variáveis e propriedades do escoamento de forma simplificada na seção transversal, como sendo valores médios (McCready & Uphold, 1997). Geralmente, estes fatores são calibrados com dados experimentais que tornam restritivas as condições assumidas por cada modelo particular proposto. A seguir, maiores detalhes dos trabalhos mais representativos são apresentados.

Lin e Hanratty (1986) aplicaram análise de estabilidade linear tipo Kelvin-Helmholtz para explicar o início da formação de golfadas. Eles levaram em consideração o efeito da viscosidade do líquido e o efeito desestabilizante da inércia do mesmo. As tensões de cisalhamento na interface líquido-gás também foram incluídas. Os resultados obtidos foram considerados bons para o sistema água-ar em uma faixa de diferentes diâmetros. Entretanto, cabe ressaltar que as comparações são, tipicamente, feitas contra mapas experimentais de regimes de escoamento. Esses mapas, normalmente, são apresentados usando escalas logarítmicas, com várias ordens de magnitude (em torno de  $10E4$  ou  $10E5$ ). Logo, resultados com erros de 50% nas velocidades críticas ainda são considerados como muito bons. O modelo viscoso desenvolvido pelos autores prevê um efeito muito mais moderado do que o previsto pela teoria não viscosa de Kelvin-Helmholtz, para uma considerável faixa de viscosidades. No entanto, para viscosidades maiores, os efeitos de inércia do líquido são insignificantes e o mesmo critério de estabilidade é obtido a partir das teorias baseadas em fluidos viscosos e não viscosos.

Barnea e Taitel (1993) desenvolveram uma análise de estabilidade linear tipo Kelvin-Helmholtz aplicada ao escoamento estratificado em um duto. A modelagem analítica foi obtida através da linearização do modelo unidimensional de dois fluidos. Duas análises foram consideradas. No primeiro caso, consideraram escoamento de fluidos invíscidos e no segundo caso, as tensões cisalhantes viscosas foram consideradas. Os autores não conseguiram discernir porque as duas análises mostraram resultados diferentes a baixas viscosidades, uma vez que eram esperados resultados similares.

Hurlburt & Hanratty (2002) usaram os modelos baseados na análise do tipo onda longa viscosa (*Viscous Long Wave*) para prever a formação de golfada

para baixas velocidades de gás, argumentando que melhores predições podem ser obtidas se os fatores de atrito interfaciais forem melhor estimados. Diversas correlações para fatores de atrito interfaciais água-ar são propostas nos trabalhos de Andritsos & Hanratty (1987), Bontozoglu & Hanratty (1989) e Simmons & Hanratty (2001).

Mata et al. (2002) analisaram diferentes modelos incluindo entre outros, os propostos por Taitel & Dukler (1976), Lin & Hanratty (1986) e Barnea & Taitel (1993), já descritos acima. Resultados destes modelos foram comparados com dados experimentais da literatura (sistema água-ar) e com dados obtidos por eles (sistema óleo-ar). Vale lembrar que, esses dados experimentais só indicam se há ou não a presença de golfadas na tubulação. Nenhuma ou muito pouca informação é fornecida sobre as ondas interfaciais. Lin & Hanratty (1986) mostraram que as predições dos limites de estabilidade propostos pelos vários modelos diferem amplamente entre eles, e justificam as discrepâncias pelas diferenças entre as hipóteses e considerações assumidas por cada modelo.

Embora os modelos preditivos mais difundidos na literatura (Taitel & Dukler, 1976; Barnea et al., 1980; Speeding e Chen, 1981; Lin e Hanratty, 1986; Shoham, 2005) não indiquem claras restrições na sua aplicação, muitos autores têm reportado resultados experimentais que não guardam relação com esses modelos preditivos. Por exemplo, Nädler & Mewes (1995) indicaram que diferenças significativas foram encontradas ao analisarem escoamento horizontal líquido-gás dependendo se a fase líquida era óleo ou água. Nos experimentos, eles avaliaram os efeitos da viscosidade do líquido na distribuição de fases do escoamento de golfada. De forma análoga, Gokcal et al. (2008) avaliaram o desempenho de alguns modelos preditivos para padrões de escoamento, encontrando discrepâncias consideráveis com relação aos seus dados experimentais obtidos ao utilizarem óleo de alta viscosidade. Eles analisaram o escoamento óleo-gás em um duto horizontal implementando algumas modificações e relações de fechamento para modelos já existentes (Zhang et al., 2003). Igualmente, Matsubara & Naito (2011) informaram que quando a viscosidade do líquido era superior a 100 mPas, seus resultados experimentais não estavam de acordo com o modelo de Weisman et al. (1979). Isso contradiz os resultados de Weisman et al. (1979) que sugeriam que a viscosidade do líquido, na faixa de 1 até 150 mPa.s, afetava pouco o padrão de escoamento previsto pelo modelo de Taitel & Dukler (1976). Matsubara & Naito (2011) investigaram o efeito da viscosidade da fase líquida nos padrões de escoamento horizontal líquido-gás em um tubo transparente de 20 mm de diâmetro, usando



ar e água, alterando a viscosidade da fase líquida (com espessante de polissacarídeos) em um intervalo de 1 a 11000 mPa.s. Eles sugeriram que outra abordagem deveria ser desenvolvida para o problema da previsão do padrão de escoamento no caso de alta viscosidade da fase líquida.

Investigando as características de formação da golfada, Zhao et al., (2015) avaliaram o escoamento líquido-gás com líquidos de alta viscosidade, em um tubo horizontal de 0,074 m de diâmetro. Ao não encontrar coincidência nas previsões das correlações existentes para prever as características da golfada (utilizados para baixas viscosidades), propuseram um novo modelo mecanicista tendo em conta os efeitos da alta viscosidade do líquido. A troca de quantidade de movimento entre o corpo da golfada e a região do filme foi considerada para capturar características particulares do escoamento de golfada. O modelo foi validado comparando a queda de pressão, os dados médios do *holdup* do líquido desse estudo e aqueles obtidos a partir da literatura, mostrando resultados satisfatórios em uma ampla gama de viscosidades da fase líquida. Os resultados com amplos intervalos de viscosidade de 1 cP a 6000 cP foram testados e foram encontradas boas previsões. No entanto, eles indicaram que o modelo precisava ser melhor validado por dados adicionais que incluíssem diferentes diâmetros de tubulação e propriedades do gás.

Recentemente, Baba, et al. (2017) investigaram a frequência de formação de golfada e obtiveram a mesma dificuldade ao utilizar como fluidos de trabalho óleo e gás, onde os óleos eram de alta viscosidade. Ar e óleo mineral foram utilizados em um tubo horizontal de 17 m de comprimento de 0,0762 m de diâmetro. Nas condições de estudo, eles observaram que o aumento da viscosidade do óleo influencia fortemente a frequência da golfada. Para corrigir as grandes discrepâncias encontradas na comparação de resultados com modelos de previsão disponíveis na literatura, uma nova correlação que incorpora o efeito da alta viscosidade do líquido foi proposta.

Embora a alta viscosidade do líquido afaste consideravelmente os resultados experimentais das previsões dos modelos bifásicos líquido-gás, a natureza do fluido menos denso também apresenta uma influência significativa. Nesse sentido, especial atenção deve ser prestada na utilização desses modelos para prever o comportamento dos sistemas líquido-líquido. Para esses sistemas, os efeitos da molhabilidade dos líquidos e a tensão interfacial são mais relevantes do que nos sistemas líquido-gás (Brauner, 2003). Diante disso, o uso dos mapas preditivos dos modelos de Taitel & Dukler (1976), Barnea et al., (1980); Barnea (1987) ou Shoham (2005), dentre outros, para sistema líquido-

gás, são inapropriados nos sistemas líquido-líquido (Trallero et al., 1997; Xu, 2007, Matsubara & Naito 2011). Nestes sistemas é comum a aparição de dispersões água-óleo. Existem vários modelos para prever padrões de escoamento em sistemas líquido-líquido, alguns deles são: Trallero (1995), Al-Wahaibi & Angeli (2007), Wang et al. (2013) e Torres et al. (2016), dentre outros.

Trallero et al. (1997) apresentou uma classificação dos padrões observados nestes sistemas, onde alguns padrões estratificados previstos nos sistemas líquido-gás têm a presença de dispersões de óleo em água: (D O/W), água em óleo (D W/O), óleo em água e água (D O/W & W), óleo em água e água em óleo (D O/W & W/O), e além da região estratificada (ST), uma região estratificada com uma zona de mistura na interface (ST-MI). A Figura 2.3 apresenta esta classificação.

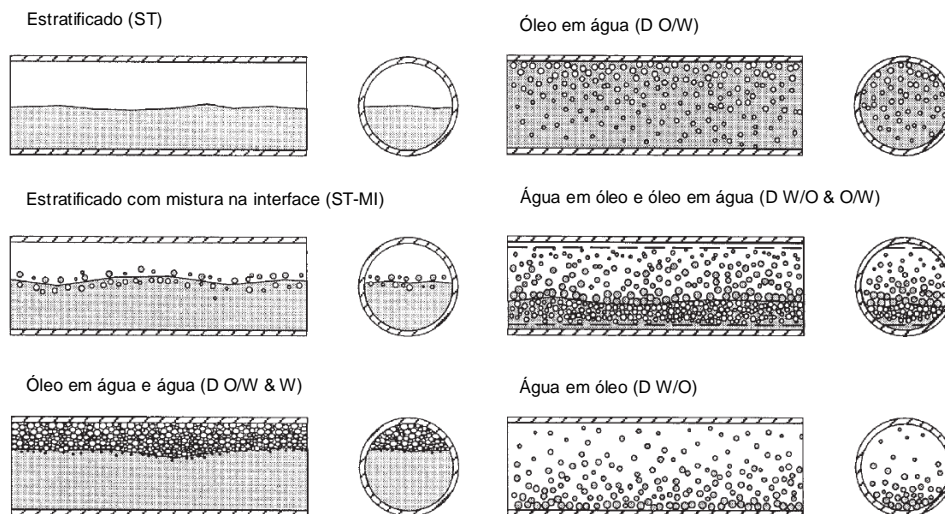


Figura 2.3: Padrões de escoamento horizontal em dutos, sistema água-óleo.

Trallero et al. (1997).

Além da validação própria de cada autor, outros trabalhos têm mostrado resultados favoráveis. Rodriguez & Oliemans (2006), ao estudar experimentalmente o escoamento água-óleo em um tubo de aço (de diâmetro 8,28 cm) na disposição horizontal, comprovaram que os padrões de escoamento observados nos seus experimentos eram razoavelmente bem descritos pelo mapa de padrões de escoamento do Trallero (1995), inclusive em disposições geométricas levemente inclinadas (para cima e para baixo). Eles conseguiram leituras experimentais precisas, através das medições da fração volumétrica in situ (*holdup*) de cada fase obtidas com densímetros de raios gama.

### 2.3 Modelos de Estabilidade Linear

Os modelos de estabilidade linear aplicada a escoamentos bifásicos paralelos são desenvolvidos partindo das equações que governam o escoamento (equações de Navier-Stokes). As equações para cada fase são linearizadas, e logo de aplicado o método dos modos normais, um conjunto de equações tipo Orr-Sommerfeld resulta para cada fase. Os dois sistemas são acoplados através das condições interfaciais. Nestes casos o campo de velocidade linearizado é obtido como parte da solução (Yih, 1967; Renardy, 1985; Boomkamp et al., 1997; McCready & Uphold, 1997). Os resultados destas análises fornecem informação sobre a estabilidade linear do escoamento, sendo um indicativo inicial para determinar se ocorrerão mudanças no escoamento, do padrão estratificado para outro diferente. A análise é estendida para qualquer comprimento de onda apresentando menos restrições e, portanto, reportando melhores resultados quando comparados com modelos mecanicistas (Kuru et al., 1995). Tais estudos são possíveis graças à capacidade melhorada dos atuais computadores, assim como de recentes avanços nas técnicas numéricas. Geralmente as análises são feitas considerando uma evolução temporal. Para avaliar a evolução espacial, pode-se utilizar, em algumas situações, a transformada de Gaster (Gaster, 1962).

Dentre os diversos trabalhos desenvolvidos nesta linha, pode-se citar Yih (1967), que mostrou que o salto (estratificação) de viscosidade em um fluido provoca instabilidade. Considerando os escoamentos monofásicos tipo Poiseuille (instável para  $Re > 5772$ ) e Couette (estável para todos os  $Re$ ), ele analisou duas camadas de diferentes viscosidades (escoamento bifásico), mas com as mesmas densidades. Ele encontrou a aparição de instabilidades a baixo  $Re$ , concluindo que essa consequência vem da diferença de viscosidades entre fases. A análise foi formulada através das equações de Orr-Sommerfeld, cuja solução (método assintótico) foi obtida para ondas longas com diferentes  $Re$ .

Yiantsios & Higgins (1988) estudaram a estabilidade de dois fluidos superpostos de diferentes viscosidades em um escoamento tipo Poiseuille. A análise estende os resultados do método assintótico para ondas longas, desenvolvido por Yih (1967), para pequenos e grandes números de onda. Diferentes densidades, razão de espessuras, assim como efeitos de tensão interfacial e gravidade são incluídos. Em um trabalho anterior, Yiantsios & Higgins (1987), obtiveram a solução do sistema Orr-Sommerfeld através do

método de elementos finitos Galerkin para números de onda pequenos. A análise temporal da estabilidade do escoamento permitiu obter curvas de estabilidade neutra para o modo interfacial em uma grande faixa de parâmetros físicos que descrevem o escoamento. Complementarmente, a análise mostra que o escoamento é também linearmente instável ao modo cisalhante, reportando-se a dependência do número de Reynolds crítico ( $Re_c$ ) sobre a razão de viscosidades. A comparação das predições teóricas do  $Re_c$  para os dois modos instáveis mostrou concordância com mapas experimentais da literatura.

Kuru et al. (1995) fizeram um estudo comparativo das predições da teoria de estabilidade linear (baseado em diferentes modelos existentes na época), considerando um escoamento estratificado horizontal líquido-gás. Eles avaliaram as aproximações de estabilidade de Kelvin-Helmholtz, quantidade de movimento linear (na forma integral) e expansão de onda longa com um modelo mais estrito, tipo Orr-Sommerfeld com solução via método espectral “tau” (Gardner et al., 1989). Os autores encontraram que as aproximações não predizem corretamente o ponto de estabilidade neutra, indicando que as discrepâncias se devem as diferenças dos parâmetros relacionadas à interface, e as diferenças nos estados bases (do gás, no caso turbulento). A fase gasosa foi modelada de duas formas: utilizando um perfil de velocidade polinomial e com a imposição de condições de contorno obtidas das variações de pressão e tensão cisalhante.

Boomkamp et al. (1997) utilizaram o método de colocação Chebyshev (Wright, 1964; Su & Khomami, 1992) para solucionar o problema de autovalores que governa a estabilidade de escoamentos bifásicos paralelos. O método é baseado na expansão de autofunções em termos de polinômios de Chebyshev, e subsequente solução do sistema resultante com o algoritmo QZ (Moler & Stewart, 1973). A metodologia foi proposta com o intuito de superar as dificuldades da aplicação padrão desta técnica ao problema de estabilidade de um filme fino de líquido cisalhado por um gás. No entanto, a metodologia pode ser estendida para estudar outras configurações de escoamentos bifásicos.

Kaffel & Riaz (2015) avaliaram a estabilidade de dois fluidos imiscíveis com diferentes densidades e viscosidades num canal plano utilizando análise numérica. O método espectral de colocação de Chebyshev é usado para resolver as equações acopladas de Orr-Sommerfeld, e o problema de autovalores é resolvido usando o algoritmo QZ. Naquele trabalho, foram estudadas as características espectrais e estruturas das autofunções relacionadas aos modos instáveis interfaciais e cisalhantes. Os resultados sugeriram que coalescência de modos pode acontecer em algumas situações específicas, principalmente no caso de filmes finos. Além

disso, mostraram que as autofunções do modo interfacial mais instável mudam fortemente nas proximidades da interface. Também mostraram que a taxa de crescimento dos modos mais instáveis são muito sensíveis ao escoamento base.

Barmak et al. (2016), estudaram a estabilidade linear de um escoamento bifásico estratificado em canais horizontais para perturbações com número de onda arbitrário. O sistema de equações de Orr-Sommerfeld e suas condições de contorno também foram tratados com o método de colocação de Chebyshev, que foi solucionado usando o algoritmo QR (Francis, 1961). Naquele trabalho, foi observado que dependendo das condições, as perturbações críticas podem se iniciar na interface (modos interfaciais) ou próximo às paredes (modos viscosos). Sua análise revela que não há correlação definitiva entre o tipo de instabilidade e o comprimento da perturbação.

Em um trabalho recente, Trifonov (2017) estudou teoricamente o escoamento líquido-gás em contracorrente entre duas placas inclinadas. Através da linearização das equações de Navier-Stokes, uma análise de estabilidade sobre uma ampla faixa de números de Reynolds do líquido e da velocidade superficial do gás foi realizada com objetivo de encontrar todos os possíveis modos instáveis. Para um conjunto de parâmetros, ele calculou os incrementos de crescimento ou amortecimento no tempo de diferentes modos resolvendo um problema de autovalor generalizado (solucionado através do uso de polinômios de Chebyshev). Dois modos instáveis foram encontrados. O comprimento de onda e a velocidade de fase de seus estados neutros foram calculados variando os números de Reynolds do líquido e do gás. O primeiro modo é um "modo de superfície" (resultado da interação líquido-gás) que corresponde às ondas de Kapitza (Kapitza, 1948) a pequenos valores da velocidade superficial do gás.

## 2.4 Modelos de Estabilidade Não Linear

A amplitude infinitesimal é condição necessária para que a teoria linear modele as características das perturbações do escoamento. Contudo, devido ao contínuo crescimento das amplitudes, quando essas entram no regime linearmente instável, os termos desprezados no problema linear podem se tornar relevantes. Nessa situação a teoria linear deixa de prever o comportamento das perturbações (Schmid & Henningson, 2001). A partir deste ponto os efeitos não lineares começam a se manifestar ativando a geração de novos componentes modais, devido à interação não linear dos componentes já

existentes (Drazin & Reid, 1981). Nesta faixa, diferentes mecanismos podem descrever a transferência de energia entre componentes espectrais, que pode manifestar-se no rápido aumento do crescimento das perturbações, ou de forma inversa, podem atuar na estabilização do sistema (Jurman et al., 1992, Sangalli et al., 1997).

Jurman et al. (1992) estudaram de forma experimental a evolução de ondas interfaciais água-ar em um pequeno canal retangular perto da estabilidade neutra. Eles sugeriram que um mecanismo possível de estabilização do crescimento das ondas é a transferência de energia da onda fundamental para o seguinte harmônico (do espectro de frequências) que é linearmente estável e pode dissipar energia. Segundo Jurman et al. (1992), esse mecanismo acontece se os dois modos são não ressonantes. Em outras condições, um primeiro sub-harmônico pode crescer, aparentemente porque a transferência de energia da interação entre sub-harmônico e modo fundamental supera a dissipação viscosa linear. A análise de Jurman et al. (1992) sugere que outros modos também podem participar da interação com modos de baixa frequência e, portanto, transferir energia para frequências mais baixas que a fundamental.

McCready e Uphold (1997) estudaram a transição do escoamento estratificado para escoamento de golfadas ou anular. Seu trabalho compara predições da teoria de estabilidade linear com resultados experimentais de Jurman et al. (1992) e Bruno & McCready (1988). Discutem o aparecimento de efeitos não lineares como sub-harmônicos, modos de baixa frequência e saturação do crescimento de ondas, não descritos pela teoria linear. De acordo com os autores, a teoria linear só descreve parte dos mecanismos de formação de ondas. Eles indicaram que uma perturbação de onda longa não cresce a partir de amplitudes infinitesimais seguindo um processo linear e, portanto, o uso da teoria de estabilidade linear para prever regimes de transição poderia não ser adequado. Além disso, sugerem que a clássica estabilidade de Kelvin-Helmholtz e suas modificações parecem ser falhas na previsão de formação de golfada.

Sangalli et al. (1997) apresentaram um estudo sobre os mecanismos de estabilização de ondas curtas interfaciais no escoamento estratificado líquido-gás. O modelo proposto naquele trabalho indica que ondas curtas podem saturar-se em pequenas amplitudes sem a geração de ondas longas ou modos transversais. Através de uma análise do tipo Stuart–Landau (Stuart, 1960), considerando a decomposição em três componentes, foi encontrado que a saturação ocorre das interações do modo fundamental com: *i*) ele mesmo, *ii*) o

seguinte harmônico e *iii*) o escoamento médio. Com a última interação (*iii*) sendo a menos importante.

King & McCready (2000) estudaram o comportamento de ondas longas em escoamentos bifásicos num canal plano. O estudo foi baseado na análise dos resultados da integração numérica das equações de amplitude fracamente não linear, derivadas via expansão de autofunções das equações governantes. De acordo com King & McCready (2000), no caso líquido-líquido, a onda longa pode ser desestabilizada pela interação cúbica com ondas curtas. Isso contrasta com as observações do trabalho de Sangalli et al. (1997)

Campbell & Liu (2013), estudaram o problema de interação ressonante entre ondas interfaciais, em um escoamento bifásico, invíscido, num canal horizontal. No estudo eles consideram um trio ressonante formado por uma onda instável e duas ondas estáveis. Consideraram ainda que uma das ondas estáveis possui comprimento longo em relação ao da onda instável. Aplicando o método de escalas múltiplas, eles derivaram equações que governam a evolução temporal da amplitude de ondas em interação incluindo efeitos da instabilidade interfacial. A solução desta equação mostra que dependendo das condições do escoamento, ondas estáveis de comprimento longo podem atingir uma taxa de crescimento bi-exponencial através da interação ressonante com a onda instável. Sua análise teórica foi validada com resultados de simulações numéricas que utilizavam aproximação pseudo-espectral de alta ordem. Os resultados comparam bem com a análise teórica. Seguindo um procedimento similar, eles estudaram o caso particular onde um componente do trio de ondas é equivalente ao sub-harmônico do componente instável. Nessa situação encontraram um eficiente mecanismo de transferência entre o modo instável (fundamental) e os estáveis (sub-harmônicos).

Em 2014, Campbell & Liu deram continuidade ao trabalho desenvolvido no ano anterior, e estudaram em detalhe o problema de interação ressonante não linear, especificamente considerando sub-harmônicos. O problema considera a interação ressonante entre um modo linearmente instável e seu sub-harmônico que pode ser linearmente estável ou instável. Eles mostram que através deste acoplamento não linear, o modo sub-harmônico linearmente estável pode crescer mais rápido do que o crescimento exponencial, sendo capaz de gerar ondas longas de grande amplitude que são estáveis pela análise de estabilidade linear invíscida. Através do método de escalas múltiplas, eles obtiveram equações para a evolução temporal da amplitude de ondas que incluíam efeitos da instabilidade interfacial. Estas previsões

analíticas foram validadas com simulações numéricas. Seus resultados também demonstram que cadeias de ressonâncias podem permitir que a energia introduzida no sistema pela instabilidade linear seja transferida para ondas mais longas, criando um mecanismo eficiente para a geração de ondas longas de grande amplitude a partir de ondas curtas instáveis.

Campbell et al. (2016), estudaram os mecanismos que governam o crescimento inicial e a evolução não linear de ondas interfaciais em escoamentos bifásicos tipo Couette e Poiseuille. Através de uma análise de estabilidade tipo Orr-Sommerfeld, o espectro de frequências e curvas de estabilidade permitiu identificar alguns trios de ondas. Assim, eles encontraram que a combinação de mecanismos de instabilidade e ressonância observados em fluidos não viscosos também persistem na presença de fluidos viscosos. Mecanismos similares foram observados tanto em escoamentos laminares como em escoamentos turbulentos.

## **2.5 Modulação da Amplitude de Ondas**

Para estudar a evolução de ondas interfaciais em escoamentos bifásicos estratificados (e o controle destas), uma revisão é focada nos diferentes estudos relacionados com modulação de ondas. Não há referência, na literatura científica, de trabalhos onde perturbações controladas sejam utilizadas para excitar a interface de escoamentos estratificados bifásicos através da modulação de ondas, apesar da modulação de ondas ter reconhecida influência na transição laminar-turbulenta de camadas limite. A seguir, apresenta-se uma breve revisão dos principais trabalhos relacionados a esse tópico. A ideia é discutir a abordagem utilizada no problema monofásico, pois no presente trabalho buscou-se analisar o problema bifásico sob a perspectiva dos estudos realizados com perturbações controladas em camadas limite.

Medeiros e Gaster (1999a) estudaram experimentalmente a evolução não linear de pacotes de ondas em uma camada limite laminar. Os pacotes foram gerados através de perturbações acústicas. Dois tipos de pulsos acústicos de curta duração foram usados, um com excitação positiva e outro com excitação negativa. Em resultados preliminares, o pacote formado com o pulso positivo exhibe fenômenos não lineares em amplitudes consideravelmente mais baixas do que o caso negativo, apesar de no estágio linear o comportamento de ambos os casos ser similar. Os resultados preliminares foram estendidos ao considerar



pulsos com amplitude complexa para incluir pacotes com outras fases. Estes experimentos mostraram a forte influência da fase na evolução do pacote, sugerindo a importância da fase do pacote relativo à modulação do envelope.

Em um segundo trabalho, Medeiros e Gaster (1999b) estudaram vários pacotes com diferentes fases relativas ao envelope. Em todos os pacotes, a não linearidade envolveu a aparição de modos oblíquos de frequência próxima ao sub-harmônico da onda dominante 2-D. Novamente, nestes casos é confirmado que a fase tem uma forte influência na intensidade da interação não linear. As observações também indicaram que embora a ressonância sub-harmônica encontre-se presente no processo, ela sozinha não explica o comportamento não linear. Os experimentos mostram que os processos também devem envolver um mecanismo que gere ondas oblíquas de frequência mais baixa que a banda de ondas T-S (Tollmien-Schlichting).

De Paula et al. (2013) investigaram experimentalmente a interação fracamente não linear envolvendo ondas T-S com amplitude modulada em uma camada limite de um aerofólio 2-D. Casos ressonantes foram examinados onde mais de uma onda fundamental estava presente no escoamento. Seus resultados mostraram que mecanismos não lineares conectados com o grau da modulação de ondas primárias T-S não tiveram papel importante na evolução dessas ondas e de seus harmônicos. Foi mostrado que as modulações de ondas fundamentais 2-D geram modos adicionais na frequência da modulação ( $\Delta f$ ). Estas perturbações de baixa frequência são produzidas pela combinação quadrática não ressonante dos componentes espectrais das ondas primárias T-S moduladas. Foi mostrado que a eficiência do processo é mais alta para modos de baixa frequência 3-D em comparação com modos 2-D. Assim a tridimensionalidade para as ondas de baixa frequência não requer alguma interação ressonante. Na subsequente etapa não linear, observou-se que dependendo da modulação o mecanismo pode gerar perturbações com frequências próximas das sub-harmônicas (*detuned*). O trabalho mostrou que esses modos, mesmo não sendo sub-harmônicos exatos, ainda podem ressonar com as ondas primárias e crescer rapidamente. Eles concluem que a sequência de mecanismos fracamente não lineares encontrados no seu trabalho parece ser a causa da transição laminar-turbulenta (ao menos nas condições de camadas limites 2-D de aerofólios com uma extensão longa de escoamento laminar e em um ambiente natural de perturbações). O cenário observado naquele trabalho está de acordo com o encontrado para pacotes e trem de ondas, que também são muito utilizados para simular o que acontece no caso de transição natural.

## 2.6 Simulação Numérica

Devido ao contínuo desenvolvimento da capacidade de processamento dos computadores e a melhora dos métodos numéricos, o estudo da transição estratificado-golfada através de experimentos numéricos tem sido aprimorado (Boomkamp et al., 1997; Prosperetti & Tryggvason, 2007). A solução numérica das equações de Navier-Stokes, assim como a coleta de dados experimentais, são as duas formas de validar a precisão de modelos preditivos teóricos (Shoham, 2005). Diferentes modelos, com diferentes vantagens e desvantagens entre si, são utilizados para resolver as equações governantes de escoamentos bifásicos. Os modelos podem ser subdivididos em dois grandes grupos: modelos de “um fluido” (*one-fluid model*), onde um conjunto de equações descreve o escoamento; e os modelos “de médias nas fases” (*multi-fluid model*), onde um conjunto de equações descreve cada fase presente no escoamento (Prosperetti & Tryggvason, 2007). A modelagem baseada no conceito de “um fluido” é comumente empregada quando as fases são claramente separadas por uma interface. Neste caso, metodologias eficientes para a determinação da região correspondente a cada fase são necessárias, assim como a determinação acurada do salto de pressão através da interface. Já os modelos de média de fases, são frequentemente empregados, quando uma fase encontra-se dispersa na outra. Estes modelos precisam de equações adicionais de fechamento nas interfaces entre as fases. Porém, os dois tipos de abordagens não são limitados a estes tipos de escoamentos.

Modelagens 1-D, 2-D ou 3-D podem ser empregadas com ambas as metodologias. Evidentemente os modelos 1-D têm o menor custo computacional em relação dos modelos 2-D e 3-D, tornando-os práticos e atrativos inclusive para a indústria, apesar das suas limitações preditivas (McCready & Uphold, 1997; Prosperetti & Tryggvason, 2007). No entanto, com relação aos modelos 2-D e 3-D, embora sejam os de maior custo computacional, a confiabilidade dos seus resultados justifica o preço pago para investigação e pesquisa (Kalogerakos, 2011).

A formulação de dois fluidos 1-D tem sido amplamente utilizada para prever escoamentos bifásicos, sendo a base de um grande número de estudos de estabilidade linear e/ou previsão da transição entre padrões de escoamento ao longo de tubulações (Bendixsen et al., 1991; Issa & Kempf, 2003; Nieckele et al, 2013; Simões et al., 2014; Eduardo, 2014; entre outros).

Guo et al. (2002) utilizaram o modelo de dois fluidos 1-D para avaliar a estabilidade linear e não linear da interface de um escoamento bifásico estratificado líquido-gás em dutos circulares. Resultados da estabilidade linear foram obtidos com o clássico modelo mecanicista de Barnea & Taitel (1993), investigando os efeitos das vazões de líquido e gás, viscosidade do líquido, tensão superficial e inclinação do duto sobre a estabilidade da interface. Para a parte não linear, o modelo foi baseado em um conjunto de equações hiperbólicas não lineares obtidas a partir do modelo de dois fluidos omitindo os efeitos da tensão superficial e assumindo um estado quase permanente da fase gasosa. Utilizando a linha característica e diferenças finitas, a propagação e crescimento de perturbações interfaciais são avaliados em função das velocidades superficiais dos fluidos. Resultados da análise de estabilidade não linear são contrastados com resultados da estabilidade linear e com dados experimentais. Esta análise fornece uma boa estimativa do crescimento e propagação das perturbações interfaciais na interface do escoamento. Os autores mostraram a influência de diversas variáveis na estabilidade do escoamento; no entanto, nenhuma clara conclusão com relação ao efeito da viscosidade do líquido foi obtida, e recomendaram uma maior investigação.

Issa & Kempf (2003) apresentaram um modelo para prever a iniciação, crescimento e subsequente desenvolvimento em um escoamento de golfada. Seu trabalho é baseado no modelo de dois fluidos transiente 1-D e a solução numérica é obtida via o método de volumes finitos. Nesta modelagem, a evolução do escoamento de um padrão para outro é obtida naturalmente como parte do cálculo transiente, a partir de alguma condição inicial dada. Eles indicam que quando o modelo de dois fluidos é matematicamente bem-posto, ele é capaz de capturar crescimento de instabilidades em escoamentos estratificados permitindo a formação de golfadas. A precisão dos resultados é sensível aos modelos de fechamento usados para determinar às forças cisalhantes nas equações de quantidade de movimento linear, tanto na interface quanto no contato das fases com a parede. Tal precisão também é dependente do perfil de pressão e de velocidade. As taxas de crescimento destas instabilidades concordam bem com resultados obtidos de uma análise de estabilidade linear tipo Kelvin-Helmholtz. Considerando a simplicidade do modelo unidimensional, vale ressaltar os numerosos resultados obtidos para dutos com configurações horizontais e inclinadas que compararam bem com a literatura.

Salhi et al. (2010) modelaram o comportamento transiente da interface líquido-gás em um escoamento estratificado bifásico em dutos horizontais

incluindo os efeitos da viscosidade do líquido, tensão superficial e inclinação do duto. O modelo unidimensional (1-D) de dois fluidos é usado, onde as equações de conservação são combinadas com o método das características e com um método explícito de diferenças finitas para simular o escoamento. Uma análise de estabilidade linear permite perturbar o escoamento do líquido com pequenas perturbações. Uma versão melhorada do modelo é desenvolvida como um conjunto de equações hiperbólicas não lineares. A análise linear mostra que o fator de amplificação decresce rapidamente quando a viscosidade de líquido decresce fracamente. A tensão superficial atua como um fator estabilizador da interface e, em relação às inclinações, é mostrado que para inclinações positivas a formação de golfada é mais provável. Pelo contrário, inclinações negativas tornam o escoamento estratificado mais estável e previne as golfadas devido aos efeitos de amortecimento da amplitude de onda desta configuração. A análise não linear revela que a transição estratificado/não estratificado deve ser estudada com o modelo completo de dois fluidos.

Modelos de um fluido têm sido frequentemente empregados no estudo de escoamento em canais e dutos (2-D e 3-D), visando modelar a evolução de perturbações interfaciais infinitesimais. Dentro dessa classe, encontram-se trabalhos baseados nos modelos *level set* (Valluri et al., 2008), *front-tracking method* (Cao et al., 2004) e *diffuse-interface method* (Valluri et al., 2010). Outra técnica atrativa nesta área é o método de *Volume of Fluid* (VOF), cuja principal característica é garantir conservação de massa. Recentemente estas técnicas têm sido utilizadas para validar resultados de análises Orr-Sommerfeld (Cao et al., 2004; Valluri et al., 2008; Valluri et al., 2010; Náraigh, et al, 2014).

Cao et al. (2004) avaliaram a estabilidade do escoamento bifásico (densidade similar) tipo Poiseuille através de simulações 2-D usando o método de diferenças finitas combinado com o método de *front-tracking* para o seguimento da interface (*front-tracking/finite difference method*). Seus resultados são descritivos e tentam relacionar todos os parâmetros avaliados. Para baixos números de Reynolds, na faixa linear avaliada, a taxa de amplificação é proporcional ao número de Reynolds e cresce com a razão de viscosidades. É observado que esta taxa também se incrementa quando a espessura do filme mais viscoso se reduz. Comportamento não linear forte é observado para perturbações com amplitudes iniciais relativamente grandes. Em alguns casos, o fluido mais viscoso penetra como *fingers* no fluido menos viscoso. A forma da interface é satisfatória ao ser comparada com experimentos prévios. O aumento da tensão interfacial retarda a taxa de crescimento da interface como esperado,

enquanto o aumento da razão de viscosidades a amplifica. Seus resultados são comparados com resultados analíticos e experimentais da literatura mostrando ser satisfatórios.

Valluri et al. (2008) apresentaram simulações numéricas 2-D para a evolução inicial de golfada em um canal plano, tendo como condições iniciais a solução do tipo Orr-Sommerfeld na condição laminar. Para perturbações muito pequenas, resultados de taxa de crescimento e velocidade de onda comparando suas simulações numéricas e sua análise de estabilidade (Orr-Sommerfeld), são muito próximos. Mesmo para pequenas perturbações, a influência não linear está presente, uma vez que elas crescem substancialmente. Observa-se que as ondas curtas (mais instáveis pela teoria linear) saturam quando o comprimento do domínio periódico também é curto. Em domínios maiores, coalescência de ondas curtas de pequena amplitude geram ondas longas de amplitude maior, se observando uma tendência para a formação de golfada.

Náraigh et al. (2014) apresentaram uma análise da estabilidade linear e não linear de um escoamento estratificado bifásico laminar tipo Poiseuille em um canal. A densidade dos fluidos foi a mesma enquanto outras propriedades foram alteradas com particular atenção na formação de ondas 3-D. As análises foram do tipo Orr-Sommerfeld-Squire (modal e não modal) e de simulação direta (DNS) das equações de Navier-Stokes para as duas fases em um ambiente 3-D. Nas condições estudadas, pela teoria linear, as ondas mais instáveis são 2-D. No entanto, eles mostraram que vários mecanismos com ondas 3-D entram no sistema sendo mais dominantes depois de um tempo. Observaram dois comportamentos, um comportamento direto, onde ondas 3-D são amplificadas pelo mecanismo linear, e que em certas condições crescem a uma taxa menor comparável ao modo 2-D mais perigoso. O outro comportamento é fracamente não linear, através do qual uma onda puramente transversal (*spanwise*) cresce de acordo com a teoria linear transiente se acoplando ao modo longitudinal (*streamwise*) numa forma fracamente não linear. No último estado, estas ondas não lineares 3-D persistentes são esticadas e distorcidas pelo escoamento base produzindo regimes de ligamentos, folhas ou turbulência interfacial. Dependendo dos parâmetros do regime, estas são observadas isoladas ou atuando juntas.

Gada & Sharma (2012), avaliaram um escoamento bifásico em um canal plano 2D, horizontal e inclinado. Eles desenvolveram um código numérico baseado no método *Level-set*, e utilizaram o desenvolvimento do escoamento óleo-água estratificado liso (SS) e estratificado ondulado (WS) para validação em regime transiente. Resultados foram obtidos para várias velocidades de entrada,

altura de interface de entrada, ângulo de inclinação, tensão interfacial e gravidade. Foi visto que a transição SS para WS, acontece a certo valor crítico dos parâmetros governantes tais como os números de Reynolds, Froude e Weber. Aumento na velocidade da água na entrada do canal, altura da água na entrada do canal, inclinação, assim como uma diminuição na tensão interfacial e na aceleração da gravidade são características encontradas que desestabilizam o escoamento SS. Alguns de seus resultados numéricos são utilizados no presente trabalho.

Há pouco tempo, Rodríguez (2017), na proposta de uma nova metodologia numérica de cálculo, também avaliou o escoamento água-óleo proposto no trabalho de Gada & Sharma (2012). O estudo é de aplicação a escoamentos estratificados de duas fases imiscíveis acionados por pressão e gravidade ao longo de um canal. A metodologia combina as equações de Navier-Stokes parabolizadas e o método *Level-Set*, resultando em um problema (de marcha à jusante) no qual a solução é computada em cada seção transversal baseada apenas na informação à montante. A principal dificuldade na implementação da abordagem para escoamentos internos foi a conservação das taxas de fluxo mássico, que é tratada estendendo, para escoamento bifásico, o método proposto por Patankar & Spalding (1972) e Raythby & Schneider (1979), e adicionando um termo de força explícito na equação de advecção da função marcadora do método. A combinação de diferenças finitas de alta ordem, armazenamento esparsa e álgebra, permite uma integração totalmente acoplada das equações parabolizadas, em oposição às clássicas abordagens segregadas. Isso resulta em um cálculo muito eficiente do campo completo do escoamento. Com esse método, cálculos estáveis são obtidos para escoamentos dentro de uma considerável faixa de razões de viscosidade e densidade. Seus resultados obtidos são de alta precisão e custo computacional muito baixo.

## 2.7 Investigações Suplementares

Nesta seção, alguns trabalhos não pertencentes aos itens descritos anteriormente, mas importantes na presente pesquisa, são apresentados.

Kao & Park (1972) estudaram experimentalmente a estabilidade de um escoamento bifásico óleo-água em um canal retangular com e sem excitação artificial (*vibrating ribbon*). Eles utilizaram a técnica *hot-film* para medir as velocidades e perturbações; e o movimento interfacial foi medido pela técnica

*wave gauge*. Para a razão de viscosidades explorada ( $\mu_o/\mu_a=20$ ), somente perturbações na água cresceram nos estágios iniciais da transição para turbulência. Foi encontrado que o número de Reynolds crítico é 2300 (transição para turbulência); número baseado nas propriedades da água, sua velocidade superficial e seu diâmetro hidráulico. O número de Reynolds baseado no óleo foi baixo mantendo este fluido o tempo todo em regime laminar, pelo qual a análise foi feita basicamente na região aquosa. Nesta região eles examinaram o comportamento de ondas viscosas crescentes e amortecidas usando excitação artificial, obtendo todos os parâmetros importantes que caracterizam a estabilidade linear do líquido. Eles também encontraram que em transição natural (sem excitação) o modo interfacial não foi excitado. Mesmo assim a primeira aparição de ondas interfaciais foi uma manifestação das ondas viscosas na água. Eles manifestam que a função da interface, na faixa de transição laminar-turbulenta (na água), foi introduzir e melhorar as oscilações na direção transversal, e acelerar o processo de quebra de perturbações crescentes.

Boomkamp e Miesen (1996) apresentaram uma classificação das instabilidades de escoamentos bifásicos paralelos, em um marco de estabilidade linear, ao considerar a equação que determina a razão de mudança da energia cinética da perturbação. Esta razão é composta das contribuições por dissipação viscosa do escoamento perturbado em cada fluido, do tensor de Reynolds que transfere energia entre o escoamento primário e o perturbado, e pelo trabalho realizado na deformação da interface (normal e tangencial à interface). Eles indicam a existência de cinco diferentes caminhos para a transferência de energia do escoamento primário ao perturbado, obtendo uma classificação segundo a representatividade destas contribuições, que tem sua origem na orientação da tubulação, estratificação de densidades, curvatura do perfil de velocidade, distribuição de viscosidade, efeitos cisalhantes, ou uma combinação destes dois últimos, não encontrando possibilidade de instabilidade capilar (na configuração do escoamento considerado).

Vallée et al. (2008) estudaram a estabilidade do escoamento bifásico estratificado água-ar em canais de seção retangular. O estudo foi experimental e teve validação numérica. Na abordagem experimental, a geometria escolhida visou fornecer as melhores possibilidades de observação. Eles utilizaram a técnica PIV (*Particle Image Velocimetry*) para obter o campo de velocidades desenvolvido durante a formação de golfada. Um processamento da sequência das imagens capturadas com câmeras de alta velocidade permitiu obter a história do nível de líquido. Para a abordagem numérica foi utilizado ANSYS CFX

com o modelo bifásico Euler-Euler com a opção de superfície livre. A turbulência para cada fase foi tratada com o modelo  $k-\omega$  SST (*Shear Stress Transport*); Menter (1993). Ambos os resultados, experimentais e numéricos, mostraram ter boa concordância em termos de formação de golfada e velocidade de ondas.

Sanchis et al. (2011) estudaram experimentalmente a interação de ondas interfaciais na formação de golfadas em escoamentos bifásicos estratificados. Eles mostraram que perto da região de transição, quando a golfada é formada, diferenças significativas são encontradas nas propriedades das ondas em relação às predições da teoria linear de Kelvin–Helmholtz. Observaram que nessa região a interação das ondas provoca um tipo de ressonância reportando que a interação não linear entre ondas pode induzir a um crescimento mais acelerado das ondas interfaciais. Seus experimentos foram desenvolvidos a velocidades superficiais de líquido e gás relativamente baixas em uma tubulação de 10 cm de diâmetro.

Nieckele et al. (2013), estudaram o início e subsequente desenvolvimento do escoamento de golfadas em dutos horizontais utilizando o esquema de “captura de golfada” e o método de volumes finitos em uma malha de alta resolução. Diferentes configurações foram analisadas e comparadas com dados experimentais. As predições para as variáveis da golfada média estiveram em bom acordo com os dados experimentais. A modelagem “captura de golfadas” é baseada na versão unidimensional transiente do modelo de dois fluidos e tem sido utilizada com sucesso, com boa concordância com dados experimentais na previsão das grandezas estatísticas de golfadas tanto para situações isotérmicas (Carneiro et al, 2011; Nieckele et al, 2013) como na presença de troca de calor (Simões et al, 2014).

Dinaryanto, et al. (2017) avaliaram os mecanismos de iniciação e desenvolvimento do escoamento em golfada, investigando experimentalmente o escoamento bifásico água-ar em um tubo horizontal de 26 mm de diâmetro. Foram avaliados os mecanismos de iniciação da golfada, a frequência de iniciação e a evolução da frequência de golfada. Mecanismos básicos como coalescência de ondas, o mecanismo de crescimento das ondas e as grandes ondas de perturbação foram discutidos. Foi proposto um mapa de iniciação do escoamento em golfada para chamar a atenção desses mecanismos. O trabalho é dedicado também a apoiar a avaliação de modelos disponíveis, o desenvolvimento de modelos teóricos e a validação de códigos CFD, ao ter dados experimentais do escoamento de golfada água-ar, de alta qualidade.

Recentemente, Ayati et al., (2017) investigaram experimentalmente a



evolução de ondas interfaciais em um escoamento estratificado água-ar em regime turbulento em um tubo horizontal (50,8 mm de diâmetro). O trabalho foi completamente desenvolvido na PUC-Rio. As ondas foram introduzidas no nível do líquido (em condições próximas à transição estratificado-ondulado) perto da entrada do tubo usando uma pequena lâmina oscilante. O controle desta lâmina, por uma placa D/A, foi sincronizado possibilitando aquisições (com câmaras de alta velocidade) bloqueadas em fase, assim como a utilização de procedimentos de médias para medir a evolução temporal e espacial das perturbações. Utilizando a técnica PIV, medições do campo de velocidade foram realizadas no líquido. Os testes mostraram ter alto grau de reprodutibilidade. Ondas lineares foram observadas para as oscilações no nível do líquido inferiores a 1,5% do diâmetro. Foi encontrado que ondas mais curtas atingem rapidamente estágios não lineares. Não foram observados harmônicos e sub-harmônicos significativos nos espectros do sinal. A parte das autofunções das ondas interfaciais foi extraída das flutuações dentro da camada líquida. Nas condições investigadas, os perfis mostraram que os modos interfaciais são quase independentes dos modos internos (relacionados a turbulência na parede).

## 2.8 Conclusão do Capítulo

Em resumo, no presente capítulo foi visto que a evolução de ondas na interface do escoamento estratificado e a conseqüente transição para o regime de golfadas pode ser estudada de diferentes formas. Foi visto que os modelos preditivos mecanicistas baseados na forma 1-D do modelo de dois fluidos são amplamente utilizados para analisar a estabilidade linear e determinar esta transição, mesmo que sejam condicionados à onda longa (Lin & Hanratty, 1986; Barnea & Taitel, 1993; Hurlburt & Hanratty, 2002). No entanto, diferenças significativas são reportadas na literatura quando esses modelos são comparados com outros que incluem todos os comprimentos de onda (Kuru et al., 1995), ou ainda com dados experimentais (Mata et al., 2002). No caso não linear, a complexidade do fenômeno faz com que diversos mecanismos possíveis de crescimento das perturbações sejam propostos na literatura. Não linearidades devidas a interações com harmônicos, modos de baixa frequência, sub-harmônicos, ou ainda instabilidades de banda lateral (*sideband*), são vistas como potenciais responsáveis por um crescimento rápido de ondas. Alguns desses mecanismos podem, também, atuar estabilizando o escoamento, como

sugere Sangalli et al. (1997). Logo, pode-se inferir que não há um consenso sobre quais os mecanismos mais relevantes e em quais condições eles ocorrem. A simulação numérica é uma das formas de avaliar os fenômenos, onde os modelos 1-D, 2-D e 3-D podem ser utilizados. Os modelos transientes 1-D baseados na forma diferencial do modelo de dois fluidos são práticos e de baixo custo computacional em relação dos modelos 2-D e 3-D. Evidentemente estes últimos apresentam resultados mais detalhados, embora sejam de alto custo computacional. Ainda não é consenso na literatura que as previsões sobre a evolução das ondas interfaciais só podem ser capturadas com fidelidade utilizando simulações 2-D ou 3-D. Isso se deve, em parte, à falta de uma melhor compreensão do problema físico e dos mecanismos mais relevantes ao problema.

Conforme discutido, existem muitos esforços para acrescentar informações ao estudo do fenômeno de transição estratificado-golfada, o qual ainda não é totalmente conhecido devido a sua alta complexidade. No presente trabalho, pretende-se contribuir com informações novas e relevantes, sobre os mecanismos que governam o crescimento de instabilidades que descrevam essa transição, ou parte desta. O foco deste trabalho é o estudo detalhado da evolução de perturbações inicialmente conhecidas e que são introduzidas de maneira controlada na interface do escoamento estratificado. Isso permite que seja observada em detalhe a interação entre ondas.

Ainda que existam diferenças notáveis entre os sistemas líquido-gás e líquido-líquido, o foco no presente estudo é na análise do efeito da interação de ondas, independente dos fluidos em questão. Adicionalmente, sabe-se que sistemas líquido-gás com frequência envolvem o regime turbulento. A fim de evitar a introdução de mais um fenômeno no processo de evolução de perturbações, optou-se por analisar um sistema líquido-líquido laminar.

Visando obter soluções acuradas e com esforço computacional reduzido, tanto do ponto de vista de armazenagem quanto de processamento, optou-se pela utilização de uma geometria que permitisse uma solução bidimensional. Dessa forma, a geometria de placas planas paralelas é selecionada, o que permite reduzir efeitos de paredes de dutos fechados. Uma desvantagem da abordagem selecionada é que efeitos de curvatura da interface, das paredes e de molhabilidade, não são considerados. Esses efeitos podem ser significativos para o processo de mudança de regimes (Rodríguez & Castro, 2014).

O presente estudo utiliza simulação numérica 2-D do método VOF, para estudar todo o processo de transição, comparando a faixa linear com os

resultados de uma análise linear do tipo Orr-Sommerfeld. Na faixa não linear, os resultados são analisados com diversas técnicas de processamento para se avaliar a interação não linear entre os modos perturbados. Adicionalmente, a interação de múltiplas ondas é investigada na tentativa de descrever os mecanismos que governam o escoamento na faixa de parâmetros escolhida para as investigações.

### 3 Fundamentos Teóricos

Neste capítulo são apresentados, brevemente, alguns conceitos fundamentais que são necessários para a compreensão desta tese. Apresenta-se uma introdução sobre ondas e conceitos gerais sobre estabilidade hidrodinâmica, incluindo fundamentos da teoria linear e não linear.

#### 3.1 Onda Simples

Três tipos de ondas são considerados comumente no estudo da mecânica de fluidos. Ondas compressivas, internas e interfaciais, geradas por um desequilíbrio de forças, viajam na forma de oscilações, impulsos ou mudando um campo de pressão. Ondas compressivas são importantes em escoamentos com altas velocidades como jatos, projéteis, bocais, etc. Ondas internas podem existir em sistemas onde as propriedades do fluido variam com alguma coordenada espacial. Já as ondas interfaciais são, normalmente, relacionadas com descontinuidades nas propriedades dos fluidos (interface), onde uma onda ou grupo de ondas se propaga. As ondas na superfície do mar (interface ar-água) também chamadas ondas de água (*water waves*) são um claro exemplo de ondas interfaciais (Whitham, 1974; Kundu et al., 2012).

Considerando-se uma onda unidimensional propagando-se na direção  $x$ , pode-se escrever a função que descreve o movimento dessa onda na forma,

$$\eta_{\text{int}}(x, t) = A \cos(\alpha x - \omega t) \quad (3.1)$$

sendo,

$$\alpha = \frac{2\pi}{\lambda}, \quad \omega = 2\pi f, \quad c = \frac{\omega}{\alpha} \quad \text{e} \quad T = \frac{1}{f}. \quad (3.2)$$

onde  $\eta_{\text{int}}$  especifica a forma da onda. Amplitude, número e frequência angular da onda são representados pelos parâmetros  $A$ ,  $\alpha$  e  $\omega$ , respectivamente.  $\lambda$  e  $f$  são o comprimento e frequência da onda. A velocidade de propagação da onda é a

velocidade de fase  $c$  e o conjunto  $(\alpha x - \omega t)$  é chamado de fase. Para algum instante de tempo  $t$ , o comprimento entre cristas de ondas consecutivas é  $\lambda$ . Analogamente, para algum ponto fixo no espaço  $x$ , o tempo entre a passagem de cristas de ondas consecutivas é o período  $T$ . A Figura 3.1 mostra cada parâmetro definido para melhor detalhe.

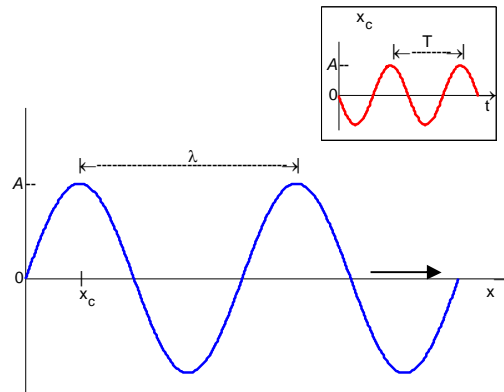


Figura 3.1: Onda periódica espacial com detalhe do comportamento no tempo (para a posição fixa  $x_c$ ).

### 3.2

#### Ondas Dispersivas e o Conceito de Velocidade de Grupo

As ondas superficiais são tipicamente dispersivas. O conceito de onda dispersiva é devido ao fato da velocidade de propagação depender do número de onda ( $c=c(\alpha)$  ou  $\omega=\omega(\alpha)$ ). Em águas profundas, por exemplo, ondas de comprimento longo viajam mais rápido do que ondas de comprimento curto. O oposto ocorre para ondas capilares (dominadas pelos efeitos da tensão superficial). Assim, um trem de ondas dispersivas, composto por ondas de diferentes comprimentos (ou frequências), não mantém sua forma inicial durante a sua propagação.

De forma simples, pode-se ilustrar o problema considerando a superposição de duas ondas senoidais de igual amplitude, mas com números de onda  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  ligeiramente diferentes, como sendo

$$\eta_{\text{int}}(x, t) = A \cos(\alpha_1 x - \omega_1 t) + A \cos(\alpha_2 x - \omega_2 t), \quad (3.3)$$

onde as frequências  $\omega_1$  e  $\omega_2$  também são ligeiramente diferentes por ser função do seu número de onda, como foi indicado antes. A Equação 3.3 pode ser expressa como,

$$\eta_{\text{int}}(x, t) = 2A \cos\left(\frac{1}{2}\Delta\alpha x - \frac{1}{2}\Delta\omega t\right) \cos(\alpha x - \omega t), \quad (3.4)$$

sendo,

$$\Delta\alpha = \alpha_2 - \alpha_1 \quad , \quad \Delta\omega = \omega_2 - \omega_1, \quad (3.5)$$

$$\alpha = \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} \quad , \quad \omega = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}. \quad (3.6)$$

Contrastando a Equação 3.4 com a Equação 3.1 pode se estabelecer que o termo  $\cos(\alpha x - \omega t)$  representa uma onda progressiva com velocidade de fase  $c = \omega/\alpha$ . A amplitude constante "A" de uma onda individual (Eq. 3.1), na Equação 3.4, que representa um trem de duas ondas, é dada por uma função que modula o valor constante de 2A, e cujas variáveis mudam lentamente devido aos valores  $\Delta\omega$  de  $\Delta\alpha$ . Esta função senoidal possui comprimento de onda  $4\pi/\Delta\alpha$  e período  $4\pi/\Delta\omega$ , e propaga-se na velocidade de  $c_g = \Delta\omega/\Delta\alpha$ , que no limite torna-se (Whitham, 1974; Kundu et al., 2012):

$$c_g = \frac{d\omega}{d\alpha}. \quad (3.7)$$

Assim, a multiplicação de senoides variando rápida e lentamente cria repetidos grupos de ondas. Ondas individuais se propagando com velocidade  $c = \omega/\alpha$ , e o envelope do grupo de ondas se propagando com velocidade  $c_g = d\omega/d\alpha$ , são mostrados na Figura 3.2.

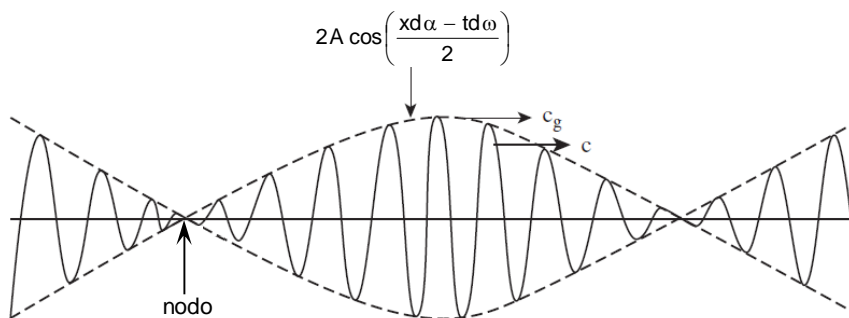


Figura 3.2: Trem de ondas. Ondas individuais se propagando com velocidade  $c = \omega/\alpha$  (velocidade de fase) são moduladas em amplitude pelo envelope se propagando com velocidade  $c_g = d\omega/d\alpha$  (Velocidade de grupo). Extraído de Kundu et al. (2012).

### 3.3 Estabilidade Hidrodinâmica

“Estabilidade pode ser definida como a capacidade de um sistema de ser imune a perturbações” (Betchov & Criminale, 1967). A teoria de estabilidade hidrodinâmica é aplicada no estudo de escoamentos submetidos a perturbações. De forma geral, se um escoamento laminar, permanente ou transiente é perturbado, essa perturbação pode decair, persistir na mesma magnitude ou crescer. Esses casos são chamados de estável, neutralmente estável e instável, respectivamente (Drazin & Reid, 1981). Existem ainda casos onde a estabilidade está condicionada à amplitude das perturbações, e que são chamados de condicionalmente estáveis. Nesse último caso, a amplitude das perturbações é um parâmetro do problema e a modelagem linear, que é baseada no princípio de que as perturbações são infinitesimais, não é válida. A seguir são introduzidos alguns conceitos acerca da teoria de estabilidade linear e fracamente não linear.

#### 3.3.1 Teoria de estabilidade linear

Considerando as equações que governam o movimento de um fluido (equações de Navier-Stokes N-S), o estudo da teoria de estabilidade assume que um escoamento geral pode ser representado por um estado base  $U_i$ ,  $P$  (permanente) e um estado perturbado  $U_i+u'_i$ ,  $P+p'$  (transiente). Subtraindo as equações de N-S do estado base, das equações do estado geral, obtemos a equação não linear da perturbação que constitui um problema de contorno e de valor inicial para a evolução da perturbação (Schmid & Henningson, 2001),

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = -U_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - u_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 u_i - u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}, \quad (3.8)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0. \quad (3.9)$$

Onde foi omitido o apóstrofo (') sobrescrito das variáveis perturbadas. A teoria linear é baseada em omitir termos não lineares, assumindo que são muito pequenos,

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = -U_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - u_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 u_i. \quad (3.10)$$

Assim, a equação anterior com suas condições de contorno e condição inicial, assim como com a equação de conservação de massa da perturbação (Eq. 3.9), define o problema de estabilidade linear. Este sistema também é conhecido como equações linearizadas de Navier-Stokes (ELNS).

De acordo com Boiko et al. (2012), uma consideração que facilita a solução do problema é a escolha de um sistema de coordenadas apropriado que possibilite simetria. Os chamados escoamentos cisalhantes paralelos são exemplos típicos onde pode se avaliar o problema, alguns exemplos são os escoamentos de Poiseuille (canal plano, duto circular ou elíptico, duto retangular, etc.), assim como algumas camadas limites. Já outros escoamentos podem ser tratados na mesma hipótese (escoamentos ao redor de superfícies curvas, por exemplo) como sendo localmente paralelos, neste caso o não paralelismo das linhas de corrente é desprezado (Boiko et al., 2012). Esta consideração permite que se utilize um uma análise particular do problema, conhecida como análise de estabilidade linear local.

### 3.3.2 Análise local da teoria de estabilidade linear

Neste caso o estado base  $U_i$ , é assumido na forma,

$$U_i = U_{(y)}\delta_{ii}, \quad (3.11)$$

que é dependente de uma única coordenada espacial

Neste contexto são apresentadas as principais equações que definem a evolução de uma perturbação arbitraria no espaço e tempo considerando a notação  $U=U_{(y)}$ . As Equações 3.9 e 3.10 podem ser expressas em suas três componentes como,

$$\frac{\partial u}{\partial t} + U \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 u, \quad (3.12)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + U \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 v, \quad (3.13)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + U \frac{\partial w}{\partial x} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 w, \quad (3.14)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \quad (3.15)$$



O termo de pressão pode ser substituído aplicando o divergente na equação de quantidade de movimento linear, obtendo-se

$$\nabla^2 p = -2 \frac{\partial U}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x}. \quad (3.16)$$

Substituindo na Eq. 3.13, mas aplicando previamente o laplaciano obtemos,

$$\left[ \left( \frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} \right) \nabla^2 - \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{\text{Re}} \nabla^4 \right] v = 0. \quad (3.17)$$

Uma segunda equação pode ser obtida a partir da equação de quantidade de movimento linear considerando a vorticidade normal  $\hat{\eta}$ , assim obtemos,

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\nabla^2}{\text{Re}} \right) \overbrace{\left( \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right)}^{\hat{\eta}} + \frac{\partial U}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial z} = 0. \quad (3.18)$$

As condições de contorno, na parede e longe da zona com influência viscosa,

$$v = \frac{\partial v}{\partial y} = \hat{\eta} = 0. \quad (3.19)$$

A condição inicial,

$$v(x, y, z, t = 0) = v_o(x, y, z), \quad (3.20)$$

$$\hat{\eta}(x, y, z, t = 0) = \hat{\eta}_o(x, y, z). \quad (3.21)$$

Logo, as duas Equações 3.17 e 3.18, com condições de contorno 3.19 e condição inicial 3.20 e 3.21, definem a descrição completa da evolução de uma perturbação arbitrária no espaço e tempo, sendo um problema linear de valor inicial e de contorno PVIC (Schmid & Henningson, 2001; Boiko et al., 2012).

### 3.3.3

#### Método dos modos normais

Uma perturbação arbitrária pode ser decomposta em um conjunto de

modos normais, onde cada modo pode ser examinado separadamente, devido ao fato de não haver interação entre eles no regime linear do problema (Drazin & Reid, 1981). Esses modos são linearmente independentes e, portanto, a evolução da perturbação pode ser escrita como uma superposição (combinação linear) de modos normais. Neste caso, se o escoamento é instável, cada componente (instável) crescerá com sua própria amplificação e velocidade de fase (Drazin & Reid, 1981).

Como o interesse é a forma específica da perturbação, velocidade e vorticidade normal das Equações 3.17 e 3.18, podem ser assumidas na seguinte forma,

$$v(x, y, z, t) = \bar{v}(y)e^{i(\alpha x + \alpha_z z - \omega t)}, \quad (3.22)$$

$$\eta(x, y, z, t) = \bar{\eta}(y)e^{i(\alpha x + \alpha_z z - \omega t)}. \quad (3.23)$$

Onde  $\bar{v}(y)$  e  $\bar{\eta}(y)$  representam a função amplitude da velocidade e vorticidade normal, respectivamente. Esta estratégia é conhecida como método dos modos normais e torna o problema linear PVIC em um problema de autovalores. Ao substituir nas equações da perturbação obtidas na seção anterior, esta aproximação permite fazer uma análise espectral para obter uma faixa completa de frequências  $\omega$ , e números de onda nas direções das linhas de corrente  $\alpha$  (*streamwise*) ou perpendicular a elas  $\alpha_z$  (*spanwise*) (Schmid & Henningson, 2001).

### 3.3.4 Equações de Orr-Sommerfeld, Squire e Rayleigh

Ao aplicar o método dos modos normais nas Equações da perturbação arbitrária no espaço e tempo (3.17 - 3.21), duas equações são obtidas,

$$\left[ (-i\omega + i\alpha U)(D^2 - k^2) - i\alpha U' - \frac{1}{\text{Re}}(D^2 - k^2)^2 \right] \bar{v} = 0, \quad (3.24)$$

$$\left[ (-i\omega + i\alpha U) - \frac{1}{\text{Re}}(D^2 - k^2) \right] \bar{\eta} = -i\alpha_z U' \bar{v}, \quad (3.25)$$

onde  $k = \sqrt{\alpha^2 - \alpha_z^2}$ . As condições de contorno na parede e na corrente livre,

$$\bar{v} = D\bar{v} = \bar{\eta} = 0. \quad (3.26)$$

A equação obtida para a velocidade normal é chamada de equação de Orr-Sommerfeld (Orr, 1907; Sommerfeld, 1908). Já a equação para a vorticidade normal é chamada de equação de Squire (Squire, 1933). As duas equações são muito importantes no estudo da estabilidade linear.

Para uma análise não viscosa, a equação de Orr-Sommerfeld sem o termo viscoso é conhecida como a equação de Rayleigh (Rayleigh, 1880, 1883). (Schmid & Henningson, 2001; Boiko et al., 2012).

### 3.3.5 Transformação e teorema de Squire

A transformação de Squire permite relacionar o problema de instabilidade de ondas oblíquas (3-D) com seu problema equivalente para ondas planas (2-D). Ele provém de comparar as equações de Orr-Sommerfeld para um modo bidimensional 2-D ( $\alpha_{2D}$ ,  $\alpha_z=0$ ) e um tridimensional 3-D ( $\alpha$ ,  $\alpha_z$ ), fornecendo,

$$\text{Re}_{2D} = \frac{\alpha}{k} \text{Re} < \text{Re} . \quad (3.27)$$

Isto estabelece o teorema de Squire, que indica que um escoamento paralelo primeiro se torna instável a perturbações 2-D, em um número de Reynolds  $\text{Re}_{2D}$  menor que algum  $\text{Re}$  onde perturbações 3-D neutras existem.

### 3.3.6 Estabilidade temporal

Nesta análise, o número de onda é um número real e a frequência (sendo o autovalor) é um número complexo. O número de onda está relacionado com comprimentos de onda periódicos  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  nas direções  $x_1$  e  $x_2$ , onde  $\alpha_1=2\pi/\lambda_1$  e  $\alpha_2=2\pi/\lambda_2$ . Equivalentemente, a equação pode ser expressa como,

$$\tilde{q} = \hat{q}(x_2) e^{i\alpha(x_1-ct)} + \text{c.c.} = \hat{q}(x_2) e^{i\alpha[x_1-(c_r+ic_i)t]} + \text{c.c.} , \quad (3.28)$$

onde  $c_r$  é a velocidade de fase, e  $c_i$  é a amplificação ou decaimento da perturbação. O termo c.c. representa a conjugada complexa.

De forma geral, uma perturbação pode ser pensada como uma superposição de ondas monocromáticas que se desenvolvem na direção a jusante em caixas periódicas de comprimento  $L_1=\lambda_1$  (e largura  $L_2=\lambda_2$ , se  $\alpha_2 \neq 0$ ). Cada onda viaja sobre o escoamento base com sua própria velocidade de fase  $c_r$ ,

e cresce ou decai com sua própria taxa. Enquanto o tempo passa, somente a onda mais instável domina (Juniper et al., 2014).

O espectro de autovalores (plano complexo  $c_i$  vs  $c_r$ ) e a região de estabilidade (plano  $\alpha$  vs  $Re$ ) são resultados comumente usados para identificar as características de instabilidade em experimentos e simulações (Theofilis, 2011). Na Figura 3.3 são mostradas algumas destas curvas para o escoamento monofásico tipo plano Poiseuille.

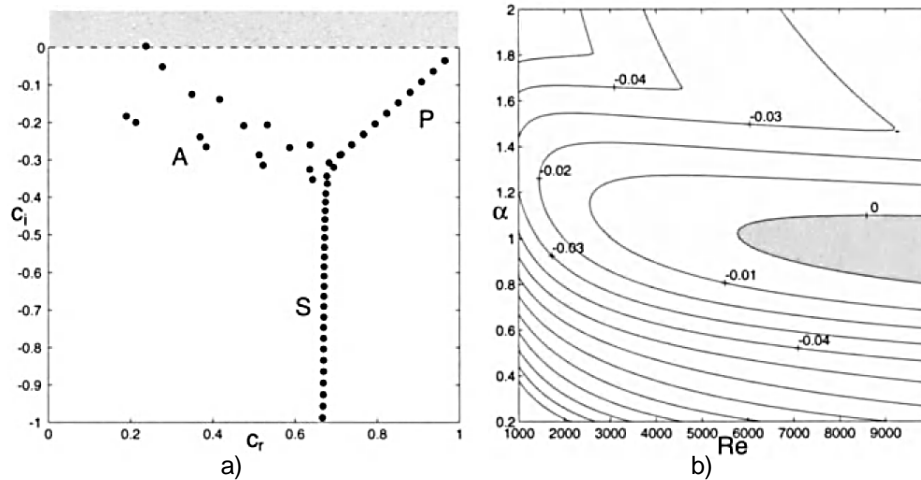


Figura 3.3: Curvas clássicas da análise de estabilidade linear para o escoamento de Poiseuille entre placas paralelas. a) Autovalores da análise espectral para  $Re=10000$ ,  $\alpha=1$  e  $\alpha_z=0$ . b) Isolinhas de amplificação constante e curva de estabilidade neutra.

Extraído de Schmid & Henningson (2001).

### 3.3.7 Estabilidade espacial

Esta análise, do ponto de vista matemático, é a contraparte do caso temporal. Neste caso é considerada uma frequência monocromática como um valor real enquanto que o número de onda (o autovalor) é um número complexo. Neste caso as perturbações lineares podem ser escritas como,

$$\tilde{q} = \hat{q}(x_2) e^{i[(\alpha_r + i\alpha_i)x_1 + \alpha_3 x_3 - \omega t]} + c.c. \quad (3.29)$$

onde  $\alpha_r$  é o número de onda, e  $\alpha_i$  é a amplificação (ou decaimento) espacial da perturbação.

O problema de estabilidade espacial é mais complexo do que o caso temporal porque o autovalor  $\alpha$  torna a equação de Orr-Sommerfeld um problema de autovalores não linear (Boiko et al., 2012). Mesmo assim os experimentalistas

preferem esta análise porque a identificação das características da perturbação é mais direta quando se trata com ondas monocromáticas.

Para facilitar, é comum estimar indiretamente o crescimento espacial a partir do temporal utilizando a Transformada de Gaster (Gaster,1962) que fornece uma relação aproximada entre o crescimento temporal e espacial para ondas bidimensionais (Schmid & Henningson, 2001; Boiko et al., 2012).

### 3.3.8 Transformada de Gaster

Assumindo que a relação de dispersão tem a forma geral (Schmid & Henningson, 2001; Boiko et al., 2012),

$$F(\bar{\alpha}, \bar{\omega}, \text{Re}) = 0. \quad (3.30)$$

A derivada total é,

$$dF = \frac{\partial F}{\partial \bar{\alpha}} d\bar{\alpha} + \frac{\partial F}{\partial \bar{\omega}} d\bar{\omega} + \frac{\partial F}{\partial \text{Re}} d\text{Re} = 0. \quad (3.31)$$

Se considerarmos os pontos sobre a curva de estabilidade neutra  $\bar{\alpha}_0, \bar{\omega}_0, \text{Re}_0$  (onde  $\bar{\alpha}_i = \bar{\omega}_i = 0$ , fazendo que  $\bar{\alpha}$  e  $\bar{\omega}$  sejam reais), obtemos

$$d\bar{\omega}|_{\bar{\alpha}_0} = -d\text{Re} \frac{\partial F}{\partial \text{Re}} / \frac{\partial F}{\partial \bar{\omega}}, \quad (3.32)$$

$$d\bar{\alpha}|_{\bar{\omega}_0} \frac{\partial F}{\partial \bar{\alpha}} = -d\text{Re} \frac{\partial F}{\partial \text{Re}}, \quad (3.33)$$

$$d\bar{\omega}|_{\text{Re}_0} = \frac{d\bar{\omega}}{d\bar{\alpha}} \Big|_{\text{Re}_0} d\bar{\alpha}, \quad (3.34)$$

$$d\bar{\omega}|_{\bar{\alpha}_0} = -d\text{Re} \frac{\partial F}{\partial \text{Re}} / \frac{\partial F}{\partial \bar{\omega}} = d\bar{\alpha}|_{\bar{\omega}_0} \frac{\partial F}{\partial \bar{\alpha}} / \frac{\partial F}{\partial \bar{\omega}} = -d\bar{\alpha}|_{\bar{\omega}_0} \frac{d\bar{\omega}}{d\bar{\alpha}} \Big|_{\text{Re}_0}, \quad (3.35)$$

ou,

$$d\bar{\omega}|_{\bar{\alpha}_0} = -c_g d\bar{\alpha}|_{\bar{\omega}_0}. \quad (3.36)$$

Esta equação relaciona uma pequena mudança em  $\alpha$  a uma pequena mudança em  $\omega$  através da velocidade do grupo  $c_g$  da perturbação que é complexa, assim a razão de crescimento espacial à temporal (e vice-versa), é

dada por,

$$\Delta \bar{\omega} = -i c_g \bar{\alpha}_i \quad \text{ou} \quad \Delta \bar{\alpha} = i \bar{\omega} / c_g. \quad (3.37)$$

A transformada de Gaster faz uso do fato de que a relação de dispersão é avaliada para parâmetros perto da curva de estabilidade neutra e assim, somente é mantida para pequenas razões de crescimento temporal ou espacial (Gaster, 1962; Schmid & Henningson, 2001; Boiko et al., 2012).

### 3.3.9 Estabilidade convectiva e absoluta

As instabilidades também podem ser classificadas na forma como se propagam no escoamento. Na Figura 3.4 se mostra uma representação destes tipos de instabilidades. A instabilidade absoluta (ou total) refere-se ao crescimento no tempo de uma onda que se propaga em todas as direções do escoamento. Quando a propagação ocorre na direção do escoamento, a instabilidade é classificada como convectiva.

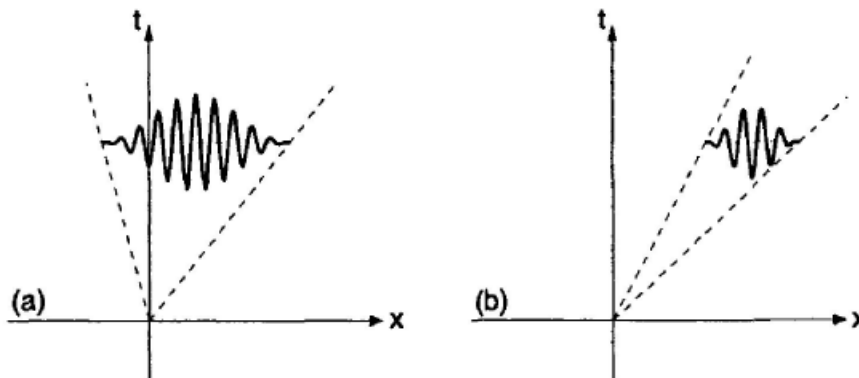


Figura 3.4: Tipo de instabilidades segundo sua propagação.  
(a) Instabilidade absoluta, (b) Instabilidade convectiva. (Drazin, 2002).

### 3.3.10 Teoria de estabilidade não linear

A teoria não linear tem diversos desdobramentos e envolve inúmeras técnicas de tratamento e solução dos sistemas de equações. Devido à dificuldade de solução do problema, normalmente, são utilizadas aproximações ou simplificações que permitem investigar mecanismos físicos específicos relacionados a diferentes cenários de transição (Schmid & Henningson, 2001).

Dentre os diversos cenários, um caso especialmente interessante para o problema abordado nesta tese é àquele descrito pela equação de Landau. Essa equação é útil para modelar sistemas onde a variação de amplitude no tempo depende da amplitude. A equação é usada em alguns casos para prever o comportamento de ondas próximas da estabilidade neutra.

### 3.3.11 Equação de Stuart-Landau

A equação descreve a evolução temporal da amplitude das perturbações. Ela é derivada utilizando uma técnica de perturbação conhecida como análise de escalas múltiplas. A partir da equação governante da evolução da perturbação, duas escalas temporais são consideradas, a escala lenta (a escala da função amplitude) e a escala rápida (a escala da parte exponencial). Complementarmente, a expansão da componente de velocidade normal permite obter a ordem da equação de evolução. Finalmente a condição de solvabilidade (termo não homogêneo tem que ser ortogonal a solução do problema homogêneo adjunto), fornece (Stuart, 1960; Drazin & Reid, 1981):

$$\frac{dA}{d\tau} = \bar{\lambda}_1 A + \bar{\lambda}_2 |A|^2 A. \quad (3.38)$$

onde  $\bar{\lambda}_1$  e  $\bar{\lambda}_2$  são referidos como coeficientes de Stuart-Landau, e  $\tau$  é a escala de tempo da evolução da amplitude  $A$ .

### 3.3.12 Bifurcação supercrítica e subcrítica

Bifurcação é a mudança do comportamento de um sistema. A análise da equação de Landau (em torno do número de Reynolds crítico  $Re_c$ ), na forma conveniente (Schmid & Henningson, 2001),

$$\frac{d|A|^2}{d\tau} = \bar{\mu}_1 |A|^2 + \bar{\mu}_2 |A|^4, \quad (3.39)$$

com solução,

$$|A|^2 = \frac{A_0^2 \exp(\bar{\mu}_1 \tau)}{1 + \frac{\bar{\mu}_2}{\bar{\mu}_1} A_0^2 (1 - \exp(\bar{\mu}_1 \tau))}, \quad (3.40)$$

traz como consequência dois conceitos importantes, dependendo dos sinais dos coeficientes  $\bar{\mu}_1$  e  $\bar{\mu}_2$ , ao considerar estados permanentes ( $\tau \rightarrow \pm\infty$ ).

Se  $\bar{\mu}_2 < 0$  e  $\bar{\mu}_1 > 0$ , para  $\tau \rightarrow +\infty$ ;

logo  $A \rightarrow \text{constante} = (\bar{\mu}_1 / \bar{\mu}_2)^{1/2}$  (A independe da amplitude inicial  $A_0$ ).

Se  $\bar{\mu}_2 < 0$  e  $\bar{\mu}_1 < 0$ , para  $\tau \rightarrow +\infty$ ;

logo  $A \rightarrow 0$  (A independe de  $A_0$ ).

Este comportamento conhecido como bifurcação supercrítica ( $0 < \text{Re}_c < 1$ ) é mostrado na Figura 3.5.

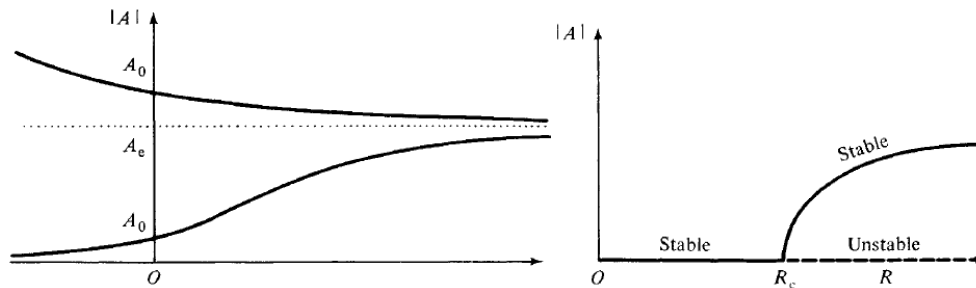


Figura 3.5: Estabilidade supercrítica ( $\bar{\mu}_2 < 0$ ). a) Amplitude como função do tempo para duas amplitudes iniciais  $A_0$ . b) A curva de bifurcação representa a amplitude de equilíbrio como função de  $\text{Re}$  (Drazin & Reid, 1981).

Além, se  $\bar{\mu}_2 > 0$  e  $\bar{\mu}_1 > 0$ , para  $\tau \rightarrow -\infty$ ;

logo  $A \rightarrow 0$  ou  $A \rightarrow +\infty$  (A depende de  $A_0$ ).

Se  $\bar{\mu}_2 > 0$  e  $\bar{\mu}_1 < 0$ , para  $\tau \rightarrow -\infty$ ;

logo  $A \rightarrow \text{constante} = (\bar{\mu}_1 / \bar{\mu}_2)^{1/2}$  ou  $A \rightarrow +\infty$  (A depende de  $A_0$ ).

Neste caso o comportamento é conhecido como bifurcação subcrítica ( $0 < \text{Re}_c - \text{Re} < 1$ ) e é mostrado na Figura 3.6.



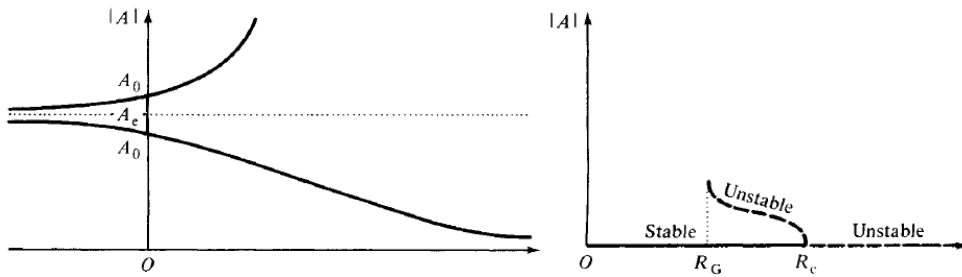


Figura 3.6: Estabilidade subcrítica ( $\bar{\mu}_2 > 0$ ). a) Amplitude como função do tempo para duas amplitudes iniciais  $A_0$ . b) A curva de bifurcação representa a amplitude de equilíbrio como função de  $Re$  (Drazin & Reid, 1981).

Assim, bifurcação supercrítica indica que o escoamento base, sendo linearmente instável ( $Re > Re_c$ ) atinge estabilização, ou seja, um novo estado laminar independente da amplitude inicial da perturbação. Pelo contrário, bifurcação subcrítica estabelece que o escoamento base dependa da amplitude inicial da perturbação, podendo-se tornar instável em condições linearmente estáveis ( $Re < Re_c$ ) (Drazin & Reid, 1981).

## 4 Modelagem

Este capítulo se divide em duas partes principais. A primeira parte focada na formulação do modelo matemático baseado no método *Volume-of-Fluid* (VOF). Nesta parte se incluem a formulação do modelo de estudo, as condições iniciais e de contorno, parâmetros do problema e adimensionalização, a caracterização do escoamento em um mapa de padrões, cálculo do escoamento base analítico, assim como o detalhe das perturbações utilizadas. Na segunda parte, o modelo numérico é apresentado com base no método de volumes finitos, cuja solução é obtida utilizando o software comercial ANSYS Fluent®. São apresentados os esquemas utilizados para discretização espacial e temporal das equações governantes, a reconstrução da interface, o acoplamento pressão-velocidade e o tratamento do sistema algébrico, entre outros.

### 4.1 Modelo Matemático

A análise de estabilidade em escoamentos estratificados de duas fases é investigada através da introdução de perturbações controladas na interface de um escoamento base totalmente desenvolvido. A partir da evolução no tempo e no espaço das ondas interfaciais introduzidas, é possível analisar parâmetros que descrevem a estabilidade da onda.

O escoamento é governado pelas equações de conservação de massa e quantidade de movimento linear. No presente estudo, os fluidos selecionados são água e óleo, os quais foram considerados incompressíveis. A viscosidade de ambos os fluidos é considerada constante. O escoamento é isotérmico ao longo do canal horizontal e adicionalmente, não é considerada transferência de massa entre fases nem os efeitos de molhabilidade dos líquidos.

#### 4.1.1 Método VOF (*Volume of Fluid*)

O método VOF foi selecionado para representar o escoamento bifásico porque é capaz de descrever adequadamente a dinâmica da interface entre

fluidos imiscíveis. Por esse motivo vem sendo aplicado com sucesso na previsão de escoamentos separados bifásicos: escoamentos estratificados, anulares, superfícies livres, bolhas alongadas, formação de golfada, etc. (ANSYS Fluent®, 2013; Prosperetti & Tryggvason, 2007).

O método VOF introduz uma função marcadora  $\beta$  que tem valor unitário nas regiões do domínio ocupadas por um dos fluidos e zero na região ocupada pelo outro fluido. Logo, a função marcadora  $\beta$  é uma função “degrau”. Uma vez que a função marcadora  $\beta$  se desloca junto com o fluido, sua derivada material é nula (Hirt & Nichols, 1981), e seu deslocamento no domínio pode ser obtida através da solução da seguinte equação,

$$\frac{\partial \beta}{\partial t} + \vec{V} \cdot \vec{\nabla} \beta = 0 \quad (4.1)$$

onde  $\vec{V}$  é o vetor velocidade,  $t$  é o tempo e  $\vec{\nabla}$  é o operador gradiente. A Eq. (4.1) pode ser combinada com a equação de conservação de massa,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{V}) = 0 \quad (4.2)$$

onde  $\rho$  é a massa específica, resultando na seguinte equação:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \beta) + \vec{\nabla} \cdot (\rho \beta \vec{V}) = 0. \quad (4.3)$$

Analisando a Eq. (4.3) nota-se que a mesma pode ser interpretada como a equação de conservação de massa para uma das fases. Considera-se então que valores de  $\beta$  entre zero e um ( $0 < \beta < 1$ ) indicam a presença da interface no interior de um volume de controle, representando a fração volumétrica da fase no volume.

A fração volumétrica de cada fase deve respeitar a seguinte equação de restrição:

$$\sum_{k=1}^2 \beta_k = 1. \quad (4.4)$$

O modelo VOF é baseado em assumir que o escoamento é formado por um único fluido com propriedades variáveis. Logo todas as fases do escoamento estão submetidas ao mesmo campo de pressão e velocidade e em

consequência, somente um conjunto de equações de conservação é utilizado para descrever a dinâmica do escoamento. A função marcadora  $\beta$ , indicadora da região ocupada por cada fluido, é utilizada para identificar as propriedades termofísicas do fluido:

$$\rho = \sum_{k=1}^2 \beta_k \rho_k, \quad (4.5)$$

$$\mu = \sum_{k=1}^2 \beta_k \mu_k. \quad (4.6)$$

Note que, de acordo com este método, nos volumes de controle que apresentam uma interface, as propriedades do fluido são avaliadas como propriedades médias da mistura no volume.

Assumindo fluidos Newtonianos, a equação de conservação de quantidade de movimento linear que governa o escoamento bifásico pode ser expressa na forma conservativa como (Prosperetti & Tryggvason, 2007),

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\rho \bar{V}) + \bar{\nabla} \cdot (\rho \bar{V} \bar{V}) = \\ = -\bar{\nabla} p + \rho \bar{g} + \bar{\nabla} \cdot \left[ \mu (\bar{\nabla} \bar{V} + \bar{\nabla} \bar{V}^T) - \frac{2}{3} \mu \bar{\nabla} \cdot \bar{V} \mathbf{I} \right] + \sigma \kappa \delta(n) \hat{n} \end{aligned} \quad (4.7)$$

onde  $\rho$  é a massa específica,  $\bar{V}$  o vetor velocidade,  $p$  a pressão,  $\rho \bar{g}$  é a força gravitacional, atuando sobre os fluidos por unidade de volume,  $\mathbf{I}$  é o tensor de identidade,  $\sigma$  é a tensão interfacial,  $\kappa$  e  $\delta(n)$  são respectivamente, a curvatura e a função delta aplicada na interface e  $\hat{n}$  é o vetor normal à interface. O último termo da Eq. (4.7) é introduzido de forma a impor a condição de contorno de tensões normais na interface, i.e., representa o salto de pressão através da interface, devido à tensão interfacial entre as fases.

Para avaliar a curvatura da interface, pode-se utilizar o modelo CSF (*Continuum Surface Force*) proposto por Brackbill et al. (1992), sendo a curvatura determinada a partir da normal à interface:

$$\kappa = \bar{\nabla} \cdot \hat{n}. \quad (4.8)$$

O vetor normal à interface da fase  $k$  pode ser obtido a partir da função marcadora  $\beta_k$  assim como a curvatura da interface, de acordo com:

$$\hat{n}_k = \bar{\nabla} \beta_k, \tag{4.9}$$

$$\kappa = \bar{\nabla} \cdot \frac{\bar{\nabla} \beta_k}{|\bar{\nabla} \beta_k|}. \tag{4.10}$$

Vale mencionar que, como as propriedades de cada fluido são constantes, os termos associados as variações das propriedades somente atuam nos volumes de controle que apresentam a interface.

### 4.1.2 Condições de contorno

O esquema da Figura 4.1 ilustra a configuração do escoamento estratificado em um canal plano, de comprimento  $L^*$  e altura de seção transversal  $H^*$ . A altura de equilíbrio da interface é  $h_{eq}^*$  e  $\bar{g}^*$  é o vetor aceleração da gravidade. Dois tipos de análises são realizados, uma para avaliar a evolução no domínio temporal (Fig. 4.1a) e outra no domínio espacial (Fig. 4.1b). Na primeira análise (Fig. 4.1a) canais com diferentes comprimentos são utilizados. Para estudar a evolução de ondas individuais na condição  $L^* = \lambda^*$ , canais de comprimento  $L^* < 30H^*$  são considerados. No caso da evolução de duas ou mais ondas, canais com comprimento  $L^* = 30H^*$  são os escolhidos. Para a análise de evolução espacial das perturbações, o comprimento  $L^*$  é definido igual a  $30H^*$  (Fig. 4.1b).

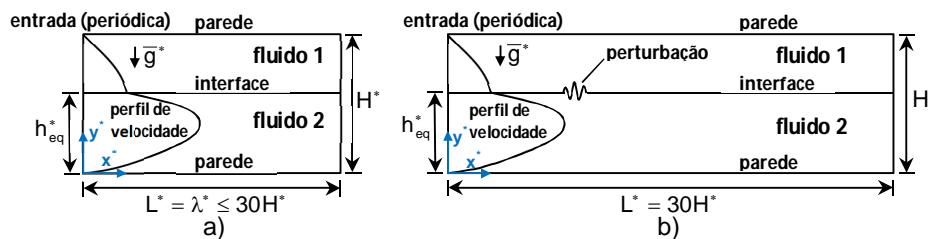


Figura 4.1: Configuração do escoamento. a) Cenário temporal. b) Cenário espacial.

Nos canais utilizados, cenário temporal e espacial, especifica-se a condição periódica entre entrada e saída do domínio. Para o estudo das ondas individuais, essa condição garante a evolução temporal exata de um modo instável com comprimento de onda  $\lambda^* = L^*$  e/ou seus harmônicos. Complementarmente, neste mesmo cenário, o canal com  $L^* = 30H^*$ , abre a

possibilidade que ondas com comprimento maior das duas (ou mais) ondas perturbadas possam aparecer.

Por conveniência a pressão pode ser definida como

$$p^*(\vec{r}^*) = \overline{p^*(x^*)} + \tilde{p}^*(\vec{r}^*), \quad (4.11)$$

onde  $\overline{p^*(x^*)}$  é a pressão média em uma seção transversal e  $\tilde{p}^*(\vec{r}^*)$  é flutuação da pressão em torno deste valor.  $x^*$  é a direção principal do escoamento e  $\vec{r}^*$  é o vetor posição. Considerando que a queda da pressão média na direção principal do escoamento (direção  $x^*$ ) é muito maior do que a queda da flutuação nesta direção, tem-se

$$\frac{\partial p^*(\vec{r}^*)}{\partial x^*} \approx \frac{d\overline{p^*(x^*)}}{dx^*} = -\gamma_0^*, \quad (4.12)$$

onde  $-\gamma_0^*$  é a queda de pressão na direção principal do escoamento.

Para a utilização da condição de contorno periódica, a pressão é definida como

$$p^*(\vec{r}^*) = -\gamma_0^* x^* + \tilde{p}^*(\vec{r}^*), \quad (4.13)$$

onde  $\tilde{p}^*(\vec{r}^*)$  é a pressão periódica. A queda de pressão  $-\gamma_0^*$  é responsável por manter o escoamento base permanente, hidrodinamicamente desenvolvido. O mesmo parâmetro é mantido para a análise transiente. Adicionalmente, a condição de contorno periódica impõe igualdade entre entrada e saída de todas as propriedades de interesse.

Na Figura 4.1b, o caso espacial é uma extensão do caso temporal considerando um comprimento bem maior de canal, isto é, utilizou-se  $L^* = 30H^*$ , o que permite avaliar o deslocamento espacial das perturbações. Visando representar um canal ainda mais comprido do que  $30H^*$ , empregou-se também a condição de contorno periódica entre entrada e saída. Esta estratégia permite reduzir o custo computacional, pois com um domínio menor, os requisitos de malha são menores, o que também implica em redução do tempo computacional para obtenção da solução. As simulações realizadas nesta tese apresentaram um alto custo computacional, devido ao alto tempo de simulação necessário para

determinar o escoamento base e as taxas de amplificação (ver seção 5.6, Tempos de processamento). Nos casos de análise do problema da estabilidade do ponto de vista espacial, estudou-se a evolução de um pacote de ondas (*wavepacket*).

Nos dois casos, condições de não deslizamento nas paredes superior e inferior complementam as condições do modelo.

### 4.1.3 Condição inicial

A condição inicial corresponde com a condição de escoamento totalmente desenvolvido, sem nenhuma perturbação, chamado de escoamento base. Esta condição é obtida numericamente nos domínios descritos nas condições de contorno, mas no regime permanente. Para tal efeito, a altura da interface de equilíbrio " $h_{eq}^*$ " e a queda de pressão através do canal,  $dp^*/dx^* = -\gamma_0^*$ , da solução analítica são usadas como "condição inicial prévia" para a obtenção do escoamento base permanente. A solução é considerada apropriada quando a velocidade adimensional normal à parede  $v = v^*/U_m^*$ , que analiticamente é zero, numericamente atinja valores inferiores a  $\pm 5 \times 10^{-7}$ . Aqui é importante ressaltar a necessidade da garantia de resíduos bem baixos para o componente normal de velocidade, visando permitir analisar a evolução de perturbações infinitesimais, i.e., da ordem (adimensional) de  $10^{-5}$ . Os parâmetros adimensionais mencionados são definidos a seguir.

### 4.1.4 Parâmetros do problema e adimensionalização

No presente trabalho, as equações governantes assim como outros parâmetros que serão referenciados ao longo da tese são utilizadas na forma adimensional (caso contrário, será devidamente informado). As variáveis dimensionais são definidas como velocidade  $V^*$ , pressão  $p^*$ , tempo  $t^*$ , e as coordenadas espaciais  $x^*$  e  $y^*$ . Os parâmetros característicos considerados para adimensionalizar o problema são velocidade de mistura  $U_m^*$ , distância entre as placas  $H^*$ , e as propriedades do fluido menos denso: massa específica  $\rho_1^*$  e viscosidade  $\mu_1^*$ , tal que

$$\bar{V} = \frac{\bar{V}^*}{U_m^*}, \quad p = \frac{p^*}{\rho_1^* U_m^{*2}}, \quad x = \frac{x^*}{H^*}, \quad y = \frac{y^*}{H^*}, \quad t = \frac{t^* U_m^*}{H^*}. \quad (4.14)$$

$$\rho_k = \frac{\rho_k^*}{\rho_1^*}, \quad \mu_k = \frac{\mu_k^*}{\mu_1^*} \quad (4.15)$$

A velocidade de mistura  $U_m^*$ , é definida como a soma das velocidades superficiais das fases,  $U_m^* = U_{s1}^* + U_{s2}^*$ . As velocidades superficiais são definidas como a razão da vazão volumétrica (da fase k)  $\dot{V}_k^*$  por área da seção transversal  $A_{rea}^*$ , tal que  $U_{sk}^* = \dot{V}_k^* / A_{rea}^* = \bar{U}_k^* \beta_k$ , sendo  $\bar{U}_k^*$  a velocidade média da fase k.

O campo do escoamento plano completamente desenvolvido é governado pelas razões de propriedades  $\chi$  e  $\eta$ ,

$$\chi = \frac{\rho_2^*}{\rho_1^*}, \quad \eta = \frac{\mu_2^*}{\mu_1^*} \quad (4.16)$$

assim como os números de Reynolds  $Re$ , Weber  $We$  e Froude  $Fr$ , definidos como:

$$Re = \frac{\rho_1^* U_m^* H^*}{\mu_1^*}, \quad (4.17)$$

$$We = \frac{\rho_1^* U_m^{*2} H^*}{\sigma^*}, \quad (4.18)$$

$$Fr = \frac{U_m^*}{\sqrt{g^* H^*}}. \quad (4.19)$$

Nas definições anteriores,  $g^*$  é aceleração da gravidade e  $\sigma^*$  tensão interfacial.

Para analisar a instabilidade temporal e espacial do escoamento de canal plano na presente tese, os seguintes parâmetros foram definidos (Gada & Sharma, 2012; Rodríguez, 2017):

$$\chi = 1,218 \quad (4.20)$$

$$\eta = 0,1874 \quad (4.21)$$



$$Re = 241,5 \quad (4.22)$$

$$We = 9,22 \quad (4.23)$$

$$Fr = 3,017 \quad (4.24)$$

Esses parâmetros definem um escoamento água-óleo em um canal plano com diâmetro hidráulico pequeno.

Ao longo da tese, parâmetros **adimensionais** como comprimento do canal  $L$ , altura de equilíbrio  $h_{eq}$ , amplitude de onda  $A$ , comprimento de onda  $\lambda$ , número de onda  $\alpha$ , frequência angular  $\omega$ , e velocidade da flutuação  $v'$  (da velocidade normal à parede) serão comumente utilizados. Para referência eles são definidos da seguinte forma,

$$L = \frac{L^*}{H^*}, \quad h_{eq} = \frac{h_{eq}^*}{H^*}, \quad A = \frac{A^*}{H^{*2}}, \quad \lambda = \frac{\lambda^*}{H^*} \quad (4.25)$$

$$\alpha = H^* \alpha^*, \quad \omega = \frac{H^*}{U_m^*} \omega^*, \quad v' = \frac{v'^*}{U_m^*}, \quad (4.26)$$

onde os parâmetros com estrela sobrescrita representam os respectivos parâmetros dimensionais.

Para o presente estudo, dois casos com diferente grau de instabilidade são considerados. De acordo com os parâmetros prescritos, a condição do escoamento base totalmente desenvolvido, em cada caso, foi alcançada quando a velocidade máxima  $U_{max}$  (adimensional) atingiu um valor de 1,744 e 1,783. Estes casos são referenciados ao longo da tese através dos valores da sua altura de equilíbrio adimensional  $h_{eq}=0,558$  e  $h_{eq}=0,7$ , respectivamente, sendo o último o mais instável. Esses valores adimensionais foram utilizados anteriormente nos trabalhos de Gada & Sharma (2012) e Rodríguez (2017). No presente trabalho, a solução numérica correspondente ao regime permanente é o escoamento base, e é utilizada como condição inicial para as análises dos casos transientes, obtidos com a introdução de perturbações na interface dos dois fluidos.

#### 4.1.5

#### **Caracterização do escoamento em um mapa de padrão de escoamento**

Mapas de padrão são úteis para orientar na seleção dos casos a serem

analisados, isto é, selecionar condições para serem estudadas correspondentes a um estado na faixa de transição estratificado-ondulado ou estratificado-golfada. Os mapas de padrão mais utilizados são os desenvolvidos por Taitel & Dukler (1976) e Barnea (1987). No entanto, estes mapas são válidos para sistema líquido-gás, e são inadequados nos sistemas líquido-líquido (Trallero et al., 1997; Xu, 2007). De acordo com Matsubara & Naito (2011) alguns padrões observados nos sistemas líquido-gás se assemelham a padrões que apresentam dispersões de óleo e água (Trallero et al., 1997).

A base teórica na qual esses mapas mencionados acima foram desenvolvidos não considera escalas nas quais efeitos capilares têm influência forte, tornando estes mapas inadequados para o presente estudo. Nesse contexto selecionou-se o mapa utilizado por Gada & Sharma (2012) para definir os casos a serem analisados neste trabalho. Na Figura 4.2 é mostrado o mapa experimental de Wegmann & von Rohr (2006) para sistema água-óleo em um duto de 5.6 mm de diâmetro, e os resultados numéricos de Gada & Sharma (2012) para canal plano. Aqueles trabalhos têm condições iguais de diâmetros hidráulicos e propriedades dos fluidos semelhantes ao presente trabalho.

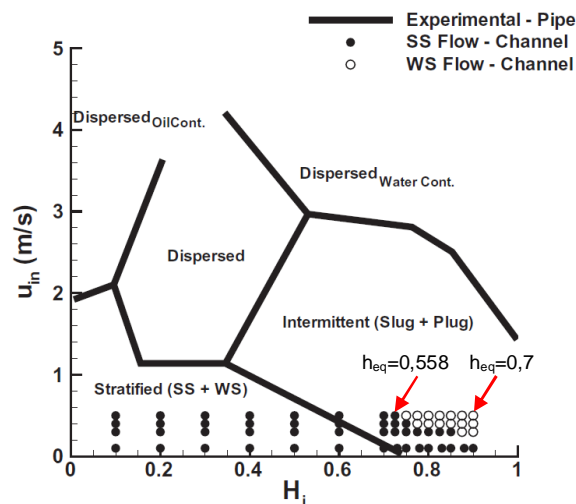


Figura 4.2: Mapa de padrão de escoamento de sistemas água-óleo equivalentes. Dados experimentais obtidos em duto de diâmetro de 5,6mm (Wegmann & von Rohr, 2006) e numéricos em canal com altura de 2,8mm (Gada & Sharma, 2012).  $H_i$  representa a altura da fase aquosa na entrada do canal longo avaliado por Gada & Sharma (2012), entanto que  $U_{in}$  é a velocidade constante imposta na entrada do mesmo canal para cada uma das fases.

Os pontos indicados no mapa (com setas) correspondem aos casos considerados na presente tese. Mesmo que os resultados numéricos de Gada & Sharma (2012) somente apresentaram os padrões estratificado e ondulado, o

mapa experimental sugere que grande parte daqueles resultados numéricos corresponderiam a escoamento intermitente em tubulações. Essa diferença, pode ser devido a importância dos efeitos de parede ou ao fato do domínio simulado por Gada & Sharma ser restrito. A priori, não é possível encontrar uma resposta para essa questão. Os resultados que serão descritos ao longo do presente trabalho contribuem para responder essa dúvida.

#### 4.1.6 Solução analítica do escoamento base

O escoamento base analítico laminar (especialmente a altura de equilíbrio "h<sub>eq</sub>" e a queda de pressão "dp/dx"), necessário para obter a condição inicial numérica pode ser obtido das equações de Navier-Stokes. Aqui vamos utilizar as variáveis adimensionais definidas na seção 4.1.4. Considerando as hipóteses de escoamento hidrodinamicamente desenvolvido entre duas placas paralelas, em regime permanente, com pressão uniforme na seção transversal, fluidos com propriedades constantes, obtém-se a seguinte equação adimensional

$$0 = 1 + \frac{\mu_k}{\gamma_o} \frac{1}{\text{Re}} \frac{d^2 U_k}{dy^2}. \quad (4.27)$$

onde  $\gamma_o = -\partial p / \partial x = \gamma_o^* H^* / \rho_1^* U_m^{*2}$ ,  $\mu_1 = 1$  e  $\mu_2 = \eta$ .

Integrando em cada região para cada fluido, e aplicando as condições de contorno de não deslizamento nas paredes e continuidade de velocidades e de tensões na interface, o perfil adimensional da velocidade para o fluido mais leve, na parte superior do canal é:

$$U_1 = \frac{\gamma_o \text{Re}}{2} \left[ (1 - y^2)_+ + \Pi (y - 1) \right], \quad (4.28)$$

e para o mais pesado, na parte inferior é

$$U_2 = \frac{\gamma_o \text{Re}}{2 \eta} \left[ -y^2 + \Pi y \right], \quad (4.29)$$

onde,

$$\Pi = \frac{\eta + (1 - \eta) h_{eq}^2}{\eta + (1 - \eta) h_{eq}}. \quad (4.30)$$

Conhecendo o perfil de velocidade, as velocidades superficiais de cada fluido  $U_{s1}$  e  $U_{s2}$  podem ser obtidas a partir das vazões volumétricas resultando,

$$U_{s1} = \frac{\gamma_o \text{Re}}{2} \left[ \frac{2}{3} + \frac{h_{eq}^3}{3} - h_{eq} - \frac{(1-h_{eq})^2}{2} \Pi \right] \quad (4.31)$$

$$U_{s2} = \frac{\gamma_o \text{Re}}{2 \eta} \left[ -\frac{h_{eq}^3}{3} + \frac{h_{eq}^2}{2} \Pi \right] \quad (4.32)$$

A razão das velocidades superficiais pode ser obtida em função dos parâmetros do problema, como

$$\frac{U_{s1}}{U_{s2}} = \eta \frac{\left[ 2(2 - 3h_{eq} + h_{eq}^3) - 3(1-h_{eq})^2 \Pi \right]}{h_{eq}^2 [3 \Pi - 2 h_{eq}]} \quad (4.33)$$

Conhecidas as velocidades superficiais  $U_{s1}$  e  $U_{s2}$ , o método de Bisseção (Chapra & Canale, 2006) é utilizado para obter a altura de equilíbrio  $h_{eq}$ , através da Eq. 4.33. Os dois valores de entrada escolhidos para esse método foram  $0,1H$  e  $H$ , excluindo assim as raízes fora da altura do canal e as singularidades. Logo, a queda de pressão adimensional ( $\gamma_o = -\partial p / \partial x$ ) pode ser obtida através da Eq. 4.32 (ou 4.31),

$$\gamma_o = \frac{1}{\text{Re}} \frac{12 \eta U_{s2}}{h_{eq}^2 [3 \Pi - 2 h_{eq}]} \quad (4.34)$$

#### 4.1.7 Perturbações controladas na interface

A estabilidade temporal e espacial do escoamento bifásico estratificado é avaliada através da introdução de perturbações artificiais na interface entre os fluidos, sendo necessário definir as funções que serão utilizadas para esse fim.

Uma variável qualquer  $q$  (velocidade normal, pressão, etc) de um escoamento pode se dividir em uma componente média independente do tempo  $\bar{q}$  e uma componente variável (perturbação)  $q'$  tal que,

$$q(x, y, z, t) = \bar{q}(x, y, z) + q'(x, y, z, t). \quad (4.35)$$

onde  $x$ ,  $y$  e  $z$  são as coordenadas espaciais e  $t$ , a variável tempo.

Para o caso particular de escoamentos planos, a análise local de estabilidade linear considera perturbações  $q'$  na forma,

$$q'(x, y, t) = \hat{q}(y) \exp[i(\alpha x - \omega t)]. \quad (4.36)$$

onde a função amplitude  $\hat{q}$  é complexa e representa a autofunção do problema de autovalores do sistema de equações de Orr-Sommerfeld (O-S). A parte exponencial contém a informação relacionada com o número de onda  $\alpha$  e a frequência angular  $\omega$ . A natureza real ou complexa desses termos depende do cenário considerado (temporal ou espacial).

Uma perturbação instantânea pode ser definida como

$$q'(x, y) = \hat{q}(y) \left[ \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} x\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda} x\right) \right]. \quad (4.37)$$

Na perturbação introduzida, podemos omitir a informação relacionada com a fase (componente imaginária) e em consequência,

$$q'(x, y) = \hat{q}_r(y) \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} x\right) \quad (4.38)$$

A função amplitude  $\hat{q}_r$  (real) pode ser assumida constante ou sendo uma função próxima da autofunção O-S. Uma vez que as funções cosseno e seno são equivalentes, a equação 4.38 pode ser utilizada na sua forma equivalente em função de senos, de acordo com a conveniência.

Para o caso de interesse aqui, a perturbação é uma força de corpo  $f_y$  na forma de uma onda (ou ondas) senoidal que excita a interface e é imposta na equação de quantidade de movimento em  $y$ . Esta força é incluída no simulador através de um código UDF (*User-Defined Function*) mostrado no Apêndice A.

Para o caso temporal, a perturbação é instantânea, i.e., é introduzida somente em um determinado instante de tempo  $\delta(t)$ .

A força de corpo  $f_y$  é definida de duas formas segundo a Eq. 4.38, a primeira forma ( $\hat{q}_r = A = \text{cte}$ ),

$$f_y = A \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda} x\right) (1 - \bar{\beta}_1) \bar{\beta}_1 \quad (4.39)$$

Lembrando que  $\bar{\beta}_1$  é a fração volumétrica da fase 1, tem-se que o termo  $(1 - \bar{\beta}_1)\bar{\beta}_1$  garante que o forçamento só será efetivo na interface, i.e., nos volumes de controle que possuem a interface.

A segunda forma de introdução da perturbação é realizada utilizando  $\hat{Q}_r \neq \text{cte}$ , no sentido de especificar uma perturbação semelhante com a forma da autofunção da análise O-S como já foi indicado,

$$f_y = A \left[ \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda} x\right) + \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda} x - \frac{\pi}{2}\right) \right] (1 - \bar{\beta}_1)\bar{\beta}_1, \quad (4.40)$$

neste caso, A é a amplitude constante da força de corpo cujo valor é determinado em função da ordem requerida para a amplitude inicial da perturbação. O comprimento de onda  $\lambda$  do modo avaliado é igual ao comprimento L do canal.

No caso espacial, a função para gerar um pacote de ondas é da forma,

$$f_y = A \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda_{\text{int}}} x\right) \cos(\omega_r t) w(t) (1 - \bar{\beta}_1)\bar{\beta}_1$$

$$H \leq x \leq \left(1 + \frac{\lambda_{\text{int}}}{2}\right)H \quad 0 \leq t \leq t_{\text{fin}} = \frac{2\pi n_w}{\omega_r} \quad (4.41)$$

onde a constante A é amplitude definida de forma similar ao caso temporal. A frequência angular fundamental  $\omega_r$  é igual à frequência angular do modo avaliado. Neste caso um trem de ondas é gerado perturbando um domínio de comprimento  $0,5\lambda_{\text{int}}$ , que é obtido considerando a velocidade interfacial do escoamento base  $U_{\text{int}}$  e a frequência  $\omega_r$ , na forma  $\lambda_{\text{int}} = U_{\text{int}}(2\pi/\omega_r)$ . Para este domínio espacial é considerado meia onda senoidal para suavizar o deslocamento vertical da interface, especialmente no início e fim deste domínio, reduzindo perturbações não desejadas. No mesmo sentido, uma função janela  $w(t)$  é utilizada para fazer a mesma operação no domínio do tempo. Selecionou-se a função janela de Blackman-Nuttall (Nuttall, 1981) definida como,

$$w(t) = \left( a_0 - b_0 \cos\left(\frac{2\pi t/dt}{t_{\text{fin}}/dt - 1}\right) + c_0 \cos\left(\frac{4\pi t/dt}{t_{\text{fin}}/dt - 1}\right) - d_0 \cos\left(\frac{6\pi t/dt}{t_{\text{fin}}/dt - 1}\right) \right) \quad (4.42)$$

onde,

$$a_0 = 0,3635819; b_0 = 0,4891775; c_0 = 0,1365995; d_0 = 0,0106411. \quad (4.43)$$

Finalmente, o tempo final  $t_{fin}$  de duração da perturbação é definido pela relação  $2\pi n_w/\omega_r$ , onde  $n_w$  representa a quantidade de ondas consideradas para formar o pacote e  $dt$  é o passo de tempo utilizado na simulação.

## 4.2 Modelo Numérico

A determinação do escoamento bifásico com o método VOF pode ser realizada utilizando os procedimentos clássicos de solução de escoamento monofásico. No presente trabalho, selecionou-se o *software* comercial ANSYS Fluent® versão 15.0. Este *software* é baseado no método de volumes finitos (Patankar, 1980), onde o domínio computacional é subdividido em volumes de controle e as equações de conservação são integradas em cada volume. Os fluxos convectivos e difusivos das variáveis de interesse são então aproximados em função dos valores armazenados nos nós vizinhos às interfaces.

Visando avaliar a amplificação de perturbações infinitesimais na interface entre fluidos, é necessário obter uma solução com alta precisão. Desta forma, foram utilizados os esquemas de maior ordem disponíveis no *software*, os quais são descritos a seguir.

Como apresentado na seção 4.1, o conjunto de equações a ser resolvido, compreende a equação de conservação de massa de uma das fases (ou fração volumétrica), conservação de quantidade de movimento linear e conservação de massa global. A metodologia empregada pela ANSYS Fluent utiliza esquema de malha colocada, i.e., todas as grandezas são armazenadas nos centros dos volumes de controles, e interpolações são necessárias para avaliar estas grandezas nas faces dos volumes de controle.

### 4.2.1 Discretização da equação da fração volumétrica

A descrição da interface entre os fluidos é obtida através da solução da equação de conservação de massa de uma das fases.

A discretização temporal da Eq. 4.3 é realizada de forma totalmente implícita, resultando na seguinte expressão para a fase secundária

$$\frac{\beta_2^{n+1} \rho_2^{n+1} - \beta_2^n \rho_2^n}{\Delta t} \nabla + \sum_f (\rho_2^{n+1} \dot{V}_f^{n+1} \beta_{2,f}^{n+1}) = 0, \quad (4.44)$$

onde  $n$  é o valor no instante de tempo atual  $t$ ,  $n+1$  é o valor no seguinte instante de tempo ( $t+\Delta t$ ), sendo  $\Delta t$  o passo de tempo.  $\nabla$  é o volume da célula  $\dot{V}_f$  é o fluxo volumétrico através da face baseado na velocidade normal.  $\beta_2$  e  $\rho_2$  correspondem à fração volumétrica e massa específica da fase secundária armazenadas no interior do volume de controle. O subscrito  $f$  indica as mesmas grandezas avaliadas nas faces do volume de controle.

Algumas dificuldades são encontradas no tratamento numérico da Eq. (4.44), i.e., determinação de  $\beta_{2,f}$ , devido ao fato da equação ser puramente convectiva (ou advectiva), pois a presença de difusão numérica é mais crítica. A determinação em degrau de  $\beta$  pode ser contaminada pela difusão numérica, o que pode resultar em uma interface que ocupe diversas células numéricas. Esquemas de primeira ordem não devem ser utilizados. Outra dificuldade consiste em localizar a interface no interior dos volumes de controle (reconstrução da interface). As diferenças dos algoritmos VOF propostos na literatura se distinguem no tratamento das rotinas e métodos usados para resolver essas dificuldades (Ivey e Moin, 2012). O método VOF reconstrói a interface a partir do campo  $\beta$ .

No presente trabalho, o *Compressive scheme* (Weller, 2008) foi utilizado, o qual é um esquema de reconstrução de interface de segunda ordem baseado em um limitador de inclinação. É uma forma de esquema TVD (*Total Variation Diminishing*) (Harten, 1983). O método é usado na discretização implícita da fração volumétrica e na obtenção da interface entre os fluidos. A função que define o esquema pode ser escrita como,

$$\beta_f = \beta_d + 2\nabla\beta_d \quad (4.45)$$

onde  $\beta_f$  é a fração volumétrica do fluido avaliada na face,  $\beta_d$  é a fração volumétrica do fluido na célula doadora, e  $\nabla\beta_d$  é o valor do gradiente de  $\beta_d$ . O bom desempenho deste método permite obter interfaces bem definidas.

A equação 4.44 é solucionada iterativamente para a fase secundária a cada passo de tempo. E a fração volumétrica da fase primária é obtida de

$$\beta_1 = 1 - \beta_2 \quad (4.46)$$



## 4.2.2

### Discretização da equação de quantidade de movimento linear

Os componentes longitudinal e vertical de velocidade são determinados a partir da equação de conservação de quantidade de movimento. Por exemplo, a equação para o componente axial  $u$  é

$$a_p u_p = \sum_{nb} a_{nb} u_{nb} + \sum p_f A \cdot \vec{i} + S \quad (4.47)$$

onde o subscrito  $p$  refere-se ao ponto nodal central,  $nb$  são as contribuições dos volumes vizinhos e  $f$  refere-se as faces dos volumes de controle.

A pressão  $p_f$  na face é avaliada utilizando os coeficientes da equação de quantidade de movimento linear,

$$p_f = \frac{\frac{P_{c0}}{a_{p,c0}} + \frac{P_{c1}}{a_{p,c1}}}{\frac{1}{a_{p,c0}} + \frac{1}{a_{p,c1}}} \quad (4.48)$$

No presente caso, este procedimento é adequado devido a que não é esperada uma elevada variação de pressão entre os pontos centrais dos volumes de controle onde as pressões  $P_{c0}$  e  $P_{c1}$  são obtidas.

A seguir, detalhes da determinação da discretização espacial e temporal, necessária para os cálculos dos coeficientes, são informados.

#### 4.2.2.1

##### Discretização espacial

O esquema de discretização espacial de terceira ordem MUSCL (*Monotone Upstream-Centered Schemes for Conservation Laws*) de Van Leer (1979), foi utilizado para a equação de quantidade de movimento. Este esquema é resultado da fusão de um esquema de diferença central e um esquema *upwind* de segunda ordem como,

$$\phi_f = \theta \phi_{f,CD} + (1 - \theta) \phi_{f,SOU} \quad (4.49)$$

onde

$$\phi_{f,CD} = \frac{1}{2}(\phi_0 + \phi_1) + \frac{1}{2}(\nabla\phi_0 \cdot \bar{r}_0 + \nabla\phi_1 \cdot \bar{r}_1), \quad (4.50)$$

representa o esquema de diferença central clássico e os subscritos 0 e 1 são referidos à células que compartilham a face  $f$ .  $\nabla\phi_0$  e  $\nabla\phi_1$  são os gradientes reconstruídos nas células 0 e 1, respectivamente; sendo  $\bar{r}$  o vetor dirigido do centroide da célula para o centroide da face.  $\theta$  é escolhido de modo a evitar a introdução de novas soluções extremas. A segunda parcela da Eq. (4.49) correspondente ao esquema *Upwind* de segunda ordem

$$\phi_{f,SOU} = \phi + \nabla\phi \cdot \bar{r}, \quad (4.51)$$

onde  $\phi$  é o valor centrado na célula e  $\nabla\phi$  seu gradiente na célula *upstream*. Neste caso,  $\bar{r}$  é o vetor dirigido do centroide da célula *upstream* para o centroide da face.

O esquema MUSCL foi selecionado por ser de terceira ordem e ter potencial para melhorar a precisão espacial para todos os tipos de malhas reduzindo a difusão numérica, fator importante no sentido que tal efeito poderia atenuar o crescimento das perturbações em estudo, e reportar resultados subestimados.

#### 4.2.2.2 Discretização temporal

A discretização temporal da equação de quantidade de movimento foi tratada com um esquema de segunda ordem, onde o termo temporal da equação diferencial é tratado baseado no esquema de *backward differences* (Chapra & Canale, 2006), sendo definido por,

$$\frac{3\phi^{n+1} - 4\phi^n + \phi^{n-1}}{2\Delta t} = F(\phi^{n+1}) \quad (4.52)$$

onde  $\phi$  é uma quantidade escalar,  $n+1$  é o valor no seguinte instante de tempo ( $t+\Delta t$ ),  $n$  é o valor no instante de tempo atual, já  $n-1$  o valor no instante de tempo prévio ( $t-\Delta t$ ). A função  $F(\phi)$  representa e incorpora a discretização espacial descrita na seção anterior sendo tratada de forma implícita, i.e., é avaliada no instante de tempo futuro  $n+1$ , de forma a garantir estabilidade de solução.

### 4.2.3

#### Discretização da equação de continuidade global

A equação de conservação de massa, Eq. 4.2, integrada em um volume de controle resulta em

$$\frac{\rho^{n+1} - \rho^n}{\Delta t} \forall + \sum_f \rho_f \dot{\forall}_f = 0. \quad (4.53)$$

Esta equação é utilizada para determinar a pressão. Dessa forma, os valores de fluxo de massa  $\rho_f \dot{\forall}_f$  nas faces dos volumes de controle são determinados utilizando uma média ponderada das equações discretizadas de quantidade de movimento, usando um procedimento semelhante ao descrito por Rhie e Chow (1983), de forma que o sistema resultante não seja instável, i.e., não apresente o problema do “tabuleiro de xadrez”, isto é, campo uniforme de velocidade na presença de um campo oscilatório de pressão. Logo, o fluxo de massa pode ser obtido de

$$\rho_f \dot{\forall}_f = \hat{J}_f + d_f(p_0 - p_1) \quad (4.54)$$

onde  $\hat{J}_f$  possui a influência das velocidades vizinhas à célula e  $d_f$  é relacionado com o valor médio do coeficiente  $a_p$  da equação de conservação de quantidade de movimento, Eq. 4.47, das células vizinhas.

### 4.2.4

#### Acoplamento da pressão - velocidade

O acoplamento pressão - velocidade foi realizado de forma implícita mediante um algoritmo que resolve de forma acoplada o sistema de equações que compreende as equações de quantidade de movimento linear e continuidade. O acoplamento totalmente implícito é alcançado através da discretização implícita do gradiente de pressão nas equações de quantidade de movimento e na discretização implícita do fluxo de massa, incluindo os termos de dissipação de pressão de Rhie-Chow (Rhie & Chow, 1983).

Uma vez que as equações de quantidade movimento linear e de continuidade são resolvidas de forma acoplada, a razão de convergência melhora significativamente comparada com outros algoritmos. Como vantagens o algoritmo acoplado é robusto e apresenta desempenho superior na

modelagem de escoamentos permanentes, sendo isso importante para a obtenção do escoamento base.

#### **4.2.5 Tratamento do sistema algébrico**

Para resolver o sistema linear de equações algébricas, resultante da discretização de equações de conservação, foi empregado o método Gauss Seidel linha por linha acoplado com o algoritmo algébrico multigrid de correção aditiva AMG (Hutchinson e Raithby, 1986). Este algoritmo é eficiente em malhas não estruturadas porque não precisa rediscritização para gerar equações de nível grosseiro. A vantagem é que não constrói ou armazena malhas grossas e não precisa avaliar fluxos ou termos fontes nos níveis grosseiros, o que facilita acelerar a convergência de resultados.

## 5 Pós-processamento das Simulações Numéricas

O presente capítulo descreve as técnicas utilizadas para o pós-processamento dos dados obtidos com as simulações numéricas. Inicialmente é descrita a metodologia utilizada para a obtenção da localização da interface. Em seguida, descreve-se o procedimento para a análise das flutuações de velocidade e da interface entre os fluidos. Neste estudo, analisou-se dois cenários de estabilidade, a estabilidade temporal e a espacial. Optou-se por descrever o procedimento adotado em cada análise separadamente.

Para analisar a evolução das flutuações do escoamento, utilizou-se a técnica de bicoerência, para estabelecer a interação não linear entre ondas.

Após a apresentação da técnica de pós-processamento, apresenta-se o teste de malha, realizado no cenário da estabilidade linear temporal com aplicação das técnicas correspondentes.

No final do capítulo, algumas das principais conclusões são apresentadas.

### 5.1 Cálculo da Interface

O simulador fornece como resultado, dentre outras coisas, um campo espacial da fração volumétrica ( $\bar{\beta}$ ) de uma das fases para cada instante de tempo simulado. Neste campo espacial, a interface que separa os dois fluidos é difusa e possui valores  $0 < \bar{\beta} < 1$ , tal como se explicou no Capítulo 4 (Modelagem). Para analisar o comportamento da interface do escoamento utilizando, por exemplo, a transformada de Fourier, é necessário primeiro definir a interface como uma função de altura no espaço  $h(x)$ , e/ou no tempo  $h(t)$ . Logo, tal função deve ser composta por um único valor discreto nessa faixa ( $0 < \bar{\beta} < 1$ ). Para a detecção da altura da interface, foi implementado um código em linguagem MATLAB®.

O critério utilizado para definir a interface consistiu em considerar que a interface corresponde a coordenada vertical “y” onde a fração volumétrica é  $\bar{\beta} = 0,5$ . Para obter esta coordenada, realizou-se uma interpolação linear dos

valores de  $\bar{\beta}$  na região da interface. A interface resultante apresenta uma curvatura suave, conforme ilustrado na Figura 5.1.

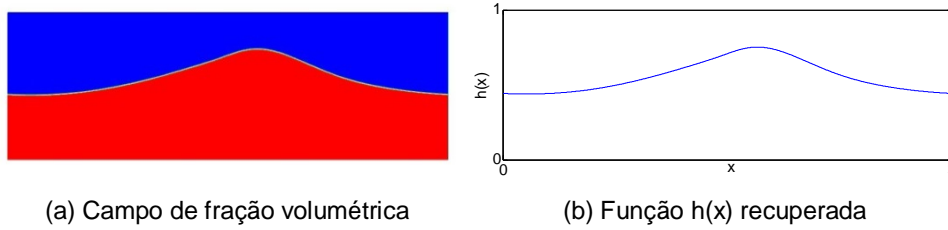


Figura 5.1: Interface entre os fluidos em um instante de tempo.

Se considerarmos capturar a cada instante a interface em alguma posição fixa ao longo do comprimento do domínio  $L$  (coordenada  $x$ ), a interface agora será dada por uma função no tempo  $h(t)$ . As mesmas técnicas podem ser empregadas na decomposição em números de onda, da variação da altura da interface  $h(x)$  ao longo de  $x$ . A decomposição espectral desse sinal é descrita em detalhe no item a seguir.

## 5.2 Análise Linear

Análise espectral permite identificar quais frequências (temporais ou espaciais) compõem um sinal e como a energia está distribuída em tais frequências. Antes de avaliar o comportamento das interfaces nos cenários de instabilidade temporal e espacial, alguns conceitos sobre a análise de sinais empregada neste trabalho são desenvolvidos a seguir.

Utilizando análise de Fourier, um sinal temporal  $x_n$  com período  $T$ , possuindo  $N$  pontos e com média amostral nula, pode ser representado no domínio da frequência através dos coeficientes complexos de Fourier  $X_\kappa$ , que para o caso discreto é (Tropea et al., 2007),

$$X_\kappa = \sum_{n=0}^{N-1} x_n \exp\left(-i \frac{2\pi n \kappa}{N}\right) = \text{FT}[x_n] \quad , \quad \kappa = 0, \dots, N-1. \quad (5.1)$$

De igual maneira, o sinal  $x_n$  pode ser representado como a soma de funções harmônicas tal que,

$$x_n = \frac{1}{N} \sum_{\kappa=0}^{N-1} X_\kappa \exp\left(i \frac{2\pi n \kappa}{N}\right) = \text{FT}^{-1}[X_\kappa] \quad , \quad n = 0, \dots, N-1. \quad (5.2)$$

Os coeficientes espectrais são computados, sendo as frequências igualmente espaçadas, gerando o vetor de frequências  $f_k$  dado por,

$$f_k = \frac{\kappa}{N\Delta t_s}, \quad \kappa = 0, \dots, N-1 \quad (5.3)$$

onde  $\Delta t_s$  é o espaçamento entre cada ponto do sinal  $x_n$ . Assim, o objetivo das operações anteriores se reduz a passar um sinal no domínio do tempo para o domínio na frequência ou vice-versa, utilizando a transformada discreta de Fourier FT ou sua inversa  $FT^{-1}$ , respectivamente. O método pode ser aplicado também para relacionar o domínio no espaço e sua correspondente frequência espacial. Neste caso, os parâmetros temporais são substituídos por equivalentes espaciais, sendo o vetor de frequências espaciais (números de onda) igual a  $2\pi f_k$ . Pela teoria de amostragem de Nyquist-Shannon (Nyquist, 1928), frequências maiores que  $1/(2\Delta T)$ , não podem ser representadas. Logo, o vetor de frequências é limitado a valores de  $\kappa=N/2$ .

As transformadas FT e  $FT^{-1}$  são obtidas utilizando o software MATLAB<sup>®</sup>, que já possui implementado algoritmos FFT (*Fast Fourier Transform*), os quais calculam eficientemente estas transformadas.

Os componentes reais e imaginários dos coeficientes complexos  $X_k$ , fornecem informação do sinal referente à magnitude  $P_k$  e ângulo de fase  $\theta_k$ . Estes podem ser obtidos das relações,

$$P_k = \sqrt{[\text{real}(X_k)]^2 + [\text{imag}(X_k)]^2} = |X_k| \quad (5.4)$$

$$\theta_k = \arctan\left[\frac{\text{imag}(X_k)}{\text{real}(X_k)}\right]. \quad (5.5)$$

É comum representar amplitude do sinal  $A_k$  versus tempo, frequência ou série harmônica, assim o vetor de amplitudes pode ser obtido como,

$$A_k = 2 \left| \frac{X_k}{N} \right| \quad (5.6)$$

Repare que os componentes de  $X_k$  estão arranjados na sequência de  $\kappa=0, \dots, N-1$ ; e, portanto, seus valores correspondem com a sua série harmônica desde o modo fundamental ( $\kappa=1$ ), passando pelo segundo harmônico ( $\kappa=2$ ), o terceiro harmônico ( $\kappa=3$ ), e assim sucessivamente.

O valor nulo de  $X_k$  acontece em ( $k=0$ ) e está relacionado com o componente de frequência nula (ou componente Fourier zero). Neste caso particular  $X_k$  é obtido do sinal  $\hat{X}_n$  que não possui média nula e, portanto, representa um valor constante  $\bar{X}_n$  mais o componente oscilatório utilizado até agora  $X_n$ ,

$$\hat{X}_n = \bar{X}_n + X_n. \quad (5.7)$$

Assim, a amplitude do componente  $X_{k=0}$  na forma,

$$A_{k=0} = \left| \frac{X_{k=0}}{N} \right| = \bar{X}_n \quad (5.8)$$

fornece o valor constante  $\bar{X}_n$ , permitindo avaliar se esse valor permanece constante ou muda como consequência de alguma mudança do escoamento base influenciada pela ação de efeitos não lineares.

Neste presente trabalho, o sinal  $\hat{X}_n$  é a altura da interface  $h$  capturada na simulação, de forma que o sinal  $x_n$  representa esta altura menos a altura média da interface do escoamento base.

Na próxima seção são apresentadas as metodologias empregadas para a análise de estabilidade linear temporal e linear espacial. Para validação da metodologia, optou-se por comparar os resultados com dados obtidos a partir da análise de estabilidade linear teórica Orr-Sommerfeld (O-S), como indicado no Capítulo 2.

### 5.2.1

#### Velocidade de fase e amplificação, cenário de estabilidade temporal

No estudo da estabilidade do escoamento, deseja-se obter inicialmente resultados que sejam comparáveis com a teoria de estabilidade linear. Para isso, a interface do escoamento é excitada com uma força de corpo senoidal no espaço e com comprimento de onda igual ao domínio. Esse forçante é aplicado no instante inicial da simulação ( $t=t_0$ ) e logo em seguida é desligado. A amplitude dessa perturbação é muito pequena para garantir que efeitos não lineares de segunda ordem possam ser desprezados, de modo que os efeitos lineares sejam dominantes. Neste caso é observado que uma única onda com comprimento igual ao domínio (devido à condição periódica imposta entre a entrada e saída) é



dominante o tempo todo ao longo da simulação. No entanto esta onda deve ser decomposta no espectro para uma melhor estrutura da amplitude e da velocidade de fase correspondente ao modo fundamental avaliado. Considerar o pico máximo da onda e sua velocidade de deslocamento no domínio do tempo para a obtenção da taxa de amplificação e da velocidade de fase, respectivamente, não é adequado devido ao fato de que as estimativas considerariam também amplitude e velocidade da soma de harmônicos.

Seguindo o método exposto na seção 5.2, obtém-se o espectro espacial para cada instante de tempo. Como exemplo, a Figura 5.2 mostra o espectro espacial para  $L=\lambda=2$  ( $\alpha=3,1416$ ) no instante  $t=20$ .

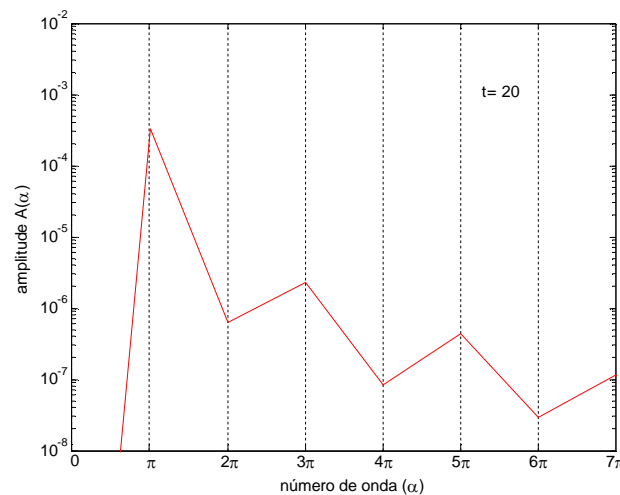


Figura 5.2: Espectro espacial mostrando amplitude versus serie harmônica no instante  $t=20$ . Exemplo corresponde ao caso perturbado com  $\lambda=2$  ( $\alpha=\pi$ ) no domínio  $L=2$ .

Do espectro espacial são obtidas amplitude e fase de cada modo. Esses dados plotados ao longo do tempo (amplitude em escala logarítmica) fornecem segmentos cujas inclinações representam a taxa de amplificação  $\omega_i$  e a frequência angular  $\omega_r$  (velocidade de fase  $c_p = \lambda\omega_r/2\pi$ ), respectivamente.

A faixa de tempo escolhida para a obtenção destes parâmetros deve corresponder com uma faixa de comportamento essencialmente linear das perturbações. Isso é verificado através da análise do comportamento dos harmônicos e das autofunções do modo fundamental O-S.

Como exemplos são apresentados, nas Figuras 5.3 e 5.4, a amplitude e a fase versus tempo, respectivamente. Na Figura 5.4 foi utilizada adicionalmente a função “*unwrap*” implementada no MATLAB® para corrigir a fase que originalmente alterna entre  $[-\pi; \pi]$ , obtendo uma única linha cuja inclinação é a frequência angular  $\omega_r$ .

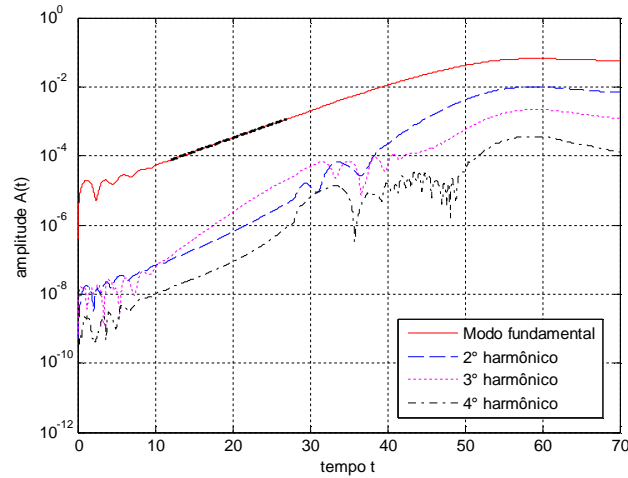


Figura 5.3: Evolução da amplitude da interface perturbada (fundamental e primeiros harmônicos) ao longo do tempo. Taxa de amplificação é obtida na faixa  $12 \leq t \leq 27$ .

Exemplo corresponde ao caso perturbado com  $\lambda=2$  no domínio  $L=2$ .

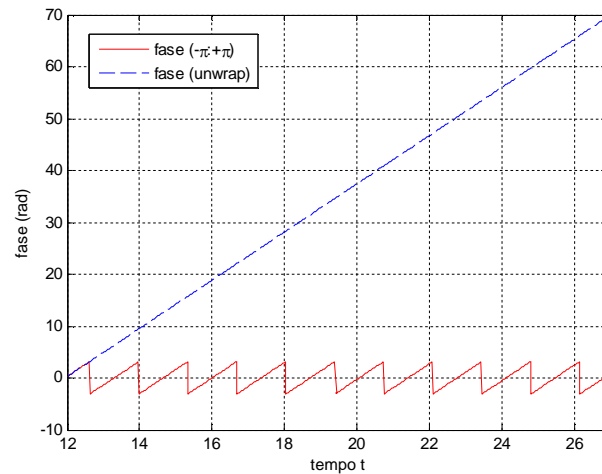


Figura 5.4: Evolução da fase do modo fundamental ao longo do tempo. Frequência angular é obtida da linha tracejada considerada na mesma faixa da taxa de amplificação ( $12 \leq t \leq 27$ ). Exemplo corresponde ao caso perturbado com  $\lambda=2$  no domínio  $L=2$ .

### 5.2.2 Velocidade de fase e amplificação, cenário de estabilidade espacial

Para avaliar a estabilidade espacial é preciso um domínio (dutos ou canais) extenso o suficiente para que as perturbações introduzidas possam exibir um crescimento ou decaimento substancial. A fim de reduzir o alto custo computacional e viabilizar o estudo, um domínio significativamente menor pode ser utilizado, caso seja assumida uma condição de contorno periódica. Neste caso, o comprimento do canal é grande em relação aos comprimentos das ondas,

mas pequeno em relação ao espaço percorrido pelas ondas durante todo o tempo de simulação. No presente trabalho, optou-se por realizar o estudo através da introdução de um pacote de ondas com amplitude inicial infinitesimal que evolui na direção do escoamento. Este pacote é introduzido através de uma força de corpo que atua na interface. Para tal efeito é utilizada uma função cossenoidal com frequência angular  $\omega_r$  que é modificada com a função janela Black-Nuttall, a fim de suavizar os extremos da função, como detalhado no Capítulo 4.

De maneira similar ao espectro espacial (obtido no cenário de estabilidade temporal), o espectro temporal é obtido como exposto no ponto 5.2. Neste último caso, a passagem do pacote de ondas é capturada em uma posição fixa em  $x$ , obtendo-se o sinal temporal correspondente. A Figura 5.5 mostra como exemplo, o espectro temporal para  $\omega=4,6434$  na posição  $x=20$ .

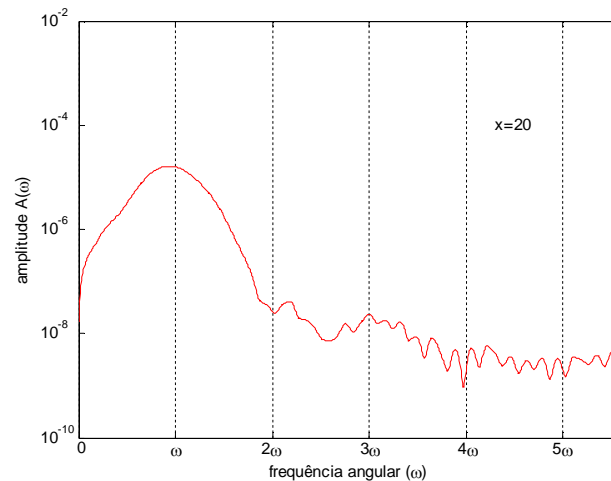


Figura 5.5: Espectro temporal mostrando amplitude versus serie harmônica na posição  $x=20$ . Exemplo corresponde ao caso perturbado com  $\omega=4,6434$  no domínio  $L=30$ .

A taxa de amplificação e velocidade de fase são obtidas com um procedimento que seria a contraparte do executado no caso temporal. Neste caso, o deslocamento do pacote de ondas na direção à jusante é capturado em cada  $x$  ao longo do domínio, se gerando uma série temporal da interface para cada  $x$  avaliado. Amplitude e fase, na frequência fundamental avaliada (e seus harmônicos, quando desejados), são obtidas do espectro de cada série temporal obtida. Estas variáveis são plotadas ao longo de  $x$  (amplitude em escala logarítmica) fornecendo segmentos cujas inclinações representam a taxa de amplificação  $\alpha_i$  e o número de onda  $\alpha_r$  (velocidade de fase  $c_p=\omega_r/\alpha_r$ ).

Similar ao caso temporal, neste caso a faixa espacial escolhida para obter amplificação e número de onda deve corresponder com uma faixa de

comportamento linear. Também aqui a faixa é verificada com o comportamento dos harmônicos e das autofunções do modo fundamental. Como exemplos, a amplitude e a fase versus  $x$  são mostradas nas Figuras 5.6 e 5.7, respectivamente. Na Figura 5.7 a fase é corrigida com a função “*unwrap*”, como no caso temporal.

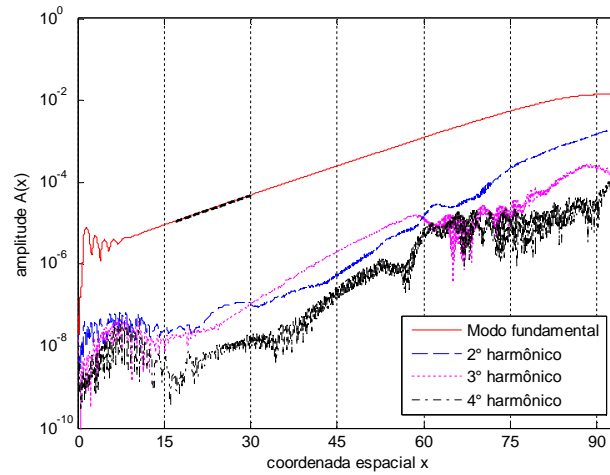


Figura 5.6: Evolução da amplitude da interface perturbada (fundamental e primeiros harmônicos) ao longo de  $x$ . Taxa de amplificação é obtida na faixa  $17 \leq x \leq 30$ . Exemplo corresponde ao caso perturbado com  $\omega=4,6434$  no domínio  $L=30$ .

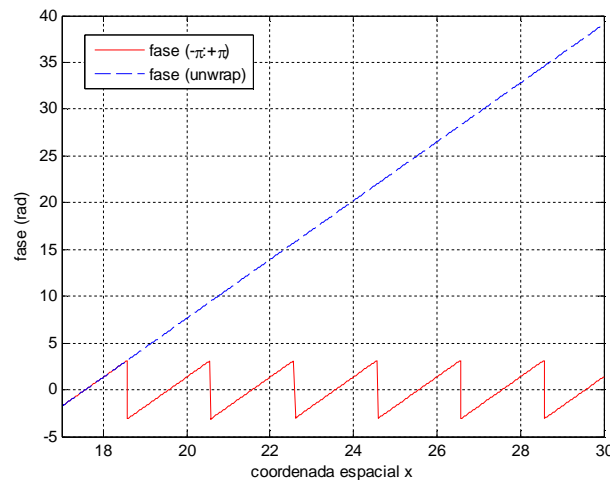


Figura 5.7: Evolução da fase do modo fundamental ao longo do  $x$ . Número de onda é obtida da linha tracejada considerada na mesma faixa da taxa de amplificação (faixa  $17 \leq x \leq 30$ ). Exemplo corresponde ao caso perturbado com  $\omega=4,6434$  no domínio  $L=30$ .

### 5.2.2.1 Velocidade de grupo, cenário de estabilidade espacial

A velocidade de grupo está relacionada ao envelope do pacote de ondas.

Este envelope representa a informação que modula ou dá forma ao trem de ondas. Para obter este sinal uma função de demodulação é necessária, e para tal propósito a transformada de Hilbert é utilizada (Tropea et al., 2007).

Para este caso, a passagem do pacote de ondas é capturada em duas posições fixas  $x_1$  e  $x_2$  (afastadas de um comprimento  $d_{x_1x_2}$ ), resultando em duas séries temporais  $h(t)_1$  e  $h(t)_2$ , respectivamente. Tais séries podem ser expressas como  $x(t)_1$  e  $x(t)_2$ , se subtraímos seus valores médios. A velocidade de grupo é obtida, a partir dos envelopes destes sinais, aplicando-se o método de correlação cruzada. A seguir, detalha-se a aplicação da transformada de Hilbert e o método de correlação cruzada.

A demodulação de um sinal com média nula  $x(t)$ , é obtida através de uma função analítica  $z(t)$  definida como

$$z(t) = x(t) + i\text{TH}\{x(t)\}, \quad (5.9)$$

onde TH é a transformada de Hilbert. A função amplitude de onda do envelope  $A_{\text{env}}(t)$  pode ser obtida de,

$$A_{\text{env}}(t) = |z(t)|. \quad (5.10)$$

No *software* MATLAB<sup>®</sup>, a função Hilbert está implementada e retorna diretamente a função analítica  $z(t)$ . Obtidos os envelopes das duas séries  $x(t)_1$  e  $x(t)_2$ , a velocidade de grupo é obtida através da correlação cruzada entre sinais.

O valor máximo da função de correlação cruzada entre dois sinais temporais fornece uma relação do atraso no tempo, sinônimo do tempo de trânsito das ondas entre as estações de medição. Esta função é definida como (Jelali & Huang, 2010),

$$R_{x_1x_2}(\tau) \approx \begin{cases} \sum_{k=0}^{N-\tau} x_1(k+\tau)x_2(k) \rightarrow \tau \geq 0 \\ R_{x_2x_1}(\tau) \rightarrow \tau < 0 \end{cases} \quad (5.11)$$

Com a função correlação cruzada (FCC) implementada no MATLAB<sup>®</sup>, obtêm-se o valor máximo procurado. Este valor está limitado pela frequência de aquisição de dados  $f_{\text{adq}}$ , que é corrigida ( $f_{\text{adqc}}$ ) ajustando a curva da função FCC para melhorar a resolução entre seus valores discretos (Farias, 2010). Utilizando a função cúbica *spline* (MATLAB<sup>®</sup>) e considerando um fator de 10, o novo valor máximo aumenta a precisão do valor de atraso  $V_{\text{flag}}$ , logo a velocidade de grupo é,

$$C_p = \frac{d_{x1x2} f_{\text{adqC}}}{V_{\text{flag}}}. \quad (5.12)$$

Como exemplo, a Figura 5.8 mostra a função correlação cruzada dos envelopes do pacote de ondas  $x(t)$  que passou pelas posições 1 e 2.

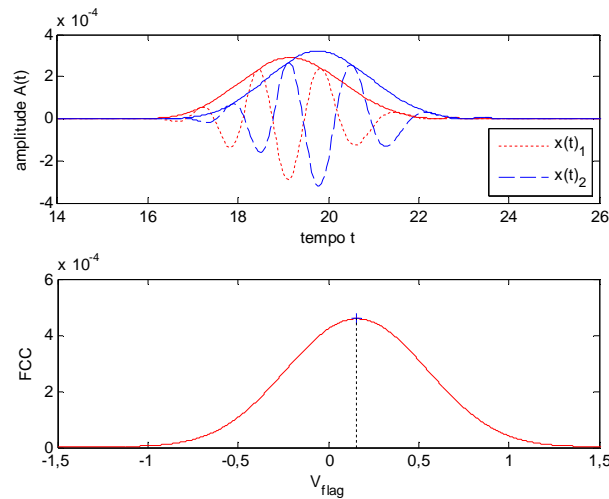


Figura 5.8: Função correlação cruzada dos envelopes dos sinais  $x(t)_1$  e  $x(t)_2$ , obtidas nas posições  $x=29$  e  $x=30$ . Exemplo corresponde ao caso perturbado com  $\omega=4,6434$  no domínio  $L=30$ .

### 5.2.3 Sincronização de fases

Neste estudo, a sincronização de fases entre os componentes espectrais das oscilações da interface, é avaliada através da transformada *wavelet*. A Transformada *wavelet* é uma ferramenta que permite estimar a variação do conteúdo espectral de um sinal ao longo da série de dados. A técnica consiste na decomposição de um sinal em diferentes escalas, com diferentes níveis de resolução, a partir de uma única função (*wavelet*). Ela permite gerar representações dos espectros locais no domínio do tempo ou espaço. A decomposição em cada escala de frequência é obtida pela dilatação ou contração da largura da função wavelet antes da convolução com o sinal (Farge, 1992). Através desta técnica, o sinal pode ser examinado no domínio do tempo/espaço e frequência simultaneamente. Empregou-se a transformada wavelet de tempo contínuo. De acordo com Tropea et al. (2007) essa transformação pode ser definida como uma convolução na forma:

$$\tilde{u}(a, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ u(t') \frac{1}{\sqrt{a}} \psi^* \left( \frac{t-t'}{a} \right) \right] dt', \quad (5.13)$$

onde  $\tilde{u}(a, t)$  é o coeficiente wavelet no tempo "t" e na escala de dilatação "a". Existem diferentes funções wavelet  $\psi$ , onde  $\psi^*$  representa a conjugada complexa. O fator de dilatação "a" permite que eventos de longa duração sejam relacionados com grandes valores de "a", enquanto que os de curta duração são associados à baixos valores de "a". A função wavelet escolhida foi a de Morlet complexa (Grossmann & Morlet, 1984), pois ela preserva a informação de fase do sinal.

A Figura 5.9 ilustra o tipo de análise que foi realizada com a transformada wavelet. Na Figura 5.9a mostra-se um sinal composto pela soma dos cossenos de  $8^*t$ ,  $16^*t$ ,  $32^*t$ . Pode-se notar que a série temporal apresenta picos de amplitude em determinados instantes de tempo. Na Figura 5.9b, é mostrado o espectro de magnitudes obtido com a transformada wavelet. Nota-se que, a amplitude dos sinais não muda durante o tempo. As fases são mostradas na Figura 5.9c. A Figura ilustra, claramente, que as ondas passam pela mesma fase justamente no instante em que ocorre o pico de amplitude na série temporal. Essa mesma análise será utilizada mais adiante na tese para identificação da sincronização de ondas na interface do escoamento.

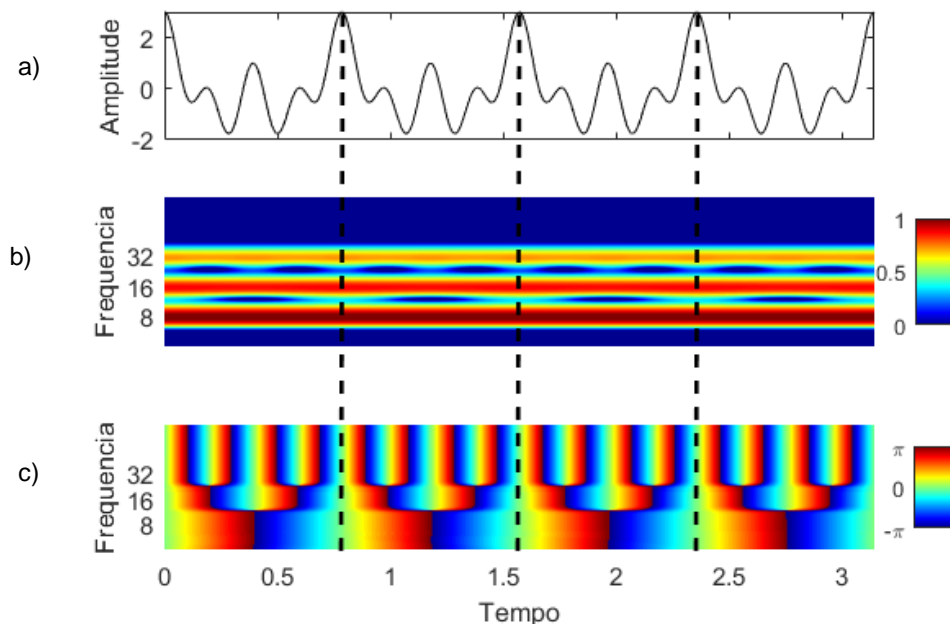


Figura 5.9: Sinal no tempo (a), magnitude (b) e fase(c). Exemplo de resultado da transformada Wavelet de um sinal conhecido.

### 5.3 Análise Não Linear

Como indicado em capítulos anteriores, quando as amplitudes das ondas em crescimento deixam de ser infinitesimais, a teoria de estabilidade linear não governa mais o comportamento das perturbações. Neste regime os diferentes componentes espectrais que formam o sinal começam a interagir entre si gerando novos componentes. Para identificar quais componentes espectrais são resultado de interação não linear, é necessário avaliar não só as amplitudes dos modos, mas também as fases. Uma vez que a análise espectral de potência não fornece informação acerca da dinâmica não linear devido ao vazio na informação das fases, para poder entender tal dinâmica, análises como bicoerência ou biespectro são necessárias (Selvam & Devi, 2013). Esses conceitos correspondem às técnicas espectrais de alta ordem e servem para estudar sinais que se desviam de um comportamento linear (Choudhury et al., 2008).

#### 5.3.1 Bicoerência

A bicoerência é utilizada para discriminar a interação não linear entre ondas com acoplamentos em fase e ondas independentes, sem relação aparente entre fases.

A bicoerência  $b$  é a representação normalizada do biespectro  $B$ , onde o biespectro é a média do produto triplo dos coeficientes de Fourier. O valor do biespectro tem forte dependência da amplitude dos componentes espectrais envolvidos, mascarando o grau de acoplamento das ondas. A bicoerência é comumente utilizada ao remover valores espúrios presentes no biespectro devido à amplitude dos componentes espectrais. O valor da bicoerência ( $0 < b < 1$ ) é uma medida do grau relativo de acoplamento de fases entre os componentes de Fourier, sendo nula quando os componentes de Fourier são independentes (fases aleatórias), e unitário quando o acoplamento é máximo.

Por definição, a análise de bicoerência é limitada somente ao caso da interação quadrática de um trio de ondas. Em um conjunto de três ondas, por exemplo, a bicoerência representa a fração da potência na frequência  $f_1 + f_2$  devido ao acoplamento quadrático dos três modos ( $f_1$ ,  $f_2$  e  $f_1 + f_2$ ). Assim mesmo, em um processo de banda larga, um modo particular pode estar envolvido em muitas interações simultaneamente (Elgar & Chandran, 1993). Quando o valor da bicoerência é alto, o grau de acoplamento pode ser estimado com alta



fidelidade. As técnicas bi-espectrais são mais adequadas para analisar dados de sistemas quadraticamente não lineares. Se o sistema é cubicamente não linear, então será necessário utilizar a técnica do triespectro e assim por diante (Kim & Powers, 1979).

O bispectro B pode ser estimado como (Kim & Powers, 1979),

$$\hat{B}(k, l) = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M X_k^{(i)} X_l^{(i)} X_{k+l}^{*(i)}, \quad (5.14)$$

onde X é a transformada de Fourier obtida através do algoritmo fft, e M o número de sinais adquiridos. O símbolo “^” denota um estimador. A bicoerência b, pode ser estimada por:

$$\hat{b}(k, l) = \frac{\left| \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M X_k^{(i)} X_l^{(i)} X_{k+l}^{*(i)} \right|}{\left[ \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M |X_k^{(i)} X_l^{(i)}|^2 \right]^{1/2} \left[ \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M |X_{k+l}^{(i)}|^2 \right]^{1/2}}. \quad (5.15)$$

Devido às relações de simetria, não é necessário calcular o espectro da bicoerência sobre todo o plano bidimensional de frequências. Assim, a região de análises é determinada por,

$$0 \leq l \leq q/2 \quad \text{e} \quad l \leq k \leq q-l \quad (5.16)$$

que corresponde à região sombreada da Figura 5.10.

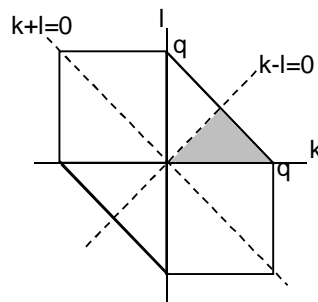


Figura 5.10: Região de computação do bispectro.

Detalhes dos conceitos e da implementação do procedimento de cálculo podem ser encontrados em Kim & Powers (1979), Sigl & Chamoun (1994), ou Choudhury et al. (2008).

Brevemente, apresenta-se a seguir um teste simples como exemplo.

Considere os casos A e B, respectivamente:

$$x(t) = \cos(\omega_1 t + \theta_1) + \cos(\omega_2 t + \theta_2) + \cos((\omega_1 + \omega_2)t + (\theta_1 + \theta_2)) + n(t), \quad (5.17)$$

$$x(t) = \cos(\omega_1 t + \theta_1) + \cos(\omega_2 t + \theta_2) + \cos((\omega_1 + \omega_2)t + \theta_3) + n(t). \quad (5.18)$$

onde as frequências são  $\omega_1=2\text{rad/s}$ ,  $\omega_2=3\text{rad/s}$  e  $n(t)$  é ruído branco Gaussiano de pequena amplitude (-20 dB). Para cada caso, vamos considerar 64 séries temporais; o vetor tempo tem 256 pontos e o passo de tempo é  $dt=0,5$ . As séries temporais são geradas com fases  $\theta_1$ ,  $\theta_2$  e  $\theta_3$  aleatórias da faixa  $[0,2\pi)$ . Resultados do caso A, que corresponderiam a um sistema não linear, são mostrados nas Figuras 5.11 (a, b, c). O caso B, um sistema linear, nas Figuras 5.11 (d, e, f).

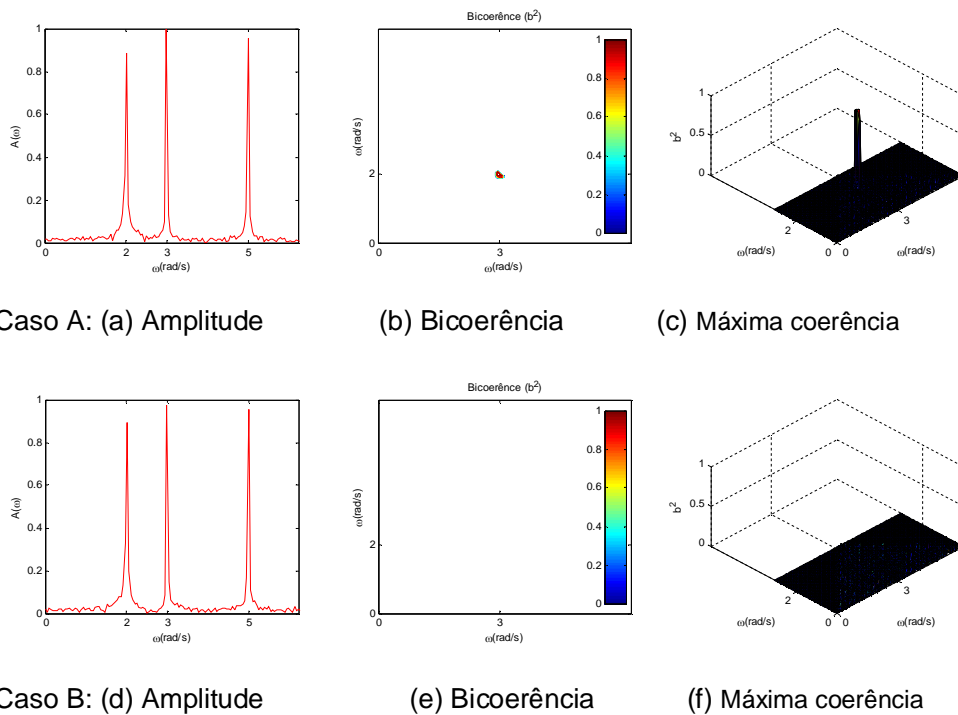


Figura 5.11: Espectro e Bicoerência. Caso A indicando não linearidade (a, b, c). Caso B indicando linearidade (d, e, f). Máxima coerência entre fases em 2 e 3 rad/s ( $b^2 \approx 1$ ).

Pode se observar que o espectro de amplitudes e frequências (a) e (d) são idênticos, eles são independentes das fases e em consequência não permitem determinar se existe acoplamento de fases dos componentes espectrais do sinal.

Pelo contrário, a bicoerência (b, c) mostra a coerência ou acoplamento máximo de fases em  $\omega_1 + \omega_2$ , dos componentes nas frequências  $\omega_1$  e  $\omega_2$ , e, portanto, um comportamento não linear, enquanto (e, f) não indicam nenhum nível de coerência e em consequência a independência dos componentes que conformam o sinal, característica de um sistema linear.

No presente trabalho utilizamos as ferramentas do MATLAB<sup>®</sup> denominadas HOSA (Higher-Order Spectral Analysis).

## 5.4

### Análises da Teoria de Estabilidade Linear: Dados Referenciais

Neste trabalho, utilizou-se como referência para as comparações com as simulações correspondentes a instabilidades lineares, resultados oriundos da solução das equações de Orr-Sommerfeld para escoamento bifásico entre duas placas planas. Os resultados teóricos foram fornecidos pelo Professor Daniel Rodríguez através de comunicação privada. O código utilizado pelo Professor Daniel Rodríguez utiliza o algoritmo padrão Arnoldi para resolver o problema de autovalores proveniente da discretização de diferenças finitas de 5ª ordem do sistema de equações de Orr-Sommerfeld (O-S). Este sistema é obtido do tratamento individual de cada fase com as equações O-S, e acoplando os dois sistemas através das condições interfaciais, impondo continuidade nas velocidades e forças tangenciais mais o balanço entre forças normais e tensão interfacial. A estratégia utilizada é similar às aplicadas por Kuru et al. (1995) e Boomkamp & Miesen (1996) para escoamentos estratificados de duas fases imiscíveis. Nas Figuras 5.12 e 5.13 são apresentadas as curvas características da análise temporal e espacial, assim como o espectro de autovalores para o caso em estudo  $h_{eq}=0,558$ .

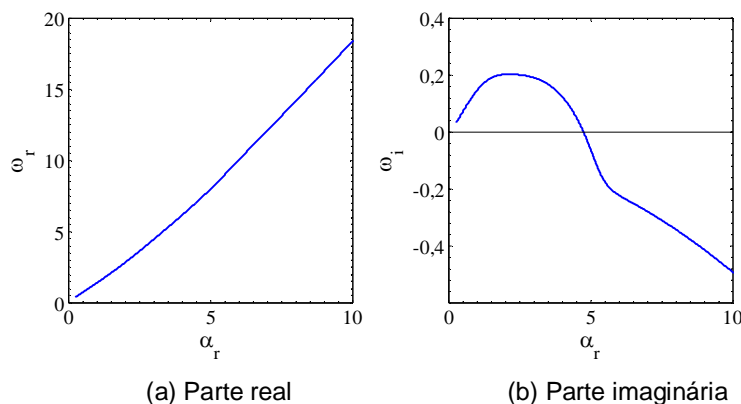
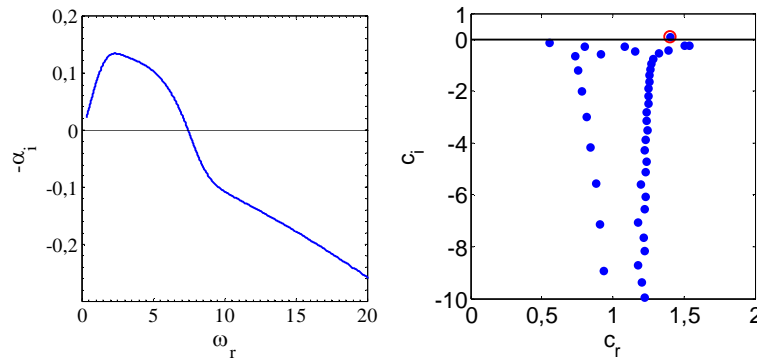


Figura 5.12: Análise de estabilidade temporal. (a) Parte real; (b) imaginária da frequência angular complexa  $\omega$  como função do número de onda  $\alpha_r$ .



a) Parte imaginária do número de onda  $\alpha$  como função da frequência angular  $\omega_r$ . b) Espectro de autovalores no plano complexo velocidade de fase para  $\lambda=3$ .

Figura 5.13: Análise de estabilidade espacial. (a) Parte imaginária do número de onda  $\alpha$  como função da frequência angular  $\omega$ . b) Espectro de autovalores no plano complexo da velocidade de fase para  $\lambda=3$ . O círculo vermelho indica o modo instável.

## 5.5 Parâmetros Numéricos

Para a definição da resolução da malha e passo de tempo adequados para as análises de interesse do presente trabalho, considerou-se o cenário de estabilidade temporal. Realizou-se inicialmente testes de convergência de malha, seguido de testes de passo de tempo, utilizando um domínio pequeno com condições de contorno periódicas. Observou-se o crescimento temporal das perturbações nesse domínio.

O caso selecionado para esta análise corresponde ao modo instável ( $\lambda=3$ ), de acordo com a teoria de estabilidade linear. Neste caso o comprimento adimensional do domínio é  $L=3$  e a distância entre placas  $H=1$ . Denominou-se o caso como "L3xH1". Para cada malha empregada são avaliadas a velocidade de fase e a taxa de amplificação, obtidas segundo o método detalhado no ponto 5.2.1 (Velocidade de fase e amplificação, cenário de estabilidade temporal).

### 5.5.1 Teste de malha

O teste de convergência de malha consiste em determinar a resolução para a qual a solução independa da malha. Diferentes resoluções de malha foram avaliadas mantendo a razão espacial das células  $\Delta y/\Delta x$  constante e igual à unidade, por ser a proporção ideal.

Issa (2010) recomenda que a resolução da malha seja maior que  $N/\lambda > 50$ ,

onde  $N$  é o número de células ( $N$ ) e  $\lambda$  é o comprimento de onda. No presente trabalho, optou-se por utilizar uma resolução significativamente maior, sendo  $N/\lambda=105$ , mesmo no caso de malha mais grosseira.

Na Figura 5.14 é apresentada uma comparação da evolução temporal das amplitudes de onda obtidas nas diferentes resoluções de malha avaliadas. Já a Figura 5.15 mostra a convergência com o aumento de número de nós, dos resultados da velocidade de fase e taxa de amplificação. Claramente observa-se a convergência da malha com relação às duas grandezas selecionadas para serem avaliadas.

Para definir os valores de referência de velocidade de fase e taxa de amplificação, e avaliar o erro obtido com as diferentes malhas, utilizou-se os valores obtidos através da extrapolação de Richardson (Brezinski & Redivo, 1991). No presente caso, realizou-se uma extrapolação de Richardson de terceira ordem, devido ao esquema ponderado a montante utilizado MUSCL (Seção 4.2.2) para discretização das equações de quantidade de movimento linear. Este esquema é de 2ª ordem ( $p=2$ ) e a extrapolação deve ser de ordem  $p+1$ .

A extrapolação de Richardson de terceira ordem, pode ser obtida através da seguinte fórmula (Petrila & Trif, 2005),

$$f_{\text{extrapolada}} \cong f_1 + \frac{f_1 - f_2}{(\Delta h_2 / \Delta h_1)^p - 1} \quad (5.19)$$

onde,  $f_{\text{extrapolada}}$  representa o valor estimado para uma malha com infinitos pontos,  $f_1$  e  $f_2$  são duas soluções discretas obtidas de duas malhas diferentes com espaçamento uniforme  $\Delta h_1$  (malha fina) e  $\Delta h_2$  (malha grossa), respectivamente.

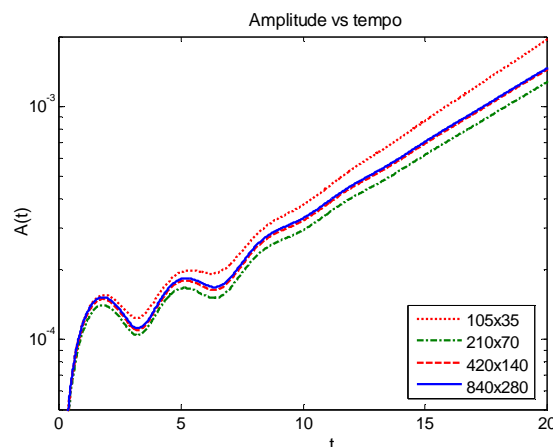
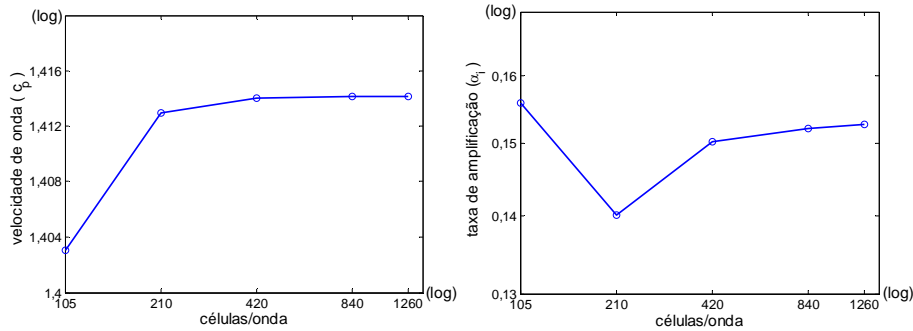


Figura 5.14: Comparativo da evolução temporal das amplitudes de onda para as quatro resoluções avaliadas. Caso referencial L3xH1.



a) Velocidade de onda. b) Taxa de amplificação temporal

Figura 5.15: Teste de malha do caso referencial L3xH1. a) Convergência avaliando velocidade de onda. b) Convergência avaliando taxa de amplificação temporal. Último ponto corresponde à extrapolação de Richardson.

A Tabela 5.1 apresenta os valores da velocidade da fase e taxa de amplificação correspondentes a cada malha, juntamente, com o erro percentual em relação ao valor de referência obtido com a extrapolação de Richardson. Os resultados mostram que existe uma tendência para a convergência nas malhas *b*, *c* e *d*, tanto para a velocidade de fase assim como para a taxa de amplificação.

Tabela 5.1: Resultados do teste de malha. Domínio LxH=3x1

Malha	Resolução	Velocidade de fase	Erro relativo (%)	Taxa de amplificação	Erro relativo (%)
<i>a</i>	105x35	1,403043	-0,786	0,155920	2,121
<i>b</i>	210x70	1,412931	-0,086	0,140064	-8,264
<i>c</i>	420x140	1,414019	-0,007	0,150300	-1,560
<i>d</i>	840x280	1,414119	-0,002	0,152086	-0,390
Extrapolação de Richardson		1,414153		0,152682	

Nos resultados obtidos, o erro relativo mostra que a malha *d* apresenta os resultados mais próximos da extrapolação, com um erro menor que 0,002% no caso da velocidade de fase e 0,39% no caso da taxa de amplificação. Estes resultados indicam que a variação do resultado em malhas mais refinadas tende a ser desprezível. É interessante notar também que a malha *c* também apresenta erros relativos muito pequenos, e que a diferença entre a solução obtida com a malha *c* e *d* é de 0,007% para a velocidade da fase e 1,56% para a taxa de amplificação.

Os diferentes canais utilizados nos casos estudados nos capítulos seguintes possuem altura constante *H* e mudam somente o seu comprimento *L*. A partir dos resultados do teste de convergência de malha descrito acima, a resolução vertical da malha  $N_y$  foi definida, considerando em todos os casos que

a distância entre as placas do canal é igual a  $H=1$ . Para a definição da resolução horizontal da malha  $N_x$  correspondente a cada comprimento  $L$ , manteve-se constante a razão  $\Delta x/\Delta y=1$ , isto é,  $N_x/N_y=L/H$ .

Na análise de estabilidade temporal cujos casos possuem os domínios da ordem de alguns diâmetros hidráulicos ( $D_h=2H$ ), optou-se por utilizar o refinamento da malha  $d$ . Já nos casos com domínios da ordem de dezenas de diâmetros hidráulicos, optou-se pela utilização da malha  $c$ .

### 5.5.2 Resolução do passo de tempo

Para a definição do passo de tempo adequado às simulações, um teste de convergência com relação ao passo de tempo  $dt$ , também foi realizado. Avaliou-se nesse teste, o número de Courant ( $Co$ ) adequado para a realização das simulações. O cálculo do número de Courant foi realizado de acordo com a seguinte equação:

$$Co = \frac{U_{x(max)} dt}{\Delta x} + \frac{U_{y(max)} dt}{\Delta y} \leq 1. \quad (5.20)$$

onde  $U_{x(max)}$  e  $U_{y(max)}$  são as velocidades máximas do escoamento nas direções  $x$  e  $y$ , com espaçamentos de malha  $\Delta x$  e  $\Delta y$ , respectivamente. Como a solução dos esquemas implícitos (utilizado neste trabalho) são incondicionalmente estáveis, eles permitem o uso de passos de tempo maiores ( $Co>1$ ). No entanto, uso de grandes passos de tempo podem afetar a solução e a precisão dos resultados obtidos, mesmo que a solução seja estável, sendo necessário obter um passo adequado.

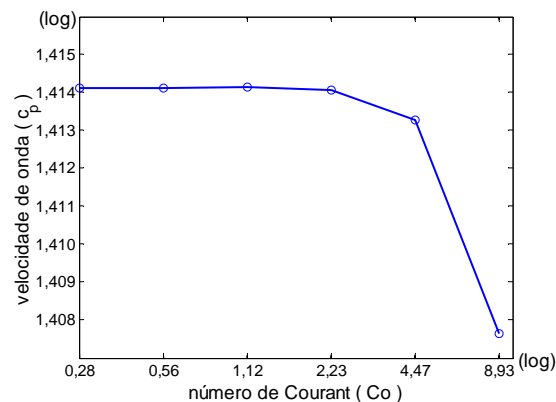


Figura 5.16: Teste para o passo de tempo, caso referencial  $L=\lambda=3$ . Convergência dos resultados da velocidade de onda em função do número de Courant  $Co$ .

Para realizar este teste, selecionou-se o caso  $L=3$ , sendo  $L=\lambda$ , com a resolução de malha definida na seção anterior igual a  $840 \times 280$ . A Figura 5.16 apresenta a variação da velocidade de fase com o número de Courant  $Co$ . Pode se observar que a convergência é atingida a partir de  $Co=1,12$  ( $dt=0,002$ ) com um erro relativo de  $0,16$ .

Visando analisar casos mais instáveis com velocidades ligeiramente diferentes, é conveniente ser mais conservativo. Dessa forma, o número de Courant escolhido é  $Co=0,6$ . Para domínios mais curtos esse número de Courant com malha  $d$  corresponde a um passo de tempo ( $dt$ ) igual a  $0,001$ . Já nas simulações com domínios maiores a malha escolhida foi a  $c$  e com isso o passo de tempo ( $dt$ ) utilizado foi de  $0,002$ .

## 5.6 Tempos de Processamento

As simulações foram conduzidas em um cluster utilizando 16 processadores em simulação paralela. O processador básico é Intel® Xeon® CPU E5-2680 v2 @ 2.80GHz. O sistema operativo Scientific Linux release 6.6 (Carbon). O simulador ANSYS Fluent® versão 15.0.

Na Tabela 5.2 são mostrados alguns casos simulados e seus tempos referencias de processamento. Os tempos de CPU (em horas) são indicados em relação do tempo de escoamento simulado e em função da resolução de malha utilizada. O custo computacional das simulações realizadas foi considerável. O tempo de simulação requerido para a obtenção do escoamento transiente foi comparável ao tempo necessário para a obtenção do escoamento base. Isso se deve à necessidade de redução ao máximo do ruído numérico do escoamento base (ver Apêndice B). Em todos os casos o tempo necessário para a obtenção do escoamento base ficou em torno de 50% do tempo total da simulação transiente (do instante  $t=0$  até o instante final de saturação).

Tabela 5.2: Tempos de processamento

Teste	Domínio $L \times H$	Resolução $N_x \times N_y$	Células totais	Tempo total simulado (adimensional) caso $h_{eq}=0,558$	Tempo de CPU (horas)
1	1x1	280x280	78400	40	23
2	2x1	560x280	156800	60	82
3	3x1	840x280	235200	80	142
4	4x1	1120x280	313600	90	217
5	15x1	2100x140	294000	120	275
6	30x1	4200x140	588000	60	290



## 5.7 Conclusão do Capítulo

Neste capítulo foram detalhadas as técnicas de pós-processamento aplicadas na presente tese, assim como os dados referenciais utilizados e a definição dos parâmetros numéricos empregados nas simulações.

Inicialmente, foi descrita a técnica utilizada para obter a função interface a partir dos campos instantâneos de fração volumétrica fornecidos pelo simulador.

Em seguida, foram estabelecidas as técnicas para obter as velocidades de fase e taxas de amplificação, tanto para o cenário temporal assim como para o cenário espacial. Neste último cenário, também se inclui a descrição do procedimento para obter a velocidade de grupo. Para avaliar a sincronização de fases, a transformada *wavelet* foi descrita brevemente.

A técnica de bicoerência foi utilizada para a análise não linear ao permitir identificar componentes que resultam da interação de ondas.

Finalmente, o teste de malha permitiu estabelecer que resoluções seriam utilizadas nas simulações. Os resultados indicaram duas resoluções como sendo as mais adequadas:  $\Delta y = \Delta x = 1/280$  (malha tipo *d*, para domínios curtos) e  $\Delta y = \Delta x = 1/140$  (malha tipo *c*, para domínios longos). Esta última com um erro relativo pequeno em relação a extrapolação de Richardson (<1,56%) referente a taxa de amplificação, ainda aceitável nas condições do presente estudo.

## 6 Resultados do Regime Linear

Neste capítulo são apresentados os resultados das simulações numéricas realizadas com ondas de baixa amplitude, onde os efeitos lineares tendem a ser dominantes. Nessa etapa, o estudo é focado no cenário de estabilidade temporal. O escoamento base escolhido para o estudo é baseado no trabalho de Gada & Sharma (2012), cujos resultados numéricos de um escoamento água-óleo apresentaram instabilidades interfaciais no regime de escoamento laminar. Aquele trabalho mostra a evolução de ondas interfaciais, não controladas, sob diferentes condições de instabilidade do escoamento base. No presente trabalho, a evolução de ondas interfaciais monocromáticas, introduzidas de maneira controlada no escoamento, é avaliada e comparada com a teoria de estabilidade linear. Avalia-se também um caso não perturbado.

O capítulo inicia com o estudo de um caso pouco instável, próximo da instabilidade neutra. Avalia-se a evolução de uma onda dentro da faixa de comprimentos de onda mais instáveis, de acordo com a teoria linear. Nessa etapa, dois testes são realizados. No primeiro, as ondas mais instáveis aparecem espontaneamente no escoamento devido à amplificação seletiva do ruído numérico. No segundo, uma perturbação com comprimento de onda igual a uma das ondas mais instáveis é introduzida no escoamento. Os resultados são comparados entre si e com a teoria linear. O objetivo é avaliar se os resultados obtidos nos dois casos eram compatíveis com as previsões teóricas e se a interação entre diferentes ondas, mesmo com amplitudes baixas, influencia os resultados da simulação numérica. Essa análise é repetida para um caso com diferentes velocidades das fases e que é mais instável de acordo com a teoria linear.

Ondas com diferentes comprimentos também são estudadas em detalhe. A Tabela 6.1 apresenta uma matriz que resume todos os casos estudados no presente trabalho. Neste capítulo apresentam-se alguns casos, ressaltando os principais fenômenos observados. No Apêndice C podem ser encontrados os casos restantes .

Os resultados apresentados aqui encontram-se na forma adimensional,

como indicado no Capítulo 4.

Tabela 6.1: Matriz resumo das ondas avaliadas.

		Caso	Teste	Tamanho do domínio L	Dados da perturbação inicial		
					Comprimento de onda ( $\lambda$ )	Amplitude inicial	Observação
Análise Linear	Instabilidade Temporal	$h_{eq} = 0,558$	1	2	----	A=0	Instável
			2	2	2	$A=8 \times 10^{-6}$	Instável
			3	1,5	1,5	$A=8 \times 10^{-6}$	Instável
			4	1,875	1,875	$A=8 \times 10^{-6}$	Instável
			5	2,143	2,143	$A=8 \times 10^{-6}$	Instável
			6	3	3	$A=8 \times 10^{-6}$	Instável
			7	4	4	$A=8 \times 10^{-6}$	Instável
			8	15	15	$A=3 \times 10^{-4}$	Instável
			9	1	1	$A=1 \times 10^{-4}$	Estável
		$h_{eq} = 0,7$	1	1,429	1,429	$A=8 \times 10^{-6}$	Instável
			2	1,5	1,5	$A=8 \times 10^{-6}$	Instável
			3	1,579	1,579	$A=8 \times 10^{-6}$	Instável
			4	3	3	$A=8 \times 10^{-6}$	Instável
			5	15	15	$A=3 \times 10^{-4}$	Instável

## 6.1

### Caso com Escoamento Base Fracamente Instável ( $h_{eq}=0,558$ )

Nesse caso as taxas de amplificação são baixas, e portanto as perturbações demoram mais a atingir elevadas amplitudes e facilita a observação dos estágios lineares da evolução dessas ondas. Inicialmente um dos modos mais instáveis da teoria linear ( $\lambda=2$ ) é avaliado considerando somente a evolução temporal do ruído numérico na interface do escoamento base. Esta análise permite obter uma referência do comportamento geral destas ondas que aparecem na forma de oscilações, permitindo fazer uma avaliação da evolução de perturbações (não controladas) geradas pelo ruído numérico, assim como de casos perturbados (controlados) que apresentam maiores níveis de amplitude. A seguir é avaliado o sistema não perturbado e seguidamente o mesmo sistema considerando uma perturbação inicial.

#### 6.1.1

##### Sistema não perturbado com comprimento do domínio igual a $L=2$

O primeiro estudo consistiu em avaliar a evolução temporal do modo instável ( $\lambda=2$ , segundo a teoria linear) a partir do inerente ruído numérico do

escoamento base em um domínio de comprimento  $L=2$ . Nenhuma perturbação artificial é utilizada. Neste caso, a evolução e crescimento de alguma instabilidade interfacial é resultado dos harmônicos instáveis de  $\lambda=2$  contidos no ruído. A aparição da onda  $\lambda=2$  é permitida pela condição periódica entre entrada e saída do canal que permite conter somente harmônicos do comprimento  $L=2$ .

O foco do presente capítulo é com relação à análise linear, porém, alguns comentários da evolução não linear são realizados, visando situar a faixa linear no cenário global. Analisam-se os vários estágios da evolução linear e não linear, referentes a toda a faixa de evolução das perturbações, desde amplitudes de interface nos níveis do ruído até a saturação do crescimento.

A Figura 6.1 mostra iso-contornos do campo da flutuação da velocidade normal à parede  $v'$  proveniente da teoria linear (análise Orr-Sommerfeld), normalizado pelo seu valor máximo. Este resultado é qualitativamente comparável com àquele obtido após o transiente inicial da simulação numérica que é apresentado na Figura 6.2.

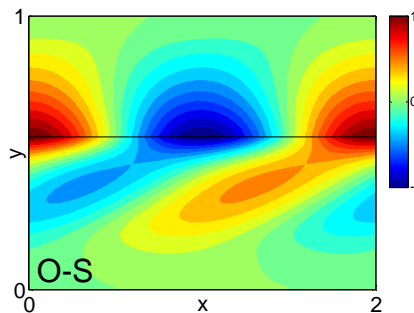


Figura 6.1: Flutuação da velocidade normal à parede  $v'$ , obtida a partir da solução das equações de O-S (teoria linear), caso com comprimento de onda  $\lambda=2$ .

A Figura 6.2 apresenta a evolução temporal da amplitude de oscilação da interface para um canal com comprimento igual a 2 ( $L=2$ ). Para ilustrar as características do escoamento, iso-contornos de flutuação do componente de velocidade normal à parede ( $v'$ ) são mostrados em diferentes instantes de tempo. Os campos de  $v'$  estão normalizados pelo seu valor máximo referente ao instante considerado. Com o intuito de fornecer uma referência acerca da posição da interface, adicionou-se uma linha contínua nesses contornos, correspondente a posição da interface.

De acordo com os resultados mostrados na Figura 6.2, a amplitude inicial do ruído numérico é da ordem de  $10^{-8}$ . Esse nível de ruído advém do escoamento base utilizado para iniciar a simulação. Observa-se nos iso-contornos que, no início, as flutuações da velocidade normal são compostas por

perturbações com pequenos comprimentos de onda. Com o tempo nota-se que essas pequenas oscilações começam a coalescer e a estrutura mais evidente, no instante de tempo  $t=10$ , possui um comprimento de onda maior. Essa estrutura continua a ser modificada e a partir do instante  $t=30$  já é possível notar o início do aparecimento de uma estrutura com características mais próximas daquelas observadas no modo previsto pela teoria linear (mostrado na Figura 6.1). A partir do instante  $t=60$  os contornos de  $v'$  apresentam características similares ao modo instável de acordo com a teoria linear. Nessa faixa a amplitude de oscilação da interface exhibe um crescimento exponencial. Isso se mantém até os instantes próximos da saturação, onde a amplitude atinge valores da ordem de  $10^{-2}$ . A partir daí mudanças significativas são observadas na interface e nos iso-contornos de  $v'$ .

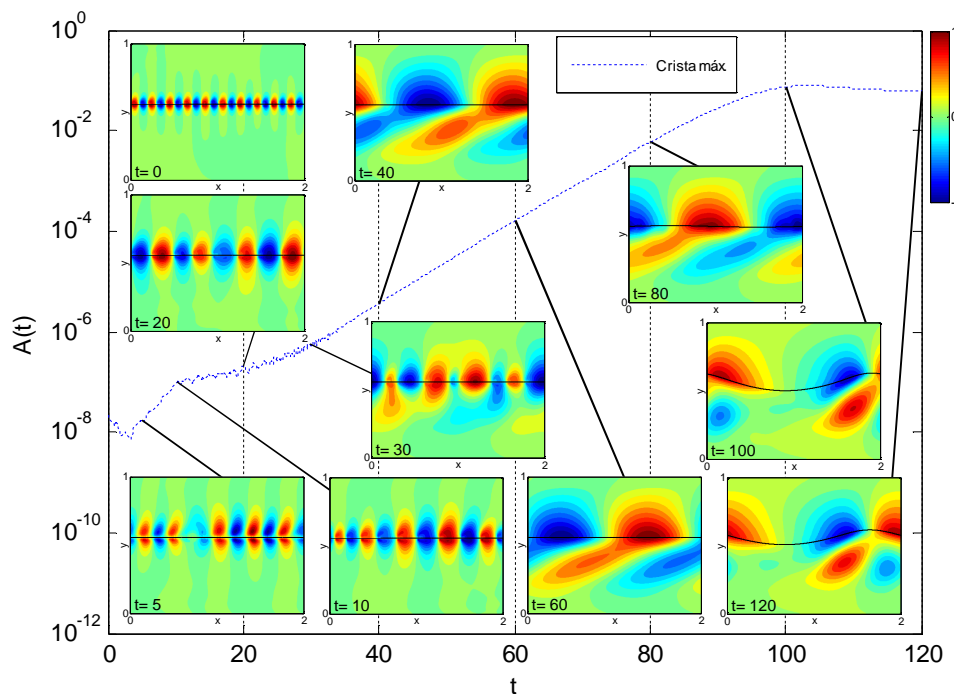


Figura 6.2: Evolução temporal da amplitude de oscilação da interface para um domínio  $L=2$ . Perturbações iniciadas pelo ruído numérico. Contornos da flutuação  $v'$  são apresentados para alguns instantes da simulação.

A informação avaliada na Figura 6.2 corresponde à evolução do escoamento ( $v'$  e interface) onde estão contidas ondas com diversos comprimentos. Para se avaliar somente o comportamento da onda com comprimento  $\lambda$  igual a 2, realizou-se a filtragem espectral das flutuações de velocidade do escoamento e da interface, conforme descrito no capítulo 5. Os

resultados são apresentados na Figura 6.3. A partir do instante  $t=20$ , nota-se que os campos de flutuação de  $v'$  já apresentam características similares à flutuação  $v'$  teórica (O-S) da Figura 6.1. Além disso, a oscilação da interface, com comprimento de onda igual a 2, apresenta crescimento exponencial. Somente depois do instante  $t=30$  é que esse modo se torna dominante. Isso explica porque, na Figura 6.2, os contornos de  $v'$  só se aproximam do formato O-S a partir de  $t=30$ . O crescimento exponencial e os contornos de  $v'$  são mantidos até próximo da saturação das ondas, que ocorre passado o instante  $t=80$ . Na saturação, observa-se também que a amplitude de oscilação da interface não mais corresponde a amplitude do modo com comprimento 2. Isso sugere a presença de ondas com outros comprimentos.

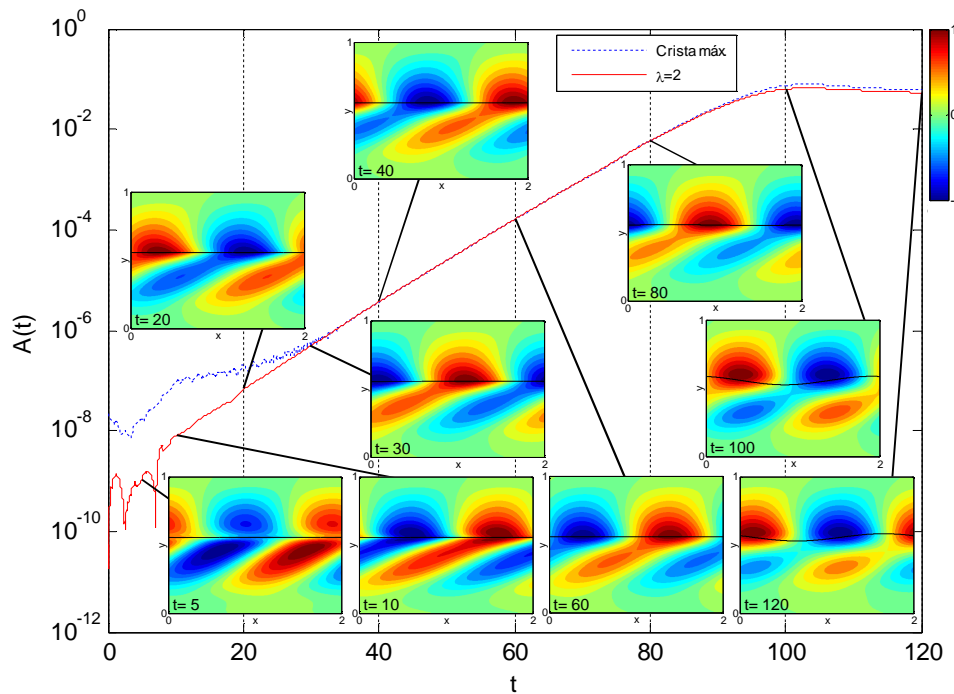


Figura 6.3: Evolução temporal da amplitude de oscilação da interface para uma onda com comprimento ( $\lambda$ ) igual a 2. Perturbações iniciadas pelo ruído numérico. Contornos da flutuação  $v'$  são apresentados para alguns instantes da simulação.

Durante o transiente inicial na faixa de tempo  $0 \leq t \leq 10$ , a curva do modo fundamental descreve um comportamento não exponencial. Este comportamento não modal pode ser relacionado como um crescimento transiente algébrico que está associado a tempos curtos de evolução. Tal crescimento transiente foi capturado porque a simulação resolve as equações governantes de forma completa. Já o comportamento exponencial, que domina depois, é associado a

tempos relativamente longos de evolução (Schmid & Henningson, 2001; Schmid, 2007).

Na Figura 6.4 os perfis de magnitude de  $v'$ , obtidos através da simulação numérica, são comparados com a forma (magnitude) da autofunção fornecida pela teoria linear. As curvas tracejadas vermelhas apresentam os perfis previstos pela teoria linear, já as curvas contínuas mostram os resultados das simulações. As curvas apresentam uma ligeira diferença no período compreendido entre  $20 < t \leq 60$ , mas ainda assim pode-se dizer que a simulação numérica consegue capturar bem os perfis previstos pela teoria. Não é incluído o instante  $t=80$  por estar perto do início da saturação e ter influência (fracamente) não linear. No período indicado, a amplitude de oscilação da interface nas simulações é bem pequena, permanecendo na faixa de  $10^{-8}$  até  $10^{-3}$ . Isso é compatível com a hipótese de perturbações de baixa amplitude inerentes a teoria linear. Com base nesses resultados, decidiu-se que as propriedades das ondas simuladas devem ser analisadas dentro dessa faixa de amplitudes, para fins de comparação com a teoria linear.

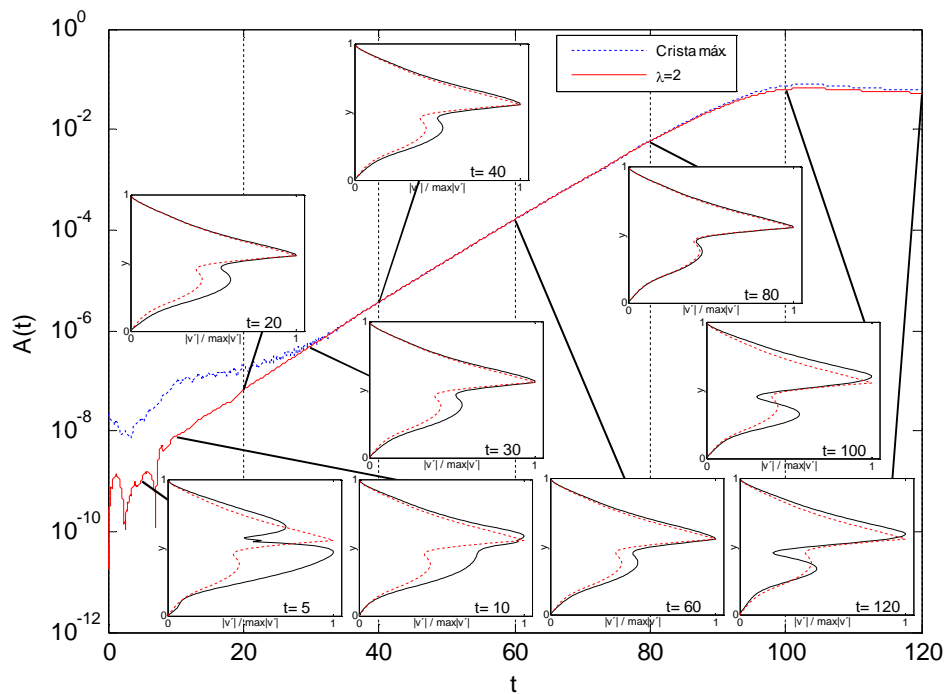


Figura 6.4: Evolução temporal da amplitude do modo fundamental ( $\lambda=2$ ). São comparados os perfis de magnitude de  $v'$  da simulação (curva contínua preta) em alguns instantes de tempo, com a autofunção da teoria linear (curva tracejada vermelha).

A Tabela 6.2 mostra que uma boa comparação foi obtida entre os resultados de velocidade de fase e taxa de amplificação resultantes da presente

simulação com os obtidos com a teoria linear. Esse resultado é importante, pois *a priori* não se tinha informação na literatura de que a ferramenta comercial utilizada, que possui discretização de 3ª ordem, seria capaz de prever com razoável precisão o comportamento das ondas de instabilidade. No caso de ondas Tollmien-Schlichting em camadas limites ou ondas acústicas, por exemplo, a dissipação e a dispersão numérica de metodologias de baixa ordem podem afetar significativamente o resultado das simulações (Wang, 2014). Naqueles casos, normalmente utilizam-se métodos numéricos com ordem superior a 4ª.

Tabela 6.2: Resultados do caso não perturbado para  $L=2$ 

Domínio L	Velocidade de fase	Erro relativo (%)	Taxa de amplificação	Erro relativo (%)
2	1,477586	0,29	0,188239	1,55
Teoria linear	1,473364		0,185360	

Nesta seção pode-se concluir que o domínio periódico com comprimento  $L=2$  favorece a aparição da onda fundamental de mesmo comprimento de onda e que é instável concordando com a teoria linear. Além disso, observou-se que as simulações capturaram bem o comportamento das ondas de instabilidade.

### 6.1.2

#### Sistema perturbado com comprimento do domínio igual a $L=2$

Para se estudar a evolução de ondas bem definidas, tanto em relação a frequência como para o número de onda, independentemente do tamanho do canal optou-se por introduzir perturbações controladas na interface do escoamento. Essas perturbações foram introduzidas no instante inicial da simulação em todo o domínio. Em um primeiro teste, o comprimento da onda excitada foi escolhido para corresponder ao comprimento do canal. Assim, os resultados podem ser comparados com as simulações da seção anterior. A amplitude inicial da perturbação foi  $8 \times 10^{-6}$ , como indicado na Tabela 6.1. Essa amplitude é uma ordem de magnitude maior que o ruído numérico da simulação. Seguindo a mesma sequência de análises que foi empregada para o caso não perturbado, na Figura 6.5 mostra-se a evolução temporal da amplitude do modo fundamental  $\lambda=2$ . Os iso-contornos de  $v'$  são mostrados para alguns instantes de tempo, normalizados pelo seu valor máximo de acordo ao instante considerado. Uma comparação com as autofunções da teoria linear também é apresentada.

Na Figura 6.5 pode se observar que o crescimento inicial da amplitude,



depois da introdução da perturbação, é marcado por um crescimento transiente, similar ao que já foi descrito no caso não perturbado. Este crescimento, que se manifesta na forma oscilatória, é dominante no início da simulação e vai decaindo até o final do período compreendido entre  $0 \leq t \leq 10$ . Nesses instantes, o campo da flutuação  $v'$  difere do formato O-S. Isto é mais evidente no instante  $t=5$ . À medida que o transiente inicial decai, as perturbações com crescimento exponencial vão se tornando dominantes, até se atingir uma boa concordância com a teoria linear.

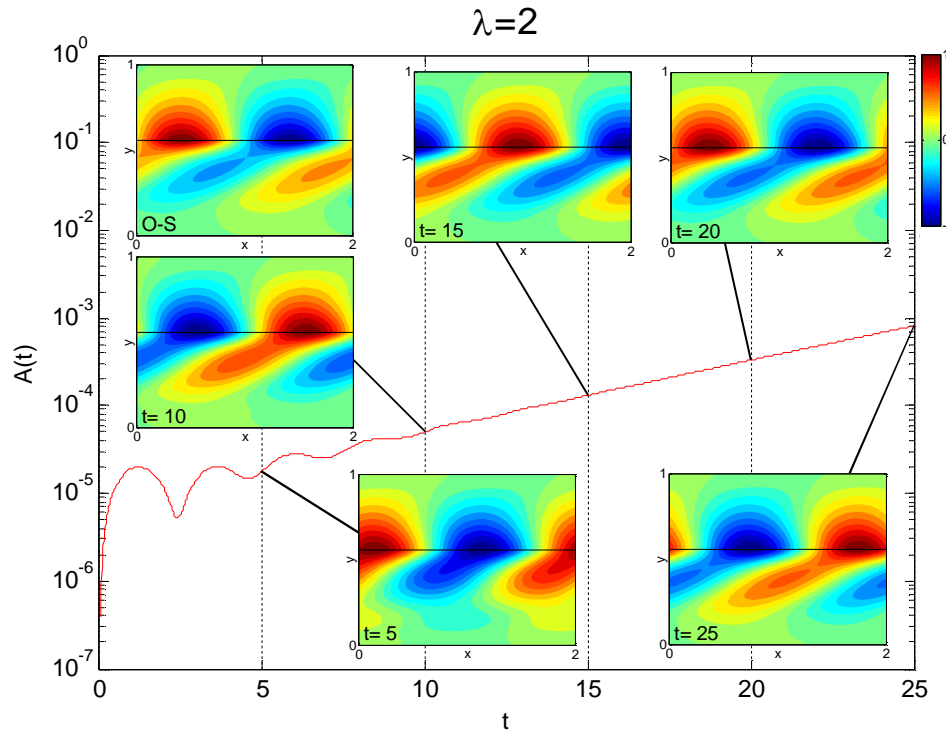


Figura 6.5: Evolução temporal da amplitude do modo fundamental ( $\lambda=2$ ). Diferentes instantes dos iso-contornos da flutuação  $v'$  com referência da interface mostram o comportamento qualitativo da onda avaliada.

Na Figura 6.6 são comparados os perfis de magnitude de  $v'$  do modo fundamental  $\lambda=2$  da simulação e a autofunção da teoria linear (O-S) nos instantes avaliados na Figura 6.5. Na faixa do transiente inicial ( $0 \leq t \leq 10$ ) diferença é encontrada no início, já nos instantes finais da faixa os resultados se aproximam bem. Na faixa de intervalo de tempo seguinte ( $10 < t \leq 25$ ), a taxa de crescimento é constante e os perfis de  $v'$  são próximos das autofunções O-S, e não mudam mais assim como observado no caso não perturbado.

Na Tabela 6.3, são comparados os resultados de velocidade de fase e taxa de amplificação deste caso em relação ao caso não perturbado e a teoria linear.

Tabela 6.3: Resultados comparativos para  $\lambda=2$ .

Domínio L	Caso	Velocidade de fase	Erro relativo (%)	Taxa de amplificação	Erro relativo (%)
2	Não perturbado	1,478068	0,32	0,184910	-0,24
2	Perturbado	1,478043	0,32	0,182436	-1,58
Teoria linear		1,473364		0,185360	

Analisando os casos não perturbado e perturbado, observou-se que são equivalentes ao fornecer resultados semelhantes em relação a teoria linear. Cabe ressaltar, que esses resultados só são obtidos mediante a obtenção de um escoamento base com baixíssimo nível de ruído (ver Apêndice B). Os resultados sugerem que a diferença principal, entre os dois casos, é o tempo de simulação requerido para a obtenção de perturbações similares àquelas previstas pela teoria. No caso perturbado, recupera-se a onda de instabilidade com tempos menores de simulação, o que representa uma redução do custo computacional (ver seção 5.6). Sendo assim, optou-se por utilizar perturbações controladas.

PUC-Rio - Certificação Digital N° 1313508/CA

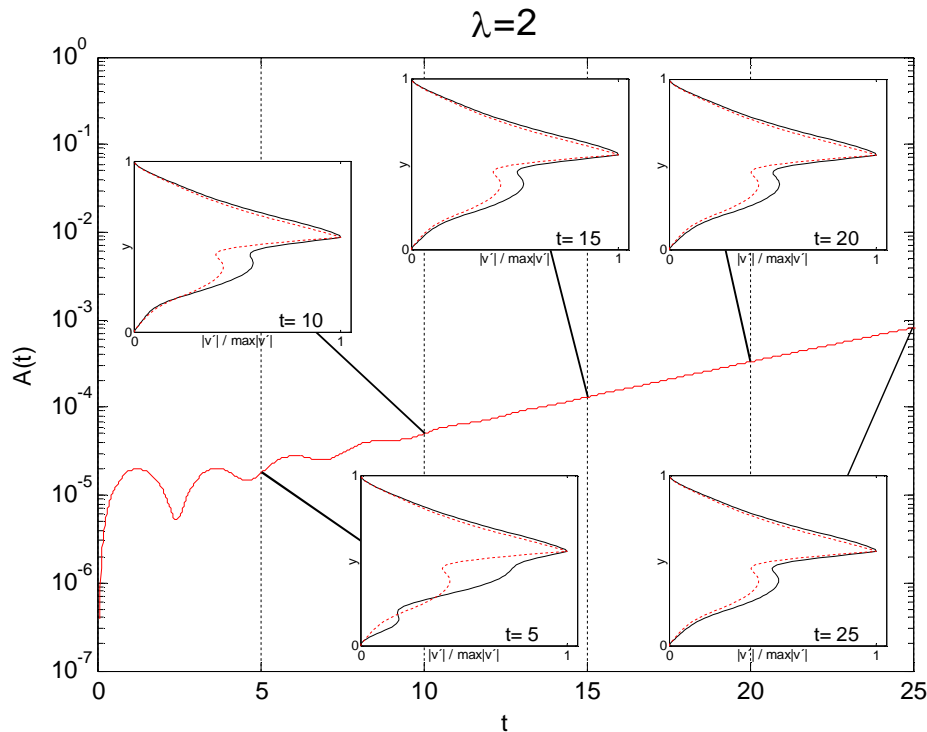


Figura 6.6: Evolução temporal da amplitude do modo fundamental ( $\lambda=2$ ). São comparados os perfis de magnitude de  $v'$  da simulação (curva contínua preta) em alguns instantes de tempo com a autofunção da teoria linear (curva tracejada vermelha).

A seguir são avaliados outros casos com perturbação de ondas curtas, médias e longas, a fim de obter informação do comportamento de diferentes ondas.

### 6.1.3

#### Casos com excitação de ondas curtas, médias e longas

Analisou-se a influência no escoamento de diferentes comprimentos de ondas das excitações, conforme indicado na Tabela 6.1. Considerou-se excitações com comprimentos da ordem da altura do canal como sendo curtas ( $\lambda=1$ ; 1,5; 1,875; 2,143), ondas médias ( $\lambda=3$ ; 4) e longas ( $\lambda=15$ ).

O caso avaliado anteriormente (não perturbado e perturbado) corresponde a uma onda de comprimento curto  $\lambda=2$ . Nas figuras 6.7 a 6.8 são apresentadas as ondas de comprimento médio  $\lambda=3$  e longo  $\lambda=15$ , respectivamente. As outras ondas curtas e médias, apresentam comportamento similar em cada grupo, e são apresentadas no Apêndice C. As Figuras 6.7 e 6.8 apresentam a evolução temporal da amplitude das ondas perturbadas. Os iso-contornos normalizados da flutuação de velocidade  $v'$ , são indicados nas figuras para alguns instantes de tempo. Além disso, a flutuação  $v'$ , obtida a partir da teoria linear, também é incluída nas figuras para fins de comparação.

Pode-se observar que, os dois casos instáveis avaliados (onda média e longa) mostram uma sequência de estágios semelhantes aos observados no caso da onda curta  $\lambda=2$ . No primeiro estágio, logo após a introdução da perturbação, a evolução temporal da amplitude apresenta um transiente que domina o comportamento das ondas. Durante esse estágio, oscilações com comprimentos de onda curtos são mais proeminentes. Neste período, o campo da flutuação  $v'$  difere do formato previsto pela teoria linear. Em um segundo estágio perturbações com crescimento exponencial se tornam dominantes e as oscilações da interface são amplificadas com uma taxa constante.

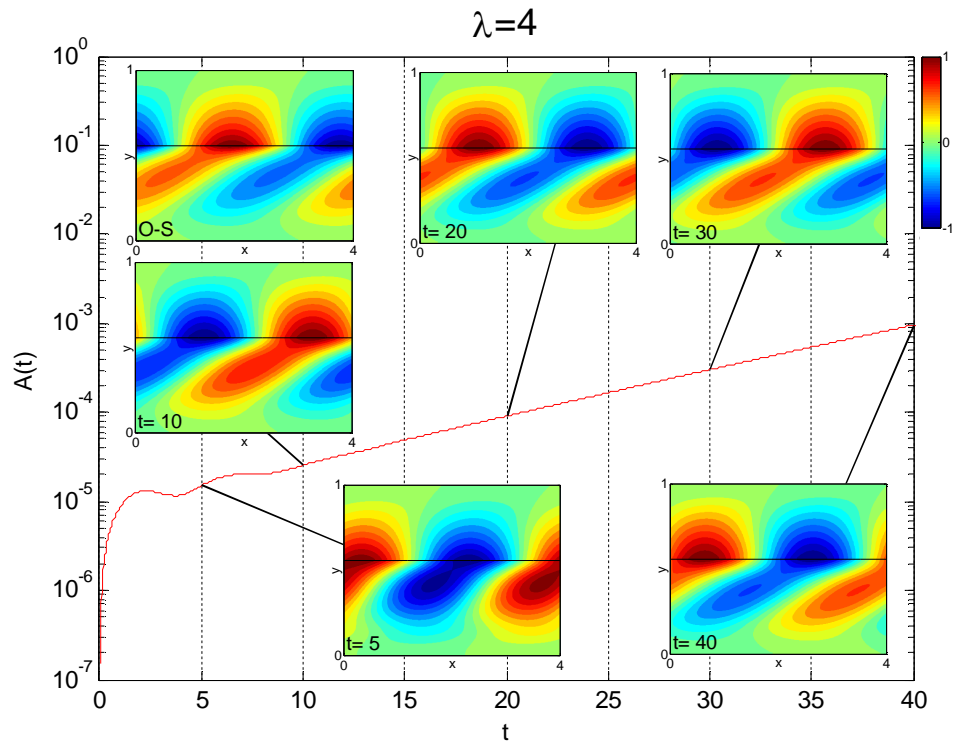


Figura 6.7: Evolução temporal da amplitude do modo fundamental ( $\lambda=4$ ). Instantes da flutuação  $v'$  mostram o comportamento qualitativo da onda avaliada.

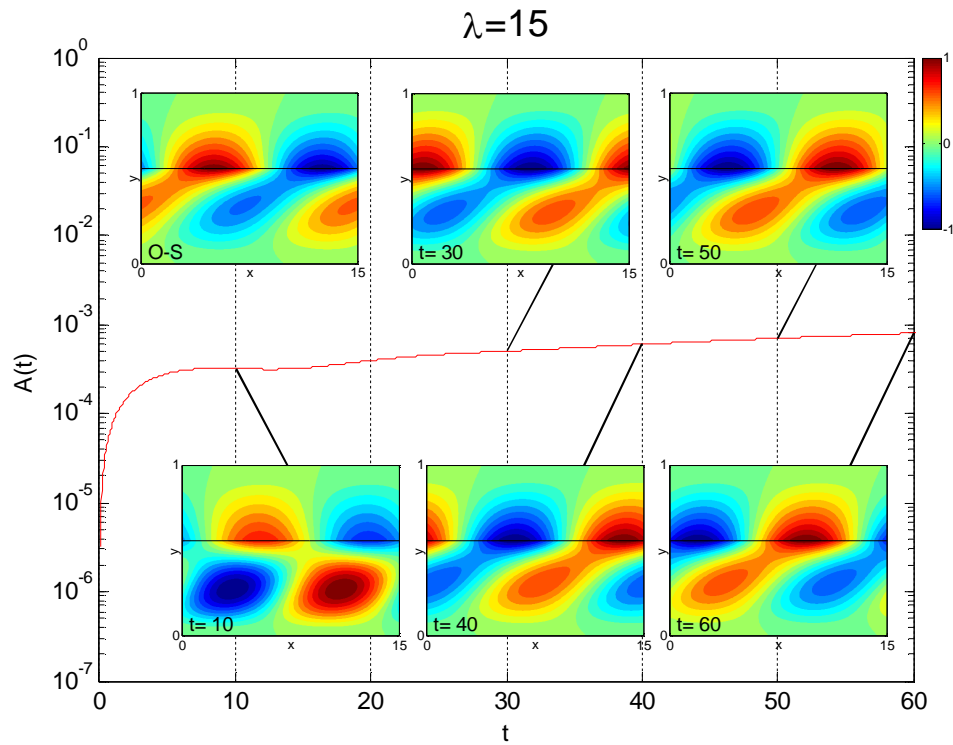


Figura 6.8: Evolução temporal da amplitude do modo fundamental ( $\lambda=15$ ). Instantes da flutuação  $v'$  mostram o comportamento qualitativo da onda avaliada.

Em todos os casos as simulações foram iniciadas com uma perturbação de amplitude muito baixa (aproximadamente  $8 \times 10^{-6}$ ).

Nas Figuras 6.9 a 6.10 são apresentadas comparações entre os perfis de magnitude de  $v'$  obtidos com as simulações numéricas e os previstos pela teoria linear. Nestas figuras, alguns instantes de tempo foram selecionados para a comparação dos resultados. Observa-se que, após o transiente inicial, os perfis de  $v'$  são próximos daquele previsto pela teoria linear.

Ao avaliar o comportamento observado nas ondas instáveis pode-se estabelecer que a simulação descreve bem as autofunções previstas pela teoria linear. Algumas diferenças são observadas, principalmente no caso com taxa de crescimento baixa, ou comprimento de onda alto ( $\lambda=15$ ).

Nos casos com taxas de crescimento baixas, a evolução das ondas é muito sensível a erros acumulados por discretização, ordem dos esquemas utilizados, etc. Assim, pequenos erros absolutos, podem parecer elevados, quando comparados em relação a números próximos de zero. No caso de ondas longas, as taxas de crescimento são mais baixas, quando comparadas com ondas curtas, e perturbações provenientes do ruído numérico de fundo tendem a crescer mais rapidamente do que a onda longa e se tornarem dominantes.

PUC-Rio - Certificação Digital N° 1313508/CA

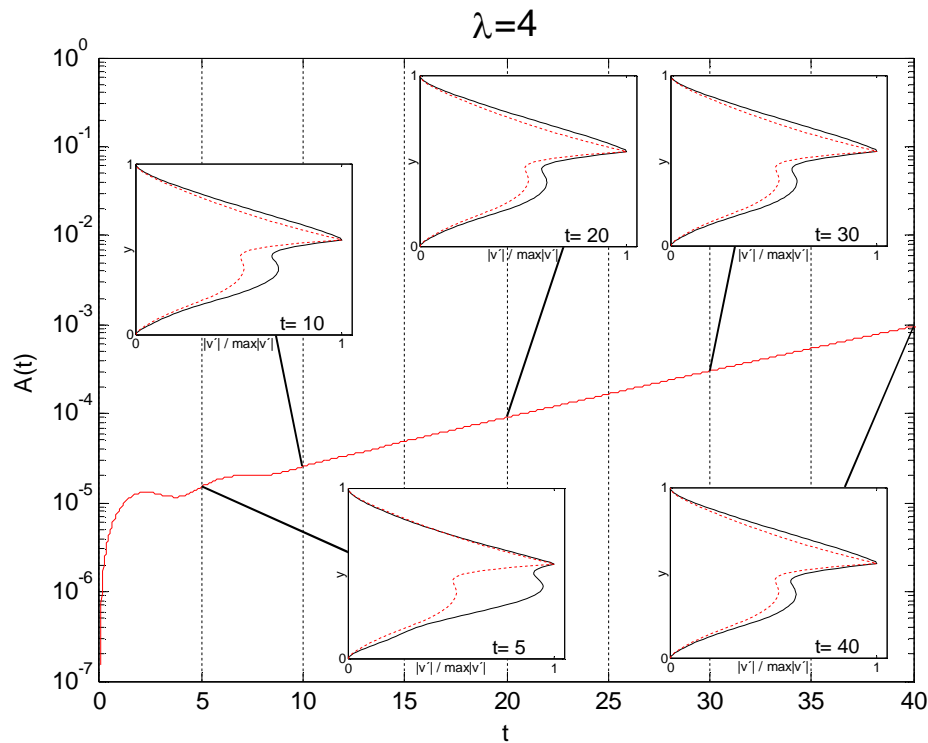


Figura 6.9: Evolução temporal da amplitude de onda ( $\lambda=4$ ). Perfis de magnitude de  $v'$  (curva contínua preta) são comparados com a teoria linear (curva tracejada vermelha).

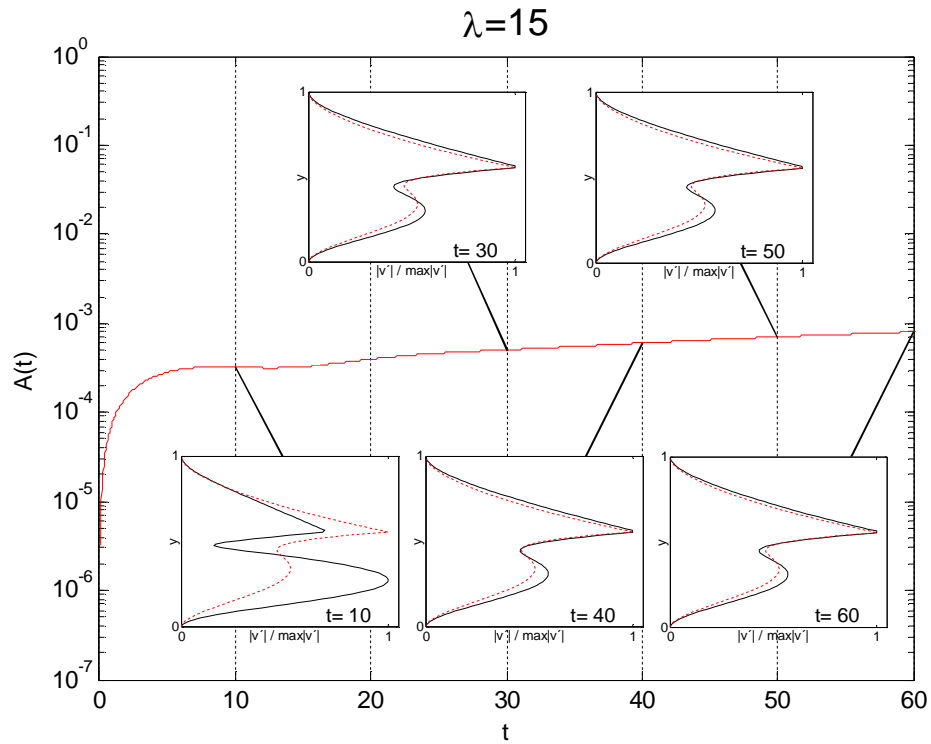


Figura 6.10: Evolução temporal da amplitude de onda ( $\lambda=15$ ). Perfis de magnitude de  $v'$  (curva contínua preta) são comparados com a teoria linear (curva tracejada vermelha).

Para avaliar o comportamento das ondas sob condições de escoamento base mais instável, realizou-se simulações de ondas curtas, médias e longas em um caso com a altura da interface  $h_{eq}$  igual a 0,7. Essa mudança na altura da interface é obtida através de um aumento na vazão do fluido mais denso. A seguir apresenta-se os resultados obtidos com  $h_{eq}=0,7$ .

## 6.2 Caso com Escoamento Base Instável ( $h_{eq}=0,7$ )

Neste caso, as taxas de crescimento das perturbações, previstas pela teoria linear, são sensivelmente maiores do que as obtidas para o caso analisado na seção anterior ( $h_{eq}=0,558$ ). De maneira similar àquela considerada na seção anterior, foram simulados casos com ondas curtas ( $\lambda=1,429$ ; 1,5; 1,579), médias ( $\lambda=3$ ) e longas ( $\lambda=15$ ). Os resultados obtidos para as ondas com comprimento  $\lambda=1,429$  e 1,579, apresentam comportamento similar ao caso de onda curta,  $\lambda=1,5$ , e são apresentadas no Apêndice C. A amplitude inicial das perturbações foi mantida em  $(8 \times 10^{-6})$ , exceto para a onda longa ( $\lambda=15$ ), conforme Tabela 6.1.

A evolução das ondas no tempo é mostrada nas Figuras 6.11 à 6.13, onde observa-se um comportamento análogo ao já visto para o caso menos instável, com  $h_{eq}=0,558$ . Observa-se que todos os casos (ondas curta, média e longa) apresentam um transiente inicial, logo após o início da perturbação e posteriormente mostram crescimento de um modo dominante. O crescimento transiente, parece ser mais forte para ondas curtas. Em todos os casos, a duração do transiente inicial é aparentemente mais curta quando comparada ao caso com escoamento base menos instável. Isso se deve ao fato das taxas de crescimento exponencial das perturbações serem maiores no caso mais instável, e por isso as ondas previstas pela teoria linear se tornam dominantes mais rapidamente.

Na série de Figuras 6.14 – 6.16, os perfis de magnitude de  $v'$  são comparados com os perfis de magnitude das autofunções obtidas pela solução do problema linear (O-S). Na região do transiente inicial, os perfis diferem da previsão teórica, e os resultados se aproximam da teoria linear à medida que o crescimento modal se torna dominante.

O transiente inicial observado na simulação pode ocorrer, mesmo para amplitudes muito pequenas das ondas devido a mecanismos lineares de transferência de energia entre ondas e o escoamento base, conforme descrito no livro de Schmid & Henningson (2001). Como no presente trabalho, esse crescimento transiente se restringe a tempos curtos e amplitudes muito pequenas, o comportamento das perturbações nesse regime não foi investigado em detalhe.

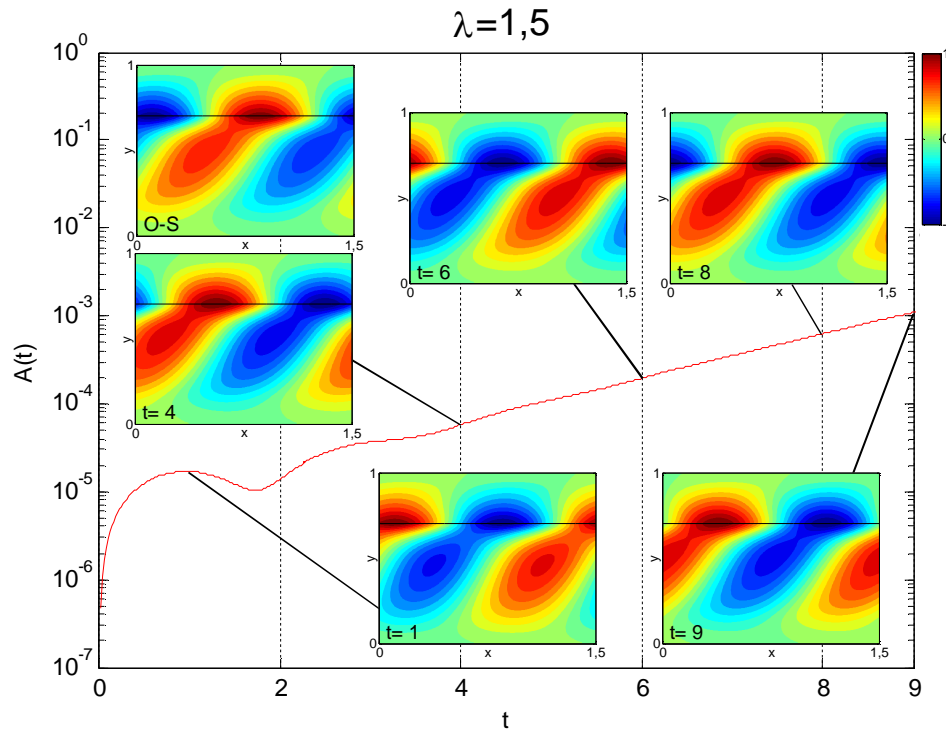


Figura 6.11: Evolução temporal da amplitude do modo fundamental ( $\lambda=1,5$ ). Instantes de flutuação  $v'$  mostram o comportamento qualitativo da onda avaliada.

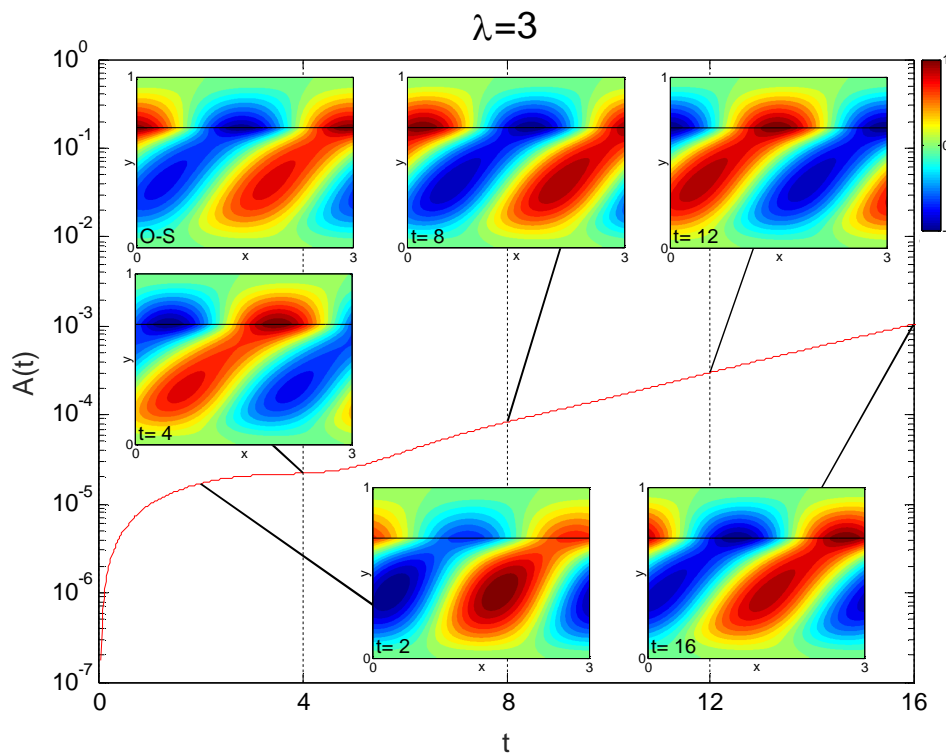


Figura 6.12: Evolução temporal da amplitude do modo fundamental ( $\lambda=3$ ). Instantes de flutuação  $v'$  mostram o comportamento qualitativo da onda avaliada.



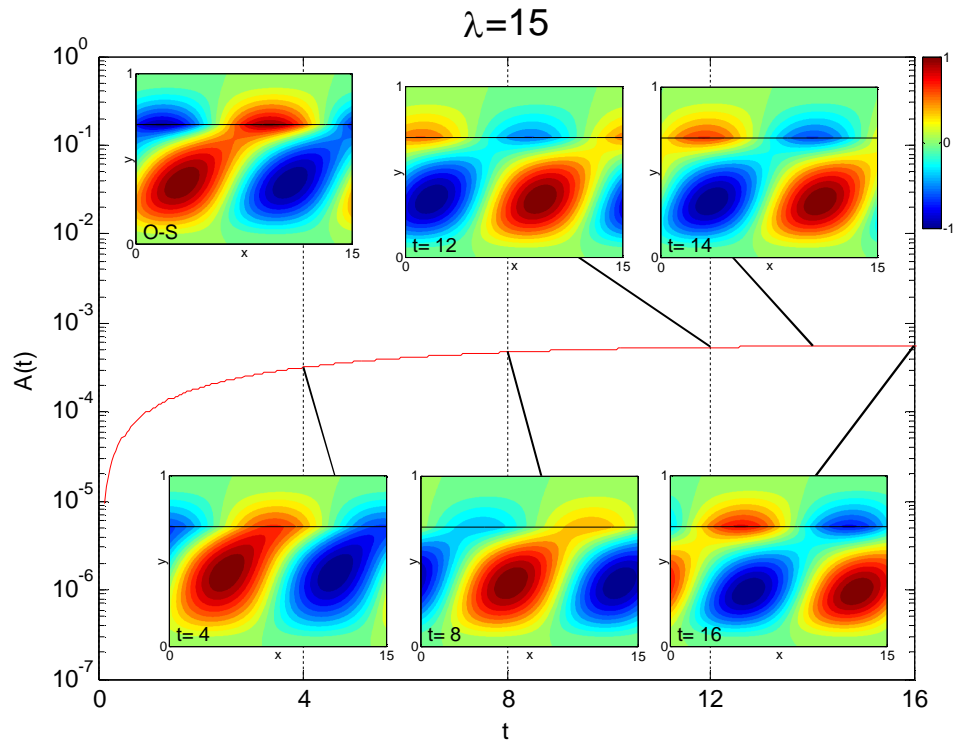


Figura 6.13: Evolução temporal da amplitude do modo fundamental ( $\lambda=15$ ). Instantes da flutuação  $v'$  mostram o comportamento qualitativo da onda avaliada.

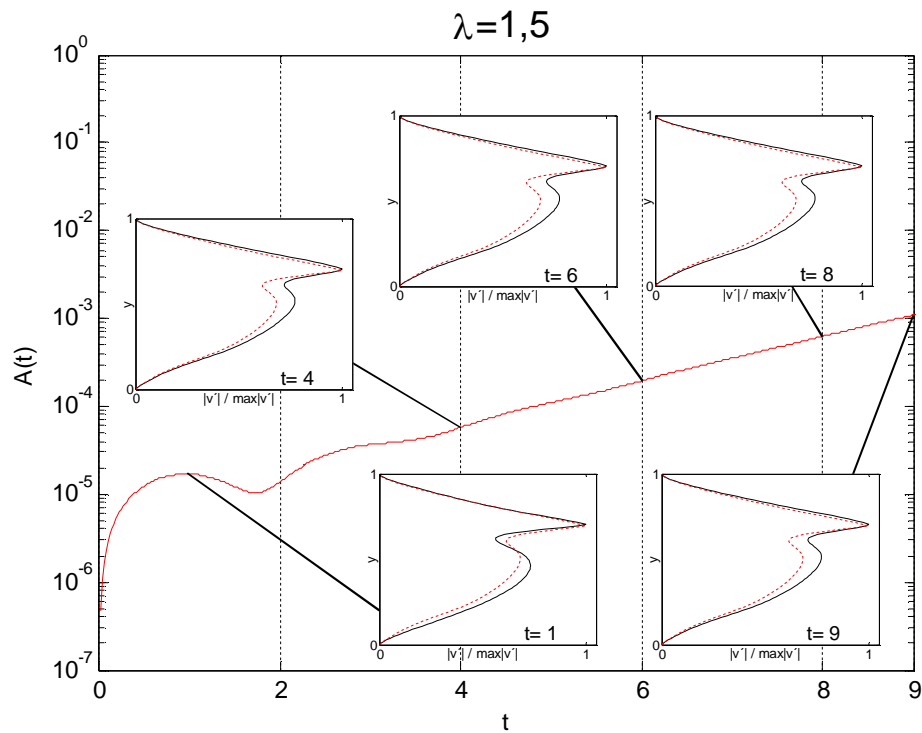


Figura 6.14: Evolução temporal da amplitude de onda ( $\lambda=1,5$ ). Perfis de magnitude de  $v'$  (curva contínua preta) são comparados com a teoria linear (curva tracejada vermelha).

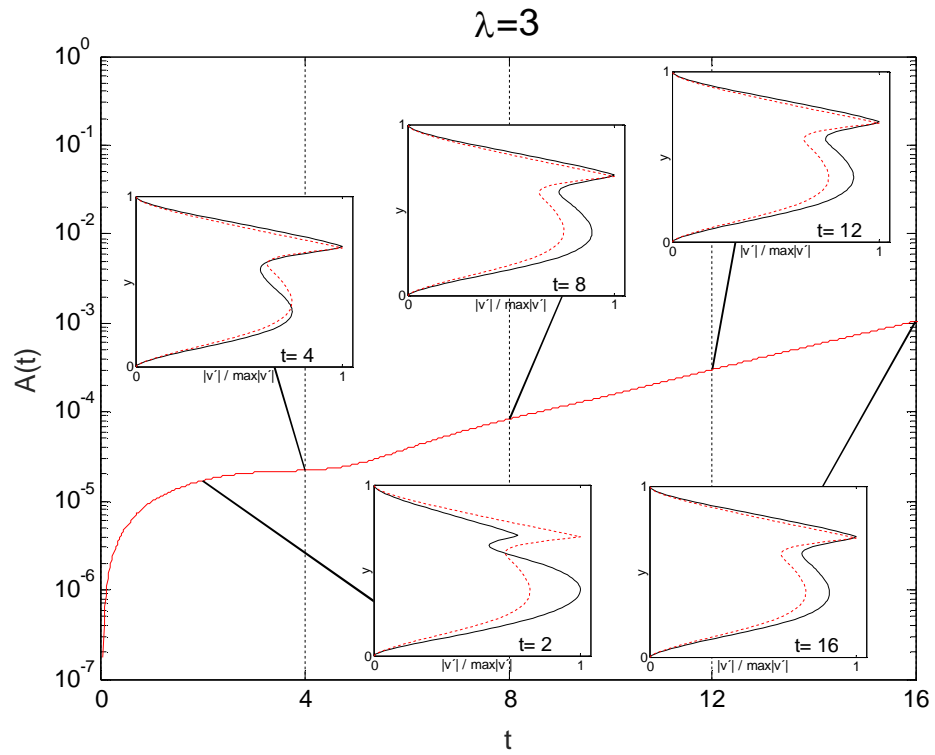


Figura 6.15: Evolução temporal da amplitude de onda ( $\lambda=3$ ). Perfis de magnitude de  $v'$  (curva contínua preta) são comparados com a teoria linear (curva tracejada vermelha).

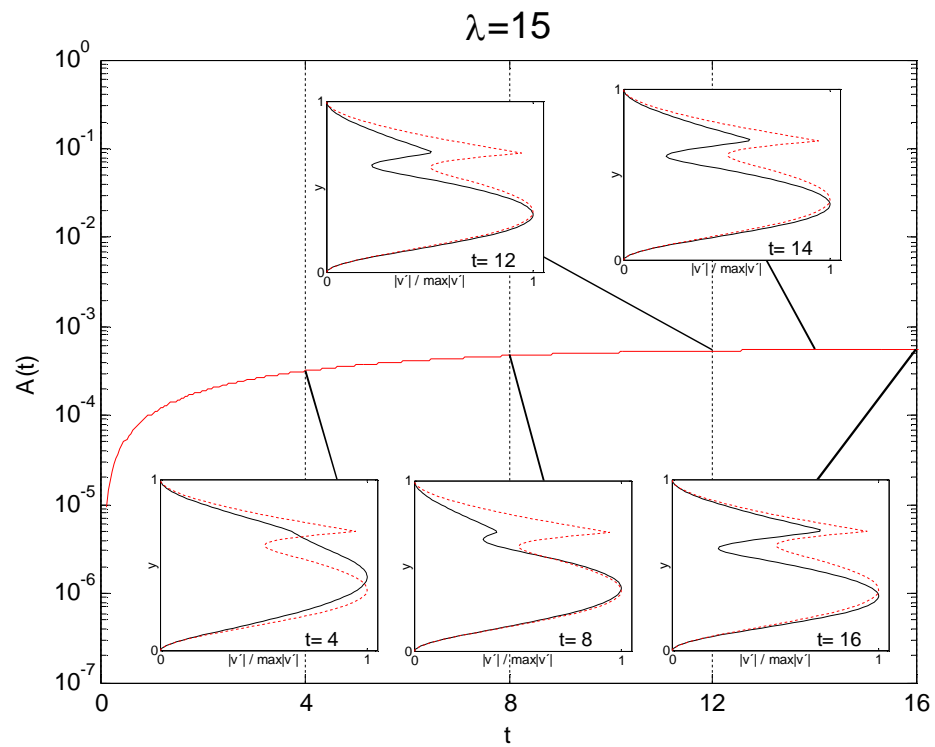


Figura 6.16: Evolução temporal da amplitude de onda ( $\lambda=15$ ). Perfis de magnitude de  $v'$  (curva contínua preta) são comparados com a teoria linear (curva tracejada vermelha).

O transiente inicial observado na simulação pode ocorrer, mesmo para amplitudes muito pequenas das ondas devido a mecanismos lineares de transferência de energia entre ondas e o escoamento base, conforme descrito no livro de Schmid & Henningson (2001). Como no presente trabalho, esse crescimento transiente se restringe a tempos curtos e amplitudes muito pequenas, o comportamento das perturbações nesse regime não foi investigado em detalhe.

Na seção seguinte o enfoque é dado a região de crescimento exponencial das perturbações. Nessa região a amplitude das ondas ainda é muito pequena, de modo que a transferência de energia entre os modos é desprezível e os resultados podem ser comparados com modelos baseados na teoria linear. Para complementar a informação acerca das ondas simuladas nesse regime, são apresentadas a seguir comparações quantitativas com a teoria linear.

### 6.3 Comparação com a Teoria Linear

A Tabela 6.4 mostra uma comparação entre as taxas de amplificação e velocidades de fase das ondas simuladas e previstas pela teoria. Pode-se observar que quase todos os casos apresentam boa concordância com a teoria, com exceção das ondas longas  $\lambda=15$ , ( $h_{eq}=0,558$  e  $h_{eq}=0,7$ ). Os menores erros relativos são observados para a velocidade de fase. Isso era esperado, uma vez que esse parâmetro é menos sensível a erros da simulação, apresentando menor influência do número de nós como mostrado anteriormente.

A maior dificuldade na simulação desse tipo de problema é a obtenção de boa concordância para as taxas de amplificação. Observa-se na Tabela 6.4 que os erros relativos obtidos para esse parâmetro ficaram dentro de  $\pm 10\%$ , na maioria dos casos com ondas curtas. Nos casos com ondas longas, desvios significativos foram observados. Nesses casos, a taxa de crescimento das ondas é muito baixa, de modo que pequenos erros absolutos implicam em elevados erros relativos. Adiciona-se a isso, a dificuldade de simular essas ondas por tempos longos, sem que outros modos atinjam amplitudes elevadas e modifiquem, por meio de interações não-lineares, a taxa de crescimento dessas ondas. Logo, pode-se considerar a concordância observada entre as taxas de amplificação como satisfatória.

As diferenças em relação das taxas de amplificação eram de alguma forma esperadas no sentido que este parâmetro é muito sensível a metodologia

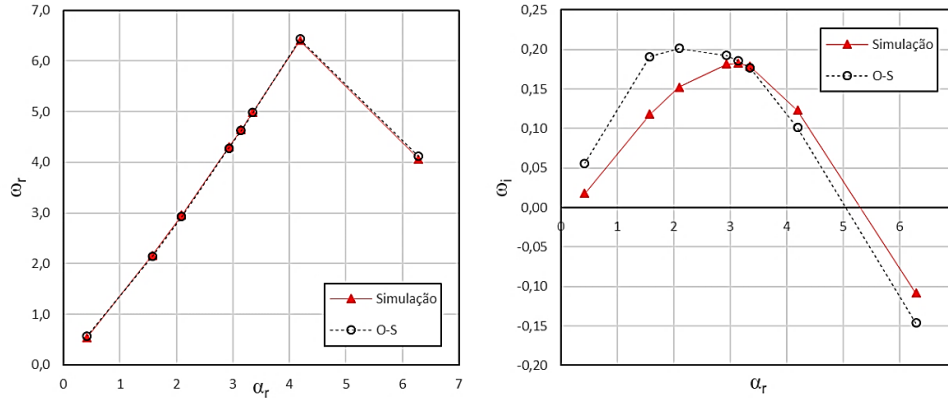
utilizada na simulação. A difusão numérica do método VOF, por exemplo, pode gerar uma viscosidade artificial (Prosperetti & Tryggvason, 2007). Isso poderia explicar a subestimação das taxas de crescimento obtidas. No entanto, em alguns casos as amplificações obtidas foram maiores do que as teóricas não justificando a única ação da difusão numérica.

Tabela 6.4: Resultados comparativos dos casos perturbados.

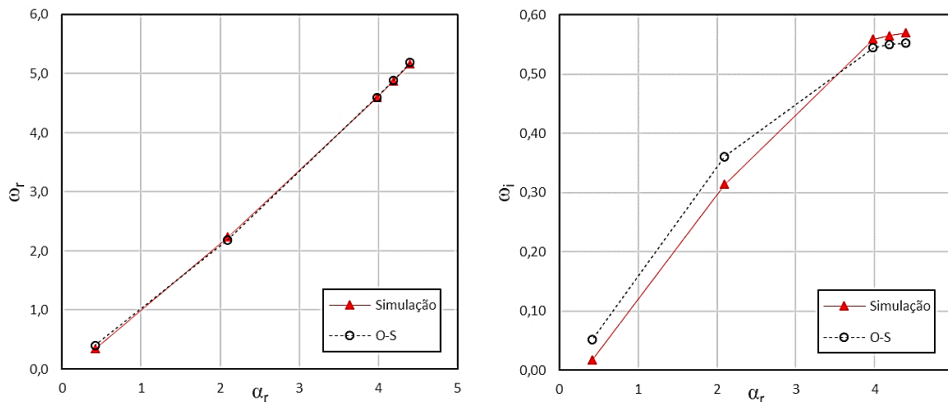
Caso	Domínio L	Número de onda ( $\alpha_r$ )	Velocidade de fase ( $c_p$ )		Erro relativo (%)	Taxa de amplificação ( $\omega_i$ )		Erro relativo (%)
			Simulação	O-S		Simulação	O-S	
$h_{eq} = 0,558$	1,5	4,189	1,5298	1,5358	-0,39	0,1230	0,1012	21,55
	1,875	3,351	1,4893	1,4876	0,11	0,1787	0,1763	1,36
	2,143	2,932	1,4665	1,4597	0,47	0,1814	0,1923	-5,69
	3	2,094	1,4141	1,3977	1,18	0,1521	0,2012	-24,41
	4	1,571	1,3771	1,3651	0,88	0,1179	0,1910	-38,28
	15	0,419	1,2889	1,3579	-5,08	0,0176	0,0557	-68,42
	1	6,283	0,6468	0,6556	-1,33	-0,1086	-0,1460	-25,66
$h_{eq} = 0,7$	1,429	4,398	1,1745	1,1793	-0,41	0,5694	0,5519	3,17
	1,5	4,189	1,1639	1,1679	-0,34	0,5647	0,5502	2,64
	1,579	3,979	1,1536	1,1562	-0,23	0,5588	0,5445	2,62
	3	2,094	1,0664	1,0452	2,03	0,3141	0,3606	-12,89
	15	0,419	0,8172	0,9502	-13,99	0,0180	0,0523	-65,59

As Figuras 6.17 e 6.18 comparam os resultados da Tabela 6.4 para os dois casos  $h_{eq}=0,558$  e  $h_{eq}=0,7$ , respectivamente. As figuras (a) correspondem as variações da frequência angular  $\omega_r=2\pi c_p/\lambda$  e as figuras (b) correspondem as taxas de amplificação  $\omega_i$ , ambas as grandezas em função do número de onda  $\alpha_r=2\pi/\lambda$ . Nota-se que, nos dois casos avaliados, os resultados da frequência angular têm excelente concordância com os resultados teóricos. No entanto, no caso  $h_{eq}=0,558$ , a taxa de amplificação é subestimada para ondas com comprimentos maiores do que  $\lambda=2$  ( $\alpha_r<3,14$ ) e sobrestimada para ondas com comprimentos menores ( $\alpha_r>3,14$ ). No caso  $h_{eq}=0,7$  acontece a mesma situação para um comprimento ao redor de  $\lambda=1,8$  ( $\alpha_r\approx 3,5$ ).

Analisando os resultados, observa-se que, de fato, existem algumas diferenças entre as taxas de amplificação obtidas a partir das simulações e as obtidas através da solução das equações de Orr-Sommerfeld. A razão para essa diferença ainda não é clara. Algumas conjecturas foram apresentadas, mas nenhuma conclusão definitiva foi obtida. Apesar de essas diferenças existirem, estas são relativamente pequenas e a física das ondas parece ser bem capturada pelas simulações.



a) Frequência angular vs número de onda. b) Taxa de amplificação vs número de onda.  
 Figura 6.17: Comparação das simulações e teoria linear, caso  $h_{eq}=0,558$ . a) Frequência angular vs número de onda. b) Taxa de amplificação vs número de onda.



a) Frequência angular vs número de onda. b) Taxa de amplificação vs número de onda.  
 Figura 6.18: Comparação das simulações e teoria linear, caso  $h_{eq}=0,7$ . a) Frequência angular vs número de onda. b) Taxa de amplificação vs número de onda.

PUC-Rio - Certificação Digital N° 1313508/CA

Cabe ressaltar que, apesar da ferramenta de simulação numérica utilizada ser comercial, não se encontra na literatura um teste exaustivo sobre a sua capacidade de capturar, com precisão, os estágios lineares de ondas interfaciais. Por isso, foi necessário realizar uma validação cuidadosa. A importância dessa etapa se torna clara, se for considerado o fato de que ondas de instabilidade, em camadas limite de escoamentos monofásicos, não são bem capturadas por ferramentas comerciais. Naqueles casos, são necessários esquemas numéricos de alta ordem para que a física do problema seja recuperada pela simulação (Zhong & Tatineni, 2003). No entanto, estudos disponíveis na literatura (Valluri et al., 2008; Valluri et al., 2010) mostram que esquemas de segunda ordem no tempo e terceira no espaço, como utilizados neste trabalho, são suficientes para a obtenção precisa da taxa de amplificação para escoamentos bifásicos. Sendo

assim, considera-se que os resultados obtidos foram satisfatórios e permitem investigar os diferentes estágios da evolução de ondas interfaciais em um canal.

Na seção a seguir são avaliadas outras informações que caracterizam o comportamento das ondas e os resultados dos diferentes casos são comparados.

## 6.4 Evolução das Fases

A evolução das fases (ângulo) das ondas simuladas é mostrada na Figura 6.19. Na Figura 6.19a, a faixa de tempo escolhida para o caso com altura de equilíbrio igual a 0,558, foi de  $0 \leq t \leq 25$ . Já para a apresentação da evolução de fases correspondente as ondas do caso com altura de equilíbrio igual a 0,7, selecionou-se a faixa de tempo de  $0 \leq t \leq 15$  (Figura 6.19b). A fase é obtida através da análise de Fourier, conforme detalhado no Capítulo 5. As curvas foram corrigidas de forma a apresentar ciclos completos de  $2\pi$ . Para fins de comparação, também são mostradas nas figuras a evolução das fases prevista pela teoria linear. Após o transiente inicial, observa-se uma variação linear, concordando com a teoria linear. A inclinação dessas linhas fornece a frequência angular da onda correspondente.

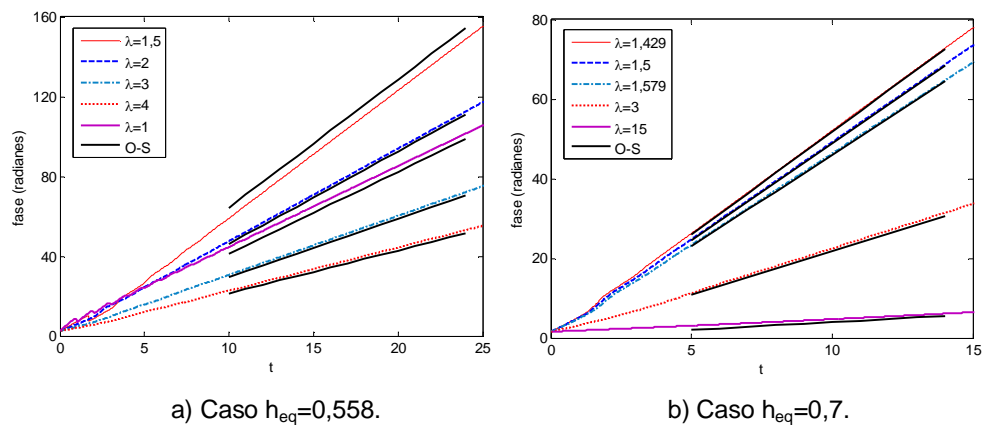


Figura 6.19: Evolução temporal das fases das ondas avaliadas. a) Caso  $h_{eq}=0,558$ .  
b) Caso  $h_{eq}=0,7$ .

## 6.5 Resumo do Capítulo

Dois casos gerais foram avaliados. O caso com ondas instáveis de taxas de amplificação relativamente baixas ( $h_{eq}=0,558$ ) e o caso mais sensível com ondas instáveis com taxas maiores ( $h_{eq}=0,7$ ). Ondas de diferentes comprimentos

(relativamente curto, médio e longo) foram analisadas em cada caso. Foram avaliados casos perturbados artificialmente com uma amplitude inicial pré-determinada e um caso não perturbado que evolui a partir dos níveis do ruído numérico da interface. A ordem de amplitude da perturbação inicial é limitada pelo ruído numérico do escoamento base condicionando e não permitindo utilizar amplitudes menores do que  $10^{-6}$ .

As simulações mostraram que foi possível capturar bem a evolução linear de perturbações artificiais de ordem infinitesimal através de dois comportamentos. Um regime transiente algébrico inicial (ou não modal) que tem intervalos de tempos curtos de evolução, seguido de um regime exponencial (modal) associado a intervalos de tempos relativamente longos de evolução. Este último regime corresponde à teoria linear utilizada na comparação de resultados. Assim, obter um escoamento base com baixo ruído numérico é essencial (condição limitada pelo simulador, ordem dos esquemas utilizados, etc.) para capturar a faixa exponencial, a qual é formada após um transiente inicial que surge imediatamente após a introdução da perturbação.

Campos das flutuações e perfis de magnitude de  $v'$  mostraram ligeiras diferenças entre simulações e predições da teoria linear. Estas diferenças afetam as taxas de amplificação obtidas, mas excelentes resultados são encontrados para as velocidades de fase. Os resultados das velocidades de fase vêm da evolução das fases das ondas, que estão em excelente concordância com as previsões teóricas.

## 7 Estágios Não Lineares

No presente capítulo, continua-se a analisar a evolução das ondas interfaciais, porém, aqui, investiga-se o comportamento dessas ondas em estágios não lineares. Os escoamentos base utilizados nas análises do presente capítulo são os mesmos já utilizados no capítulo anterior. Inicialmente, são consideradas algumas ondas estudadas na análise linear, com o propósito de se obter um limiar de amplitude, que marca o início dos estágios onde efeitos não lineares são relevantes. Isso foi necessário, pois ainda não existe na literatura um consenso acerca desse limiar. Em seguida, são apresentados os campos das flutuações e perfis de magnitude de  $v'$  nas faixas de evolução não linear. Isto permite observar as mudanças das ondas em relação ao comportamento linear.

Neste capítulo, considera-se também, a interação entre ondas com diferentes comprimentos. O objetivo é avaliar os principais mecanismos de transferência de energia entre diferentes ondas. São considerados casos que favorecem a aparição de harmônicos, subharmônicos, interação onda curta – onda longa, interação de ondas com frequências próximas (modulação), um caso composto de perturbações com vários comprimentos de onda, assim como um caso perturbado na forma de um pacote de ondas. Esses dois últimos casos se aproximam da situação “natural” onde perturbações com diferentes frequências coexistem no escoamento. O capítulo termina com um resumo das principais conclusões atingidas.

Uma matriz contendo um resumo dos casos estudados no presente capítulo é apresentada na Tabela 7.1.

### 7.1 Limiar de Estabilidade Linear – Testes com Canal Curto

É importante ressaltar que a evolução das ondas avaliadas no capítulo anterior permaneceu restrita a uma faixa de amplitudes muito baixa, na qual os efeitos não lineares tendem a ser desprezíveis. Uma possível forma de se estimar, ainda que de modo grosseiro, um limiar de amplitude a partir do qual os efeitos não lineares deixam de ser desprezíveis é através do monitoramento do



componente médio do escoamento (modo zero de Fourier). No regime linear, a transferência de energia do escoamento base para as ondas é o mecanismo dominante e a resposta das ondas sobre o escoamento base, desprezível. No entanto, no regime não linear, a resposta das ondas pode alterar o escoamento base (Schmid & Henningson, 2001).

Tabela 7.1: Matriz resumo das ondas avaliadas.

Análise	Estabilidade	Caso	Teste	Tamanho do domínio LxH	$\lambda$ (perturbação)							
					Fundamental	Subharmônico	Onda longa	Modulação de ondas ( $\Delta\alpha$ )		Banda larga [ $\alpha_i; \alpha_f$ ]		
								$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_f$	$\lambda_i$	
Não Linear	Temporal	$h_{eq} = 0,558$	1	1,5x1	1,5	---	---	---	---	---	---	---
			2	1,875x1	1,875	---	---	---	---	---	---	---
			3	2x1	2,0	---	---	---	---	---	---	---
			4	2,143x1	2,143	---	---	---	---	---	---	---
			5	3x1	3,0	---	---	---	---	---	---	---
			6	4x1	4,0	---	---	---	---	---	---	---
			7	15x1	15,0	---	---	---	---	---	---	---
			8	30x1	2,0	---	---	---	---	---	---	---
			9	8x1	2,0	4,0	---	---	---	---	---	---
			10	30x1	2,0	---	15,0	---	---	---	---	---
			11	30x1	---	---	---	2,143	1,875	---	---	---
			12	30x1	---	---	---	---	---	2,5	1,667	---
		$h_{eq} = 0,7$	1	1,429x1	1,429	---	---	---	---	---	---	---
			2	1,5x1	1,5	---	---	---	---	---	---	---
			3	1,579x1	1,579	---	---	---	---	---	---	---
			4	3x1	3,0	---	---	---	---	---	---	---
			5	15x1	15,0	---	---	---	---	---	---	---
			6	30x1	1,5	---	---	---	---	---	---	---
			7	30x1	1,5	3,0	---	---	---	---	---	---
			8	30x1	1,5	---	15,0	---	---	---	---	---
9	30x1	---	---	---	1,579	1,429	---	---	---			
10	30x1	---	---	---	---	---	1,765	1,304	---			

As Figuras 7.1 e 7.2 apresentam a evolução do componente de frequência zero em relação ao tempo. Nessa análise são consideradas ondas com comprimentos  $\lambda$  iguais a  $\lambda = 1,5; 2; 3$  e  $4$  para o caso  $h_{eq}=0,558$  (Fig. 7.1) e  $\lambda = 1,5$  e  $3$  para o caso  $h_{eq}=0,7$  (Fig. 7.2). A evolução dos quatro primeiros harmônicos também é mostrada para fins referência. Em cada figura, o eixo vertical da direita corresponde à amplitude do componente de frequência zero  $A_F(t)$ , enquanto que o eixo da esquerda (em escala logarítmica) corresponde à amplitude das ondas.

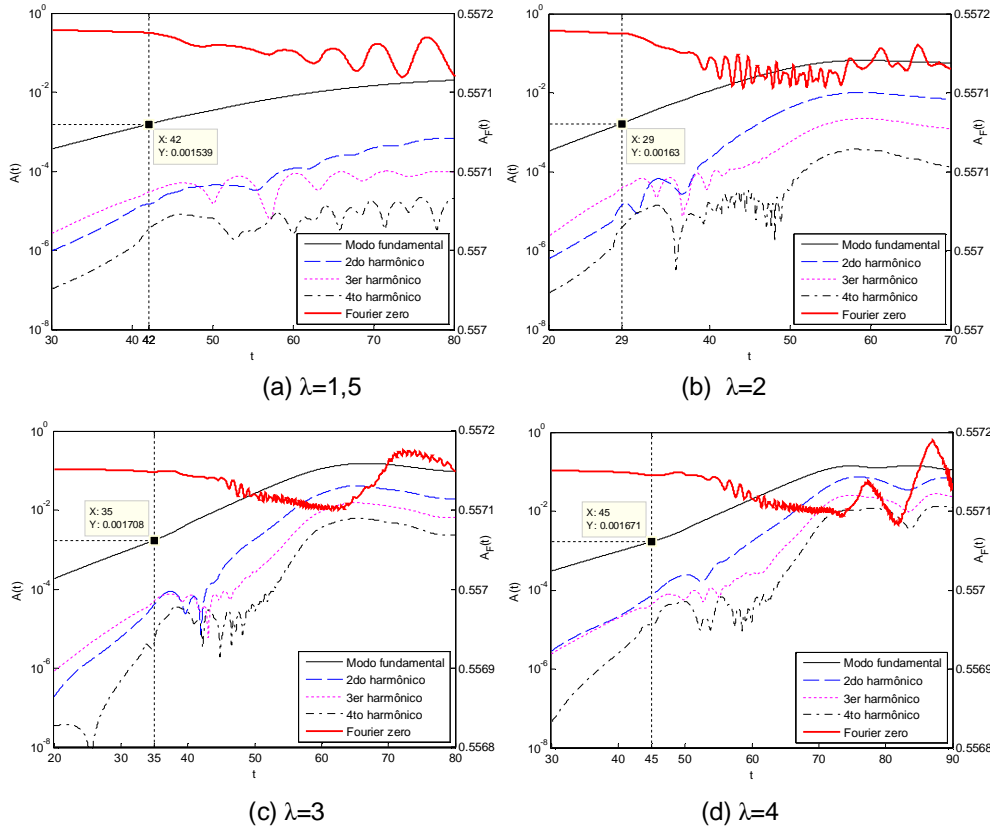


Figura 7.1: Evolução do componente de frequência zero, caso  $h_{eq}=0,558$ . Modos: (a)  $\lambda=1,5$ ; (b)  $\lambda=2$ ; (c)  $\lambda=3$ ; (d)  $\lambda=4$ .

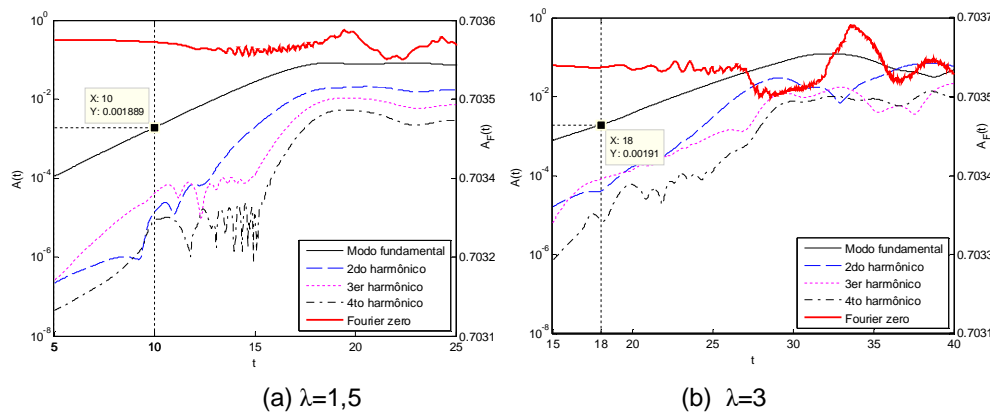


Figura 7.2: Evolução do componente de frequência zero, caso  $h_{eq}=0,7$ . Modos: (a)  $\lambda=1,5$ ; (b)  $\lambda=3$ .

Em todos os casos ilustrados nas Figs. 7.1 e 7.2, pode-se observar que o modo correspondente à média é aproximadamente constante até um instante particular (marcado por linhas tracejadas nas figuras). A partir deste instante, a mudança do componente de frequência zero torna-se mais evidente. Tal mudança também coincide com um ligeiro aumento da taxa de amplificação da onda fundamental, que é mais perceptível nas ondas  $\lambda=3$  e  $\lambda=4$  do caso

$h_{eq}=0,558$  (Figura 7.1, c e d). A partir daí, os harmônicos iniciam um comportamento oscilatório que indicam uma mudança na dinâmica do sistema. Em todos os casos é observado que a amplitude do modo fundamental, onde essa sequência de eventos se inicia, fica em torno de  $A(t)\approx 2\times 10^{-3}$ . Sendo assim, associou-se o limiar de instabilidade com amplitudes de onda da ordem de 0,2% da altura do canal (H).

Para pôr em contexto o limiar de amplitude encontrado, realizou-se uma comparação com o critério proposto por Ursell (1953). Ursell (1953) realizou uma análise dos modelos disponíveis na época e para o caso de ondas longas, concluiu que a relação  $2A\lambda^2/h^3$  deve ser muito menor que a unidade, para que a teoria linear seja válida. Na relação de Ursell,  $A$  é a amplitude da onda,  $\lambda$  o comprimento dessa onda, e  $h$  é a altura de líquido. Esse parâmetro, chamado depois Número de Ursell ( $Ur$ ), além de determinar a condição de aplicabilidade da teoria linear, também indica o grau de não linearidade de ondas gravitacionais longas (Röbke & Vött, 2017). A faixa do  $Ur$  é dada por (Svendsen, 2006; Röbke & Vött, 2017):

$$Ur \ll 1 \quad (\text{teoria linear para onda de água rasa é aplicável}) \quad (7.1)$$

$$Ur \gg 1 \quad (\text{não linearidade e dispersão devem ser considerados}) \quad (7.2)$$

Das condições dadas, pode-se assumir que a fronteira entre os regimes linear e não linear é atingida quando  $Ur$  é igual a 1. Assumindo  $Ur=1$  e considerando os parâmetros das ondas avaliadas nos casos  $h_{eq}=0,558$  e  $h_{eq}=0,7$ , calculou-se o limiar de amplitude previsto pelo modelo de Ursell ( $A_{Ur}$ ). Na Figura 7.3, são apresentados os valores do limiar de amplitude obtidos para cada onda. No caso de ondas curtas e médias, o limiar de instabilidade linear dado pelo modelo fica acima do que foi sugerido no presente trabalho. Para ondas longas o critério de Ursell é mais conservador.

De acordo com as Figuras 7.4 e 7.5, o número de Ursell dá uma indicação razoável do início do regime não linear somente nos casos pouco instáveis. Nos casos mais instáveis o critério de Ursell superestima o limiar de amplitude para início da não linearidade, conforme pode-se observar nas Figuras 7.5a e 7.5b. Sendo assim, optou-se por utilizar como referência um limiar fixo e igual a  $A=2\times 10^{-3}$ .

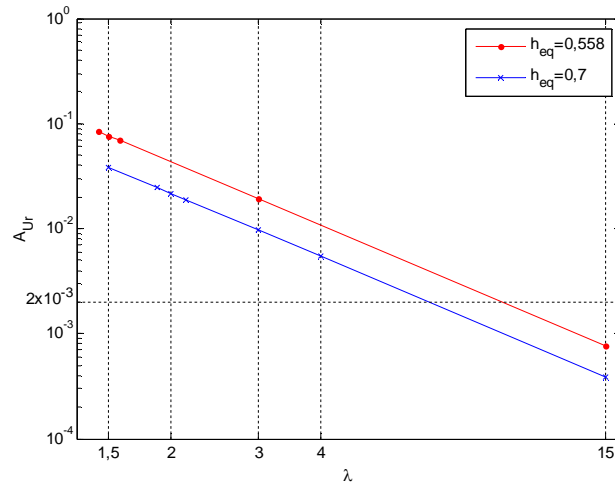


Figura 7.3: Amplitude versus comprimento de onda, na condição  $Ur=1$ . No caso de ondas curtas e médias, o limiar de instabilidade linear é sobrestimado. No caso de onda longa, esse limiar, é subestimado.

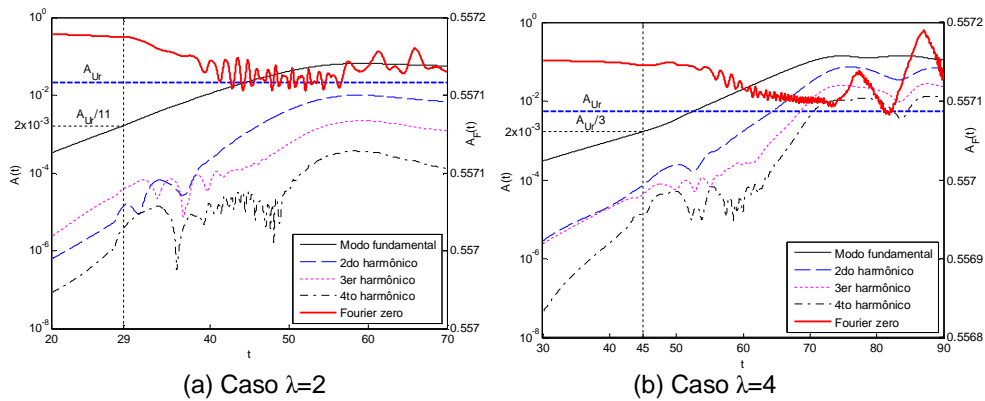


Figura 7.4: Relação entre amplitudes  $A_{Ur}$  e  $A=2 \times 10^{-3}$ , para  $h_{eq}=0,558$ . Amplitude  $A_{Ur}$  é obtida a partir do número de Ursell na condição  $Ur=1$ . a) Caso  $\lambda=2$ , o valor  $A_{Ur}$  é 11 vezes maior do limiar  $A=2 \times 10^{-3}$ . b) Caso  $\lambda=4$ , o valor  $A_{Ur}$  é 3 vezes maior do limiar  $A=2 \times 10^{-3}$ .

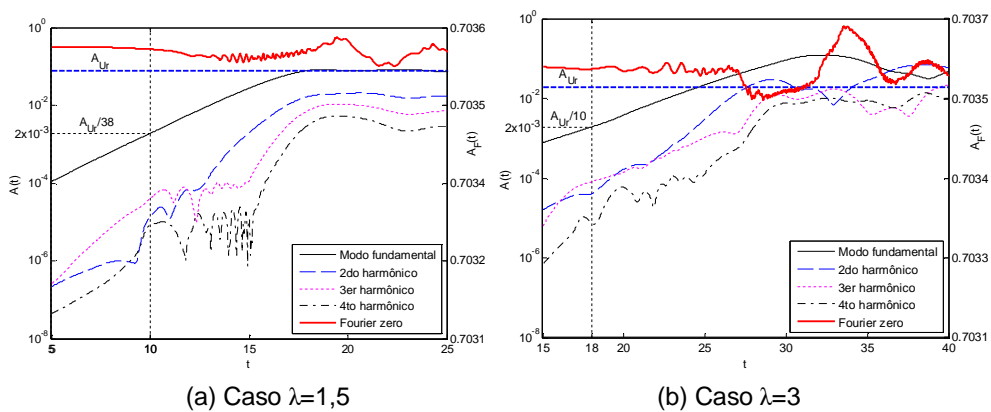


Figura 7.5: Relação entre amplitudes  $A_{Ur}$  e  $A=2 \times 10^{-3}$ , para  $h_{eq}=0,7$ . Amplitude  $A_{Ur}$  é obtida a partir do número de Ursell na condição  $Ur=1$ . a) Caso  $\lambda=1,5$ , o valor  $A_{Ur}$  é 38 vezes maior do limiar  $A=2 \times 10^{-3}$ . b) Caso  $\lambda=3$ , o valor  $A_{Ur}$  é 10 vezes maior do limiar  $A=2 \times 10^{-3}$ .

É possível que o limiar encontrado no presente trabalho possa ser o adequado para sistemas em condições semelhantes às analisadas aqui, onde não há consideráveis diferenças nas razões de densidades e viscosidades, e onde os efeitos capilares tem influência. Para outros sistemas o limiar de amplitude dos efeitos lineares possivelmente é diferente, de acordo com o critério Ursell.

## 7.2

### **Evolução Não Linear - Caso Fracamente Instável ( $h_{eq}=0,558$ )**

Nesta seção analisa-se o comportamento de um caso fracamente instável ( $h_{eq}=0,558$ ) considerando ondas com comprimentos  $\lambda$ : curto, médio e longo:

- i) ondas curtas:  $\lambda = 1,5; 1,875; 2$  e  $2,143$ ;
- ii) ondas médias:  $\lambda = 3$  e  $4$ ;
- iii) ondas longas:  $\lambda = 15$ .

As ondas com comprimento  $\lambda = 2, 4$  e  $15$  são apresentadas a seguir, entanto que as outras ondas, tendo um comportamento semelhante em cada grupo, são apresentadas no Apêndice C. Nas Figuras 7.6 e 7.7 apresenta-se a evolução temporal da amplitude de ondas  $\lambda=2$  e  $\lambda=4$ , respectivamente. Nas figuras é incluído, para alguns instantes de tempo, o campo da flutuação do componente vertical  $v'$ , normalizado pelo seu valor máximo referente ao instante considerado. Uma linha indicando a interface também foi incluída nas figuras. Além da faixa não linear, parte da faixa linear também é apresentada para referência. Em todos os casos, o campo mostrado no primeiro instante de tempo ainda corresponde à faixa linear. Analisando as faixas de tempo apresentadas nas figuras, pode-se observar que o crescimento da amplitude acima do limiar linear ( $A > 2 \times 10^{-3}$ ) ainda apresenta uma faixa de crescimento exponencial antes do início da saturação. Nota-se, também, que as flutuações  $v'$  mudam consideravelmente quando a oscilação da interface se torna perceptível. Nesta faixa, as velocidades máximas (positivas e negativas) ocorrem quando a interface passa por um ponto de inflexão. Enquanto, a menor velocidade ocorre na vizinhança onde a interface apresenta um pico ou um vale de amplitude. É observado que o comprimento das ondas influi nas amplitudes de saturação.

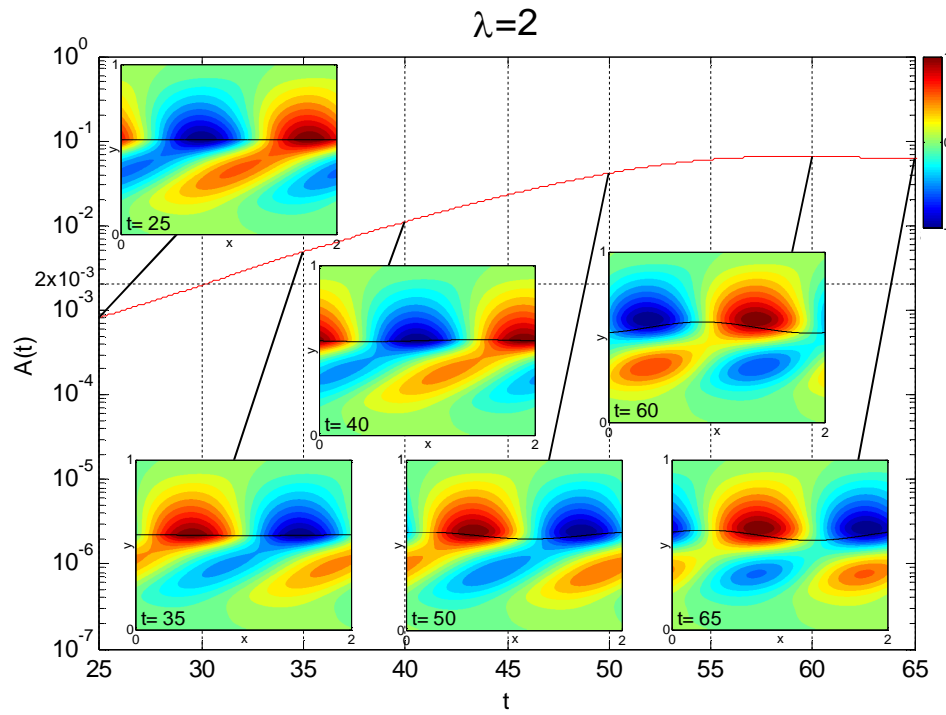


Figura 7.6: Evolução temporal da amplitude do modo fundamental ( $\lambda=2$ ). Caso  $h_{eq}=0,558$ . Instantes da flutuação  $v'$  mostram o comportamento qualitativo da onda.

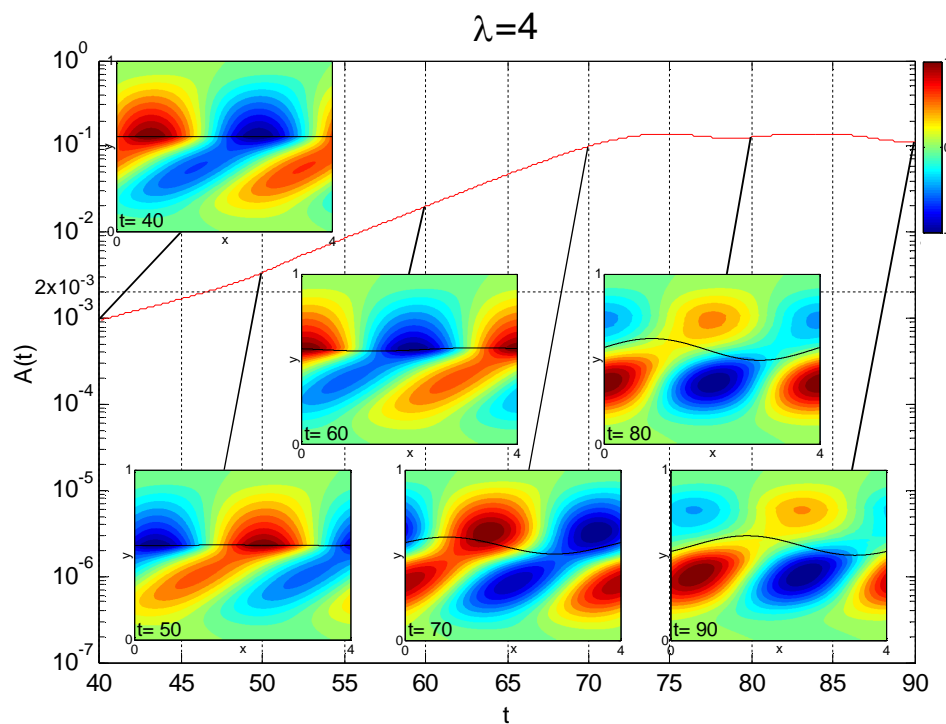


Figura 7.7: Evolução temporal da amplitude do modo fundamental ( $\lambda=4$ ). Caso  $h_{eq}=0,558$ . Instantes da flutuação  $v'$  mostram o comportamento qualitativo da onda.

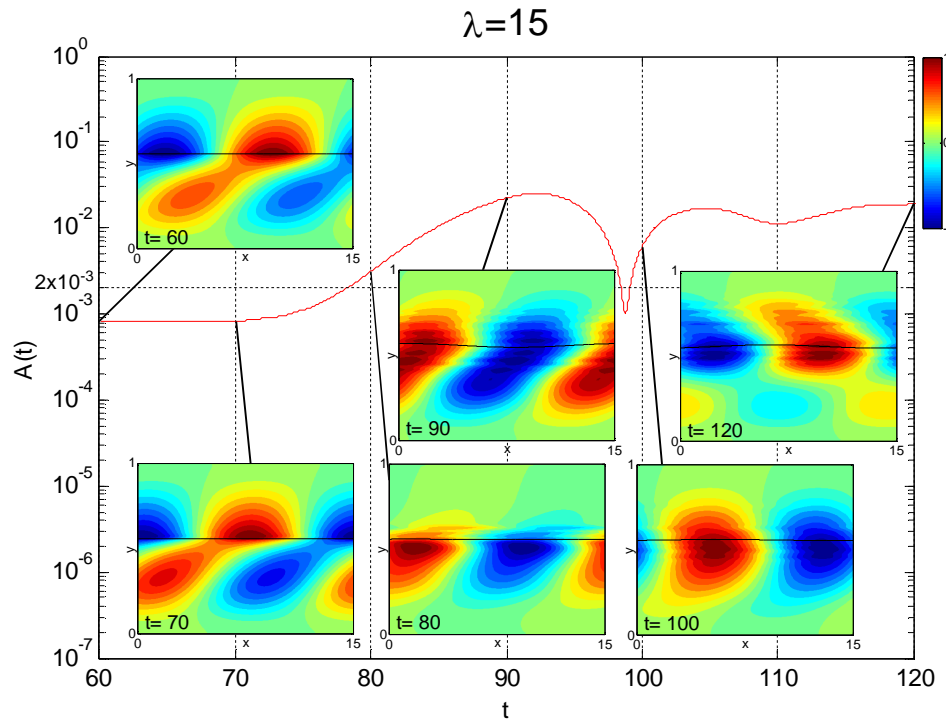


Figura 7.8: Evolução temporal da amplitude do modo fundamental ( $\lambda=15$ ). Caso  $h_{eq}=0,558$ . Instantes da flutuação  $v'$  mostram o comportamento qualitativo da onda.

O caso especial da onda longa ( $\lambda=15$ ), mostrado na Figura 7.8, apresenta a taxa de amplificação quase nula. Nesse caso o comportamento é bem diferente dos demais casos. A figura mostra um aumento súbito na taxa de amplificação, após a faixa de evolução linear. Após esse instante o campo da flutuação  $v'$  apresenta oscilações ao longo da direção normal à parede. Esta faixa provavelmente já é afetada pelo crescimento de outras ondas, mais instáveis e com comprimentos de onda mais curtos. Essas ondas mais curtas crescem a partir do ruído numérico e atingem rapidamente amplitudes maiores que o limiar da faixa linear.

Na mesma faixa e instantes avaliados anteriormente, são apresentados nas Figuras 7.9 à 7.11 para os diversos comprimentos de onda analisados, os perfis de magnitude de  $v'$  sendo realizada uma comparação com as previsões da teoria linear. Isto permite observar as mudanças nos perfis de  $v'$  decorrentes de efeitos não lineares. Nestas figuras, os perfis de magnitude de  $v'$ , obtidas na faixa linear, são traçadas com linha tracejada vermelha.

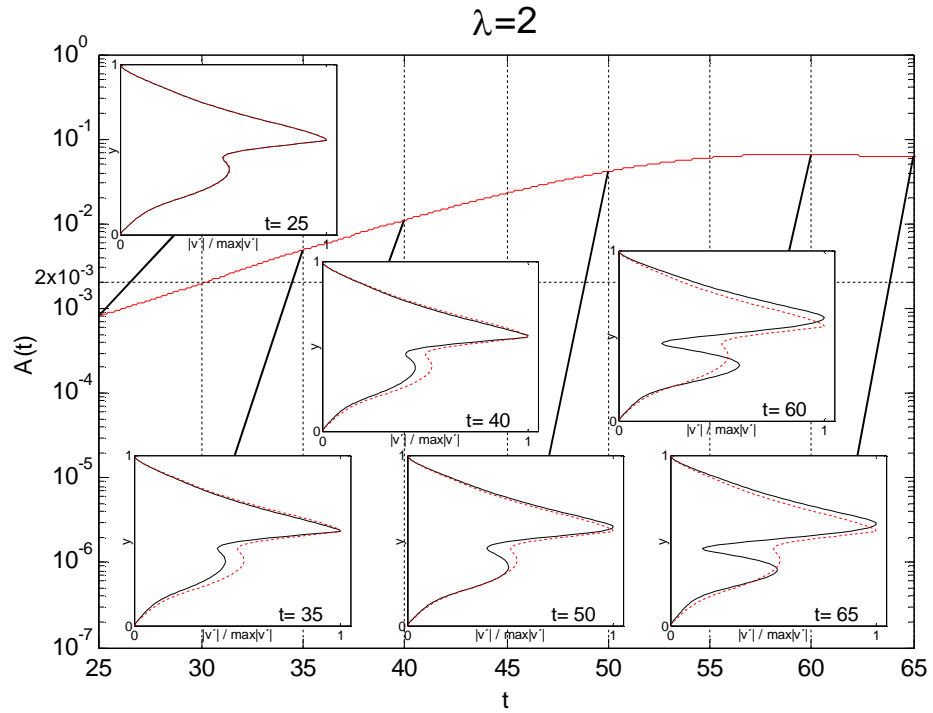


Figura 7.9: Evolução da amplitude para  $\lambda=2$ . Perfis de magnitude de  $v'$  (curva contínua preta) são comparados com o perfil de  $t=20$  (curva tracejada vermelha).

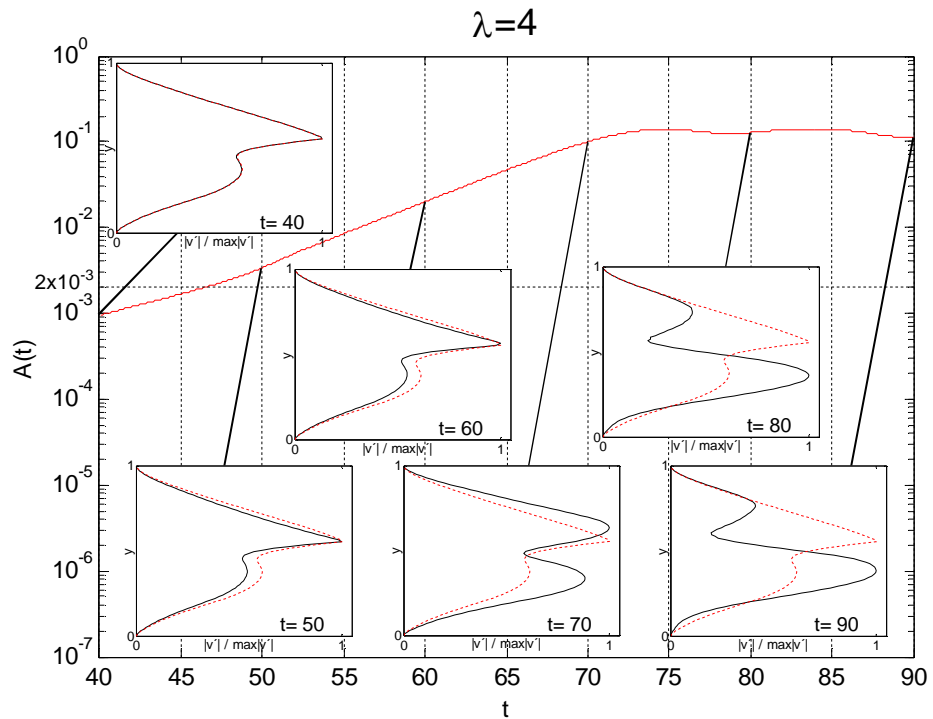


Figura 7.10: Evolução da amplitude para  $\lambda=4$ . Perfis de magnitude de  $v'$  (curva contínua preta) são comparados com o perfil de  $t=30$  (curva tracejada vermelha).



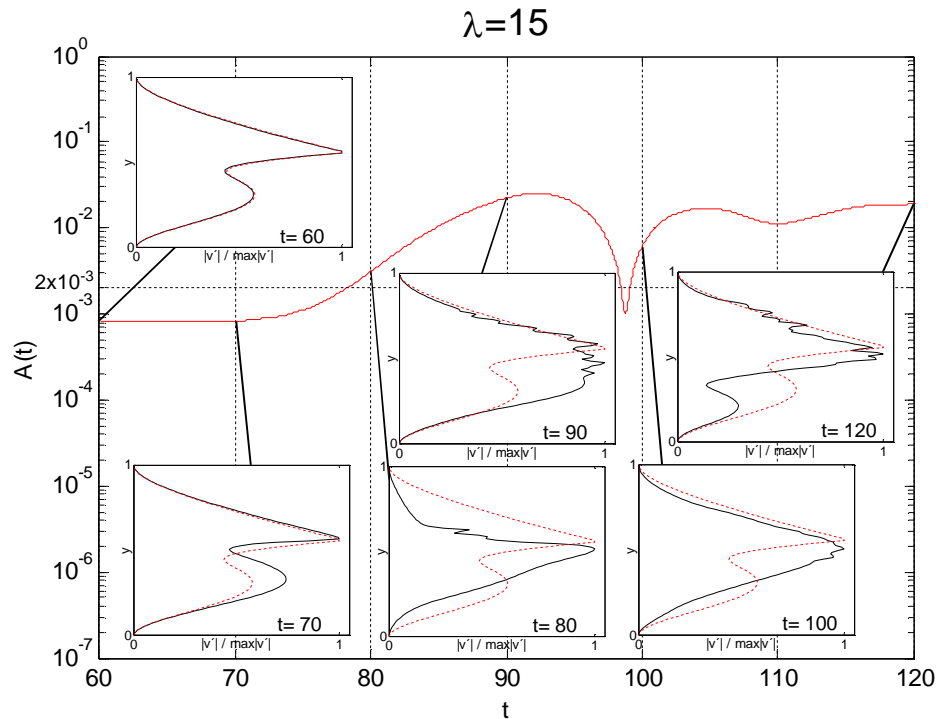


Figura 7.11: Evolução da amplitude para  $\lambda=15$ . Perfis de magnitude de  $v'$  (curva contínua preta) são comparados com o perfil de  $t=50$  (curva tracejada vermelha).

Nas Figuras 7.9 e 7.10, relacionadas às ondas curtas e médias, pode-se observar que em estágios próximos do limiar de amplitude da faixa linear ( $A > 2 \times 10^{-3}$ ), os perfis sofrem poucas alterações, sugerindo a existência de um estágio fracamente não linear. Nesses estágios, os perfis de magnitude de  $v'$  mostram que há uma perturbação máxima na interface, como consequência do modo instável ser interfacial (Barmak et al., 2016). Isso ocorre até o início da saturação das ondas. Depois desta faixa, o processo de saturação se inicia e os perfis de  $v'$  mudam consideravelmente. Após a saturação, os perfis permanecem diferentes da previsão linear. Nesse estágio, os perfis convergem para um novo padrão e não se observa uma nova tendência de mudança para instantes de tempo mais elevados. Isto pode ser verificado observando os dois últimos instantes mostrados em cada caso.

Na Figura 7.11 (onda longa  $\lambda=15$ ), observa-se que a faixa posterior ao crescimento linear é consideravelmente modificada em comparação com a faixa linear. Os perfis mostram que o formato linear é modificado ligeiramente antes do aumento abrupto da amplificação. Nos instantes finais o formato do perfil inicial é perdido completamente devido ao crescimento de outros componentes espectrais mais instáveis e a interação entre ondas longas e curtas.

### 7.3 Evolução Não Linear - Caso Instável ( $h_{eq}=0,7$ )

A fim de estabelecer se existe alguma mudança no comportamento não linear em relação ao caso menos instável, nesta seção é avaliado o caso com escoamento base mais instável  $h_{eq}=0,7$ .

Nesta seção são consideradas as ondas de comprimento: curto ( $\lambda=1,429; 1,5; 1,579$ ), médio ( $\lambda=3$ ) e longo ( $\lambda=15$ ) para analisar o caso instável com altura de equilíbrio do escoamento base  $h_{eq}=0,7$ . Os resultados referentes as ondas com comprimento  $\lambda=1,429$  e  $1,579$  são apresentados no Apêndice C. A seguir é avaliada a evolução temporal da amplitude e em alguns instantes, mostram-se os campos da flutuação  $v'$  e a linha da interface. Nas Figuras de 7.12 à 7.14, além da faixa não linear, também parte da faixa linear é exibida para fins de referência. Assim, pode-se observar melhor mudanças qualitativas que ocorrem na evolução das ondas.

Na série de Figuras de 7.12 e 7.13, relacionadas as ondas curtas e médias, o comportamento é bastante similar àquele do caso com escoamento fracamente instável. Aqui também, a saturação das ondas avaliadas ocorre em diferentes níveis de amplitude, similar ao que foi visto no caso menos instável. Os campos de flutuação de  $v'$  mudam somente quando a interface apresenta oscilação visível, como aconteceu nos casos avaliados na seção anterior.

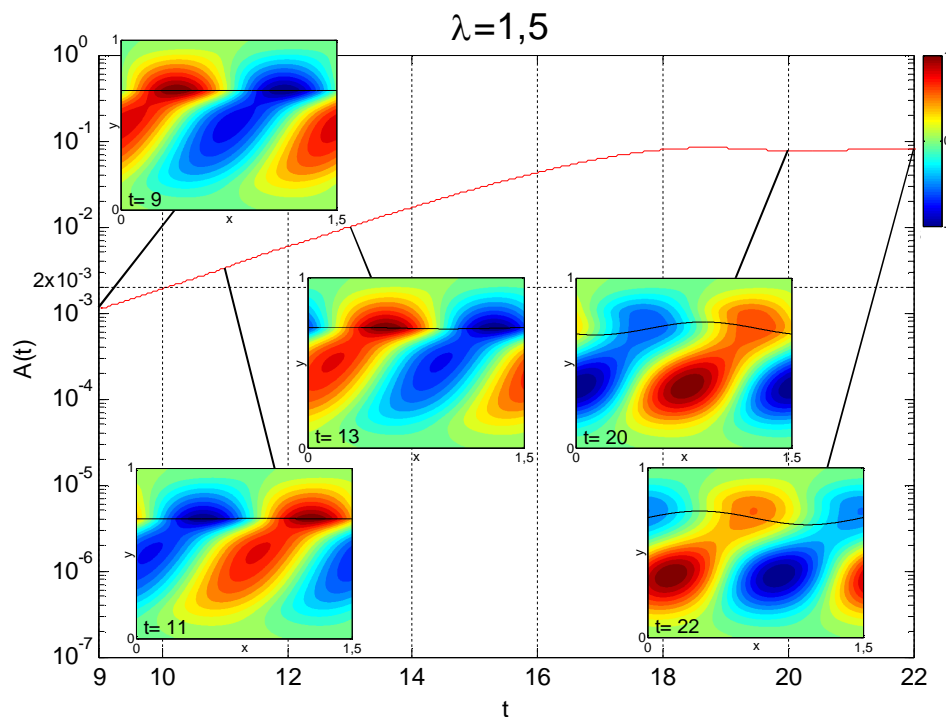


Figura 7.12: Evolução temporal da amplitude do modo fundamental ( $\lambda=1,5$ ). Caso  $h_{eq}=0,7$ . Instantes da flutuação  $v'$  mostram o comportamento qualitativo da onda.

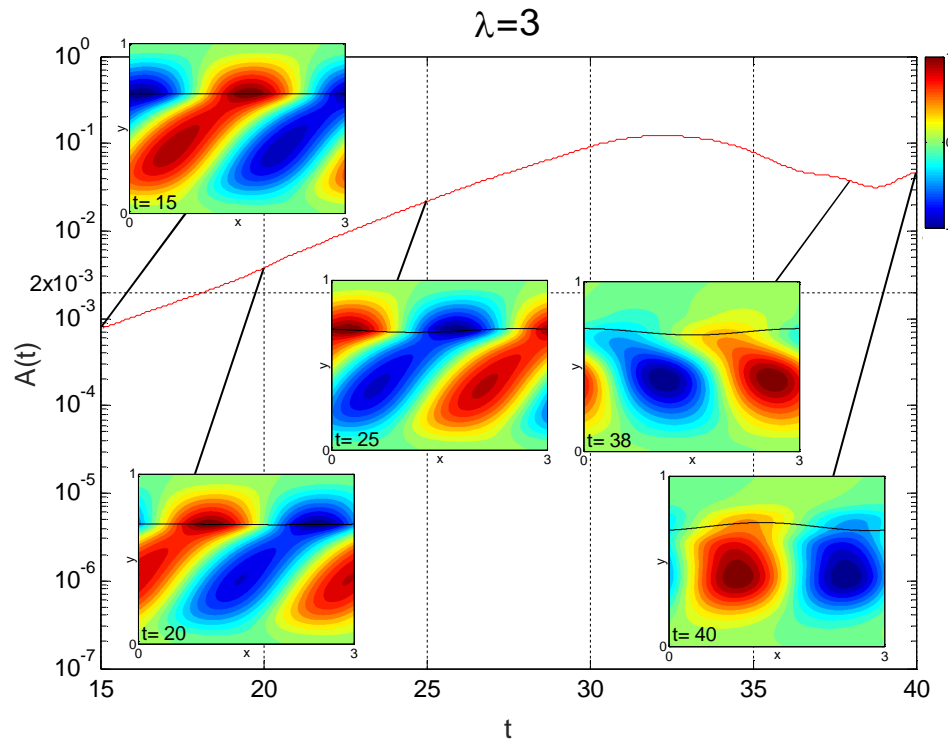


Figura 7.13: Evolução temporal da amplitude do modo fundamental ( $\lambda=3$ ). Caso  $h_{eq}=0,7$ . Instantes da flutuação  $v'$  mostram o comportamento qualitativo da onda.

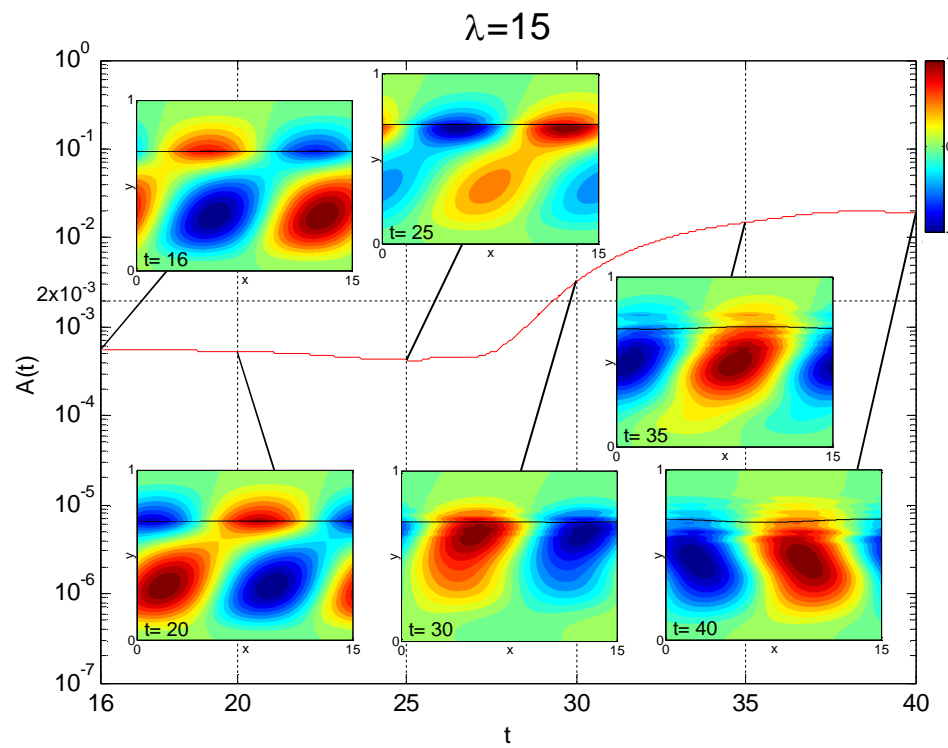


Figura 7.14: Evolução temporal da amplitude do modo fundamental ( $\lambda=15$ ). Caso  $h_{eq}=0,7$ . Instantes da flutuação  $v'$  mostram o comportamento qualitativo da onda.

A onda longa ( $\lambda=15$ ) apresentada na Figura 7.14 mostra um comportamento similar ao observado para a onda longa do caso  $h_{eq}=0,558$ . Aqui também, o campo da flutuação  $v'$  é afetado significativamente na faixa não linear até a saturação. A amplitude de saturação também é menor em relação dos casos de ondas curtas e médias. Conforme já sugerido, o crescimento de outras ondas mais instáveis provavelmente deve estar afetando a evolução das ondas longas. Essa conjectura é confirmada mais adiante no texto.

A seguir, na série de Figuras 7.15 à 7.17 são mostrados os perfis de magnitude de  $v'$ , para diferentes instantes de tempo. Como nos casos anteriores, os gráficos são apresentados em relação da evolução temporal da amplitude para facilitar a identificação do regime linear e não linear. Para enfatizar as mudanças causadas por efeitos não lineares os perfis são comparados com àqueles observados na faixa linear, os quais são traçados com linha tracejada vermelha.

Analisando as Figuras de 7.15 e 7.16 (ondas curtas e médias) pode-se observar que, nas amplitudes próximas do limiar linear  $A(t) > 2 \times 10^{-3}$ , os perfis de  $v'$  permanecem similar ao formato linear. Quando o processo de saturação inicia, os perfis mudam e tendem a um formato que se mantêm após a saturação.

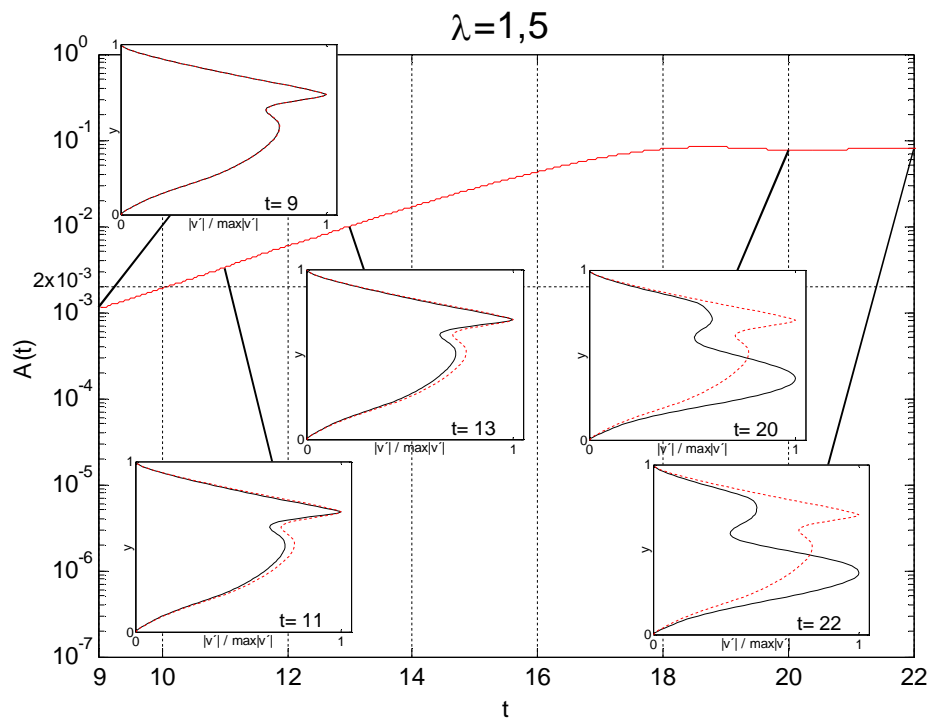


Figura 7.15: Evolução da amplitude para  $\lambda=1,5$ . Perfis de magnitude de  $v'$  (curva contínua preta) são comparados com o perfil de  $t=8$  (curva tracejada vermelha).

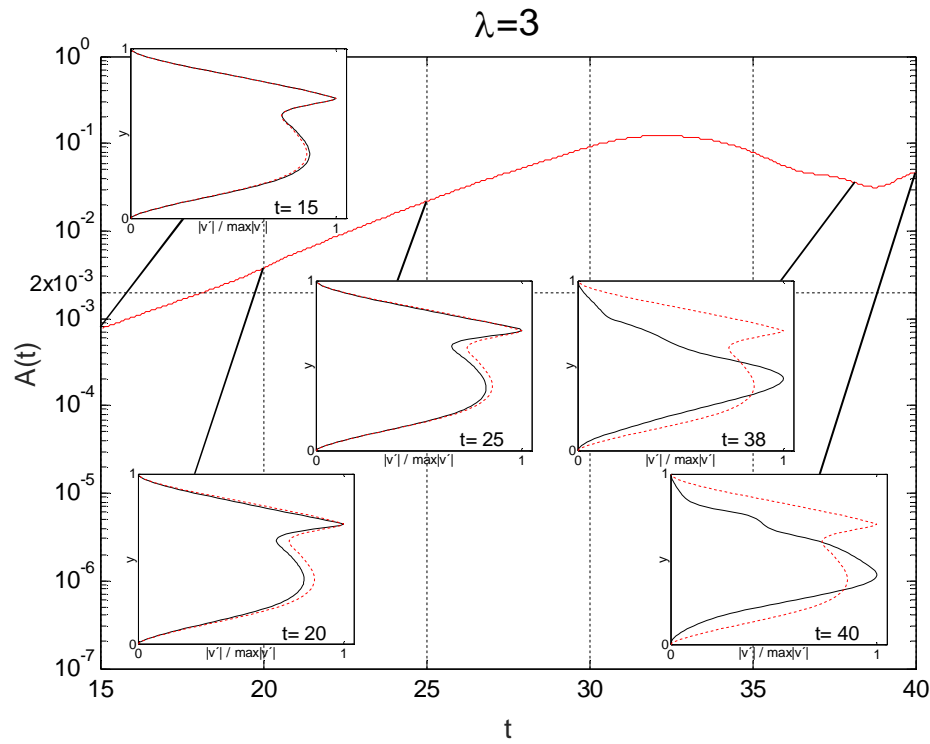


Figura 7.16: Evolução da amplitude para  $\lambda=3$ . Perfis de magnitude de  $v'$  (curva contínua preta) são comparados com o perfil de  $t=10$  (curva tracejada vermelha).

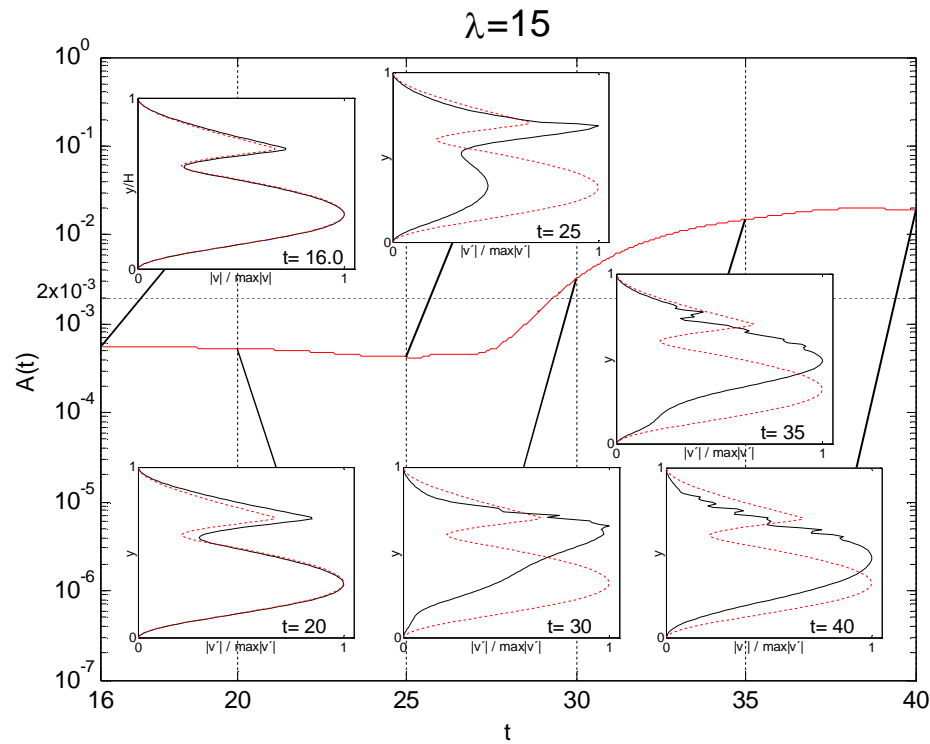


Figura 7.17: Evolução da amplitude para  $\lambda=15$ . Perfis de magnitude de  $v'$  (curva contínua preta) são comparados com o perfil de  $t=15$  (curva tracejada vermelha).

Observa-se também que o caso correspondente à onda com  $\lambda=3$ , ilustrado na Figura 7.16, começa a apresentar um comportamento diferente na faixa de saturação. A amplitude não apresenta uma saturação permanecendo constante e o perfil de  $v'$  passa a apresentar somente um pico na região inferior do fluido mais denso e menos viscoso. Note que para este caso, o campo de flutuação  $v'$  correspondente, ilustrado na Figura 7.13, é completamente alterado. Esta situação é similar aos casos que serão avaliados na seção 7.8.2 (Interação entre onda curta e seu subharmônico).

Para a onda longa ( $\lambda=15$ ), cujos resultados são mostrados na Figura 7.17, também nota-se que inicialmente, os perfis têm um formato similar àquele dos estágios lineares. Posteriormente, o formato dos perfis muda consideravelmente devido a interações com ondas mais instáveis que atingem amplitudes acima do limiar de  $2 \times 10^{-3}$ . Neste caso, oscilações nos perfis de magnitude de  $v'$ , assim como no campo respectivo da flutuação  $v'$  são claramente visíveis.

Exceto para as ondas longas  $\lambda=15$  (de baixa taxa de amplificação), todas as outras ondas avaliadas nos casos  $h_{eq}=0,558$  e  $h_{eq}=0,7$ , apresentaram um comportamento ligeiramente diferente daquele observado na faixa linear quando a amplitude excedeu o limiar de  $A \approx 2 \times 10^{-3}$ . Nos estágios finais as ondas atingiram saturação. Neste estágio, as ondas param de crescer e os perfis de  $v'$  têm um formato diferente em comparação à faixa linear.

Como mostrado nas Figuras 7.1 e 7.2, antes da saturação das ondas excitadas, os harmônicos dessas ondas já apresentam intensa atividade. Logo, para se ter uma visão maior dos efeitos não lineares devido ao crescimento da amplitude das ondas perturbadas, vamos analisar em detalhe a evolução dos seus harmônicos. O comportamento dos harmônicos foi observado em duas faixas, sendo uma relacionada com amplitudes abaixo do limiar de  $A=2 \times 10^{-3}$  e outra com amplitudes acima desse limiar.

#### **7.4 Evolução dos Harmônicos no Regime Linear– Testes com Canal Curto**

Na figura 7.18 são apresentados os casos com comprimento de canal  $L=2$  (Fig. 7.18a) e  $L=3$  (Fig. 7.18b) do caso com  $h_{eq}=0,558$ . Nestas figuras, apresenta-se a taxa de amplificação prevista pela teoria de Orr-Sommerfeld (O-S), juntamente com a evolução de quatro ondas perturbadas. Essas ondas possuem comprimentos que correspondem com os harmônicos de  $L=2$  e  $L=3$ , e são indicadas por  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$ ,  $\lambda_3$  e  $\lambda_4$ . Foi encontrado que quando as ondas são

perturbadas, com amplitudes da mesma ordem, elas se mostram independentes e têm crescimento/decaimento previsto pela teoria linear, como mostra a Figura 7.18. Pode-se observar que o comportamento das ondas linearmente estáveis (amplitude decrescente) muda quando a diferença de amplitudes é considerável (acima de duas ordens) em relação da onda instável de maior amplitude. Isso ocorre quando a amplitude de essa onda se encontra abaixo do limiar de  $2 \times 10^{-3}$ .

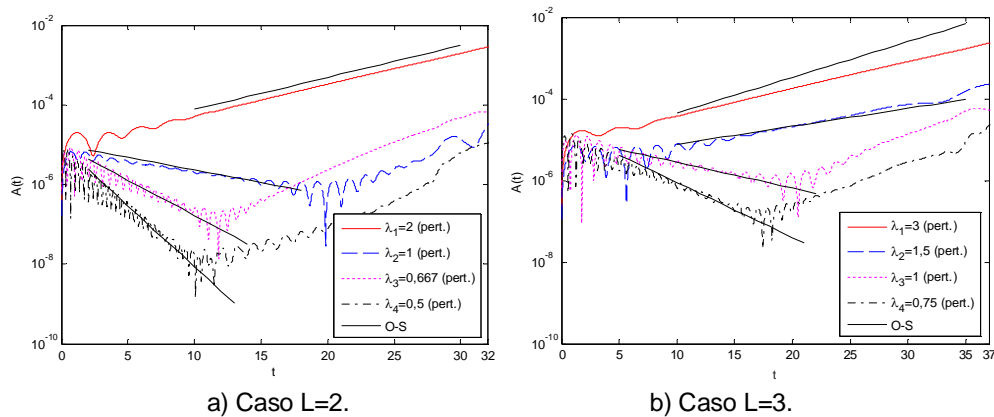


Figura 7.18: Evolução temporal da amplitude dos primeiros quatro harmônicos perturbados.  $h_{eq}=0,558$ . a) Caso  $L=2$ . b) Caso  $L=3$ .

### 7.5 Evolução dos Harmônicos na Região Não-Linear – Teste com Canal Curto

Para complementar a análise da evolução de harmônicos, a seguir avalia-se a faixa com amplitude da onda fundamental acima do limiar ( $A > 2 \times 10^{-3}$ ), isto é, avalia-se o comportamento harmônico quando a amplitude do modo fundamental está acima do limiar da faixa linear.

Para avaliar o regime não linear, as ondas mais instáveis dos casos  $h_{eq}=0,558$  ( $L=\lambda_0=2$ ) e  $h_{eq}=0,7$  ( $L=\lambda_0=1,5$ ), são consideradas. As Figuras 7.19 e 7.20 apresentam em (a) a evolução temporal da interface, em (b) a evolução da amplitude do espectro e finalmente em (c) a bicoerência, ilustrando a interação entre os modos. Em cada figura, três instantes de tempo são considerados para permitir uma melhor avaliação da evolução dos harmônicos. Apresenta-se nestas figuras a evolução dos quatro primeiros harmônicos ( $\alpha_0$ ,  $2\alpha_0$ ,  $3\alpha_0$  e  $4\alpha_0$ ) das ondas perturbadas.

Na Figura 7.19a, a interface está normalizada para mostrar como nos instantes finais ( $t=60$ ), o formato da onda muda em relação do primeiro instante mostrado ( $t=5$ ), apresentando variação mais intensa. Na Figura 7.19b é

apresentado o espectro espacial, indicando-se para referência, o limiar de estabilidade linear ( $A \approx 2 \times 10^{-3}$ ) assim como os números de onda  $\alpha_0$ ,  $2\alpha_0$ ,  $3\alpha_0$  e  $4\alpha_0$  correspondentes aos quatro primeiros harmônicos. A evolução do espectro espacial mostra que desde os instantes iniciais ( $t=5$ ), somente harmônicos da onda fundamental perturbada aparecem, ainda que com amplitudes muito menores do que a onda excitada. Neste instante, a bicoerência é nula, o que era esperado no estágio linear. Quando a amplitude da onda perturbada está acima do limiar linear de amplitude (instantes  $t=40$  e  $t=60$ ), os efeitos não lineares se tornam perceptíveis. A bicoerência mostrada na Figura 7.19c verifica coerência de fases entre as diferentes componentes espectrais a partir do instante  $t=40$ , o que indica alguma interação não linear. No instante  $t=60$ , a bicoerência entre os modos que já haviam sido observados no instante  $t=40$  aumenta consideravelmente.

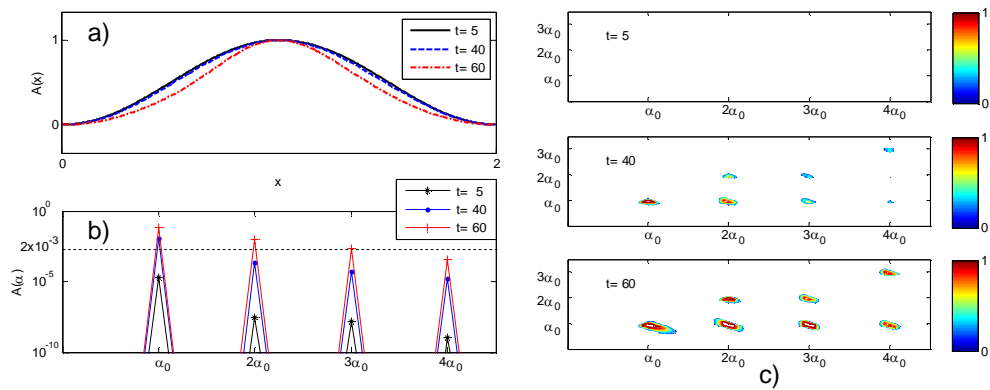


Figura 7.19: Evolução e interação de ondas, caso  $L=\lambda=2$  ( $h_{eq}=0,558$ ). a) Evolução temporal da interface. b) Evolução da amplitude no espectro. c) Bicoerência mostrando interação entre modos.

O caso mais instável, com  $h_{eq}=0,7$  e  $\lambda_0=1,5$ , apresentado nas Figuras 7.20, mostrou-se equivalente ao caso menos instável. Embora uma maior deformação da interface possa ser visualizada na Figura 7.20a, devido a uma maior contribuição harmônica. A evolução do espectro (Fig. 7.20b) e os contornos de bicoerência (Fig. 7.20c) mostraram um comportamento similar do já observado no caso menos instável.

Nos casos avaliados, onde o canal tem o comprimento igual ao da onda fundamental perturbada  $\lambda$ , a principal interação da onda fundamental parece ser com ela mesma (autointeração). Devido a isso, os modos gerados, pela soma de frequências  $\alpha$ , resultam em harmônicos da onda fundamental  $2\alpha$ ,  $3\alpha$ ,  $4\alpha$ , etc.



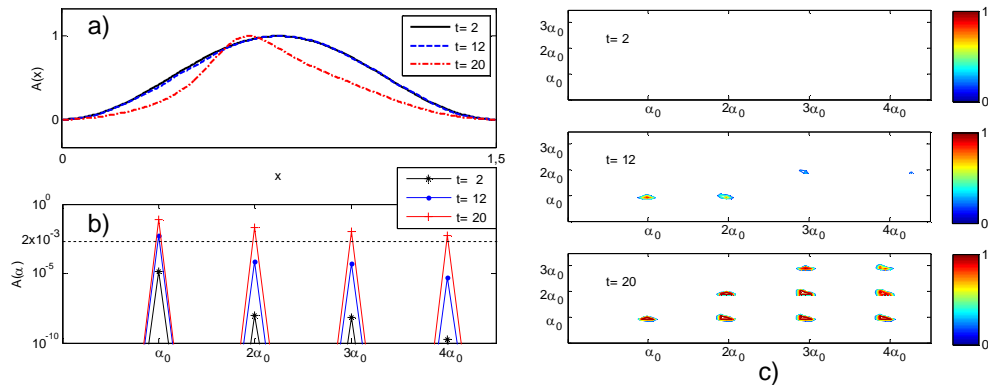


Figura 7.20: Evolução e interação de ondas, caso  $L=\lambda=1,5$  ( $h_{eq}=0,7$ ). a) Evolução temporal da interface. b) Evolução da amplitude no espectro. c) Bicoerência mostrando interação entre modos.

Pelo observado, o comportamento dos harmônicos parece ser fortemente dependente do modo mais dominante, quando a amplitude desse modo fundamental supera o limiar de  $A \approx 2 \times 10^{-3}$ . As características percebidas nesta região sugerem que os harmônicos possam ser produto da autointeração da onda fundamental. A seguir, essa possibilidade é analisada em detalhe.

### 7.6 Transferência de Energia entre Ondas – Testes com Canal Curto

Foi visto que, no regime não linear, o comportamento dos harmônicos das ondas excitadas está associado com a transferência de energia vinda do modo fundamental. Uma informação importante acerca do mecanismo de transferência da onda fundamental para os harmônicos, pode ser obtida se consideramos que o crescimento dos harmônicos, segue a relação de Barthelet et al. (1995):

$$A_n \sim A_1^n. \tag{7.3}$$

onde  $A_n$  representa a amplitude do  $n$  harmônico avaliado, já  $A_1$  a amplitude do modo fundamental. Esta relação representa a interação do modo fundamental com ele mesmo na forma quadrática, cúbica, etc. Na Figura 7.21 são considerados os casos com ondas perturbadas  $\lambda=2$  e  $\lambda=4$  ( $h_{eq}=0,558$ ), assim como  $\lambda=1,5$  e  $\lambda=3$  ( $h_{eq}=0,7$ ). É mostrada a evolução temporal da amplitude dos quatro primeiros harmônicos até as ondas atingirem a saturação (Figuras a, c, e, g). A razão entre harmônicos e o modo fundamental, segundo a relação da Eq. 7.3, é mostrada nas Figuras (b, d, f, h).

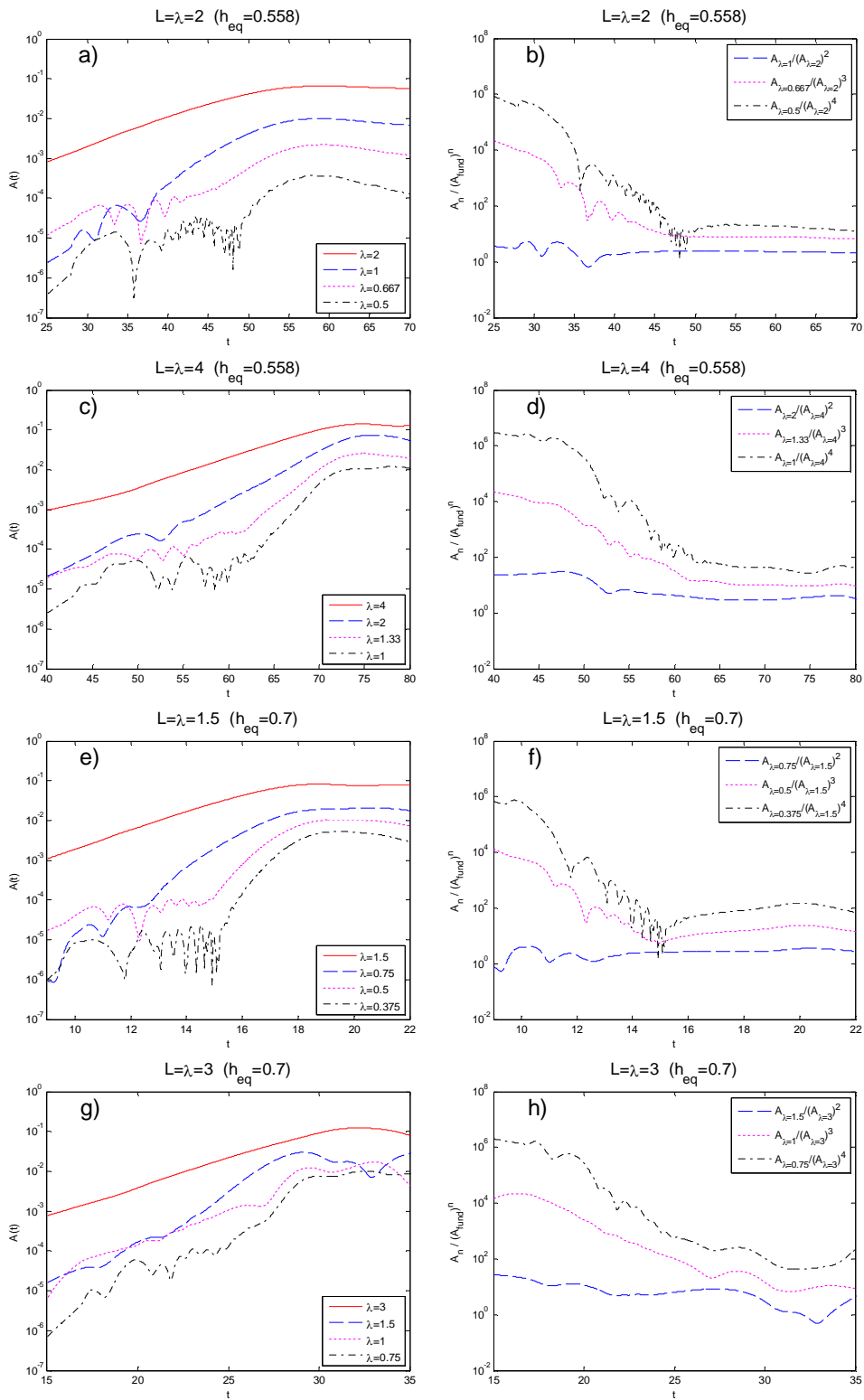


Figura 7.21: Evolução não linear das ondas  $\lambda=2$ ,  $\lambda=4$  ( $h_{eq}=0,558$ ) e  $\lambda=1,5$ ,  $\lambda=3$  ( $h_{eq}=0,7$ ). Evolução temporal da amplitude até a saturação (a, c, e, g). Razão de amplitudes dos harmônicos em relação da interação da onda fundamental (b, d, f, h).

Analisando a Figura 7.21, pode-se observar que a relação  $|A_n|/|A_1|^n$  se torna, aproximadamente constante quando a amplitude das oscilações deixa de se comportar de acordo com a teoria linear, sugerindo que o crescimento desses modos está diretamente relacionado com a onda fundamental. Isso suporta o argumento de que na saturação, a transferência de energia entre os modos entra em equilíbrio.

Os modelos propostos nos trabalhos de Bruno & McCready (1989); Jurman et al. (1992); Barthelet et al. (1995); Sangalli et al. (1997) e King & McCready (2000), sugerem que um dos mecanismos de estabilização das ondas interfaciais é a transferência de energia de ondas linearmente instáveis para ondas linearmente estáveis. Na faixa não linear avaliada no presente trabalho, os resultados sugerem que o crescimento dos harmônicos (não perturbados) seja devido a transferência de energia proveniente do modo fundamental (perturbado) mais dominante. O modo fundamental, linearmente instável, ganha energia do escoamento base, e os outros harmônicos, de natureza linearmente estável, perdem ou dissipam energia para o escoamento base. Alguns dos trabalhos citados no início deste parágrafo argumentam que o mecanismo de transferência de energia é sustentado enquanto a taxa de transferência de energia do fundamental para os outros harmônicos for maior do que a taxa de dissipação dos efeitos viscosos. Assim, é presumível que, quando a onda fundamental dominante começa a estabilizar, a razão entre taxas de transferência de energia se modifique. Neste caso, a taxa de transferência do modo fundamental para os harmônicos é da ordem da taxa de dissipação dos efeitos viscosos, fazendo que o sistema entre em equilíbrio, momento no qual todos os modos atingem sua própria amplitude de saturação. Esse cenário descreve bem os resultados das simulações numéricas realizadas no presente trabalho.

## 7.7

### Estágio de Saturação do Crescimento das Ondas

Nesta seção são comparadas as amplitudes de saturação atingidas pelas diferentes ondas avaliadas. Esta amplitude marca o limite onde o crescimento da onda fundamental não muda mais.

O gráfico mostrado na Figura 7.22a corresponde ao caso com escoamento base fracamente instável ( $h_{eq}=0,558$ ). Pode-se observar, na figura, que as amplitudes de saturação atingem diferentes níveis, com os menores valores

ocorrendo para as ondas mais curtas e os maiores para as médias. No caso mais instável ( $h_{eq}=0,7$ ), mostrado na Figura 7.22b, também nota-se essa relação entre amplitude de saturação e comprimento das ondas. Isso sugere que ondas mais curtas dissipam mais energia que as ondas de comprimento médio.

Nas Figuras 7.22a e b, as ondas longas atingiram menores amplitudes de saturação. Isso é contrário a tendência observada para ondas curtas e médias. Além disso, contraria também as aproximações de Taitel & Dukler (1976), Barnea & Taitel (1993) e Barmak et al (2016), que sugerem que a formação de golfadas acontece a partir do crescimento de ondas longas. Devido aos comprimentos de canal utilizados nas simulações, esse mecanismo só poderia ser observado no caso com onda longa, o que não ocorreu. Para outras faixas de velocidade, pode ser que o crescimento linear das ondas longas se torne dominante. No entanto, neste trabalho a faixa de vazões permaneceu restrita aos casos fracamente instável ( $h_{eq}=0,558$ ) e instável ( $h_{eq}=0,7$ ).

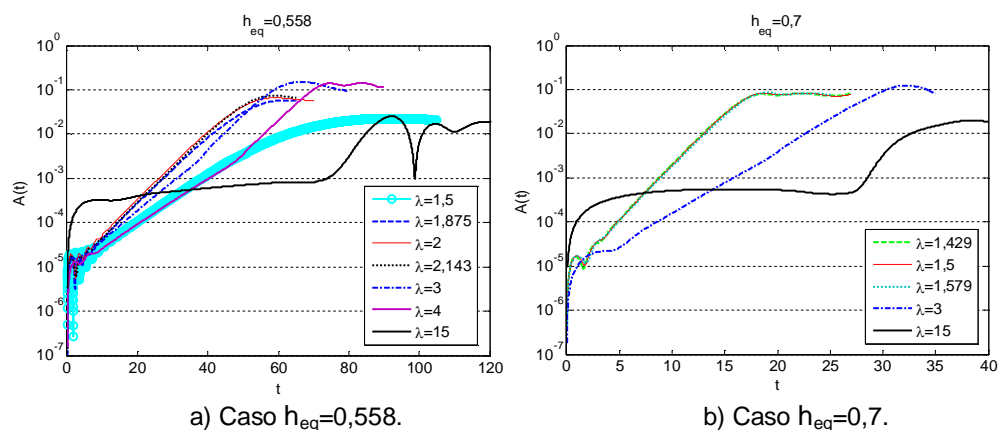


Figura 7.22: Amplitude de saturação das ondas avaliadas. a) Caso  $h_{eq}=0,558$ .

b) Caso  $h_{eq}=0,7$ .

A relação entre a amplitude da onda fundamental e a amplitude máxima da oscilação da interface fornece uma referência da contribuição dos harmônicos para o comportamento da interface. A Tabela 7.2 mostra valores médios das amplitudes de saturação das diferentes ondas avaliadas assim como do máximo da interface. Pode-se notar que quanto maior o comprimento de onda, maior é a amplitude de saturação atingida e menor a contribuição da onda fundamental para a amplitude da onda saturada. Essa situação é verificada na faixa que corresponde às ondas linearmente mais instáveis. Buscou-se um parâmetro adimensional dependente da taxa de amplificação linear, do comprimento da onda, da densidade e da tensão interfacial e que pudesse escalar as amplitudes de saturação. Infelizmente, isso não foi encontrado.

Tabela 7.2: Valores médios referenciais das amplitudes de saturação da onda fundamental e da interface.

Caso	Teste	$\lambda$	Amplitude de saturação $A_{sat}$		
			Onda fundamental.	Interface	% (fund. / interf.)
$h_{eq} = 0,558$	1	1,5	0,020	0,021	97%
	2	1,875	0,058	0,067	87%
	3	2,0	0,062	0,072	86%
	4	2,143	0,074	0,090	82%
	5	3,0	0,126	0,172	73%
	6	4,0	0,131	0,229	57%
	7	15,0	0,016	0,221	7%
$h_{eq} = 0,7$	1	1,429	0,078	0,106	73%
	2	1,5	0,079	0,108	73%
	3	1,579	0,080	0,109	73%
	4	3,0	0,046	0,113	41%
	5	15,0	0,020	0,151	13%

Na seguinte seção investiga-se a eficiência de outras interações não lineares. Cabe ressaltar que até aqui, para a maioria dos casos analisados, empregou-se canal curto. Portanto, a faixa de comprimentos de onda coberta pelas análises realizadas encontra-se restrita a ondas curtas. As únicas exceções foram os casos com ondas longas. No entanto, naqueles casos não se excitou de maneira controlada ondas com outros comprimentos. Assim, interações do tipo subharmônicas, como as sugeridas por Campbell & Liu (2014), não foram analisadas. Para expandir a faixa de comprimentos de onda disponíveis para interação não linear, apresenta-se a seguir análise da interação entre ondas curtas e médias em um canal com comprimento mais longo.

## 7.8 Análise da Interação de Ondas em Canal Longo

Alguns trabalhos experimentais que trataram de ondas interfaciais em escoamentos estratificados reportaram uma intensa interação entre ondas interfaciais com diferentes comprimentos, (Kao & Park, 1972; Jurman et al., 1992; McCready & Uphold, 1997). Naqueles trabalhos, o conteúdo espectral das interfaces mostrou o aparecimento de ondas linearmente instáveis, subharmônicas, harmônicas e modos de baixa frequência. Com exceção das ondas linearmente instáveis, os modelos baseados em equações linearizadas, não são capazes de prever o aparecimento de harmônicos e subharmônicos (McCready & Uphold, 1997).

Para a presente análise considerou-se um canal com comprimento de onda  $L=30$ . Assim, ondas longas e subharmônicos podem ser capturadas pela simulação. Todas as demais condições são mantidas e os escoamentos base são os mesmos que já foram utilizados nas simulações de ondas individuais em canais curtos. Nos casos analisados nessa seção, a interface do escoamento base é perturbada através de uma ou duas ondas, para se avaliar em detalhe possíveis mecanismos de interação. A análise é realizada no cenário de evolução temporal. Logo, condições de contorno periódicas continuam sendo empregadas.

O objetivo nesta seção é criar condições prováveis e controladas para a interação entre ondas conhecidas e estudar, em detalhe, mecanismos que governam o fenômeno. A seguir são apresentados os seis casos particulares considerados: Interação entre harmônicos, interação entre onda curta e seu subharmônico, interação entre onda curta e longa, interação entre duas ondas próximas (modulação), um caso composto de espectro de ondas com banda larga, e finalmente um caso com um pacote de ondas. Esses dois últimos casos tendem a se aproximar ao caso real, pois a interface é perturbada com ondas de vários comprimentos e a interação de múltiplas ondas pode ocorrer.

### 7.8.1 Interação entre harmônicos

O objetivo nesse caso é avaliar se a perturbação de um único modo fundamental evolui se mantendo como dominante até a saturação, como ocorreu nos casos com canal curto; ou se outras ondas não capturadas naquelas simulações se tornam relevantes. Nessa última situação, a possível aparição de subharmônicos (contidos no ruído numérico) poderia levar a ressonância com a onda fundamental o que, por sua vez, poderia modificar o comportamento das ondas em comparação com as simulações realizadas em canais curtos.

Para esse estudo, a interface do escoamento base no domínio  $L=30$  é perturbada com os modos mais instáveis de cada caso, sendo eles  $\lambda_0=2$  no caso  $h_{eq}=0,558$  e  $\lambda_0=1,5$  no caso  $h_{eq}=0,7$ . Isto significa que a interface inicial compreende 15 e 20 períodos completos das ondas para o caso pouco instável e instável, respectivamente. A amplitude inicial destas ondas é da mesma ordem utilizada anteriormente.

As Figuras 7.23 e 7.24, correspondentes a  $h_{eq}=0,558$  e  $h_{eq}=0,7$ , respectivamente, apresentam uma comparação da evolução temporal da

amplitude da onda perturbada  $\lambda_0$  em um canal longo com um canal curto. São incluídos, também, os perfis de magnitude de  $v'$ , reinantes em cada faixa de evolução (linear, fracamente não linear e saturação). Os instantes em que os perfis foram extraídos, são indicados nas figuras. A evolução do harmônico  $(0,5\lambda_0)$  de cada onda fundamental também é mostrada para referência.

Analisando os resultados, pode-se notar que excelente correspondência é obtida. Os perfis mostrados concordam muito bem tanto na faixa linear como na faixa não linear. Na região de saturação, os perfis apresentam ligeira diferença na fase mais densa (mais perceptível no caso  $h_{eq}=0,558$ ). Isso sugere a presença de alguma atividade não linear com perturbações de maior comprimento de onda. Entretanto essa interação aparenta ser bem fraca. A evolução dos outros harmônicos nos dois casos simulados é equivalente, atingindo a mesma ordem de grandeza na saturação.

A fim de melhor avaliar os resultados obtidos, apresenta-se o comportamento da interface, o espectro espacial e os contornos de bicoerência para alguns instantes de tempo representativos da evolução interfacial do escoamento na Figura 7.25 (caso  $h_{eq}=0,558$ ) e Figura 7.26 (caso  $h_{eq}=0,7$ ). Como referência é indicado no espectro o limiar de estabilidade linear ( $A=2 \times 10^{-3}$ ) assim como os números de onda  $\alpha_0$ ,  $2\alpha_0$ ,  $3\alpha_0$  e  $4\alpha_0$  correspondentes a onda fundamental e os três harmônicos dessa onda. No caso da Figura 7.25, o primeiro instante mostrado corresponde à faixa de crescimento linear ( $A < 2 \times 10^{-3}$ ) e os seguintes a faixa de evolução não linear ( $A > 2 \times 10^{-3}$ ). No final desta faixa, o crescimento da amplitude atinge saturação. A evolução interfacial inicialmente apresenta um formato senoidal (instante  $t=5$ ), já na amplitude de saturação, ela se modifica e permanece em um formato composto por cristas agudas e vales suaves (instante  $t=60$ ).

A evolução do espectro espacial na Fig. 7.26 mostra que desde os instantes iniciais (instante  $t=5$ ), já há harmônicos da onda fundamental perturbada, embora com amplitudes muito menores do que a onda excitada. Na faixa linear ( $A < 2 \times 10^{-3}$ ) estes modos têm muito baixa amplitude. À medida que a onda fundamental cresce, a diferença de amplitude em relação aos harmônicos diminui. Na saturação o sistema se estabiliza completamente, e a diferença de amplitude entre as ondas se mantém constante. Ao longo da evolução mostrada ( $5 \leq t \leq 60$ ), pode-se observar pela distribuição do espectro, crescimento de somente harmônicos da onda fundamental  $\alpha_0$  ( $\lambda_0=2$ ), sem o aparecimento de outras ondas como subharmônicos ou ondas longas.

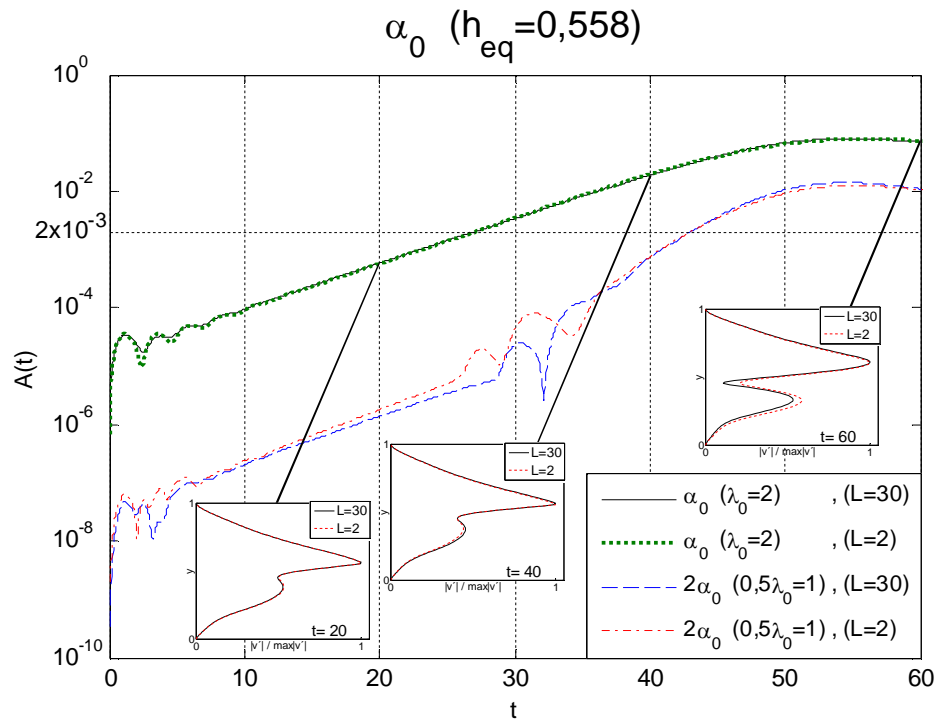


Figura 7.23: Comparação da evolução da onda perturbada  $\alpha_0$  ( $\lambda_0=2$ ) em canal longo (L=30) e curto (L=2). Através dos perfis de  $v'$ , três instantes comparam a faixa linear (t=20), fracamente não linear (t=40) e saturação (t=60). Harmônico  $2\alpha_0$  é referencial.

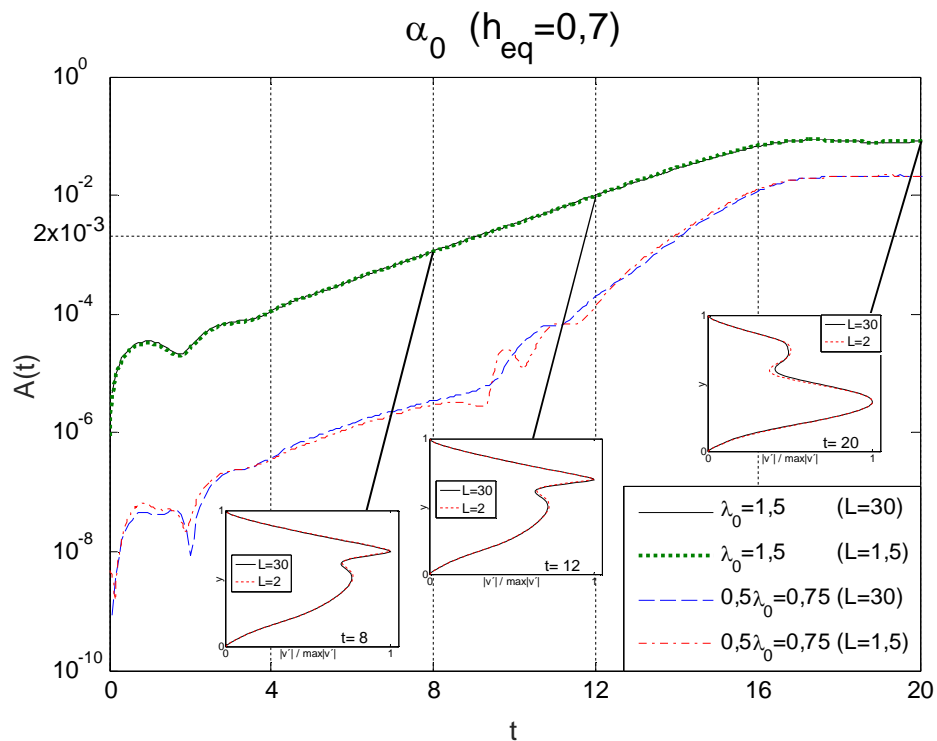


Figura 7.24: Comparação da evolução da onda perturbada  $\alpha_0$  ( $\lambda_0=1,5$ ) em canal longo (L=30) e curto (L=2). Através dos perfis de  $v'$ , três instantes comparam a faixa linear (t=8), fracamente não linear (t=12) e saturação (t=20). Harmônico  $2\alpha_0$  é referencial.



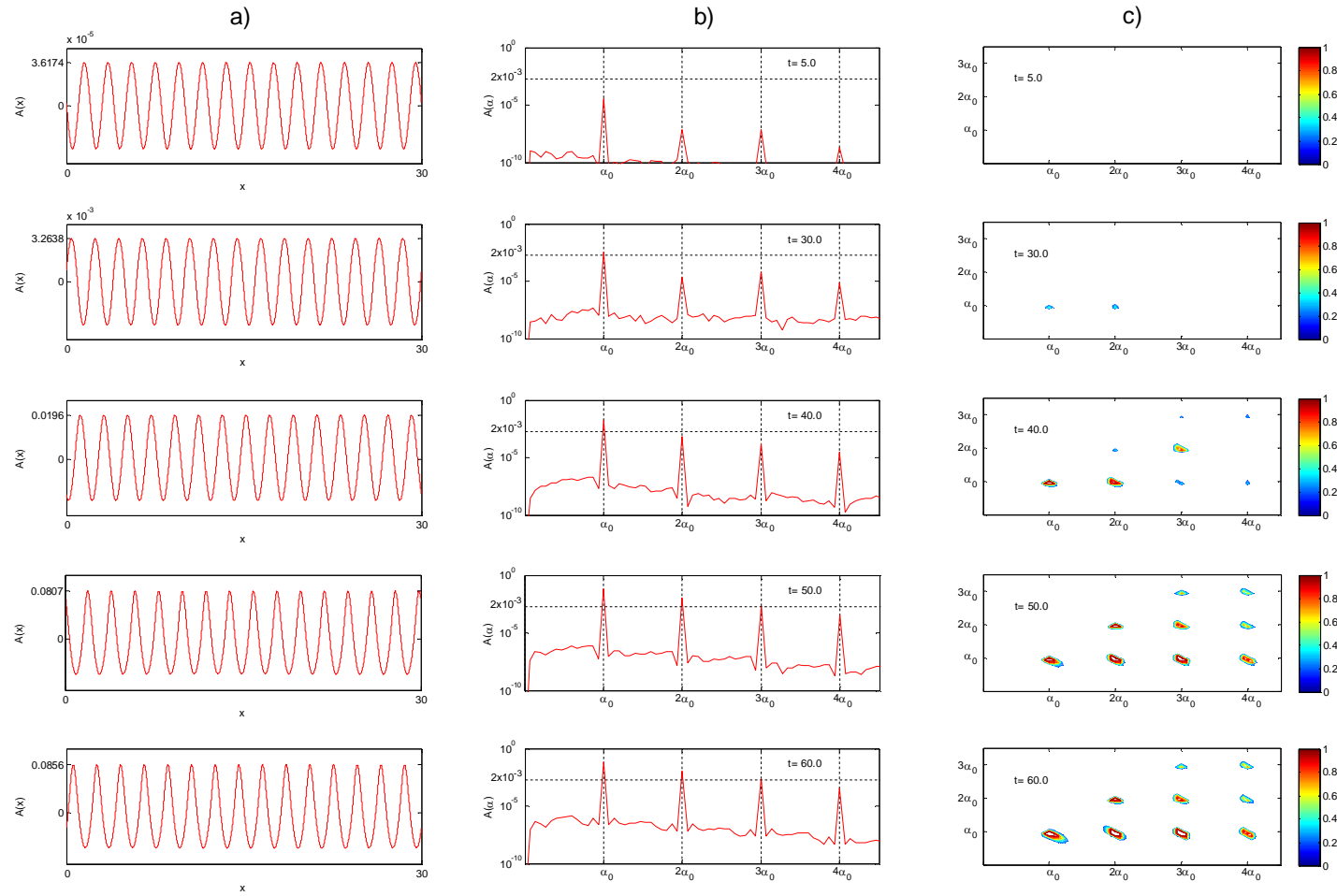


Figura 7.25: (a) Interface; (b) espectro e (c) bicoerência para alguns instantes representativos ( $h_{eq}=0,558$ ). Números de onda ( $\alpha_0, 2\alpha_0, 3\alpha_0, 4\alpha_0$ ) e limiar linear ( $2 \times 10^{-3}$ ) são mostrados para referência.

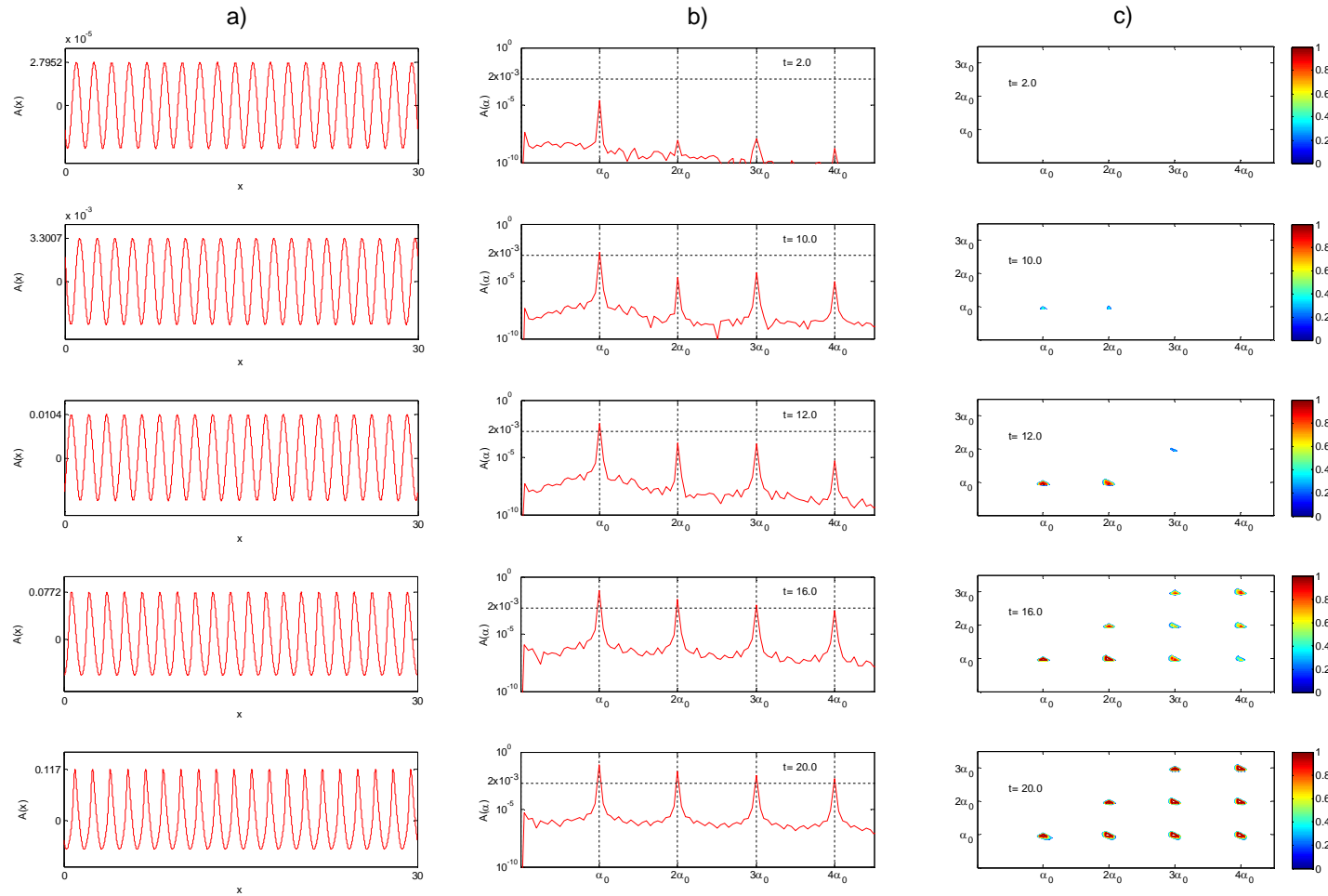


Figura 7.26: (a) Interface; (b) espectro e (c) bicoerência para alguns instantes representativos ( $h_{eq}=0,7$ ). Números de onda ( $\alpha_0$ ,  $2\alpha_0$ ,  $3\alpha_0$ ,  $4\alpha_0$ ) e limiar linear ( $2 \times 10^{-3}$ ) são mostrados para referência.

A bicoerência do primeiro instante, mostrado para  $t=5$  na Figura 7.25, sugere coerência nula entre as fases das ondas fundamentais e harmônicos. O instante  $t=30$  mostra alguma bicoerência entre ondas de frequência espacial  $\alpha_0$  (onda fundamental) e  $\alpha_0$  (eixo horizontal), indicando que esses modos têm alguma coerência de fase com um terceiro modo resultante do produto dessa interação, que neste caso corresponde a  $2\alpha_0$ . Observa-se também uma fraca coerência entre ondas de frequência  $\alpha_0$  e  $2\alpha_0$ , resultando no modo  $3\alpha_0$ . No instante  $t=40$ , considerável bicoerência ( $b>0,9$ ) aparece nos mesmos modos do instante  $t=30$  indicando forte interação não linear entre estes modos. Isto sugere uma maior transferência de energia entre as ondas e mostra uma estreita relação com a saturação da onda fundamental, vista na Figura 7.23. No instante  $t=40$ , a bicoerência em menor grau também aparece entre os modos  $2\alpha_0$  e  $3\alpha_0$ , e deveria resultar em ondas com frequência  $5\alpha_0$ . Nos instantes  $t=50$  e  $t=60$ , a bicoerência aumenta em torno dos múltiplos inteiros da onda fundamental  $\alpha_0$ .

O caso  $h_{eq}=0,7$  apresentado na Figura 7.26 mostrou ser equivalente ao caso menos instável  $h_{eq}=0,558$ . A evolução interfacial, os espectros e os contornos de bicoerência mostraram similar comportamento em uma escala menor de tempo devido a maior taxa de amplificação da onda fundamental perturbada, que nesse caso tem comprimento  $\lambda_0$  igual a 1,5.

As características de ambos os casos ( $h_{eq}=0,558$  e  $h_{eq}=0,7$ ) sugerem que estes sistemas instáveis atingem estabilização devido ao mecanismo primário de transferência de energia por interação não linear entre a onda fundamental linearmente instável e seus harmônicos linearmente estáveis. Essa conjectura foi proposta por Jurman et al. (1992).

A partir dos resultados encontrados, pode-se considerar que a evolução de um único modo perturbado é aparentemente independente do comprimento de canal utilizado. Isso sugere que, no regime investigado, as análises realizadas para o canal com comprimento  $L=\lambda$ , podem ser úteis para prever o comportamento das ondas no canal. Do ponto de vista do esforço computacional essa é uma alternativa interessante. No entanto, não é possível afirmar, nesse estágio da investigação, que o escoamento em um canal curto contempla as interações mais relevantes do problema físico, pois na prática a geração de subharmônicos pode ocorrer espontaneamente através da interação de duas ondas (de Paula et al., 2013) e, além disso, no caso "natural" ondas com todos os comprimentos podem coexistir no escoamento.

Nas análises realizadas até aqui, favoreceu-se a interação entre harmônicos. Por isso, é necessário investigar também os casos com geração

espontânea de subharmônicos e ondas longas além da interação com as ondas fundamentais, a fim de se verificar se esse é um mecanismo relevante ao problema.

### 7.8.2

#### Interação entre onda curta e seu subharmônico

É conhecido nos estudos da transição laminar-turbulenta de camada limite, que a interação de ondas através de ressonância (especialmente subharmônica) é um mecanismo que sustenta um crescimento das flutuações do escoamento (Craik 1971; Kachanov 1994; Boiko et al., 2012; de Paula et al., 2013). No caso de escoamentos bifásicos em dutos, o aparecimento de subharmônicos na interface tem sido observado para algumas condições, sendo relacionado com a formação de golfadas (Campbell & Liu, 2013). Os estudos de Campbell & Liu (2013, 2014) mostraram que a ressonância entre uma onda fundamental e seu subharmônico poderia ser um eficiente mecanismo de transferência de energia criando um rápido crescimento das perturbações.

Nesta seção o objetivo é avaliar se há uma desestabilização produzida pela interação de uma onda fundamental e seu subharmônico. No caso anterior as ondas mais instáveis tinham comprimento  $\lambda=2$  e  $\lambda=1,5$  para os casos com  $h_{eq}$  iguais a 0,558 e 0,7, respectivamente. Sendo assim, nessa seção introduziram-se ondas com comprimento iguais a  $\lambda=4$  e  $\lambda=3$  (ou  $0,5\alpha_0$ ). No caso  $h_{eq}=0,558$ , excepcionalmente foi utilizado um canal de comprimento  $L=8$  para garantir que, com comprimento de onda  $\lambda=4$ , haveria sempre um número inteiro de períodos dentro do domínio investigado. Para simular o cenário composto por ondas linearmente instáveis, de maior amplitude, e por ondas subharmônicas, de baixa amplitude, oriundas do ruído no escoamento, a perturbação formada pelas ondas  $\alpha_0$  e  $0,5\alpha_0$ , foi introduzida considerando uma relação de amplitudes de  $10^2:1$ , respectivamente. Neste caso, a amplitude da onda fundamental  $\alpha_0$  foi mantida enquanto que a do subharmônico  $0,5\alpha_0$  foi diminuída duas ordens de grandeza.

Como a taxa de amplificação linear dos subharmônicos é menor que a da onda fundamental, aumentou-se o tempo de simulação até que os subharmônicos atingissem uma saturação. A evolução das amplitudes ao longo do tempo é mostrada nas Figuras 7.27 e 7.28 para os casos com  $h_{eq}=0,558$  e  $h_{eq}=0,7$  respectivamente. Incluiu-se na figura a evolução da velocidade de fase das ondas para mais detalhe.

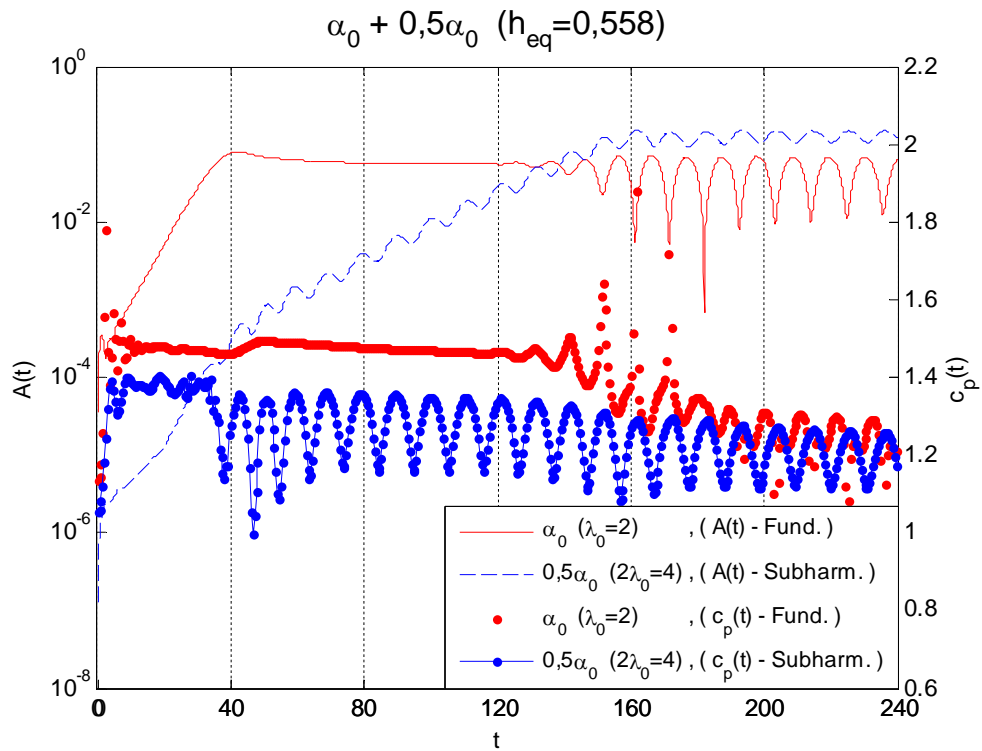


Figura 7.27: Evolução temporal da amplitude  $A(t)$  e velocidades de fase  $c_p(t)$  para a onda fundamental  $\alpha_0$  ( $\lambda_0=2$ ) e o subharmônico  $0,5\alpha_0$  ( $2\lambda_0=4$ ). Teste em canal longo ( $L=8$ ).

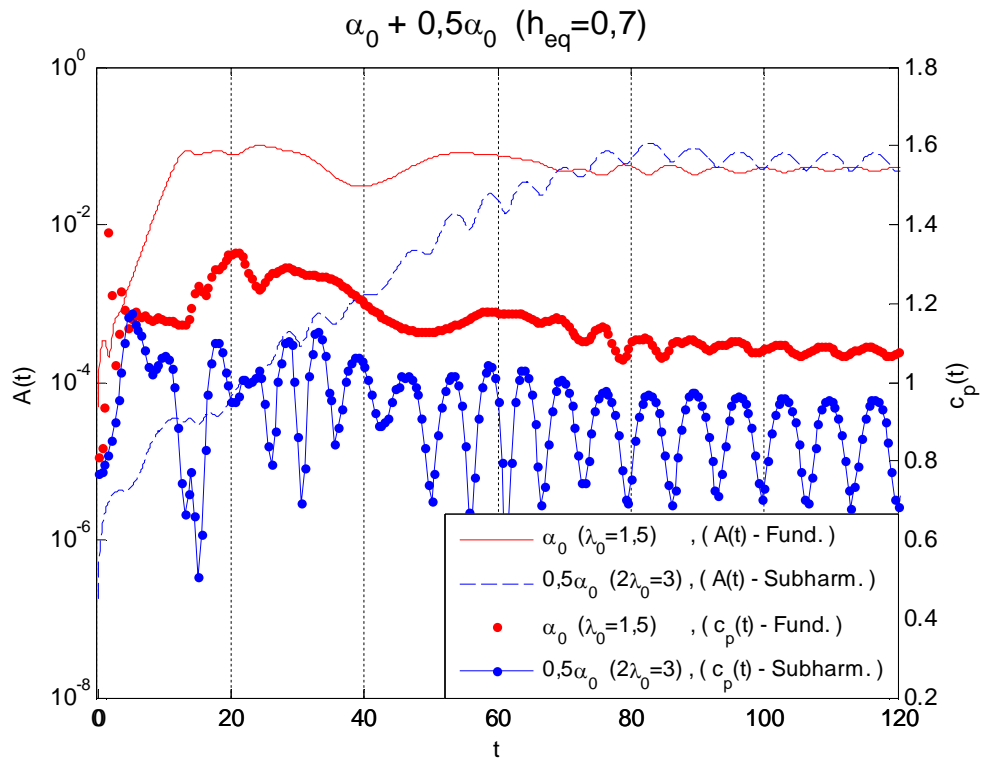


Figura 7.28: Evolução temporal da amplitude  $A(t)$  e velocidades de fase  $c_p(t)$  para a onda fundamental  $\alpha_0$  ( $\lambda_0=1,5$ ) e o subharmônico  $0,5\alpha_0$  ( $2\lambda_0=3$ ). Teste em canal longo ( $L=30$ ).

Os resultados apresentados na Figura 7.27 mostram que o subharmônico cresce até superar a amplitude de saturação do modo fundamental, alterando a estabilização que este modo tinha atingido. Isto acontece, por volta do instante  $t=140$ . A partir deste instante é observado o claro efeito de intercâmbio de energia entre os modos. Nesse estágio as velocidades das ondas, obtidas segundo o procedimento da seção 5.2.1, são modificadas e se observa a tendência de aproximação entre elas. Isso é uma característica típica de ressonância entre ondas com diferentes velocidades de propagação. Um comportamento similar foi observado por Campbell & Liu (2014). No entanto, os resultados do presente trabalho mostram que apesar das velocidades se aproximarem, elas ainda são diferentes o suficiente para que sincronização das fases não ocorra. Isso sugere que apesar de existir um estado próximo da ressonância, o fenômeno não é forte o suficiente para promover a sincronização (*phase-locking*) das ondas. Nesta faixa, o comportamento das amplitudes também mostra que a evolução oscilante entre as duas ondas, com frequência  $\omega \approx 0,58$ , apresenta fase oposta. Com isso, as ondas somente alternam entre intervalos de interação destrutiva (antirressonância) para longos tempos de simulação.

O caso com  $h_{eq}=0,7$ , apresentado na Figura 7.28, tem uma evolução parecida com o caso  $h_{eq}=0,558$ , em especial na faixa final de tempo onde o comportamento da amplitude se torna cíclico. No caso com escoamento base mais instável, a evolução das ondas acontece em uma escala de tempo menor. A amplitude de saturação da onda fundamental é atingida em torno do instante  $t=16$  e começa a mudar passado o instante  $t=20$ , apresentando um forte decaimento e recuperação em torno da faixa  $30 \leq t \leq 50$ . A partir desse último período, a velocidade de fase também é alterada. Perto do instante  $t=70$ , a amplitude do subharmônico supera a amplitude do fundamental. Novamente, o comportamento cíclico mostra o efeito do intercâmbio de energia entre os modos avaliados. Aqui também se observa efeitos destrutivos de interação entre essas ondas. Nesse caso, é mais evidente que a sincronização das ondas não ocorre pois, as velocidades são bem diferentes.

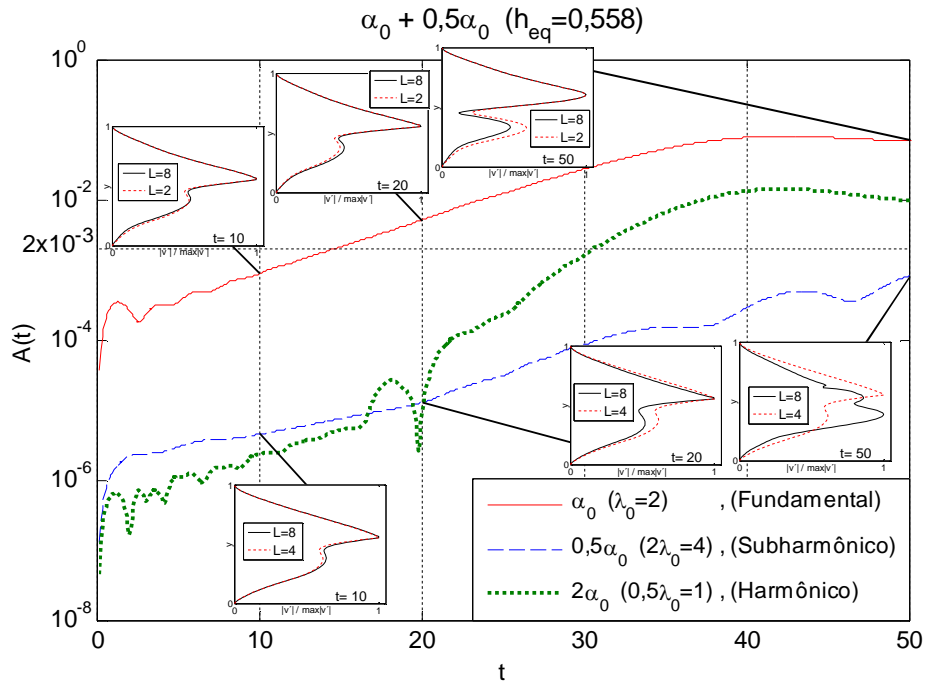


Figura 7.29: Evolução de ondas  $\alpha_0$  ( $\lambda_0=2$ ) e  $0,5\alpha_0$  ( $2\lambda_0=4$ ) em um canal  $L=8$ . Através dos perfis de  $v'$ , a onda  $\alpha_0$  é comparada aos resultados no canal  $L=2$  nos instantes linear ( $t=10$ ), fracamente não linear ( $t=20$ ) e saturação ( $t=50$ ). Nesses instantes, o subharmônico  $0,5\alpha_0$  é comparado com o perfil linear de  $v'$  do canal  $L=4$ . Harmônico  $2\alpha_0$  é referencial.

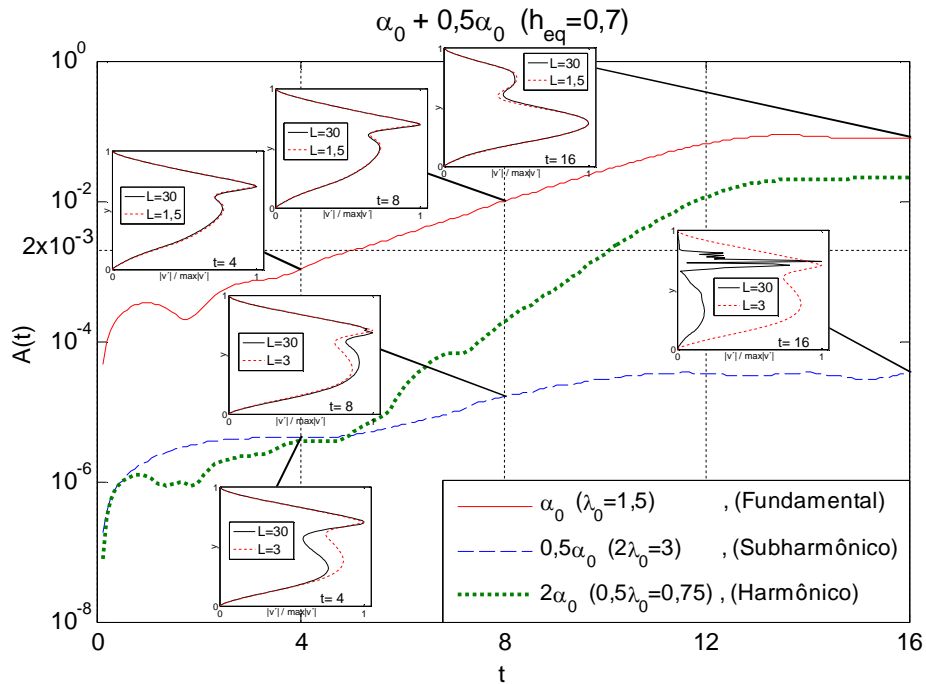


Figura 7.30: Evolução de ondas  $\alpha_0$  ( $\lambda_0=1,5$ ) e  $0,5\alpha_0$  ( $2\lambda_0=3$ ) em um canal  $L=30$ . Através dos perfis de  $v'$ , a onda  $\alpha_0$  é comparada aos resultados no canal  $L=1,5$  nos instantes linear ( $t=4$ ), fracamente não linear ( $t=8$ ) e saturação ( $t=16$ ). Nesses instantes, o subharmônico  $0,5\alpha_0$  é comparado com o perfil linear de  $v'$  do canal  $L=3$ . Harmônico  $2\alpha_0$  é referencial.

Na Figura 7.29 (caso  $h_{eq}=0,558$ ) e Figura 7.30 (caso  $h_{eq}=0,7$ ) são comparados os perfis de magnitude de  $v'$  em relação aos perfis obtidos quando introduziu-se a excitação de somente uma onda num canal curto. A evolução da amplitude do harmônico  $0,5\lambda_0$  também é incluída como referência. É observado que os perfis da onda fundamental mostram excelente correspondência com os resultados prévios, tanto na faixa linear como na faixa não linear. No entanto, o comportamento do subharmônico é consideravelmente afetado perto de entrar na região não linear. Nessa faixa, nota-se uma diferença considerável entre os perfis de  $v'$  da faixa linear dos canais curtos, e os resultados das simulações.

A diferença observada entre os perfis de  $v'$  mostra que a onda fundamental, de fato, altera o comportamento do subharmônico. A amplitude do harmônico ( $0,5\lambda_0$ ) apresenta crescimento, substancialmente, maior que o crescimento do subharmônico ( $2\lambda_0$ ). Isso reforça a ideia que as interações entre ondas fundamentais e subharmônicas apesar de serem observadas, são menos relevantes que os efeitos quadráticos da onda fundamental, pelo menos até instantes nos quais a onda fundamental satura.

Resultados do comportamento da interface, espectro e bicoerência são mostrados na Figura 7.31 (caso  $h_{eq}=0,558$ ) e Figura 7.32 (caso  $h_{eq}=0,7$ ). O intervalo de tempo escolhido para apresentação dos resultados compreende o início da introdução da perturbação até a saturação da onda fundamental. Nessa faixa o espectro de bicoerência é semelhante ao caso de simples evolução harmônica. Nota-se que, interações com os subharmônicos aparecem. Essas interações podem ser observadas em ondas com frequências espaciais  $(n-0,5)\alpha_0$ , onde  $n$  é um número inteiro que se refere ao subharmônico ( $n=1$ ) e suas múltiplas interações com a onda fundamental 2, 3, 4, etc. É interessante notar que a baixa amplitude das ondas subharmônicas não influi na evolução interfacial do escoamento, que é dominada pelas ondas fundamentais e harmônicas. Assim, o formato da interface inicialmente senoidal ( $t=5$  na Fig. 7.31a e  $t=2$  na Fig. 7.32a) passa a ter o formato característico de evolução harmônica ( $t=50$  na Fig. 7.31a e  $t=16$  na Fig. 7.32a).

Em nenhum dos casos foi observado o surgimento de ondas longas como sugerido por Campbell & Liu (2014) em sua análise não viscosa. Naquele trabalho foi observado que cadeias de ressonâncias podem permitir que a energia gerada pela instabilidade linear (onda curta), seja transferida para as componentes de onda mais longa, concluindo que esse também seria um mecanismo eficiente para descrever a geração de tais ondas. Essa interação é avaliada de maneira isolada na seção a seguir.



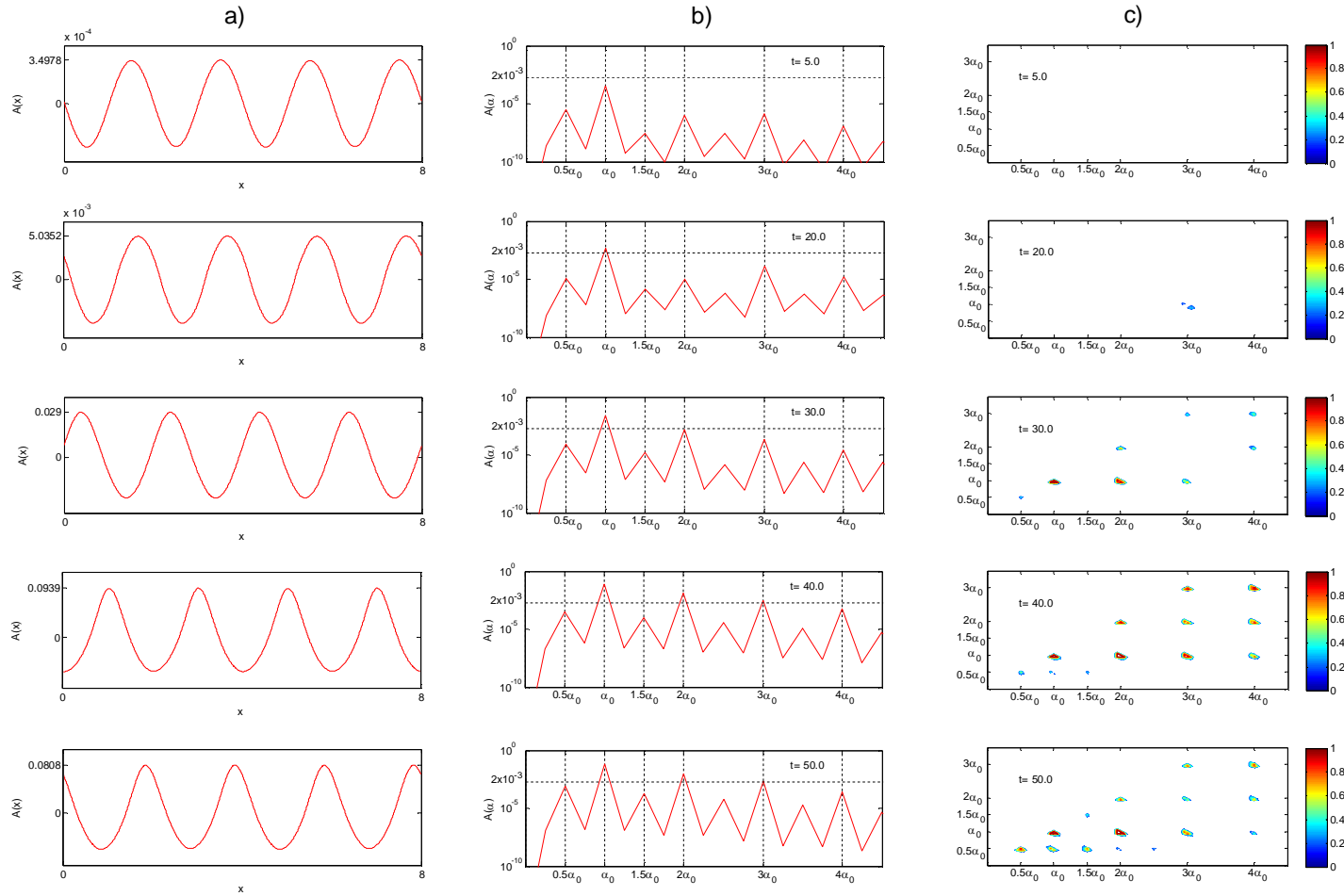


Figura 7.31: (a) Interface, (b) espectro e (c) bicoerência para alguns instantes representativos ( $h_{eq}=0,558$ ). Números de onda ( $0,5\alpha_0$ ,  $\alpha_0$ ,  $1,5\alpha_0$ ,  $2\alpha_0$ ,  $3\alpha_0$ ,  $4\alpha_0$ ) e limiar linear ( $2 \times 10^{-3}$ ) são mostrados para referência.

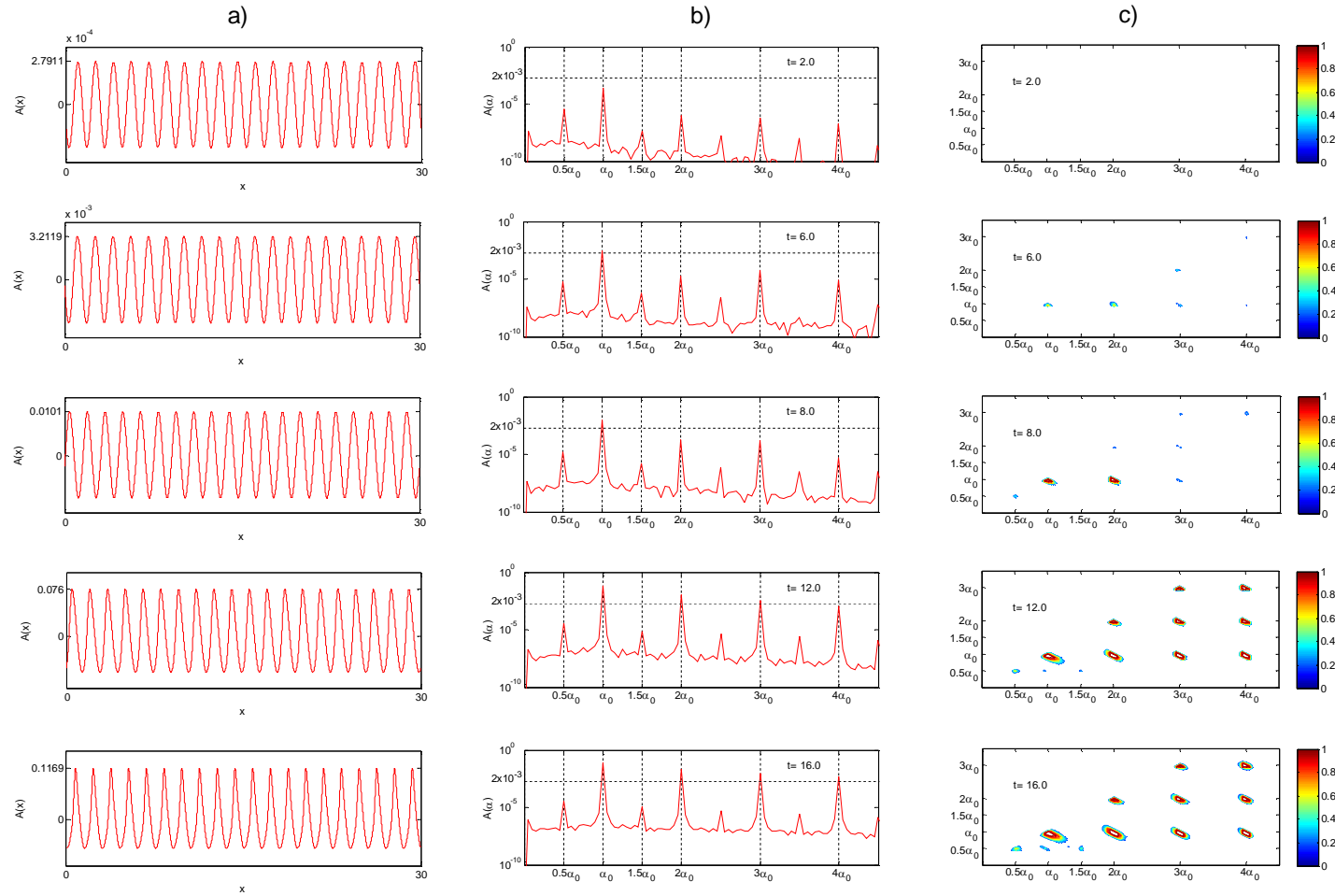


Figura 7.32: (a) Interface, (b) espectro e (c) bicoerência para alguns instantes representativos ( $h_{eq}=0,7$ ). Números de onda ( $0,5\alpha_0, \alpha_0, 1,5\alpha_0, 2\alpha_0, 3\alpha_0, 4\alpha_0$ ) e limiar linear ( $2 \times 10^{-3}$ ) são mostrados para referência.

### 7.8.3 Interação entre onda curta e onda longa

Na evolução de ondas interfaciais, em escoamentos água-ar, além do aparecimento de ondas subharmônicas, também é reportado o aparecimento de ondas de baixa frequência (Jurman et al., 1992; McCready & Uphold, 1997; McCready et al., 2000; Campbell & Liu, 2013; Campbell et al., 2016). Na seção anterior foi visto que a interação de uma onda curta com seu subharmônico não provoca mudança significativa na evolução da onda curta. Isso pelo menos nas condições do escoamento avaliado. Nesta seção o estudo é dirigido à interação entre uma onda curta e uma longa. Neste caso, o objetivo é avaliar a relevância dos mecanismos não lineares de transferência de energia entre as ondas curtas, que são linearmente instáveis, e as ondas longas que são quase neutras.

Nessa análise consideram-se, novamente, as ondas fundamentais mais instáveis com comprimento  $\lambda=2$  para o caso com  $h_{eq}=0,558$ , e  $\lambda=1,5$  para o caso com  $h_{eq}=0,7$ . A onda longa escolhida nos dois casos possui comprimento  $\lambda=15$  (com número de onda  $\alpha_l$ ). Logo, em um dos casos o comprimento da onda longa é um múltiplo inteiro da onda fundamental e no outro caso não. Devido às diferenças nas taxas de amplificação, a perturbação formada pelas ondas  $\alpha_0$  e  $\alpha_l$  é introduzida considerando uma relação de amplitudes de  $1:10^2$ , respectivamente. A amplitude da onda curta ( $\alpha_0$ ) é da mesma ordem utilizada no caso de ondas individuais, já a onda longa foi aumentada duas ordens. Isso foi realizado para garantir que a onda permanecesse com amplitude acima do ruído numérico durante a maior parte da simulação e exibisse uma faixa de evolução linear que pudesse ser comparada com os resultados obtidos para canais com comprimento igual a  $\lambda$ .

Nas Figuras 7.33 ( $h_{eq}=0,558$ ) e 7.34 ( $h_{eq}=0,7$ ), a evolução das ondas fundamentais ( $\lambda_0$ ) é comparada com resultados das simulações realizadas com somente uma onda presente no canal. A amplitude do harmônico  $0,5\lambda_0$ , também, é incluída na figura como referência. Nos dois casos ( $h_{eq}=0,558$  e  $h_{eq}=0,7$ ), resultados similares são obtidos. Em todo o período da simulação observou-se uma boa correspondência para o perfil da onda curta entre os casos simulados com e sem a presença da onda longa. Na evolução da onda longa, observou-se que essa correspondência entre casos só é verificada nos estágios lineares ( $A < 2 \times 10^{-3}$ ). Além disso, observa-se que apesar da amplitude inicial das ondas longas ser elevada em comparação com os harmônicos, o rápido crescimento desses últimos faz com que eles rapidamente se sobreponham as ondas longas.

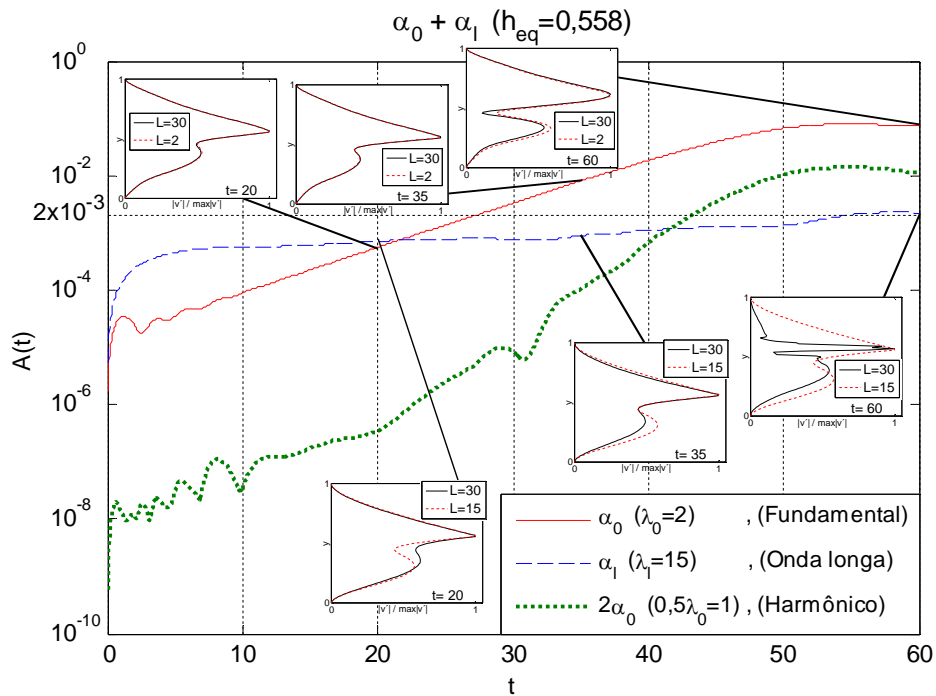


Figura 7.33: Evolução das ondas  $\alpha_0$  ( $\lambda_0=2$ ) e  $\alpha_1$  ( $\lambda_1=15$ ) em um canal  $L=30$ . Através dos perfis de  $v'$ , a onda  $\alpha_0$  é comparada aos resultados no canal  $L=2$  nos instantes linear ( $t=20$ ), fracamente não linear ( $t=35$ ) e saturação ( $t=60$ ). Nesses instantes, a onda longa  $\alpha_1$  é comparada com o perfil linear de  $v'$  do canal  $L=15$ . Harmônico  $2\alpha_0$  é referencial.

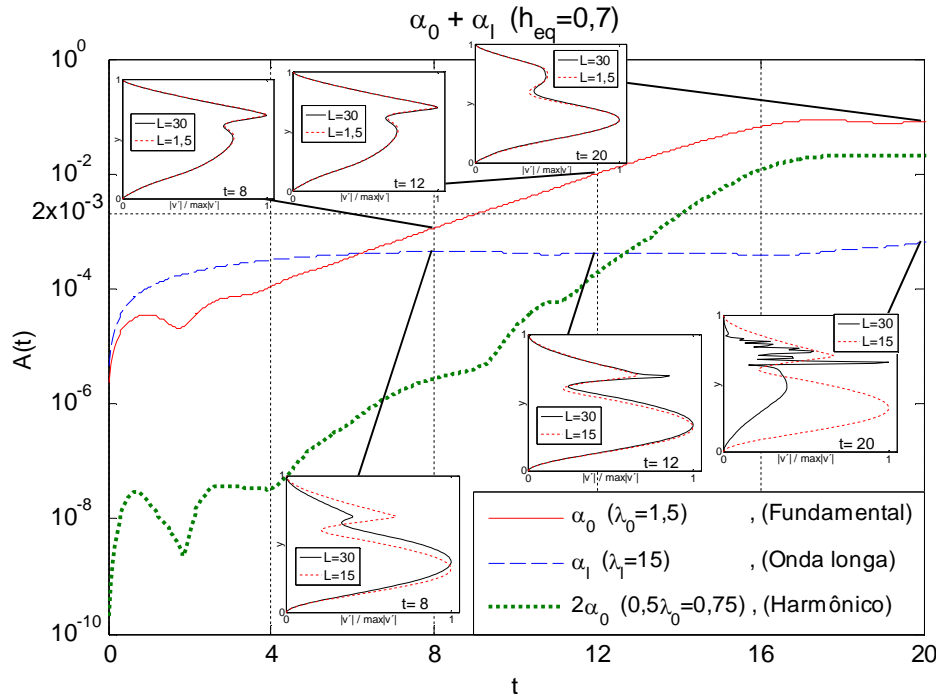


Figura 7.34: Evolução das ondas  $\alpha_0$  ( $\lambda_0=1,5$ ) e  $\alpha_1$  ( $\lambda_1=15$ ) em um canal  $L=30$ . Através dos perfis de  $v'$ , a onda  $\alpha_0$  é comparada aos resultados no canal  $L=1,5$  nos instantes linear ( $t=8$ ), fracamente não linear ( $t=12$ ) e saturação ( $t=20$ ). Nesses instantes, a onda longa  $\alpha_1$  é comparada com o perfil linear de  $v'$  do canal  $L=15$ . Harmônico  $2\alpha_0$  é referencial.

O comportamento da interface, espectro e bicoerência são mostrados na Figura 7.35 para o caso com  $h_{eq}=0,558$ , e na Figura 7.36 para o caso com  $h_{eq}=0,7$ . Para referência são indicados os números de onda  $\alpha_l$  e harmônicos de  $\alpha_0$ . No caso  $h_{eq}=0,558$  a interface é definida, inicialmente, com a onda longa ( $\lambda_l=15$ ) tendo a amplitude dominante (como mostrado no instante  $t=5$ ). Posteriormente, a onda curta e seus harmônicos crescem e a partir do instante  $t=30$  já se tornam, claramente, as ondas dominantes. É interessante notar o aparecimento de modos múltiplos de  $\alpha_l$  em torno dos harmônicos de  $\alpha_0$ . Isso é notado nos espectros por grupos de ondas, que crescem em torno da onda fundamental dominante e seus harmônicos. Devido ao fato das ondas, fundamental e longa, não constituírem múltiplos exatos uma da outra, o espectro vai sendo preenchido com múltiplos de  $n\alpha_l$  e  $(\alpha_0 \pm \alpha_l)n$ . Apesar de essa interação ser capaz de produzir ondas em todo o espectro, não se observou uma mudança significativa no comportamento da onda fundamental e conseqüentemente dos seus harmônicos. Os resultados sugerem que efeitos quadráticos da onda fundamental ainda são dominantes e que a não periodicidade da modulação (onda longa) dessa interação quadrática faz com que todo o espectro seja preenchido.

O caso com  $h_{eq}=0,7$ , mostrado na Figura 7.36, apresentou características similares ao caso  $h_{eq}=0,558$ , mas em uma escala de tempo menor. A evolução da interface ao longo da faixa avaliada ( $2 \leq t \leq 20$ ) mostrou comportamento análogo ao caso com  $h_{eq}=0,558$ . De igual forma, a evolução espectral também mostrou o aparecimento de modos (múltiplos de  $\alpha_l$ ) em torno destas duas ondas excitadas  $\alpha_l$  e  $\alpha_0$ , assim como nos harmônicos. A diferença nesse caso é que as ondas longas e curtas eram múltiplos, de modo que a interação só foi capaz de gerar modos em torno de múltiplos inteiros da onda fundamental. Isso reforça a ideia de que a interação quadrática continua a ser dominante e que os modos em torno dos múltiplos inteiros da onda fundamental refletem uma pequena modulação dessas ondas. Essa conjectura é confirmada nos espectros de bicoerência onde observa-se há um claro predomínio de interações entre onda fundamental e harmônicos. A diferença em relação ao caso com somente uma onda é que, neste caso, os contornos de bicoerência capturam regiões que incluem, não somente o harmônico, mas sim um grupo de modos em torno dele.

Assim, nos dois casos avaliados ( $h_{eq}=0,558$  e  $h_{eq}=0,7$ ), a interação entre onda curta e longa, não mostraram um aumento abrupto do crescimento da onda longa. Nestes casos não foram observadas evidências de algum outro mecanismo de interação que pudesse causar crescimento mais rápido do que àquele já observado para interações quadráticas das ondas fundamentais.

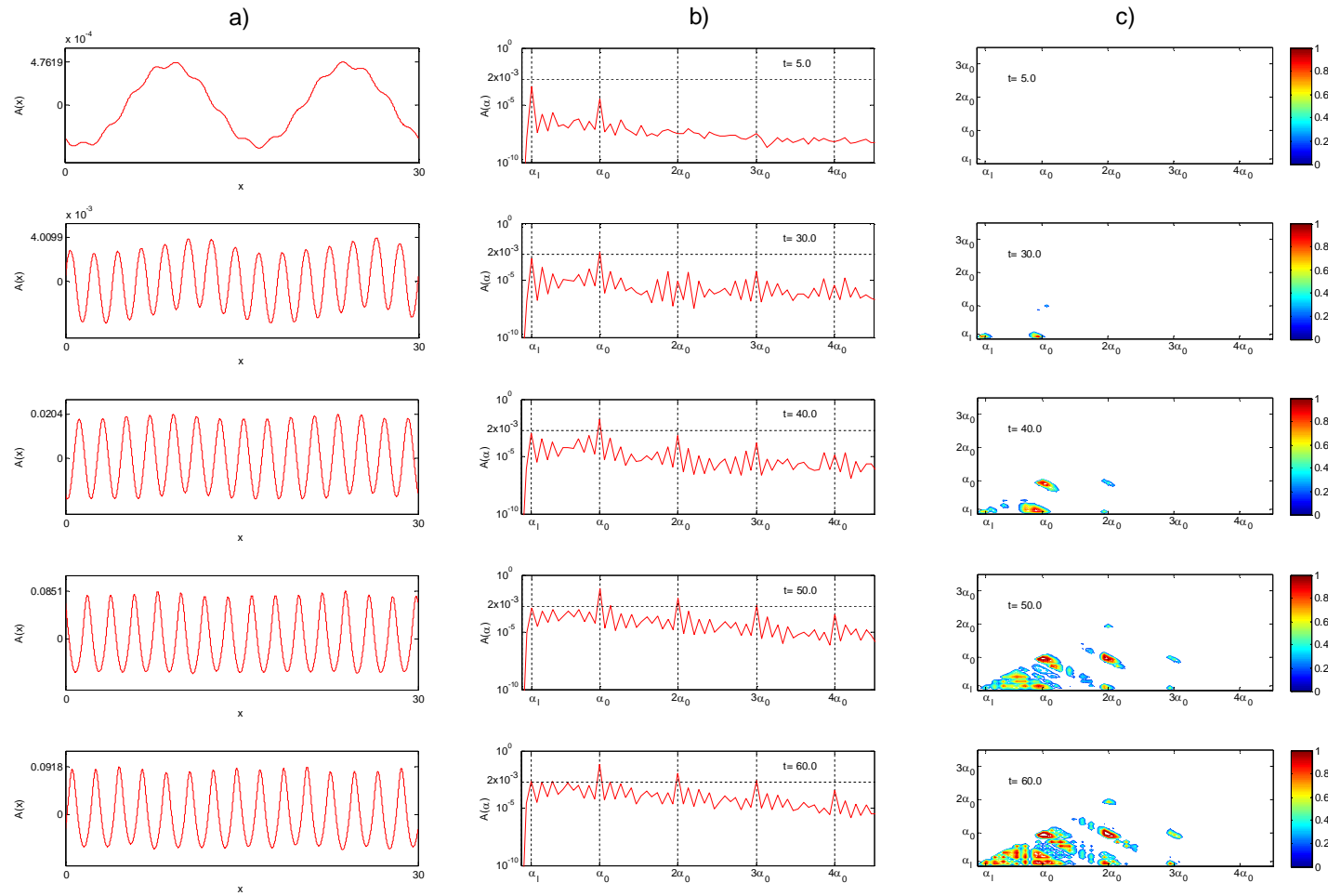


Figura 7.35: (a) Interface, (b), espectro e (c) bicoerência para alguns instantes representativos ( $h_{eq}=0,558$ ). Números de onda ( $\alpha_1, \alpha_0, 2\alpha_0, 3\alpha_0, 4\alpha_0$ ) e limiar linear ( $2 \times 10^{-3}$ ) são mostrados para referência.

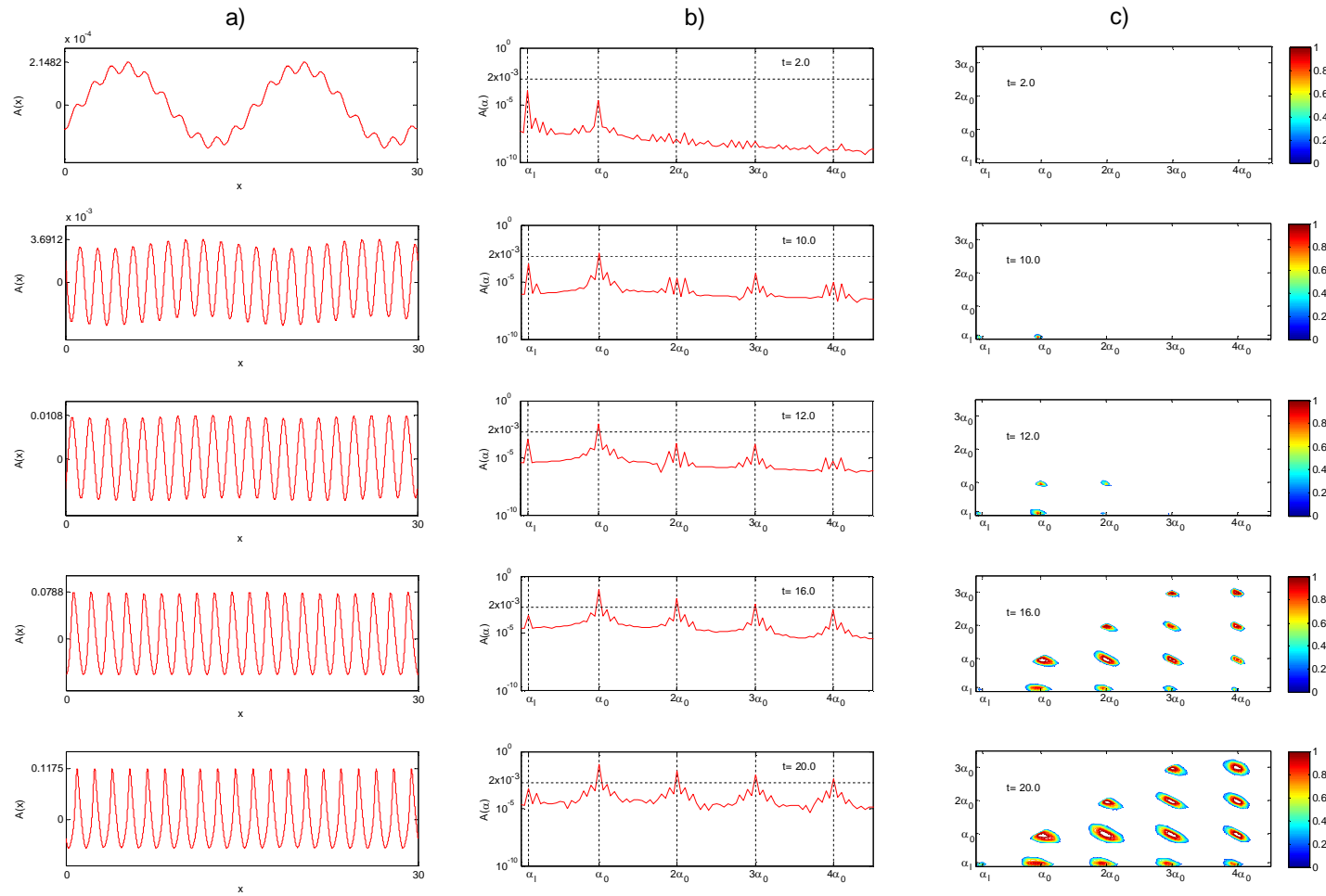


Figura 7.36: (a) Interface, (b) espectro e (c) bicoerência para alguns instantes representativos ( $h_{eq}=0,7$ ). Números de onda ( $\alpha_1$ ,  $\alpha_0$ ,  $2\alpha_0$ ,  $3\alpha_0$ ,  $4\alpha_0$ ) e limiar linear ( $2 \times 10^{-3}$ ) são mostrados para referência.

Nestes casos não foram observados os mecanismos pelos quais ondas longas são geradas e excitadas a rápidos crescimentos e consideráveis amplitudes por ondas curtas linearmente mais instáveis. Tais mecanismos resultaram de uma tríade ressonante, como avaliado por Campbell & Liu nos seus estudos numéricos para o sistema líquido-gás, considerando fluidos invíscidos (2014) ou incluindo efeitos viscosos (Campbell et al., 2016).

A partir dos resultados de interação entre ondas curtas e longas, nota-se o aparecimento de modos em torno da onda fundamental. Isso se assemelha a uma modulação. Na seção a seguir, buscou-se avaliar como a modulação afeta a evolução das ondas interfaciais.

#### 7.8.4

#### Interação entre duas ondas com frequência próximas (modulação)

Em diferentes testes considerando sistemas líquido-gás e líquido-líquido o aparecimento de um modo de baixa frequência de grande amplitude é comumente observado (McCready & Uphold, 1997; McCready et al., 2000). Esta condição não é prevista por efeitos lineares uma vez que a taxa de amplificação dessas ondas, geralmente, é muito baixa para  $\alpha \rightarrow 0$  (King & McCready, 2000). No trabalho de McCready et al. (2000), as ondas foram associadas com o aparecimento de *roll waves* e golfadas.

Baseado nos estudos de camada limite realizador por Kachanov et al. (1982), ondas de baixa frequência podem ser geradas a partir da interação não linear entre duas ondas com frequências  $f_1$  e  $f_2$ , i.e.  $\Delta f = |f_2 - f_1|$ , onde  $f_{1,2} = f_0 \pm \Delta f / 2$  (Boiko et al., 2012). Nessa situação, outras combinações múltiplas dessas ondas fundamentais podem aparecer a medida que as ondas interagem. No presente caso consideramos como referência a frequência  $f_0$ , relativa às ondas mais instáveis, sendo elas com comprimento de onda  $\lambda_0 = 2$  para o caso com  $h_{eq} = 0,558$  e  $\lambda_0 = 1,5$  para  $h_{eq} = 0,7$ . Essas são as mesmas ondas que já foram estudadas nas seções anteriores. Considerando frequências espaciais e a fim de manter ondas exatas no domínio periódico,  $\Delta \alpha$  foi obtido de:

$$\Delta \alpha = \left| \frac{2\pi}{(L/N_2)} - \frac{2\pi}{(L/N_1)} \right| \quad (7.4)$$

$$\alpha_{1,2} = \alpha_0 \pm \Delta \alpha / 2 \quad (7.5)$$

onde  $L$  é o comprimento do canal;  $\alpha_0$  é o número de onda do modo fundamental



considerado.  $N_1$  e  $N_2$  são os números de períodos completos das ondas excitadas dentro do domínio analisado ( $L=30$ ). Para que a resultante da interação entre duas ondas ( $\Delta\alpha$ ) tivesse comprimento similar à onda longa investigada na seção anterior, excitou-se as ondas conforme detalhado na Tabela 7.3.

Tabela 7.3: Geração do modo de baixa frequência  $\Delta\alpha$ .

Caso	Domínio LxH	$\alpha_0$ ( $\lambda_0$ )	$\Delta\alpha$ ( $\lambda$ )	$\alpha_1$ ( $\lambda_1$ )	$\alpha_2$ ( $\lambda_2$ )
$h_{eq}=0,558$	30x1	3,142 (2)	0,419 (15)	2,932 (2,143)	3,351 (1,875)
$h_{eq}=0,7$	30x1	4,189 (1,5)	0,419 (15)	3,979 (1,579)	4,398 (1,429)

A perturbação que é formada pela combinação das ondas  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$ , foi introduzida no escoamento com a mesma amplitude efetiva que foi utilizada nos casos com excitação de somente uma onda [ $A=(A_1+A_2)/2$ ].

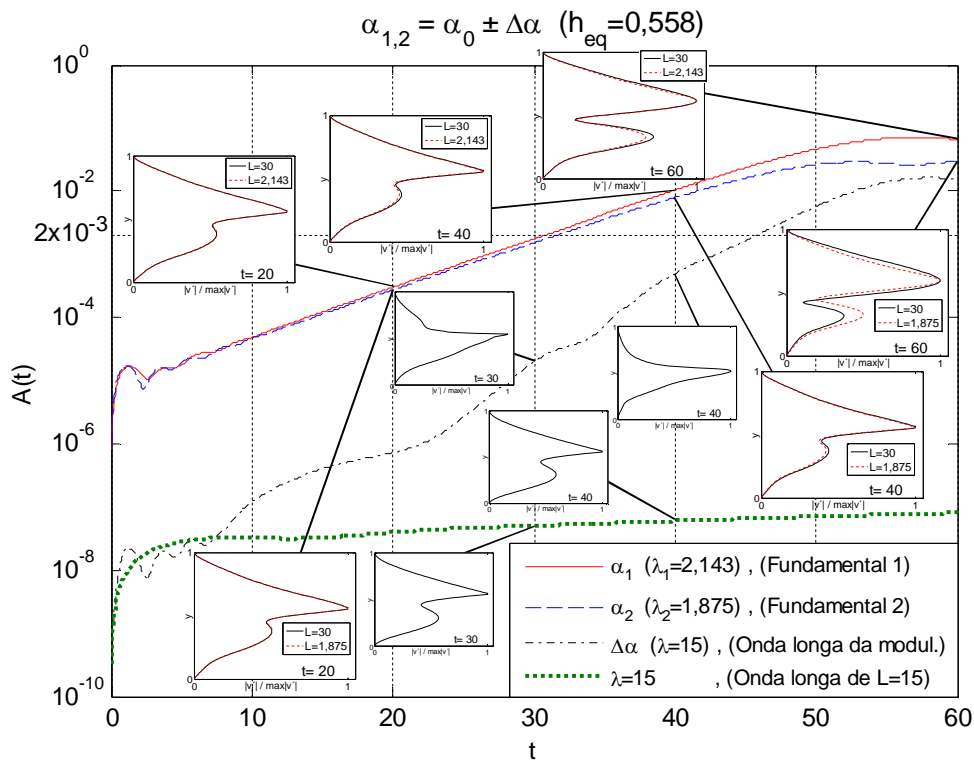


Figura 7.37: Evolução das ondas  $\alpha_1$  ( $\lambda_1=2,143$ ) e  $\alpha_2$  ( $\lambda_2=1,875$ ) em um canal  $L=30$ . Através dos perfis de  $v'$ , as ondas  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  são comparadas aos resultados nos canais  $L=2,143$  e  $L=1,875$ . São comparados os instantes linear ( $t=20$ ), fracamente não linear ( $t=40$ ) e saturação ( $t=60$ ). Nos instantes  $t=30$  e  $40$  são mostrados os perfis de  $v'$  da onda longa  $\Delta\alpha$  gerada pela modulação, e os perfis de  $v'$  obtidos do canal  $L=15$  nesses instantes.

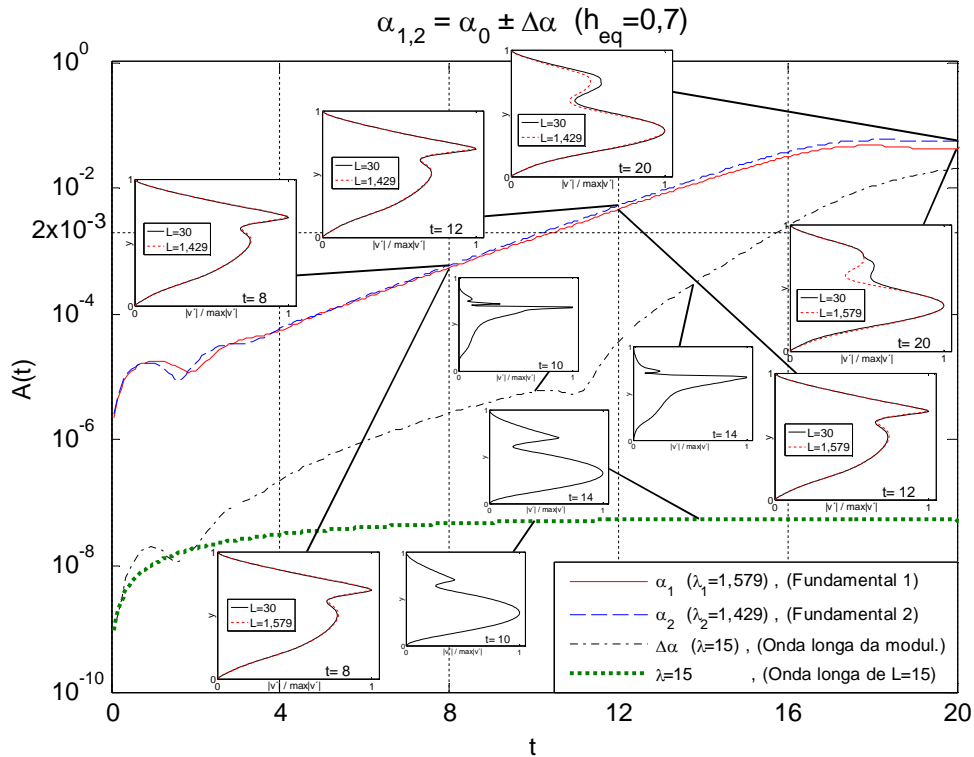


Figura 7.38: Evolução das ondas  $\alpha_1$  ( $\lambda_1=1,579$ ) e  $\alpha_2$  ( $\lambda_2=1,429$ ) em um canal  $L=30$ . Através dos perfis de  $v'$ , as ondas  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  são comparadas aos resultados nos canais  $L=1,579$  e  $L=1,429$ . São comparados os instantes linear ( $t=8$ ), fracamente não linear ( $t=12$ ) e saturação ( $t=20$ ). Nos instantes  $t=10$  e  $14$  são mostrados os perfis de  $v'$  da onda longa  $\Delta\alpha$  gerada pela modulação, e os perfis de  $v'$  obtidos do canal  $L=15$  nesses instantes.

Os resultados das simulações com duas ondas são apresentadas nas Figuras 7.37 para o caso com  $h_{eq}=0,558$ , e na Figura 7.38 para o caso com  $h_{eq}=0,7$ . Os perfis de magnitude de  $v'$  das ondas  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  são comparados com os perfis das simulações realizadas com a presença de somente uma das ondas no canal curto. Vale lembrar que as frequências e comprimentos das ondas simuladas individualmente são as mesmas das ondas excitadas simultaneamente. Para fins de referência, optou-se por incluir nas figuras a evolução do modo de baixa frequência  $\Delta\alpha$ , simulado individualmente no canal. Os perfis das ondas excitadas mostram concordância nas faixas de evolução linear e fracamente não linear até o início da saturação. Isto sugere que a sua interação com outras ondas não é muito forte até esse limite. Na faixa de saturação, observa-se uma pequena diferença nos perfis em comparação com a simulação de uma única onda. Isso sugere que a interação entre essas ondas começa a se tornar mais intensa após a saturação. Uma mudança significativa, porém, é observada quando se compara a evolução do modo de baixa

frequência ( $\Delta\alpha$ ) que foi gerado pela interação das ondas excitadas, em relação àquele simulado individualmente no canal. Para mais detalhe, considerou-se dois instantes para comparar os respectivos perfis dos modos de baixa frequência. A diferença nos perfis é notável apesar de terem o mesmo comprimento  $\lambda=15$ . Isto mostra que a onda longa ( $\Delta\alpha$ ) não é um modo interfacial (O-S), mas sim um forçante que resulta da interação entre as ondas perturbadas.

Na Figura 7.39 (caso  $h_{eq}=0,558$ ) é mostrado o comportamento da interface, espectro e bicoerência em alguns instantes de tempo ao longo da simulação. O caso com  $h_{eq}=0,7$  é apresentado na Figura 7.40. A evolução da interface mostra que a modulação é mantida em quase todo o período, exceto no último instante mostrado  $t=60$ , onde o crescimento atingiu saturação.

O espectro espacial da Figura 7.39b mostra que, desde os instantes iniciais ( $t=5$ ), apesar dos dois modos excitados  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  serem os mais dominantes, já é possível observar o modo  $\Delta\alpha$  e seus múltiplos. Como são resultado da interação entre  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  esses números de onda podem ser descritos de acordo com a relação  $m\alpha_2 \pm n\alpha_1$ , onde  $m$  e  $n$  são números inteiros. Na faixa de amplitudes maiores que o limiar de não-linearidade ( $A > 2 \times 10^{-3}$ ), as ondas dominantes transferem energia para os modos em torno  $\Delta\alpha$  e para os modos em torno dos harmônicos de  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$ .

A bicoerência nula no instante inicial mostrado ( $t=5$ ) na Fig. 7.39c sugere que as oscilações de pequena amplitude em números de onda diferentes de  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$ , e que foram observados no espectro da Figura 7.39b são resultado das perturbações iniciais que foram inseridas no escoamento. Isso se deve ao fato de que o forçamento utilizado não correspondia exatamente às autofunções do problema. Os instantes  $t=35$  e  $t=40$  apresentam os estágios não lineares iniciais, onde há bicoerência moderada em vários modos em torno de  $\Delta\alpha$  e  $\alpha_1$ , além de  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$ . Uma fraca interação, também, é observada em torno de  $\Delta\alpha$  e  $\Delta\alpha$ , assim como em  $\Delta\alpha$  e  $2\alpha_1$ . Em  $t=50$ , o aumento da amplitude das ondas excitadas e dos seus harmônicos também aumenta a não linearidade do sistema. Neste instante, pode-se verificar, o aparecimento de considerável interação em torno de modos com números de onda  $\alpha_1$  e  $2\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  e  $2\alpha_2$ . Também, verifica-se uma fraca bicoerência em torno de  $\Delta\alpha$  e  $3\alpha_1$ . O instante  $t=60$ , mostra o considerável aumento da bicoerência de toda a faixa de frequências menores a  $2\alpha_2$ , e o continuo aumento também da bicoerência das ondas múltiplos de  $\Delta\alpha$  em torno do  $3\alpha_1$  e  $3\alpha_2$ . Isso é similar ao que foi observado na interação entre onda longa e onda curta. Naquele caso, as ondas não tinham comprimentos múltiplos inteiros. Neste caso, o mesmo ocorre entre a portadora  $(\alpha_1+\alpha_2)/2$  e a modulação  $\Delta\alpha$ .

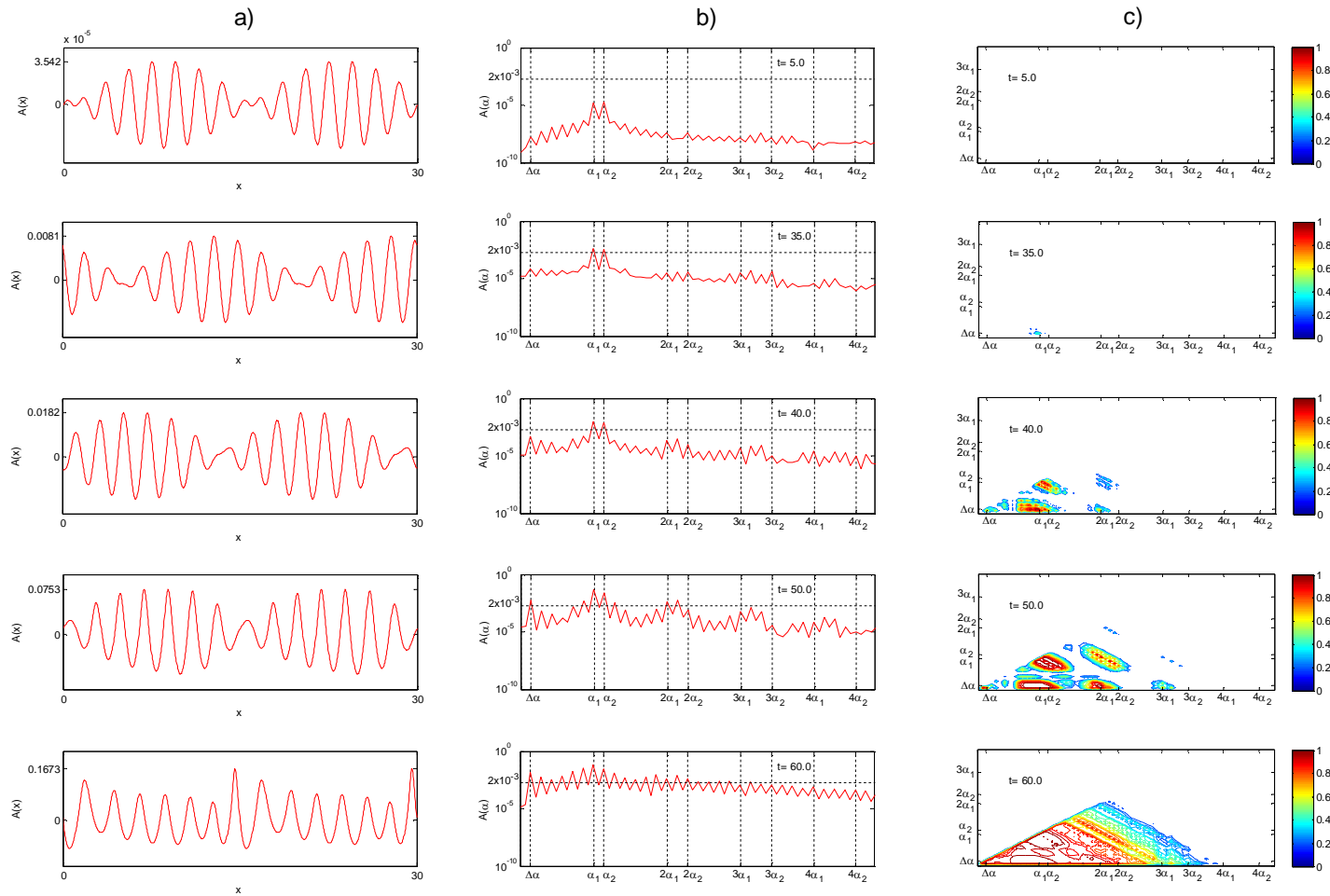


Figura 7.39: (a) Interface, (b) espectro e (c) bicoerência para alguns instantes representativos ( $h_{eq}=0.558$ ). Números de onda ( $\Delta\alpha$ ,  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ , e harmônicos de  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$ ) e limiar linear ( $2 \times 10^{-3}$ ) são mostrados para referência.

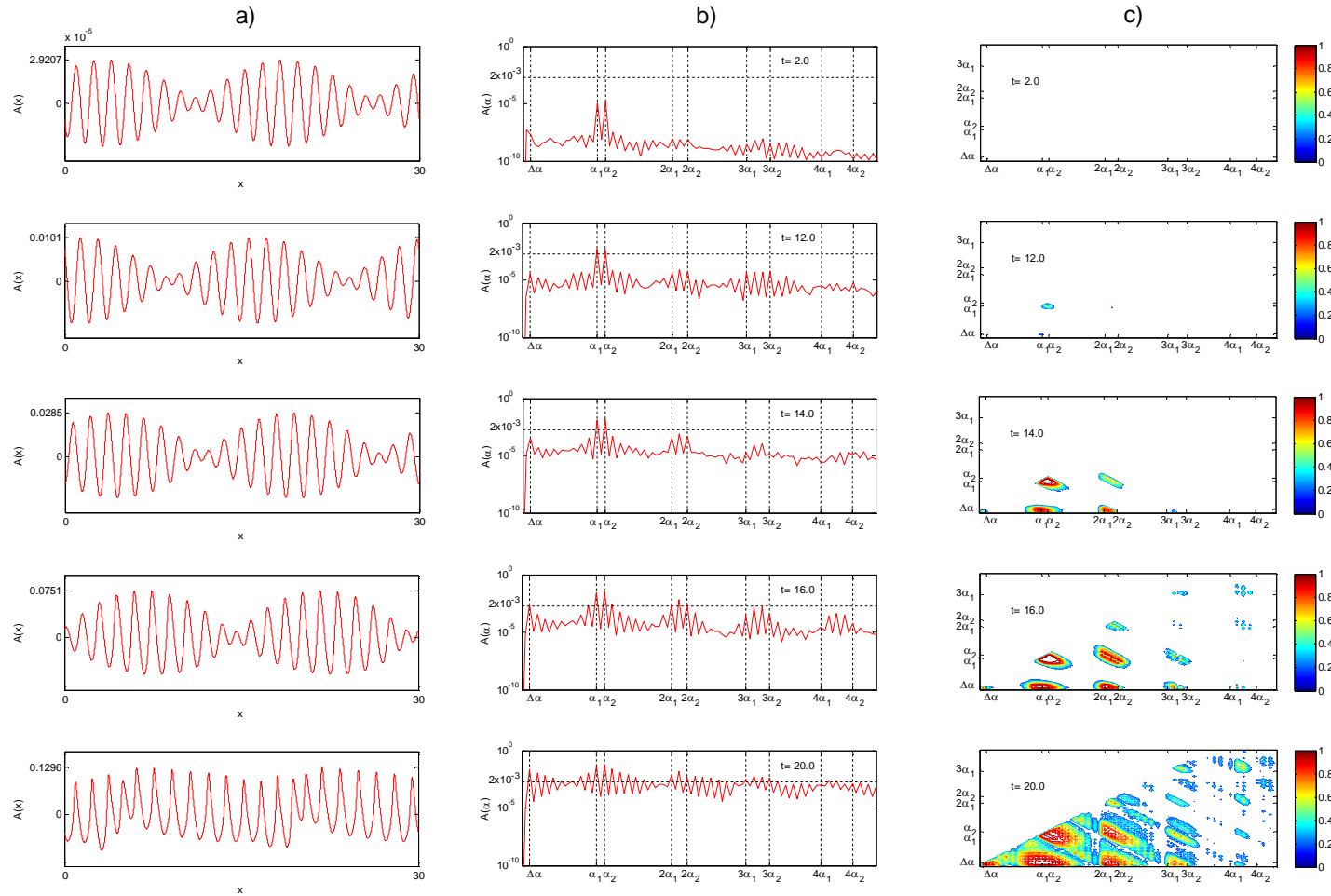


Figura 7.40: (a) Interface, (b) espectro e (c) bicoerência para alguns instantes representativos ( $h_{eq}=0,7$ ). Números de onda ( $\Delta\alpha$ ,  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ , e harmônicos de  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$ ) e limiar linear ( $2 \times 10^{-3}$ ) são mostrados para referência.

O caso mais instável  $h_{eq}=0,7$  mostrado na Figura 7.40, apresenta um comportamento similar ao caso avaliado  $h_{eq}=0,558$ . A evolução interfacial, os espectros espaciais e os contornos de bicoerência mostram em geral um caráter equivalente ao caso  $h_{eq}=0,558$ , no entanto em uma escala de tempo menor. De igual maneira grupos de ondas crescem em torno dos modos inicialmente excitados  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$ , seus harmônicos e o modo de baixa frequência  $\Delta\alpha$ . Entretanto, no caso com  $h_{eq}=0,7$ , observa-se mais claramente as interações em torno de harmônicos da frequência portadora e de  $\Delta\alpha$ . Isso ocorre porque nesse caso a modulação e a onda portadora têm comprimentos múltiplos e inteiros.

O presente estudo também pode ser considerado um caso particular dos trabalhos onde instabilidades de banda lateral (*sideband*) apareceram (Cheng & Chang 1990; Jurman et al., 1992; Renardy & Renardy, 1993; McCready & Uphold, 1997). Não foi observado o mecanismo descrito pelo trabalho experimental de Jurman et al. (1992) no qual a aparição de ondas longas, em um sistema líquido-gás, foi associada a interação quadrática desses modos com os modos de banda lateral da onda fundamental.

Para complementar esta análise, vamos avaliar a amplitude efetiva das ondas, como realizado no trabalho de de Paula et al. (2013).

#### 7.8.4.1 Influência da amplitude efetiva inicial

A amplitude inicial das perturbações pode alterar a dinâmica do escoamento, principalmente nos casos com modulação. Dessa forma, para investigar este efeito, diversas simulações foram realizadas empregando-se diferentes amplitudes iniciais das perturbações. Selecionou-se para teste o caso anterior com excitação de dois modos, com outras três diferentes amplitudes iniciais. Para comparar estes casos modulados é considerado o critério de amplitude (no lugar de energia) como descrito em de Paula et al. (2013). O critério compara regimes com a mesma amplitude máxima, que a onda fundamental modulada, alcançada no centro dos batimentos correspondentes. O parâmetro de amplitude efetiva  $A_{efe}$  é introduzido pelo conceito de modo efetivo. Para duas ondas fundamentais próximas com frequências  $f_1$  e  $f_2$  e amplitudes  $A_1$  e  $A_2$ , o modo efetivo seria, por definição, uma onda com frequência  $f_{1/2}=(f_1+f_2)/2$ , cuja amplitude  $A_{efe}$  é igual à soma das amplitudes  $A_1$  e  $A_2$ .

A Tabela 7.4 detalha as amplitudes utilizadas na perturbação inicial. Na Figura 7.41, mostra-se a evolução da amplitude efetiva (considerando as ondas

$\alpha_1$  e  $\alpha_2$ ) para as quatro diferentes amplitudes iniciais. As curvas mostram que a amplitude inicial não influencia na evolução do caso modulado, mantendo as mesmas taxas de crescimento efetivo e atingindo a mesma amplitude de saturação. Vale observar-se que isso é válido para a faixa de amplitudes iniciais consideradas ( $10^{-5} < A_{\text{efetiva}} < 10^{-4}$ ).

Tabela 7.4: Amplitudes iniciais utilizadas nos testes.

Caso	Teste	$A(\alpha_1) / A_{\text{ref}}$	$A(\alpha_2) / A_{\text{ref}}$	$A_{\text{efetiva}} / A_{\text{ref}}$
$h_{\text{eq}}=0,558$	1	0,5	0,5	1,0
	2	1,0	1,0	2,0
	3	2,0	2,0	4,0
	4	3,0	3,0	6,0

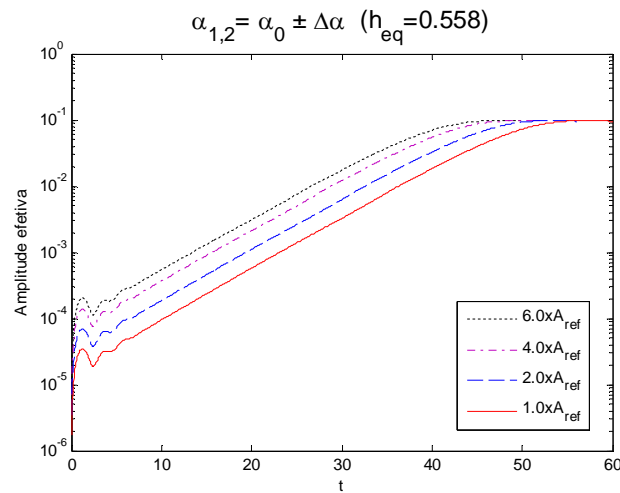


Figura 7.41: Evolução temporal da amplitude efetiva considerando  $\alpha_1$  ( $\lambda_1=2,143$ ) e  $\alpha_2$  ( $\lambda_2=1,875$ ), caso  $h_{\text{eq}}=0,558$ . Amplitudes iniciais segundo Tabela 7.4.

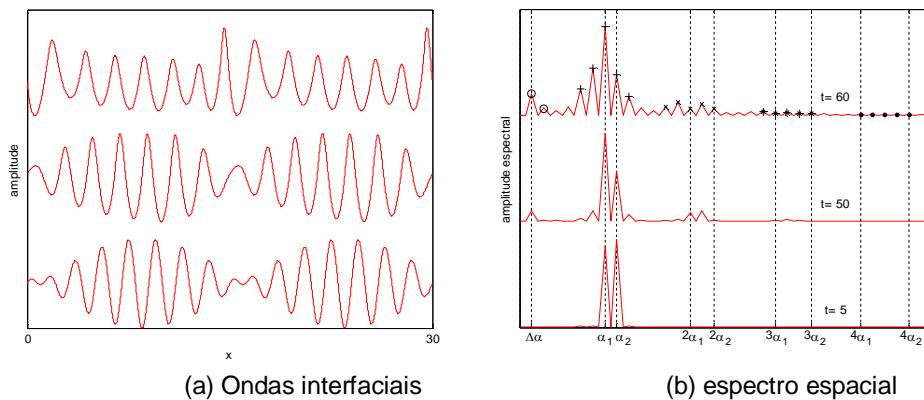


Figura 7.42: Ondas interfaciais e seu espectro espacial. Três instantes são mostrados para referência. Os pontos marcados em  $t=60$  indicam os componentes considerados na obtenção das amplitudes efetivas:  $A_{\text{efe}(\Delta\alpha)}$  (o),  $A_{\text{efe}1}$  (+),  $A_{\text{efe}2}$  (x),  $A_{\text{efe}3}$  (\*),  $A_{\text{efe}4}$  (·).

Figura 7.42 mostra a evolução da interface e o correspondente espectro espacial em três instantes representativos. No instante inicial ( $t=5$ ), a interface modulada mostra dois batimentos claramente definidos. Neste instante, o espectro mostra picos de amplitude de igual magnitude nas ondas excitadas  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$ . Algum tempo depois ( $t=50$ ), outros picos de amplitude aparecem em torno das ondas  $\Delta\alpha$ ,  $2\alpha_1$  e  $2\alpha_2$ , assim como em torno de  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  (ondas do tipo  $\alpha_1-\Delta\alpha$  e  $\alpha_2+\Delta\alpha$ ). Neste estágio a amplitude da onda  $\alpha_1$  é ligeiramente maior do que a amplitude de  $\alpha_2$ , e a modulação da interface começa a perder definição. No último instante ( $t=60$ ) outras ondas continuam aparecendo em torno das ondas já descritas, assim como em torno dos outros harmônicos  $3\alpha_1$ ,  $3\alpha_2$ ,  $4\alpha_1$  e  $4\alpha_2$ .

Para descrever a evolução destas ondas e sua interação é necessário considerar amplitudes que caracterizem a amplitude total das frequências harmônicas amplificadas por interação não linear (de Paula et al., 2013). Para referência, no último instante ( $t=60$ ) são marcadas as ondas com amplitude em torno de  $\Delta\alpha$ , e dos harmônicos de  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$ . Isto define as seguintes amplitudes efetivas:

$$A_{\text{efe}(\Delta\alpha)} = A_{(\Delta\alpha)} + A_{(2\Delta\alpha)} \quad (7.6)$$

$$A_{\text{efe1}} = A_{(\alpha_1-2\Delta\alpha)} + A_{(\alpha_1-\Delta\alpha)} + A_{(\alpha_1)} + A_{(\alpha_2)} + A_{(\alpha_2+\Delta\alpha)} \quad (7.7)$$

$$A_{\text{efe2}} = A_{(2\alpha_1-2\Delta\alpha)} + A_{(2\alpha_1-\Delta\alpha)} + A_{(2\alpha_1)} + A_{(2\alpha_1+\Delta\alpha)} + A_{(2\alpha_2)} \quad (7.8)$$

$$A_{\text{efe3}} = A_{(3\alpha_1-\Delta\alpha)} + A_{(3\alpha_1)} + A_{(3\alpha_1+\Delta\alpha)} + A_{(3\alpha_1+2\Delta\alpha)} + A_{(3\alpha_2)} \quad (7.9)$$

$$A_{\text{efe4}} = A_{(4\alpha_1)} + A_{(4\alpha_1+\Delta\alpha)} + A_{(4\alpha_1+2\Delta\alpha)} + A_{(4\alpha_1+3\Delta\alpha)} + A_{(4\alpha_2)} \quad (7.10)$$

A comparação entre as evoluções das ondas para diferentes níveis de excitação inicial, é apresentada na Figura 7.43. As Figuras (a), (b), (c) e (d) mostram a evolução das amplitudes efetivas  $A_{\text{efe1}}$ ,  $A_{\text{efe}(\Delta\alpha)}$ ,  $A_{\text{efe2}}$ , e  $A_{\text{efe3}}$ , respectivamente. Em cada figura, avaliam-se diferentes amplitudes iniciais. Para a comparação, a escala de tempo de cada caso foi deslocada em relação do caso de referência, utilizando a amplitude inicial da perturbação  $A_{0e}$ , e a taxa de amplificação linear  $\omega_{ie}$ , tal que o tempo a deslocar  $\Delta t_{\text{desl}}$  é dado por,



$$\Delta t_{desl} = \frac{n}{\omega_{ie}} \left( \frac{A_{0e}}{A_{ref}} \right) \tag{7.11}$$

onde  $A_{ref}$  corresponde a amplitude inicial do caso de referência. Assim, algumas características gerais podem ser avaliadas em relação ao caso base ( $A_{ref}$ ). A concordância das curvas permite concluir que, na faixa de parâmetros analisados, os resultados são independentes da amplitude das ondas moduladas.

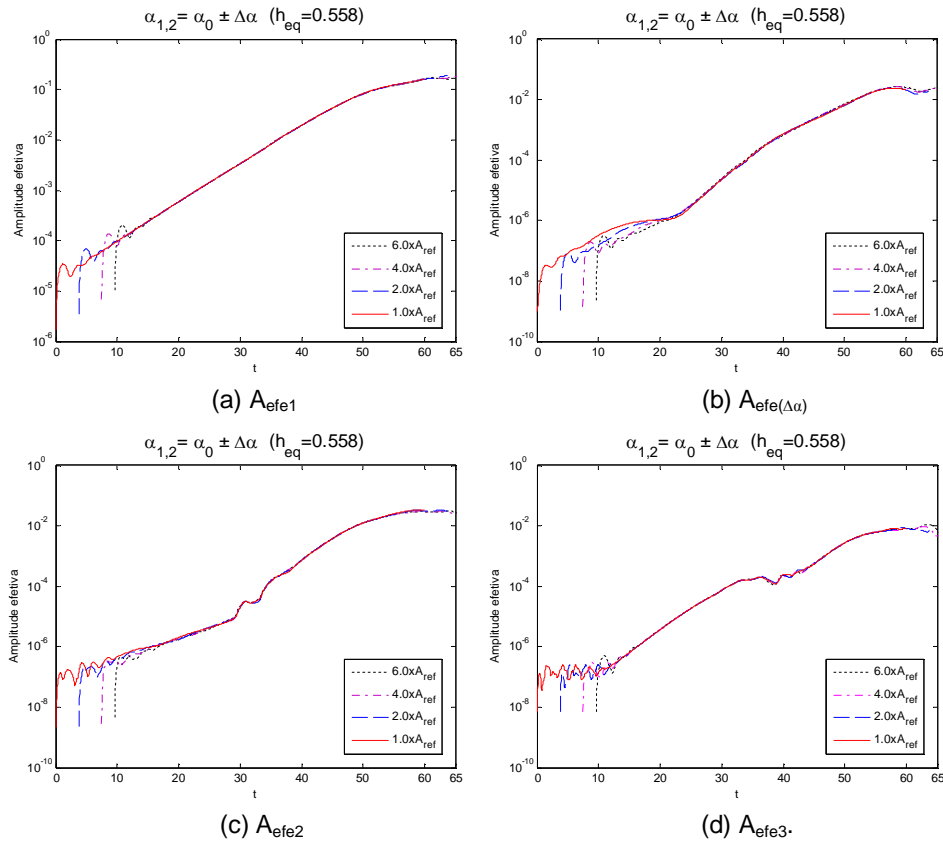


Figura 7.43: Evolução das amplitudes efetivas para diferentes magnitudes iniciais.

(a)  $A_{efe1}$ ; (b)  $A_{efe(\Delta\alpha)}$ ; (c)  $A_{efe2}$ ; e (d)  $A_{efe3}$ .

Na Figura 7.44a é mostrada a evolução das amplitudes efetivas  $A_{efe(\Delta\alpha)}$ ,  $A_{efe1}$ ,  $A_{efe2}$ ,  $A_{efe3}$  e  $A_{efe4}$ , do caso de referência com amplitude inicial igual a  $A_{ref}$ . Na Figura 7.44b é mostrada a evolução da relação  $A_{efen} / (A_{efe1})^n$ , cuja região quase constante apresenta valores similares de amplitude normalizada sugerindo que as ondas nesse intervalo são resultado de interações quadráticas, cúbicas e de quarta ordem entre as ondas fundamentais ( $A_{efe1}$ ). Assim, pode-se verificar que tanto  $A_{efe2}$  e  $A_{efe(\Delta\alpha)}$ , são resultado da interação quadrática de  $A_{efe1}$  ( $A_{efe2}$  resultando da soma, e  $A_{efe(\Delta\alpha)}$  da diferença dos componentes de  $A_{efe1}$ ). Além

disso, a amplitude  $A_{efe3}$  resulta da interação cúbica de  $A_{efe1}$ , e  $A_{efe4}$  da interação de quarta ordem de  $A_{efe1}$ . Pode-se concluir, também, que tais interações acontecem em sequência, de acordo com a ordem da interação. Logo, observa-se que a interação quadrática acontece primeiro. Já o instante para a interação de 4ª ordem aparecer é só ligeiramente maior do que o instante da interação cúbica.

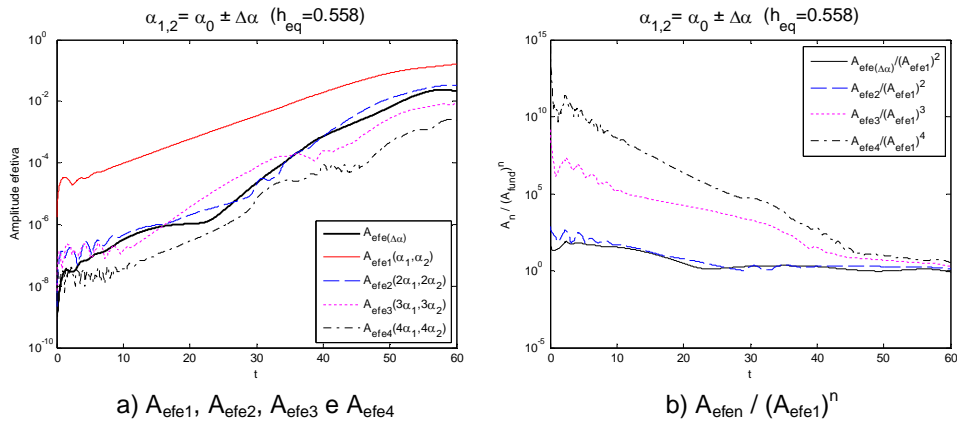


Figura 7.44: a) Evolução das amplitudes efetivas  $A_{efe(\Delta\alpha)}$ ,  $A_{efe1}$ ,  $A_{efe2}$ ,  $A_{efe3}$  e  $A_{efe4}$ .  
 b) Evolução da relação  $A_{efen} / (A_{efe1})^n$ .

### 7.8.4.2 Sincronização de fases

Para fechar esta seção, analisaram-se os valores máximos de amplitude atingidos pela interface do escoamento. Conforme discutido na análise da Figura 7.39a (instante  $t=60$ ), as oscilações da interface podem exibir, localmente, picos de amplitude. Para visualizar melhor essa característica, é conveniente analisar a informação do espectro e fases que compõem o sinal nesse instante. Os dados utilizados nesta análise são os mesmos dos casos apresentados nas Figuras 7.39a e 7.42a correspondente ao instante  $t=60$ . Através da transformada *wavelet* (Capítulo 5), a decomposição do sinal no domínio do número de onda e espaço é apresentada a seguir. Nas Figuras 7.45a e 7.45b, a decomposição do sinal é mostrada através dos contornos de magnitude e de fase, respectivamente. O sinal original é mostrado na Figura 7.45c. Os contornos correspondentes à magnitude de amplitude (Fig. 7.45a) mostram que as ondas com amplitudes mais dominantes, correspondem aos modos que compõem a onda efetiva fundamental (modos em torno de  $\Delta\alpha=0,419$ ). Os harmônicos dessa onda também são observados. Os picos de amplitude ocorrem nas coordenadas  $x=14,6$  e  $29,6$ . Essas posições são marcadas na figura com linhas tracejadas.

Nessa localização, os contornos de fases (Fig. 7.45b) mostram que quase todos os números de onda estão aproximadamente com a mesma fase. Isso só ocorre no local do pico.

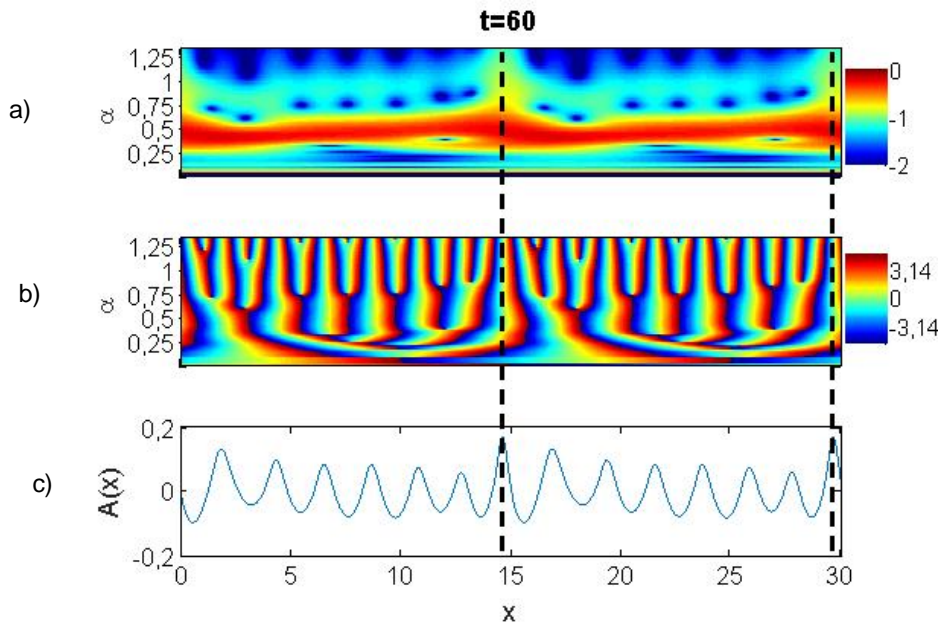


Figura 7.45: (a) Contornos de magnitude da amplitude, (b) fase e (c) traço do sinal da interface, no instante  $t=60$ . As figuras indicam que as fases dos modos mais dominantes do espectro estão próximas de uma sincronização entre fases fornecendo um pico de amplitude em  $x=14,6$  e  $x=29,6$ .

Pelo encontrado, conjectura-se que os picos consideráveis de altura da interface, que aparecem ocasionalmente, sejam resultados da sincronização de fases entre as ondas mais dominantes que compõem a oscilação da interface. Isto permite uma forma de interferência construtiva aleatória que cria um máximo de amplitude instantânea como no fenômeno do vagalhão (*Rogue wave*). Em alguns casos, esta circunstância poderia levar à formação de golfadas, mesmo que as amplitudes das ondas já tenham atingido a saturação.

### 7.8.5

#### Evolução de um espectro de banda larga com fases aleatórias

Para complementar as análises anteriores que avaliaram interações discretas de algumas ondas, a evolução e interação de um espectro de ondas de banda larga (com fases aleatórias) é investigada nesta seção. O caso modela o que seria a evolução de ruído com uma amplitude inicial determinada. Este caso é mais realístico ao incluir uma interface perturbada com várias ondas de

diferentes comprimentos, o que pode permitir a coexistência de uma grande faixa de ondas em condições ressonantes ou perto da ressonância (Campbell & Liu, 2013). O objetivo é determinar se ondas longas ou subharmônicos podem exibir rápido crescimento a partir da interação combinada entre várias ondas e se os mecanismos observados nos casos mais simples ainda são os relevantes. Em tais condições é possível que a taxa de transferência de energia seja maior do que aquela observada em uma interação quadrática simples.

Para essa análise, as ondas mais instáveis são utilizadas como referência ( $\lambda_0=2$  no caso  $h_{eq}=0,558$  e  $\lambda_0=1,5$  no caso  $h_{eq}=0,7$ ). Em torno destas ondas, uma faixa total de sete ondas com diferentes comprimentos é considerada. Esta opção é empregada a fim de permitir a possível geração de ondas na faixa de ondas longas, subharmônicos e harmônicos por meio de interações entre as ondas excitadas. A perturbação inicial  $A_{p(x)}$  é definida considerando que o canal de comprimento  $L$ , somente pode conter números inteiros de períodos das ondas excitadas. Isso leva a definir as seguintes equações, para os casos com  $h_{eq}$  igual a 0,558 e  $h_{eq}=0,7$ , respectivamente:

$$A_{p(x)} = \frac{A_{efi}}{7} \sum_{j=1}^7 \left[ \sin \left( \frac{2\pi}{[L/(j+11)]} x + \phi_j \right) \right], \quad \phi_j \in \text{rand}[-\pi : \pi] \quad (7.12)$$

$$A_{p(x)} = \frac{A_{efi}}{7} \sum_{j=1}^7 \left[ \sin \left( \frac{2\pi}{[L/(j+16)]} x + \phi_j \right) \right], \quad \phi_j \in \text{rand}[-\pi : \pi] \quad (7.13)$$

onde  $\phi_j$  é o ângulo de fase (aleatório para cada modo),  $A_{efi}$  a amplitude efetiva inicial e  $x$  a coordenada espacial horizontal. A amplitude efetiva inicial considerada é a mesma utilizada no caso modulado (seção 7.8.4). As faixas perturbadas em cada caso são detalhadas na Tabela 7.5.

Tabela 7.5: Faixa de ondas perturbadas.

Caso	Domínio LxH	$\alpha_0 (\lambda_0)$	$[\alpha_i : 2\pi/30 : \alpha_i]$ $[\lambda_i : \lambda_i]$	$\Delta\alpha_{if} (\lambda_{if})$ $= \alpha_i - \alpha_i$
$h_{eq}=0,558$	30x1	3,142 (2)	[2,513 2,723 2,932 3,142 3,351 3,561 3,77] [2,5 2,308 2,143 2,0 1,875 1,765 1,667]	1,257 (5,0)
$h_{eq}=0,7$	30x1	4,189 (1,5)	[3,561 3,77 3,979 4,189 4,398 4,608 4,817] [1,765 1,667 1,579 1,5 1,429 1,364 1,304]	1,257 (5,0)

Na Figura 7.46a é mostrada a evolução das amplitudes efetivas do caso  $h_{eq}=0,558$ . O caso  $h_{eq}=0,7$  é mostrado na Figura 7.47a. Estas amplitudes efetivas

$A_{efe(\Delta\alpha)}$ ,  $A_{efe1}$ ,  $A_{efe2}$  e  $A_{efe3}$ , resultam da integração de amplitudes das diferentes ondas que conformam as faixas  $[0:\Delta\alpha_i]$ ,  $[\alpha_i:\alpha_i]$ ,  $[2\alpha_i:2\alpha_i]$  e  $[3\alpha_i:3\alpha_i]$ , respectivamente. Nestas figuras pode ser observado como o comportamento instável das quatro faixas consideradas atinge estabilização.

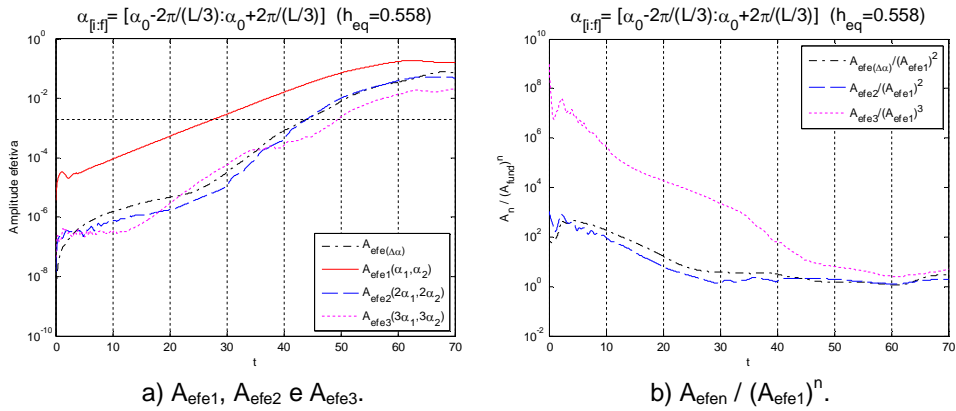


Figura 7.46: Espectro de banda larga do caso  $h_{eq}=0,558$ . a) Evolução das amplitudes efetivas  $A_{efe(\Delta\alpha)}$ ,  $A_{efe1}$ ,  $A_{efe2}$  e  $A_{efe3}$ . b) Evolução da relação  $A_{efen} / (A_{efe1})^n$ .

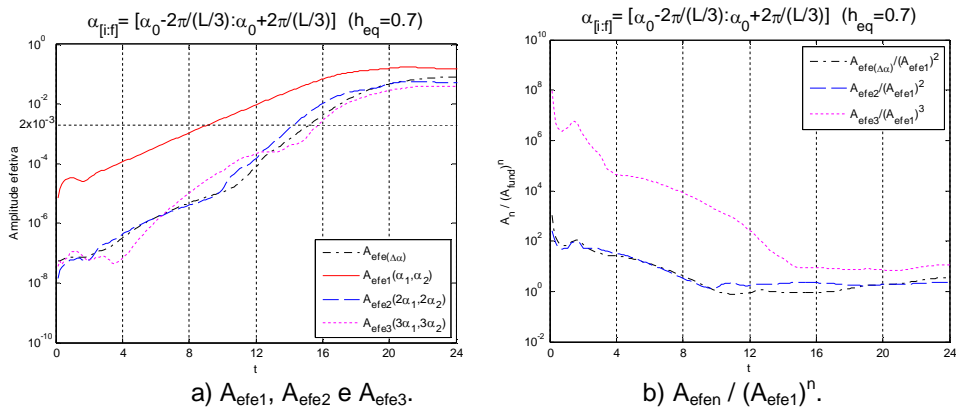


Figura 7.47: Espectro de banda larga do caso  $h_{eq}=0,7$ . a) Evolução das amplitudes efetivas  $A_{efe(\Delta\alpha)}$ ,  $A_{efe1}$ ,  $A_{efe2}$  e  $A_{efe3}$ . b) Evolução da relação  $A_{efen} / (A_{efe1})^n$ .

Nas Figuras 7.46b e 7.47b é mostrada a evolução da relação  $A_{efen} / (A_{efe1})^n$ , para os dois casos  $h_{eq}=0,558$  e  $h_{eq}=0,7$ , respectivamente. Pode-se observar que  $A_{efe2}$  e  $A_{efe(\Delta\alpha)}$ , são resultado da interação quadrática de  $A_{efe1}$  ( $A_{efe2}$  resultando da soma, e  $A_{efe(\Delta\alpha)}$  da diferença dos componentes de  $A_{efe1}$ ). Da mesma maneira observa-se que a amplitude  $A_{efe3}$  resulta da interação cúbica de  $A_{efe1}$ . Verifica-se também, que a interação quadrática aparece antes do que a interação cúbica.

Seguindo a seqüência de análise dos casos anteriores, o comportamento da interface, espectro e bicoerência são mostrados na Figura 7.48 (caso  $h_{eq}=0,558$ ) e Figura 7.49 (caso  $h_{eq}=0,7$ ), respectivamente. Alguns instantes representativos são mostrados. Na Figura 7.48a, a interface no instante  $t=5$

apresenta uma complexa configuração própria do espectro de banda larga. Esse formato das ondas é completamente perdido no último instante mostrado  $t=70$ . O espectro espacial no instante  $t=5$ , mostra que a faixa perturbada é composta pelas ondas contidas na região  $[\alpha_i; \alpha_f]$ . A partir do instante  $t=40$ , observa-se um espectro de banda larga em torno da faixa correspondente aos harmônicos  $[2\alpha_i; 2\alpha_f]$ , assim como em torno dos modos de baixa frequência  $[0; \Delta\alpha_{if}]$ . No instante  $t=50$ , pode-se identificar também o aparecimento de uma faixa correspondente aos harmônicos  $[3\alpha_i; 3\alpha_f]$ , enquanto que dois grupos aparecem na região de frequências menores a faixa fundamental excitada, aparentemente, associados com ondas longas e subharmônicos. A saturação é atingida no instante  $t=70$ . Neste instante é difícil identificar, visualmente, faixas espectrais associadas aos grupos de harmônicos ou de baixas frequências.

Os contornos de bicoerência da Figura 7.48, mostram interação no instante  $t=50$  nos grupos associados às ondas de baixa frequência e harmônicos. Na figura podem-se identificar as faixas:  $[0; \Delta\alpha_{if}]$  e  $[0; \Delta\alpha_{if}]$ ,  $[0; \Delta\alpha_{if}]$  e  $[\alpha_i; \alpha_f]$ ,  $[0; \Delta\alpha_{if}]$  e  $[2\alpha_i; 2\alpha_f]$ , assim como em  $[\alpha_i; \alpha_f]$  e  $[\alpha_i; \alpha_f]$ . Cada faixa apresenta diferente nível de interação de acordo com a magnitude de bicoerência. Os instantes  $t=5$  (coerência nula) e  $t=40$  mostram o estágio linear e o início dos efeitos não lineares, respectivamente. Nos instantes  $t=60$  e  $t=70$ , o contínuo aumento da interação preenche o espectro de bicoerência.

O outro caso avaliado  $h_{eq}=0,7$  (Figura 7.49) foi similar ao caso  $h_{eq}=0,558$ , mas a física ocorreu em uma escala de tempo menor, como já mostrado nos casos anteriores, devido a natureza mais instável. Nesse caso, a interação entre os modos dá origem a múltiplos exatos das ondas excitadas. Sendo assim, é esperado que as interações não lineares fossem mais claramente observadas como no caso com duas ondas. Os resultados mostram que as ondas excitadas  $[\alpha_i; \alpha_f]$  geram perturbações tanto na faixa de baixa frequência  $[0; \Delta\alpha_{if}]$  assim como nas faixas de harmônicos  $[2\alpha_i; 2\alpha_f]$  e  $[3\alpha_i; 3\alpha_f]$ . Isso pode ser identificado no instante  $t=16$  da Figura 7.49b. Nos instantes seguintes o espectro é preenchido de maneira similar ao que foi visto no caso fracamente instável ( $h_{eq}=0,558$ ).

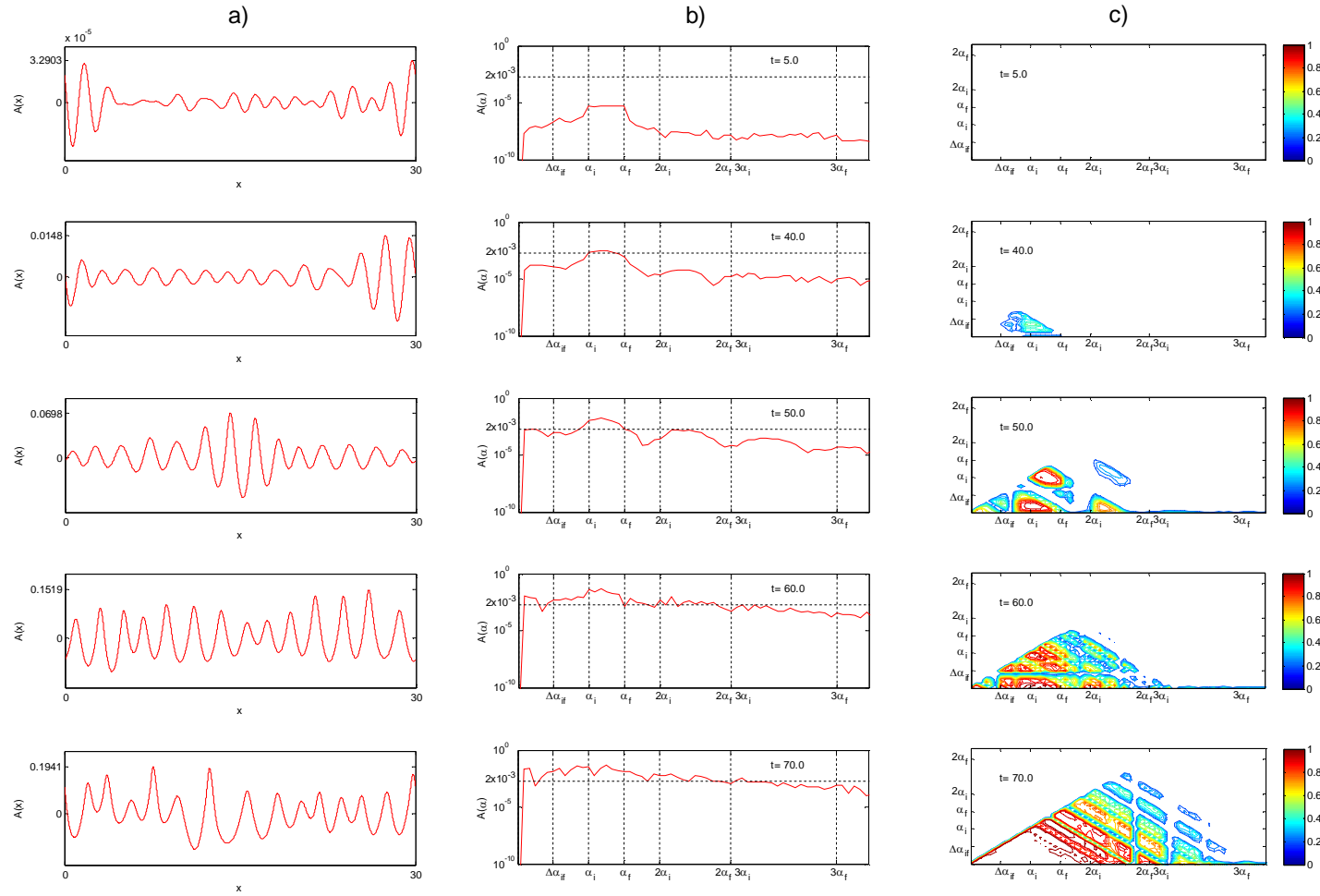


Figura 7.48: (a) Interface, (b) espectro e (c) bicoerência para alguns instantes representativos ( $h_{eq}=0,558$ ). Números de onda ( $\Delta\alpha_f, \alpha_i, \alpha_f, 2\alpha_i, 2\alpha_f, 3\alpha_i, 3\alpha_f$ ) e limiar linear ( $2 \times 10^{-3}$ ) são mostrados para referência.

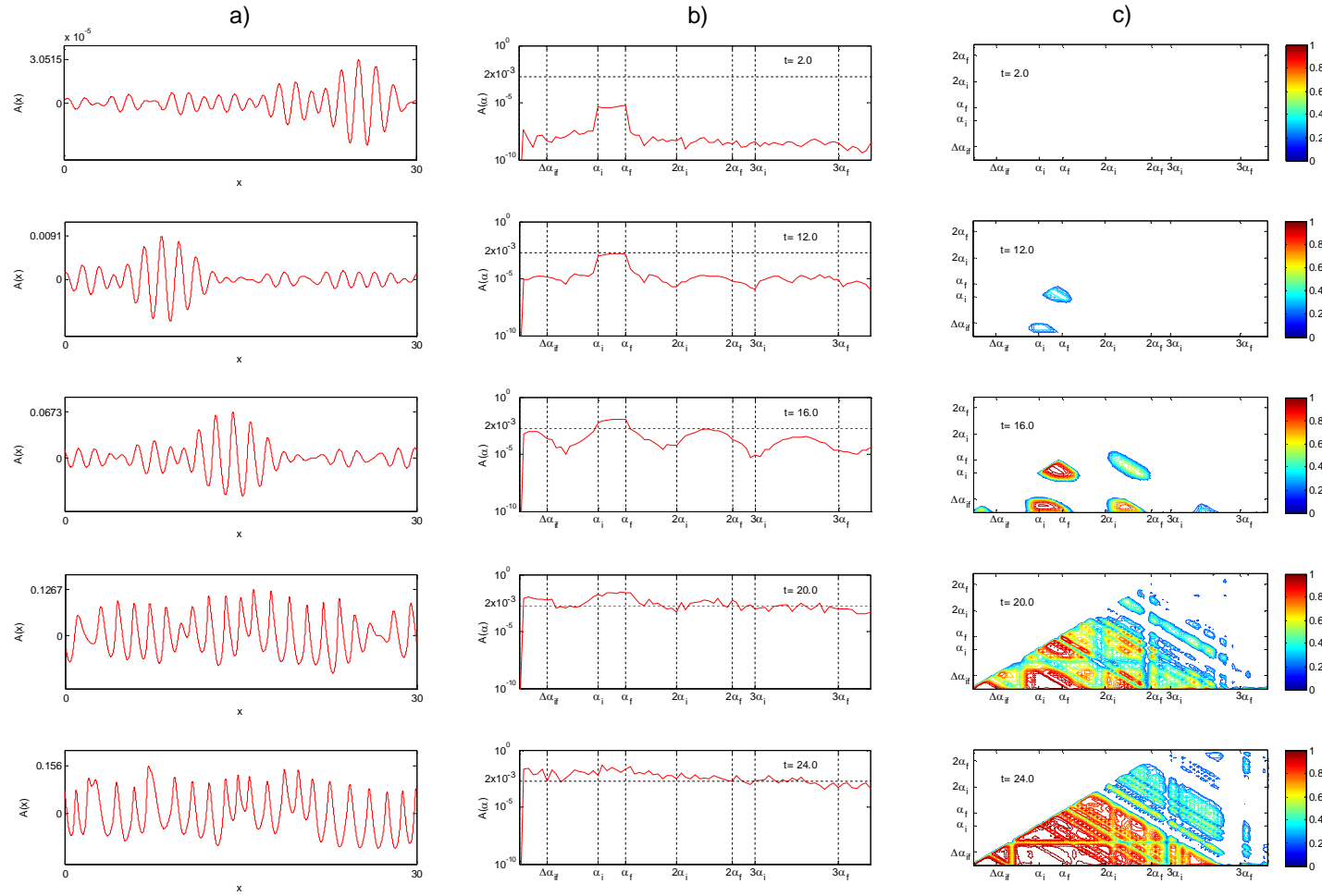


Figura 7.49: (a) Interface, (b) espectro e (c) bicoerência para alguns instantes representativos ( $h_{eq}=0,7$ ). Números de onda ( $\Delta\alpha_f, \alpha_i, \alpha_f, 2\alpha_i, 2\alpha_f, 3\alpha_i, 3\alpha_f$ ) e limiar linear ( $2 \times 10^{-3}$ ) são mostrados para referência.



No trabalho de Campbell & Liu (2014), foi especulado que uma grande quantidade de possíveis tríades ressonantes poderia produzir um efeito mais dominante do que uma simples ressonância subharmônica. Isso poderia até induzir o crescimento de ondas longas. No entanto, os resultados deste trabalho mostram que, nas condições estudadas, a evolução das ondas se apresentou, significativamente, mais simples. Os resultados sugerem que o fenômeno não linear dominante é governado pelo produto entre ondas. Isto é confirmado na análise da seção a seguir.

### 7.8.6 Equivalência das amplitudes efetivas dos casos avaliados

Nos casos estudados na seção 7.8.4, foi indicado que a evolução da amplitude efetiva das ondas moduladas era equivalente ao caso de onda simples. A seguir, avaliou-se essa equivalência para o caso de perturbações compostas por várias ondas. Nessa seção são comparadas as amplitudes efetivas dos casos

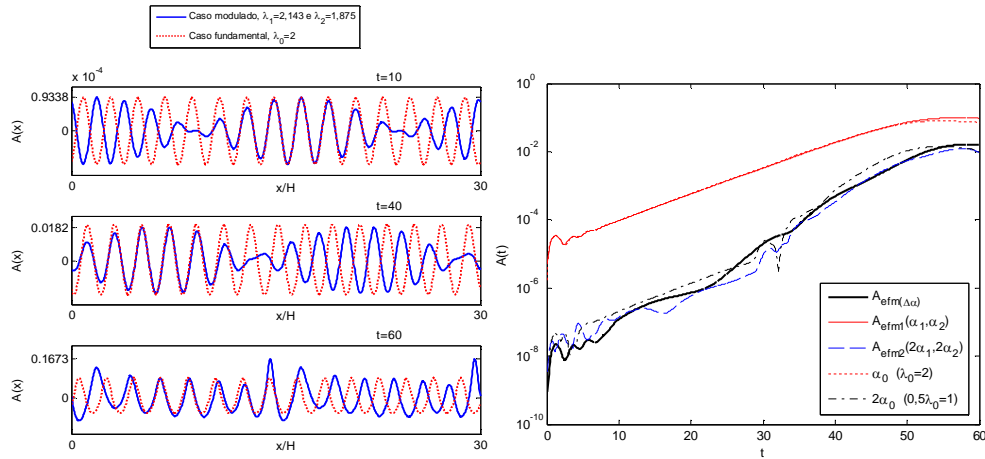
- i)* com uma onda (referência),
- ii)* com duas ondas (modulação),
- iii)* com uma banda larga.

Nas Figuras 7.50 e 7.51 são comparados os casos *i)* com *ii)* e *i)* com *iii)*, respectivamente. Na parte (a) dessas figuras, as interfaces são comparadas nos instantes  $t=10, 40$  e  $60$ . Na parte (b), a evolução da amplitude efetiva dos casos é comparada em relação da amplitude da onda fundamental  $\alpha_0$  ( $\lambda_0=2$ ) e seu harmônico  $2\alpha_0$  ( $0,5\lambda_0$ ). Os resultados das Figuras 7.50a e 7.51a mostram que as amplitudes finais dos casos comparados são da mesma ordem. A diferença é que as ondas moduladas e com banda larga apresentam picos de amplitude em locais onde ocorre a sincronização de fases.

Na Figura 7.50b, são comparadas as amplitudes efetivas das ondas fundamentais  $A_{\text{efm1}}$  e dos harmônicos  $A_{\text{efm2}}$ , do caso *ii)*, em relação a onda fundamental  $\alpha_0$  ( $\lambda_0=2$ ) e harmônica  $2\alpha_0$  ( $0,5\lambda_0$ ) do caso de referência *i)*. A amplitude da onda com comprimento igual a  $15$  ( $\Delta\alpha$ ), que foi gerada pela modulação, também é mostrada na figura ( $A_{\text{efm}}$ ). Pode-se observar que a evolução das ondas fundamentais é quase idêntica. Isso acontece tanto na faixa linear como em parte da faixa não linear. A evolução da amplitude efetiva do harmônico  $A_{\text{efm2}}$ , embora apresente oscilações, tem ordem de magnitude e comportamento comparáveis com o harmônico  $0,5\lambda_0$  do caso de referência.

Assim, pode-se verificar, claramente, que os casos são equivalentes.

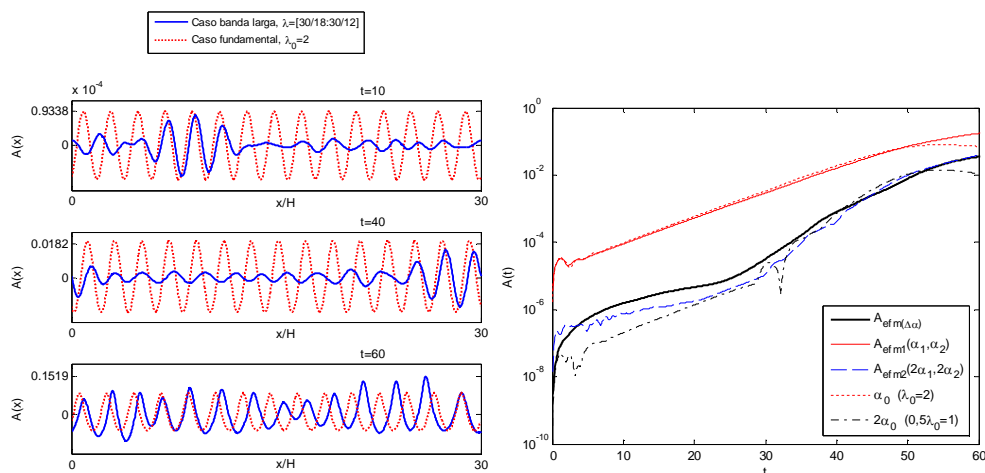
A Figura 7.51b apresenta uma comparação similar para o caso de banda larga. A evolução da amplitude efetiva  $A_{efm1}$ , do caso *iii*), é similar a evolução da onda fundamental  $\alpha_0$  ( $\lambda_0=2$ ) do caso *i*), apesar do conteúdo espectral das perturbações serem significativamente diferentes em cada caso. Verifica-se que o comportamento de uma banda larga de ondas é similar ao caso com onda simples. Para os harmônicos o mesmo pode ser dito.



a) Interfaces:  $t=10, 40$  e  $60$ .

(b). Evolução da amplitude

Figura 7.50: Equivalência do caso modulado ( $\lambda_1=2,143$  e  $\lambda_2=1,875$ ) e o caso fundamental  $\lambda_0=2$ . (a) Interfaces nos instantes  $t=10, 40$  e  $60$ . (b). Evolução da amplitude efetiva em relação da amplitude da onda fundamental  $\lambda_0=2$ . Caso com  $h_{eq}=0,558$ .



a) Interfaces:  $t=10, 40$  e  $60$ .

(b). Evolução da amplitude

Figura 7.51: Equivalência do caso banda larga  $\lambda=[1,667:2,5]$  e o caso fundamental  $\lambda_0=2$ . (a) Interfaces nos instantes  $t=10, 40$  e  $60$ . (b) Evolução da amplitude efetiva em relação da amplitude da onda fundamental  $\lambda_0=2$ . Caso com  $h_{eq}=0,558$ .

Até aqui, uma característica geral observada nos diferentes casos avaliados, é a estabilização do sistema que é governada, principalmente, por efeitos quadráticos das ondas fundamentais. Isso foi verificado através das seções 7.6 (Figura 7.21), 7.8.4 (Figura 7.44) e 7.8.6 (Figura 7.46 e 7.47). Esta qualidade do escoamento analisado convida a utilizar modelos simplificados para prever tais características. Um modelo conhecido que é capaz de prever efeitos quadráticos em sistemas dinâmicos é a equação de Stuart-Landau. A seguir apresenta-se uma análise baseada nessa equação.

## 7.9 Não Linearidade através da Equação de Stuart-Landau

Uma forma de contrastar os resultados não lineares obtidos das simulações é através das predições da equação de Stuart-Landau. Esta equação (formulada como uma expansão fracamente não linear) descreve a evolução temporal da amplitude do modo fundamental e é obtida assumindo um estado perto da curva de estabilidade neutra (Sangalli et al., 1995; McCready & Uphold, 1997; Schmid & Henningson, 2001). A equação pode ser escrita como (Joseph & Renardy, 1993; Sangalli et al., 1995; Sangalli et al., 1997; McCready & Uphold, 1997; Valluri et al., 2008):

$$\frac{dA}{dt} = \omega_i A + \kappa |A|^2 A \quad (7.14)$$

onde  $\omega_i$  é a taxa de amplificação linear,  $\kappa$  é referido como coeficiente de Stuart-Landau e seu sinal determina a natureza da instabilidade (Sangalli et al., 1995; McCready & Uphold, 1997).  $t$  é a escala de tempo da evolução da amplitude  $A$  do modo fundamental. A equação mostra explicitamente ser dependente de uma parte linear e uma cúbica da amplitude, porém informação considerável é mantida no coeficiente  $\kappa$ , cuja obtenção depende de inúmeras variáveis do escoamento.

Para o presente caso, a solução do problema (incluindo o coeficiente  $\kappa$ ) pode ser determinada a partir das duas condições de contorno:

$$t \rightarrow \infty \Rightarrow A = A_{\text{sat}} \quad (7.15)$$

$$t = 0 \Rightarrow A = A_{\text{ini}} \quad (7.16)$$

Assim, a função amplitude obtida é,

$$A = \left( \frac{-\omega_i}{\kappa - e^{-2\omega_i(c_1+t)}} \right)^{1/2}, \quad (7.17)$$

com:

$$\kappa = -\frac{\omega_i}{A_{\text{sat}}^2}, \quad (7.18)$$

$$c_1 = -\frac{\ln\left(\frac{\omega_i}{A_{\text{ini}}^2} - \frac{\omega_i}{A_{\text{sat}}^2}\right)}{2\omega_i}. \quad (7.19)$$

onde  $A_{\text{ini}}$  e  $A_{\text{sat}}$  são as amplitudes, inicial e de saturação, respectivamente. Com a Equação 7.17 algumas ondas perturbadas são avaliadas. Nesta situação é necessário algum cuidado uma vez que não é claro que os modos avaliados encontrem-se suficientemente próximos da curva de estabilidade neutra, onde a equação de Stuart-Landau é válida.

Na Figura 7.52 é comparada a evolução da amplitude do modo fundamental com as predições da equação de Stuart-Landau. Para o caso fracamente instável as ondas perturbadas têm comprimento ( $\lambda$ ) iguais a 1,875; 2 e 2,143 (figuras a, c, e, respectivamente). Já no caso mais instável, as ondas perturbadas têm comprimento ( $\lambda$ ) 1,429; 1,5 e 1,579 (figuras b, d, f, respectivamente). De forma geral, pode-se observar uma excelente concordância com os resultados das simulações.

## 7.10 Evolução Espacial de um Pacote de Ondas

Por último, avaliou-se a situação de um pacote de ondas. As perturbações são introduzidas controladamente na interface entre os fluidos em uma região perto da entrada do canal, na forma de um pacote de ondas. O objetivo é avaliar o comportamento da evolução das oscilações, e estabelecer se os mecanismos observados nas análises anteriores ainda são relevantes. Como no caso de banda larga apresentado na seção 7.8.5, o presente caso também possibilita uma grade faixa de ondas em interação e em condições ressonantes.

Duas ondas do caso menos instável são avaliadas no presente estudo. As ondas consideradas tem comprimento de  $\lambda=2$  e  $\lambda=3$ , com suas frequências angulares  $\omega=4,6434$  e  $\omega=2,9613$ , respectivamente. As frequências angulares são

utilizadas como frequência portadora do pacote de ondas. As análises são realizadas um canal de comprimento  $L=30$ , onde a perturbação na forma de um pacote de ondas é introduzida na estação  $x=1$ . O procedimento de geração do pacote de ondas é detalhado no Capítulo 5. O pacote é gerado através de uma força aplicada na interface, que imita o movimento oscilatório vertical de uma pequena placa atuando em um comprimento  $\Delta x$ , como no trabalho de Ayati et al. (2017). A fim de reduzir custos computacionais (ver seção 5.6), o canal utilizado manteve a condição periódica entre a entrada e saída. O estudo considera a evolução linear e não linear do pacote pelo qual suas amplitudes iniciais são de ordem infinitesimal. Detalhe da amplitude e do comprimento excitado  $\Delta x$ , na formação do pacote de ondas, é mostrado na Tabela 7.6.

PUC-Rio - Certificação Digital N° 1313508/CA

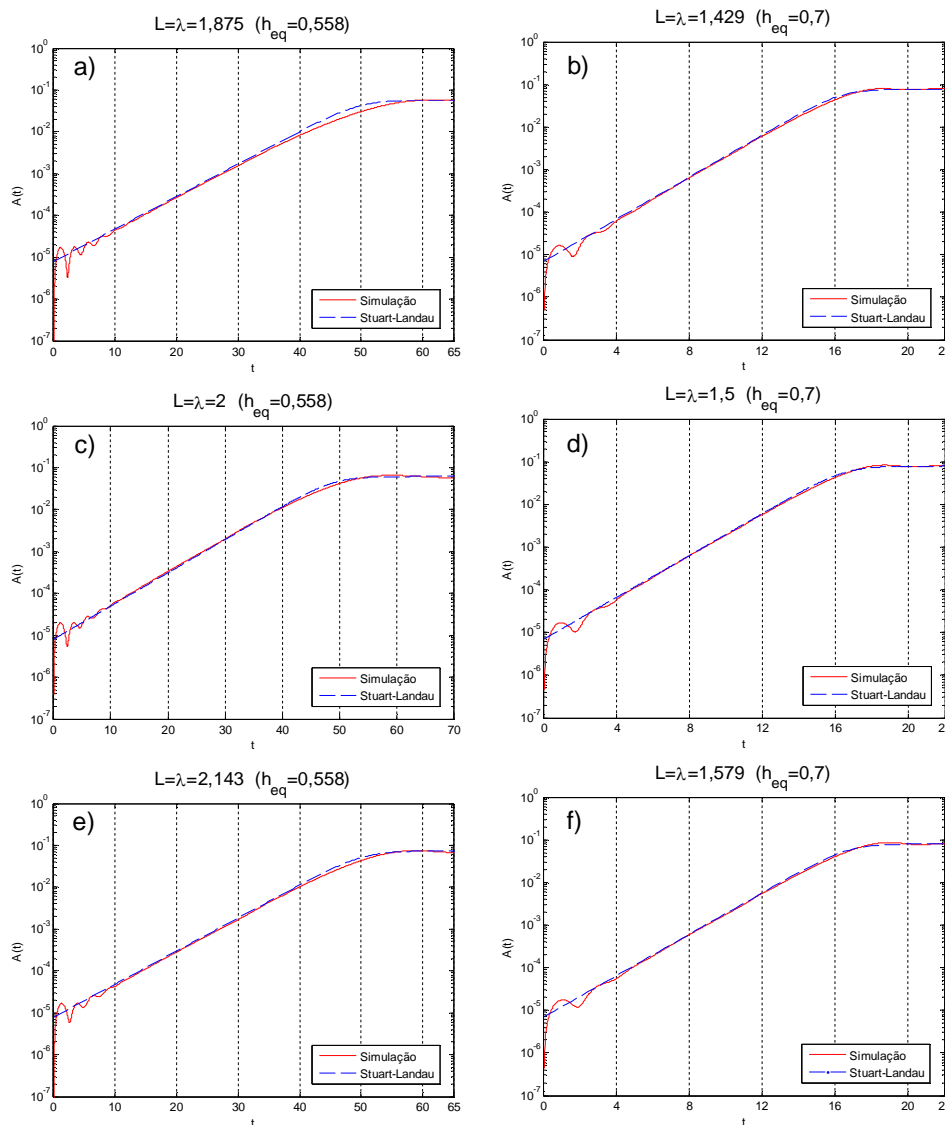


Figura 7.52: Evolução não linear vs predições equação de Stuart-Landau. Caso  $h_{eq}=0,558$ :  $\lambda=1,875$  (a),  $\lambda=2$  (c),  $\lambda=2,143$  (e). Caso  $h_{eq}=0,7$ :  $\lambda=1,429$  (b),  $\lambda=1,5$  (d),  $\lambda=1,579$  (f).

Tabela 7.6: Perturbação inicial para a geração do pacote de ondas.

Análise	Estabilidade	Caso	Teste	Tamanho do domínio LxH	Dados da perturbação inicial		
					Frequência angular $\omega$	Amplitude inicial	Comprimento perturbado $\Delta x$
Linear & Não Linear	Espacial	$h_{eq}=0,558$	1	30x1	4,6434	$A=8 \times 10^{-6}$	0,7239
			2	30x1	2,9613	$A=8 \times 10^{-6}$	1,1351

A evolução das amplitudes efetivas dos casos  $\omega=4,6434$  e  $\omega=2,9613$  é mostrada nas Figuras 7.53a e 7.54a, respectivamente. As amplitudes efetivas  $A_{efe(\Delta\omega)}$ ,  $A_{efe1}$ ,  $A_{efe2}$  e  $A_{efe3}$ , são obtidas integrando as amplitudes das ondas que conformam as faixas  $[0:\Delta\omega_{if}]$ ,  $[\omega_{1i}:\omega_{1f}]$ ,  $[\omega_{2i}:\omega_{2f}]$  e  $[\omega_{3i}:\omega_{3f}]$ , respectivamente. Em ambos os casos pode-se observar que a evolução efetiva do segundo e terceiro grupo harmônico atingem estabilização entanto que o grupo de baixa frequência continua crescendo modificando o comportamento efetivo do grupo fundamental excitado.

PUC-Rio - Certificação Digital N° 1313508/CA

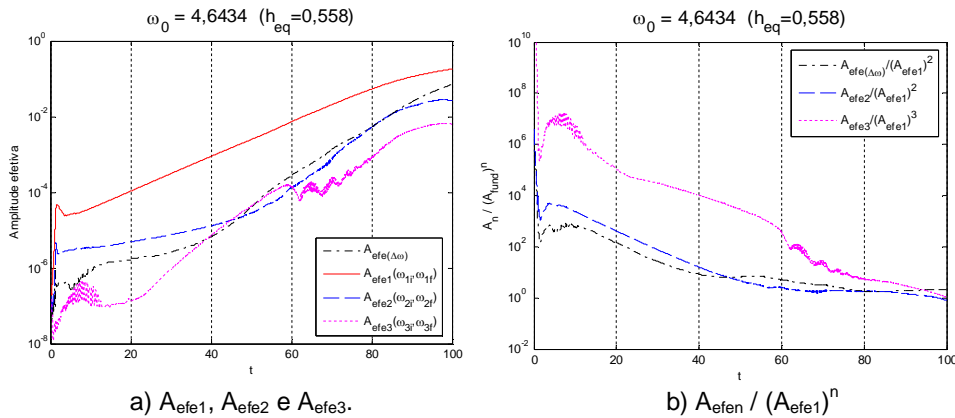


Figura 7.53: Frequência perturbada  $\omega=4,6434$ . a) Evolução das amplitudes efetivas  $A_{efe(\Delta\omega)}$ ,  $A_{efe1}$ ,  $A_{efe2}$  e  $A_{efe3}$ . b) Evolução da relação  $A_{efen} / (A_{efe1})^n$ .

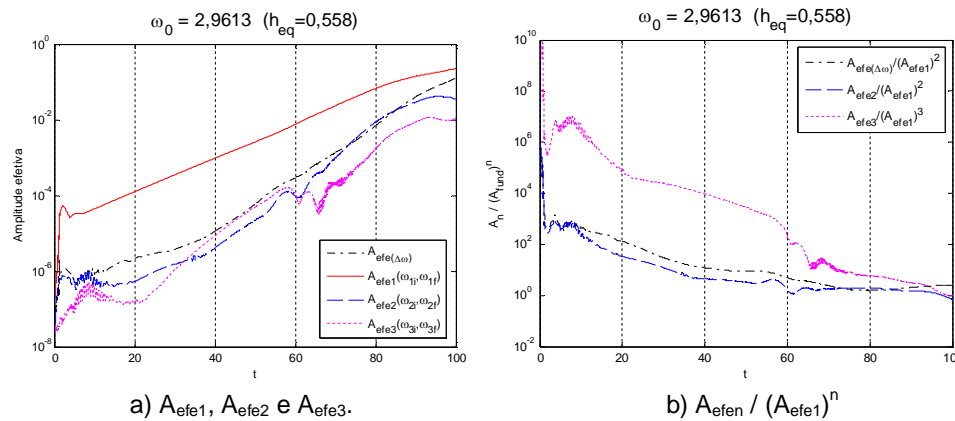


Figura 7.54: Frequência perturbada  $\omega=2,9613$ . a) Evolução das amplitudes efetivas  $A_{efe(\Delta\omega)}$ ,  $A_{efe1}$ ,  $A_{efe2}$  e  $A_{efe3}$ . b) Evolução da relação  $A_{efen} / (A_{efe1})^n$ .

A evolução da relação  $A_{\text{efen}} / (A_{\text{efe1}})^n$  dos casos  $\omega=4,6434$  e  $\omega=2,9613$  são mostradas nas Figuras 7.53b e 7.54b, respectivamente. Observa-se que  $A_{\text{efe2}}$  e  $A_{\text{efe}(\Delta\omega)}$ , resultam da interação quadrática de  $A_{\text{efe1}}$  (na região  $60 < x < 90$ ) enquanto que  $A_{\text{efe3}}$  resulta da interação cúbica de  $A_{\text{efe1}}$  (na região  $70 < x < 90$ ). Na região final de evolução ( $x > 90$ ), somente o grupo de baixa frequência  $A_{\text{efe}(\Delta\omega)}$  permanece como resultado direto da interação quadrática do grupo fundamental  $A_{\text{efe1}}$ . Nesta região as mudanças dos grupos  $A_{\text{efe2}}$  e  $A_{\text{efe3}}$  indicam que outros mecanismos mais dominantes estão influenciando o comportamento destes grupos harmônicos. Assim, pelo menos nos estágios iniciais avaliados (tal que  $x < 90$ ), a evolução não linear dominante é do tipo quadrática.

Nas Figuras 7.55 e 7.56, detalha-se o comportamento da evolução do pacote de ondas através de séries temporais da (a) interface, (b) espectro e (c) bicoerência dos casos com frequência ( $\omega$ ) iguais a 4,6434 e 2,9613, respectivamente. As séries temporais capturadas em diferentes posições, na direção da coordenada  $x$ , mostram a evolução do pacote de ondas em um período constante. Para referência são indicadas as faixas de frequências angulares onde crescem as ondas de baixa frequência e os harmônicos da faixa fundamental excitada,  $[0:\Delta\omega_{if}]$ ,  $[\omega_{1i}:\omega_{1f}]$ ,  $[\omega_{2i}:\omega_{2f}]$  e  $[\omega_{3i}:\omega_{3f}]$ . O limiar de estabilidade linear ( $A=2 \times 10^{-3}$ ), também é indicado.

As séries temporais mostram um pacote de três ondas na posição  $x=20$ , que evolui dispersivamente até complexos estágios como pode ser visto nas posições  $x=70$ , 80, 90 e 100. Através do espectro, pode se observar que a perturbação introduzida excita um amplo espectro de ondas como pode ser observado na posição  $x=20$ . Desse espectro, a região mais instável rapidamente se torna dominante em relação das regiões menos instáveis. Nas posições seguintes, a principal característica visível, é o aparecimento de grupos crescentes de ondas em torno da faixa de baixas frequências  $[0:\Delta\omega_{if}]$ , assim como nas faixas de ondas harmônicas dos modos inicialmente excitados  $[\omega_{2i}:\omega_{2f}]$  e  $[\omega_{3i}:\omega_{3f}]$ . Isso pode ser verificado analisando os resultados referentes às posições  $x=70$ , 80 e 90.

Os contornos de bicoerência nula mostram o estágio linear da evolução do pacote que passa pela posição  $x=20$ . A partir da posição  $x=70$ , a fraca bicoerência indica o início dos efeitos não lineares principalmente em torno das faixas  $[0:\Delta\omega_{if}]$  e  $[\omega_{1i}:\omega_{1f}]$ . Nas posições  $x=80$  e  $x=90$ , coerência aparece nas faixas  $[\omega_{1i}:\omega_{1f}]$  e  $[\omega_{2i}:\omega_{2f}]$ , assim como nas faixas de baixas frequências  $[0:\Delta\omega_{if}]$  e  $[0:\Delta\omega_{if}]$ , e em  $[0:\Delta\omega_{if}]$  e  $[\omega_{2i}:\omega_{2f}]$ . Na posição final  $x=100$ , a bicoerência mostra interação em todo o conteúdo espectral da região das ondas mais dominantes.

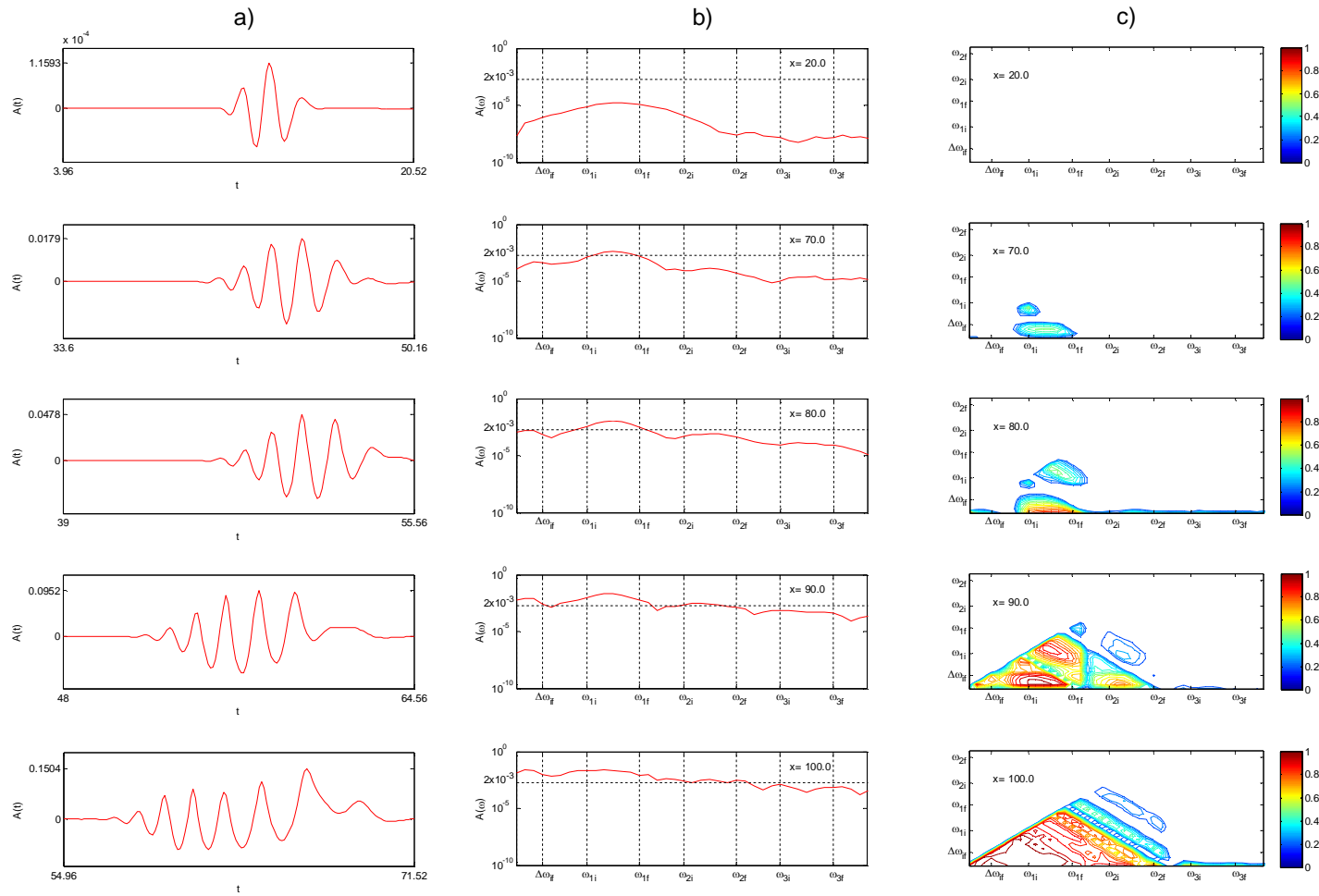


Figura 7.55: (a) Séries temporal, (b) espectro e (c) bicoerência para algumas posições representativas ( $\omega=4,6434$ ). Frequências angulares ( $\Delta\omega_{if}$ ,  $\omega_{1i}$ ,  $\omega_{1f}$ ,  $\omega_{2i}$ ,  $\omega_{2f}$ ,  $\omega_{3i}$ ,  $\omega_{3f}$ ) e limiar linear ( $2 \times 10^{-3}$ ) são mostrados para referência.



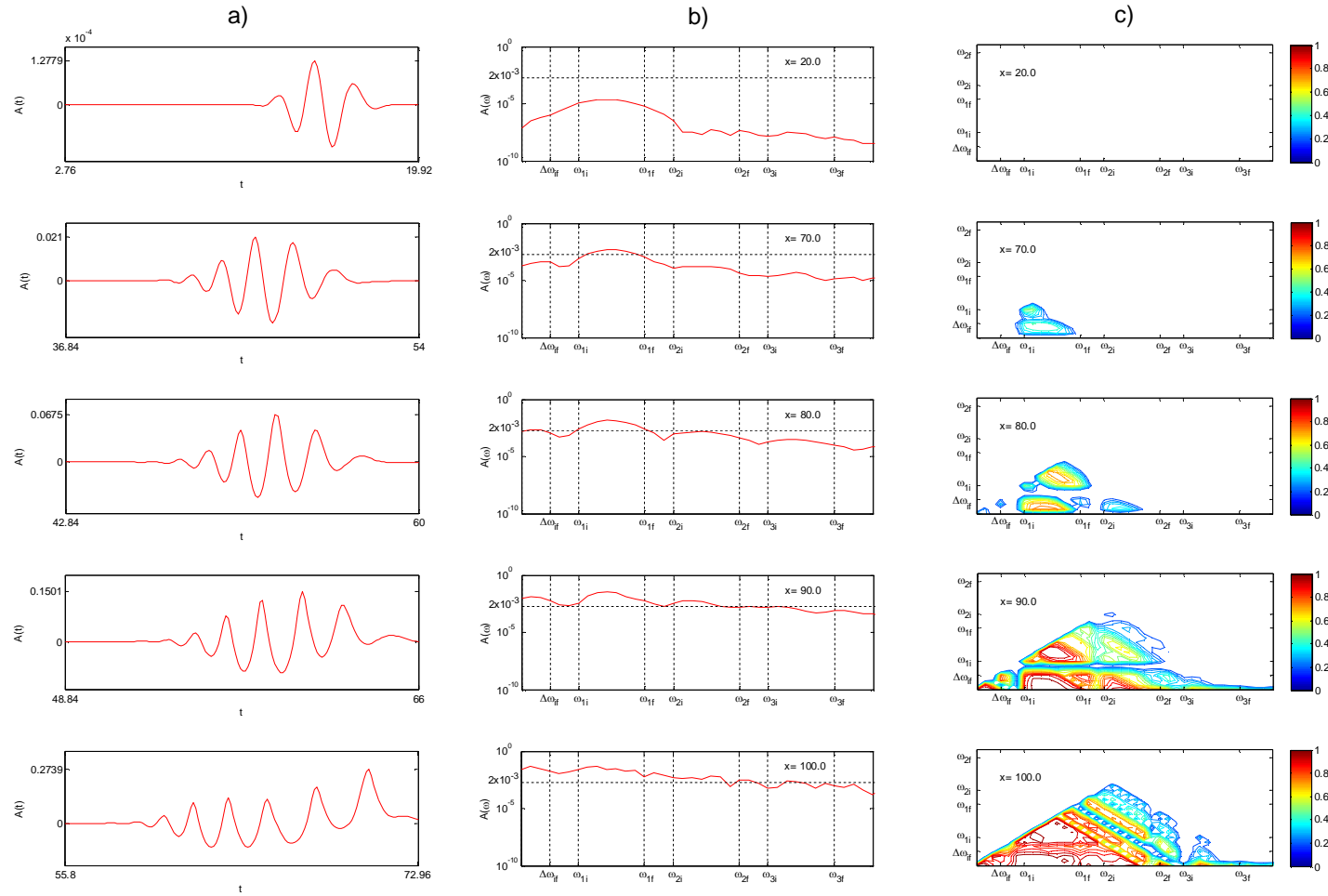


Figura 7.56: (a) Séries temporal, (b) espectro e (c) bicoerência para algumas posições representativas ( $\omega=2,9613$ ). Frequências angulares ( $\Delta\omega_f, \omega_{1i}, \omega_{1f}, \omega_{2i}, \omega_{2f}, \omega_{3i}, \omega_{3f}$ ) e limiar linear ( $2 \times 10^{-3}$ ) são mostrados para referência.

Um comportamento similar foi encontrado no caso com frequência de perturbação  $\omega$  igual a 2,9613, conforme mostrado na Figura 7.56. Ao longo da evolução convectiva do pacote gerado, o desenvolvimento interfacial inicial (posição  $x=20$ ) evolve para uma configuração complexa na posição  $x=100$ . Nesta posição, similar ao caso  $\omega=4,6434$  (Fig. 7.55) para a mesma posição, um pico máximo de amplitude pode ser identificado. Esta característica pode ser associada a um estado próximo de sincronização construtiva como foi mostrado na seção 7.8.4. Na evolução espectral, as posições  $x=70$ , 80 e 90, claramente mostram os grupos que aparecem em torno das faixas de baixa frequência e os harmônicos da faixa fundamental excitada.

Através da bicoerência pode ser constatada a evolução da não linearidade que mostra como existe interação nas faixas geradas a partir do pacote de ondas perturbado. A Figura 7.56 mostra o aparecimento e aumento da não linearidade em torno das faixas detectadas na evolução espectral, nas estações  $x=70$ , 80, 90 e 100.

Pode-se concluir, que nas presentes condições, as ondas evoluem inicialmente seguindo um comportamento dominado pela interação quadrática não linear que é similar àquela observada para excitações contínuas e periódicas. Entretanto, observa-se uma diferença em relação aos modos de baixa frequência. No caso dos pacotes de onda, essas ondas longas parecem crescer mais do que no caso de excitações periódicas. Isso acontece em regiões bem afastadas da entrada do canal, onde as ondas fundamentais e harmônicos já apresentam saturação. A diferença entre as duas abordagens ainda não havia sido claramente detectada na literatura. Isso abre uma nova perspectiva para futuras investigações sobre o fenômeno. Os resultados sugerem que pacotes de ondas modulados podem ser mais instáveis que ondas periódicas de conteúdo espectral semelhante.

## 7.11

### Resumo do Capítulo

Neste capítulo foi analisado o comportamento não linear das ondas interfaciais a partir de perturbações controladas. Foram estudados casos com ondas de comprimento curto, médio e longo. Foi encontrado um limiar de amplitude a partir do qual os efeitos não lineares passam a ser mais relevantes. Esse limiar ficou em torno de 0,2% da altura do canal. Verificou-se, através dos campos das flutuações  $v'$ , que este regime apresenta um comportamento

ligeiramente diferente da faixa linear. Os primeiros harmônicos são resultado da interação não linear da onda fundamental com ela mesma. É observado que perfis de magnitude de  $v'$  mudam consideravelmente no início do estágio de saturação, i.e. a taxa de crescimento deixa de ser constante. Este ponto marca o final da faixa de interação fracamente não linear. Todos os casos estudados apresentaram estabilização do crescimento das ondas.

Para estudar isoladamente a eficiência de diferentes mecanismos não lineares de crescimento das ondas, foram analisados casos compostos por: uma onda fundamental e uma onda subharmônica, uma onda curta e uma onda longa, uma onda modulada e uma perturbação com várias ondas. Todos os casos mostraram que o início da região não linear pode ser descrito por interação do tipo quadrático das ondas de mais alta amplitude (energia). O fenômeno parece ser bem modelado pela equação de Stuart-Landau.

O pacote de ondas também mostrou um comportamento similar ao caso com excitações periódicas e contínuas. Porém, nas estações mais afastadas da entrada as ondas longas se comportaram de maneira diferente daquela observada nos casos com excitações contínuas. A razão para isso ainda não é clara e demanda um estudo paramétrico detalhado do problema, o que foge do escopo de trabalho proposto para essa tese.

## 8

### Comentários Finais

Neste capítulo, um breve resumo do trabalho desenvolvido, ressaltando as principais conclusões atingidas, é apresentado. Para finalizar, algumas recomendações para trabalhos futuros são propostas.

No presente trabalho foi estudada a evolução de ondas na interface do escoamento estratificado de óleo e água em um canal 2-D horizontal. O estudo é de natureza numérica e as ondas interfaciais foram introduzidas nas simulações de maneira controlada em termos de amplitude, comprimento das ondas e conteúdo espectral das perturbações. De acordo com o levantamento bibliográfico realizado, esta é a primeira vez que este tipo de metodologia é aplicada em simulações numéricas, podendo ser considerada uma primeira contribuição do presente trabalho. O objetivo foi estudar os diferentes mecanismos envolvidos na evolução, crescimento e interação das perturbações interfaciais buscando identificar àqueles mais relevantes. A proposta do trabalho é contribuir para o entendimento do fenômeno de transição do estratificado para o padrão ondulado ou golfada. Isso pode auxiliar na elaboração de modelos simples e de baixo custo computacional, que possam capturar a física dominante do problema. No futuro, espera-se que essas informações possam ser utilizadas para melhorar as ferramentas de simulação de escoamento bifásico utilizadas pela indústria.

O presente trabalho foi realizado utilizando o método de VOF (*Volume of Fluid*) e uma malha uniforme. Para a realização deste trabalho, escolheu-se condições do escoamento base que fossem instáveis às ondas interfaciais. A partir daí investigou-se o crescimento das ondas desde o estágio linear, onde a amplitude das perturbações era muito pequena, até os estágios não lineares. Teve-se o cuidado de escolher condições que fossem estáveis à transição do escoamento laminar para turbulento, tanto para o óleo como para a água. Com isso, o escoamento simulado foi sempre laminar. Assim, os resultados reportados neste trabalho são independentes de modelos de turbulência. De acordo com trabalhos que vêm sendo realizados pelo grupo de pesquisa (Ayati et al., 2017), essa simplificação é interessante e pode ajudar a entender o fenômeno geral, mesmo no caso turbulento, uma vez que, aquele trabalho

sugere que a turbulência interna de cada uma das fases interage com as ondas interfaciais.

Antes das simulações com as ondas, foi realizada uma validação cuidadosa das simulações. Verificou-se nessa etapa que, para a realização do estudo proposto foi necessário obter um escoamento base com um nível de ruído numérico extremamente baixo, até que os resíduos das flutuações da interface atingissem valores da ordem de  $10^{-8}$  da altura do canal. A partir daí foram realizadas comparações entre as características das ondas simuladas e as previsões fornecidas por um *solver* das equações de Orr-Sommerfeld para o problema investigado. Para que os resultados fossem comparáveis foi necessário um elevado refinamento da malha, da ordem mínima de 280 volumes por comprimento de onda. Nas predições quantitativas da taxa de amplificação, ligeiras diferenças foram encontradas entre os resultados das simulações e a teoria linear, principalmente no caso de ondas pouco instáveis. Já no caso de outros parâmetros como velocidades de fase uma excelente concordância foi encontrada. Esses resultados permitem considerar que o *software* comercial utilizado (ANSYS Fluent® Release 15.0), apesar das suas limitações na ordem dos seus esquemas disponíveis, pode capturar bem a física de ondas interfaciais. Os resultados encontrados mostram a potencialidade da metodologia e permitem estimular seu uso no estudo e validação de resultados teóricos e experimentais.

Nas simulações iniciadas com a perturbação de uma onda simples, que são àquelas compostas por somente com um modo de Fourier, observou-se a existência de um limiar aproximado, de amplitude das ondas, a partir do qual os efeitos não lineares começam a se tornar mais relevantes. Esse limiar ficou em torno de  $A \approx 2 \times 10^{-3}$  ou equivalentemente 0,2% da altura do canal. Para sistemas em condições próximas das estudadas, este limiar pode ser utilizado como referência, sendo mais uma das contribuições do presente trabalho. Verificou-se que em amplitudes próximas acima desse limiar, as ondas exibem somente algumas características similares àquelas do regime linear, isto é, o perfil das flutuações concorda bem com o modelo linear, enquanto que as taxas de crescimento das ondas diferem das previsões baseadas em modelos lineares. Esse comportamento é típico de estágios fracamente não-lineares. Esse comportamento também foi observado nas simulações realizadas a partir da introdução de múltiplas ondas.

Para o entendimento dos mecanismos envolvidos nos estágios não lineares de evolução das ondas interfaciais, foram estudados casos com

diferentes perturbações iniciais. Em cada caso, o conteúdo espectral das perturbações foi escolhido para que se pudesse avaliar a eficiência de diferentes mecanismos não lineares. No total cinco situações foram testadas, com as seguintes perturbações iniciais: 1) uma onda fundamental simples, 2) uma onda fundamental e seu subharmônico, 3) uma onda curta e uma onda longa, 4) um caso com onda fundamental modulada, e 5) um caso composto por banda larga de ondas com diferentes comprimentos. O primeiro caso pode ser interpretado como um caso de referência. Já o segundo caso serviu para testar a relevância da ressonância subharmônica, proposta nos trabalhos de Campbell & Liu (2014, 2016). No terceiro caso, foi avaliada a possível interação entre ondas longas e curtas, conforme sugerido no trabalho Hurlburt & Hanratty (2002) e muitos outros autores. Já o caso modulado estava relacionado com o caso da instabilidade de banda lateral ou “*sideband*”, que foi observada experimentalmente por Jurman et al. (1992). Finalmente, o caso composto por várias ondas, serviu como referência para o comportamento do escoamento no caso “natural” onde diversas ondas com diferentes comprimentos coexistem no canal. A variedade de casos estudados permite comprovar a capacidade da metodologia utilizada.

Para as condições investigadas neste trabalho, os resultados mostraram que uma onda mais instável é capaz de modificar o comportamento de ondas fracamente instáveis devido a interações não lineares. No entanto, não se observou esse comportamento quando duas ondas instáveis foram excitadas simultaneamente. Nesse último caso, as ondas evoluíram como se cada onda estivesse sozinha no canal. Isso sugeriu que, a instabilidade de bandas laterais não foi relevante para o problema, diferente do encontrado por Jurman et al. (1992) para sistemas líquido-gás.

De acordo com os resultados obtidos, alguma interação entre ondas longas e curtas parece ocorrer. Entretanto, a análise da transferência de energia entre ondas sugeriu que o crescimento da energia da onda longa, é resultado da interação entre ondas curtas. Logo, o produto não linear entre ondas curtas instáveis, resulta em crescimento tanto das ondas muito curtas (soma de números de onda) como das ondas longas (diferença de comprimentos de onda). Esse resultado sugere que o mecanismo de interação entre ondas longas e curtas também não foi muito relevante, ao invés do encontrado pelo grupo de Campbell e Liu (2013, 2016), nos seus estudos numéricos para fluidos invíscidos (Campbell & Liu, 2013) e viscosos (Campbell et al., 2016), onde ondas longas obtiveram grande amplitude devido a uma tríade ressonante com pelo menos uma onda curta instável.

A simulação de uma onda curta e seu subharmônico mostrou que essa interação, de fato, ocorre. No entanto, não se observou o crescimento bi-exponencial que foi proposto por Campbell & Liu (2014) para o escoamento de ar-água. Notou-se que para tempos longos de simulação a interação exhibe comportamento cíclico de interação destrutiva. Isso sugere que apesar da interação acontecer, somente antirressonância ocorre, e conseqüente sincronização de fases das ondas, não é observada. Além disso, o crescimento das ondas subharmônicas no regime não linear foi muito menor do que aquele observado para os harmônicos das ondas fundamentais.

As simulações dos diferentes casos mostraram que o regime não linear é caracterizado pela saturação da onda linearmente mais instável. Nesse processo a transferência de energia entre a onda mais instável e seus harmônicos foi o mecanismo dominante. De acordo com os resultados, essa transferência de energia é dominada pela ordem da interação não linear. A mesma taxa de transferência de energia obtida para o caso com somente uma onda também foi observada para o caso com múltiplas ondas. Isso sugere que sistemas em condições semelhantes possam descrever o mesmo comportamento observado.

A partir dos resultados das simulações, foi utilizado um modelo simplificado baseado nas equações de Stuart-Landau, para prever o comportamento das ondas. A equação de Stuart-Landau foi escolhida porque ela modela bem o comportamento não linear de sistemas com características similares às aquelas observadas para as ondas interfaciais. A comparação entre os resultados das simulações e as previsões do modelo apresentaram excelente concordância. Os resultados obtidos com as simulações, que demoraram algumas semanas para serem concluídas em um cluster com paralelização, puderam ser reproduzidos através de uma equação diferencial simples cujo tempo computacional de solução é desprezível. Isso é interessante do ponto de vista prático. Apesar da solução utilizada para testar a equação demanda condições no instante inicial e no tempo tendendo a infinito, é possível resolver a equação a partir da solução do problema linear e do problema linear adjunto. Infelizmente, isso não foi realizado nesse trabalho, mas está previsto em trabalhos futuros.

Uma das restrições da equação de Landau é que ela só é válida em condições próximas da estabilidade neutra. Em princípio, isso poderia restringir significativamente a aplicabilidade do modelo. Entretanto, essa é a condição esperada próximo da transição entre os regimes de escoamento estratificado e de golfadas. É justamente nessas condições que se faz necessária a elaboração de modelos mais acurados para a previsão da evolução das ondas interfaciais e

a previsão do início das golfadas. Logo, a faixa de aplicabilidade do modelo é comparável com a faixa de interesse do estudo.

Os resultados encontrados indicaram que é a interação quadrática da onda fundamental instável mais dominante, o mecanismo que governa o comportamento do escoamento água-óleo em canais com diâmetros hidráulicos pequenos, isso pelo menos nas condições estudadas. Isso leva a uma estabilização das ondas e conseqüentemente a formação do padrão ondulado. Esse resultado contribui na descrição dos fenômenos que governam, a diferentes escalas, a transição do estratificado para ondulado, e pode se admitir que escoamentos nas condições estudadas, ou perto delas, teriam o mesmo comportamento. No entanto não foram testadas faixas de amplitudes onde alguma modificação do comportamento observado poderia acontecer (bifurcação), dando passo a desestabilização e conseqüentemente a formação de golfada.

Finalmente foi estudada a evolução convectiva de um pacote de ondas para simular a situação esperada no caso “natural”. Neste caso também o comportamento foi similar àquele descrito em regimes com poucas ondas. A principal diferença deste caso com relação aos mais simples, é que a sincronização de ondas que se propagam com diferentes velocidades pode ocasionar localmente um crescimento súbito da amplitude da interface. O fenômeno exibe características que lembram o vagalhão (ou *rogue wave*). Esse fenômeno está relacionado com o aparecimento súbito de ondas com elevada amplitude em alto mar. No entanto, ainda é necessário um estudo detalhado do comportamento das ondas no regime de saturação para verificar se os modelos de previsão de formação de um vagalhão são capazes de modelar os resultados das simulações.

## 8.1 Recomendações para trabalhos futuros

Estender as análises realizadas para uma faixa mais ampla de vazões e para dutos 3-D a fim de incluir efeitos de parede laterais, não considerados no presente trabalho. Escoamento bifásico através de dutos retangulares ou circulares poderiam alterar consideravelmente os resultados obtidos em geometrias 2-D.

Considerar escoamentos turbulentos. Avaliar quais modelos de turbulência poderiam ser os mais adequados para capturar bem as baixas escalas das



flutuações e como afetariam estas o comportamento do escoamento avaliado.

Estudar casos que representem o escoamento água-ar (o presente representa água-óleo) incluindo um estudo dos modelos de turbulência mais adequados para simular o problema. Explorar diferentes diâmetros porque esse parâmetro pode tornar relevantes os fenômenos capilares ou os inerciais.

Aprofundar no estudo da interação de onda curta e subharmônico, uma vez que tal condição (no caso das duas ondas sendo instáveis) em tempos curtos de simulação, não se mostrou relevante nas condições estudadas.

Investigar com mais detalhe a evolução convectiva de pacotes de ondas interfaciais. Canais de comprimento longo na condição periódica poderiam ser utilizados para estudar o escoamento bem após a saturação das ondas mais instáveis, onde perturbações de alta amplitude do tipo *rogue waves* podem induzir uma mudança de regime do escoamento.

É necessário também, um estudo paramétrico da forma da onda em função das propriedades e os números adimensionais que caracterizam o escoamento, além do efeito da pressão e altura do canal, dentre outros.

Resolver a equação de Stuart-Landau a partir das condições do escoamento base e das perturbações. Para isso, será necessário encontrar o coeficiente de Landau e resolver a equação a partir da solução do problema linear e do problema linear adjunto. Recomenda-se esforço nesta direção.

Explorar condições onde as ondas não estabilizam. Incluir diferentes faixas de amplitudes iniciais que possam determinar se o comportamento interfacial do escoamento é susceptível a bifurcação supercrítica ou subcrítica.

Sugere-se também a comparação dos resultados das simulações com experimentos realizados em condições controladas, em especial para verificar o limiar de instabilidade linear - não linear.

## 9

### Referências bibliográficas

ALVES, G. E. **Cocurrent liquid gas flow in a pipeline contractor**. Chem. Engng Prog, 50, p. 449-456, 1954.

AL-WAHAIBI, T.; ANGELI, P. **Transition between stratified and non-stratified horizontal oil–water flows. Part I: Stability analysis**. Chemical Engineering Science 62, p. 2915-2928, 2007.

AL-WAHAIBI, T.; ANGELI, P. **Experimental study on interfacial waves in stratified horizontal oil-water flow**. Int. J. Multiphase Flow, 37, p. 930-940, 2011.

ANDRITSOS, N.; HANRATTY, T. **Interfacial Stabilities for Horizontal Gas-liquid Flows in Pipelines**. International Journal of Multiphase Flow, Vol. 13, N° 5, p. 583-603, 1987.

ANDRITSOS, N.; WILLIAMS, L.; HANRATTY, T. J. **Effect of liquid viscosity on the stratified-slug transition in horizontal pipe flow**. Int. J. Multiphase Flow, 15, p. 877-892, 1989.

ANSYS Fluent® Theory Guide, Release 15.0, 2013.

AYATI, A. A.; FARIAS, P. S. C.; AZEVEDO, L. F. A.; DE PAULA, I. B. **Characterization of linear interfacial waves in a turbulent gas-liquid pipe flow**. Physics of Fluids 29, 062106, p. 1-13, 2017.

BABA, Y. D.; ARCHIBONG, A. E.; ALIYU, A. M.; AMEEN, A. I. **Slug frequency in high viscosity oil-gas two-phase flow: Experiment and prediction**. Flow Measurement and Instrumentation 54, p. 109-123, 2017.

BAKER, O. **Simultaneous flow of Oil and Gas**. Oil and Gas Journal, Vol. 53, p. 185-195, 1954.

BARMAK, I.; GELFGAT, A.; VITOSHKIN, H.; ULLMANN, A.; BRAUNER, N. **Stability of stratified two-phase flows in horizontal channels**. Physics of Fluids 28, 044101, p. 1-25, 2016.

BARNEA, D.; SHOHAM, O.; TAITEL, Y. **Flow pattern transition for gas-liquid flow in horizontal and inclined pipes comparison of experimental data with theory**. International Journal of Multiphase Flow, Vol. 6, p. 217-225, 1980.

BARNEA, D. **A unified model for predicting flow-pattern transitions for the whole range of pipe inclinations.** Int. J. Multiphase Flow Vol. 13, No 1, p. 1-12, 1987.

BARNEA, D.; TAITEL, Y. **Kelvin-Helmholtz Stability Criteria Stratified Flow: Viscous versus Non-Viscous (Inviscid) Approaches.** International Journal of Multiphase Flow, Vol. 19, N° 4, p. 639-649, 1993.

BARTHELET, P.; CHARRU, F.; FABRE, J. **Experimental study of interfacial long waves in a two-layer shear flow.** J. Fluid Mech. 303, p. 23-53, 1995.

BARRAL, A. H.; ANGELI, P. **Spectral density analysis of the interface in stratified oil-water flows.** Int. J. Multiphase Flow 65, p. 117-126, 2014.

BENDIKSEN, K. H.; MALNES, D.; MOE, R.; NULAND, S. **The dynamic two-fluid model OLGA: theory and application.** SPE Prod. Eng. 6, p. 171-180, 1991.

BOIKO, A. V.; DOVGAL, A. V.; GREK, G. R.; KOZLOV, V. V. **Physics of Transitional Shear Flows - Instability and Laminar-Turbulent Transition in Incompressible Near-Wall Shear Layers.** Springer Science Business Media B.V. 2012.

BOOMKAMP, P. A. M.; MIESEN, R. H. M. **Classification of instabilities in parallel two-phase flow.** Int. J. Multiphase Flow 22, p. 67-88, 1996.

BOOMKAMP, P. A. M.; BOERSMA, B. J.; MIESEN, R. H. M.; BEIJNON, G. V. **A Chebyshev Collocation Method for Solving Two-Phase Flow Stability Problems.** Journal of Computational Physics 132, p. 191-200, 1997.

BRACKBILL, J. U.; KOTHE, D. B.; ZEMACH, C. **A Continuum Method for Modeling Surface Tension.** Journal of Computational Physics 100 (2), p. 335-354, 1992.

BRAUNER, N. **Liquid-Liquid Two-Phase Flow Systems in Modeling and Experimentation in Two-Phase Flow.** Ed. V Bertola, CISM Center, Springer-Verlag Wien New York, 2003.

BRENNEN, C. E. **Fundamental of Multiphase Flow.** Cambridge University Press, 2005.

BREZINSKI, C.; REDIVO, M. **Extrapolation Methods. Theory and Practice.** Amsterdam, 1991.

BRUNO, K.; McCREADY, M. J. **Origin of roll waves in gas-liquid flows.** AIChE Journal 34, p. 1431-1440, 1988.

BRUNO, K.; McCREADY, M. J. **Processes which control the interfacial wave spectrum in separated gas-liquid flows.** Int. J. Multiphase Flow 15 (4), p. 531-552, 1989.

CAMPBELL, B. K.; LIU, Y. **Nonlinear resonant interactions of interfacial waves in horizontal stratified channel flows**. J. Fluid Mech., vol. 717, p. 612–642, 2013.

CAMPBELL, B. K.; LIU, Y. **Sub-harmonic resonant wave interactions in the presence of a linear interfacial instability**. Physics of Fluids, vol. 26(8), 082107, p. 1-20, 2014.

CAMPBELL, B. K.; HENDRICKSON, K.; LIU, Y. **Nonlinear coupling of interfacial instabilities with resonant wave interactions in horizontal two-fluid plane Couette–Poiseuille flows: numerical and physical observations**. J. Fluid Mech., vol. 809, p. 438–479, 2016.

CAO, Q.; SARKAR, K.; PRASAD, A. K. **Direct numerical simulations of two-layer viscosity-stratified flow**. International Journal of Multiphase Flow 30, p. 1485-1508, 2004.

CARNEIRO, J. N. E.; FONSECA, J. R.; ORTEGA, A. J.; CHUCUYA, R. C.; NIECKELE, A. O.; AZEVEDO, L. F. A. **Statistical characterization of two-phase slug flow in a horizontal pipe**. Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering, Vol. 33, p. 251-258, 2011.

CASTRO, M. S.; RODRIGUEZ, O. M. H. **Interfacial waves in stratified viscous oil–water flow**. Experimental Thermal and Fluid Science 62, p. 85-98, 2015.

CHAPRA, S. C.; CANALE, R. P. **Numerical methods for engineers**. Fifth edition. McGraw-Hil, 2006.

CHENG, M.; CHANG, H.-C. **A generalized sideband stability theory via center manifold projection**. Physics of Fluids A 2 (8), p. 1364-1379, 1990.

CHENG, M.; CHANG, H.-C. **Subharmonic Instability of Finite-Amplitude Monochromatic Waves**. Physics of Fluids 4 (3), p. 505-523, 1992.

CHOUDHURY, M. A. A. S.; SHAH, S. L.; THORNHILL, N. F. **Diagnosis of Process Nonlinearities and Valve Stiction**. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2008.

CRAIK, A. D. D. **Nonlinear resonant instability in boundary layers**. J. Fluid Mech. 50, p. 393-413, 1971.

DE PAULA, I. B.; WÜRZ, W.; KRÄMER, E.; BORODULIN, V. I.; KACHANOV, Y. S. **Weakly nonlinear stages of boundary-layer transition initiated by modulated Tollmien-Schlichting waves**. Journal of Fluid Mechanics, vol. 732, p. 571-615, 2013.

DE PAULA, I.B.; WÜRZ, W.; BORODULIN, V.I.; KACHANOV, Y.S. **Weakly-nonlinear interactions of modulated T-S waves in the boundary layer of an airfoil**. Procedia IUTAM 14, p. 433 – 437, 2015.

DINARYANTO, O.; PRAYITNO, Y. A. K.; MAJID, A. I.; HUDAYA, A. Z.; NUSIRWAN, Y. A.; WIDYAPARAGA, A.; INDARTO; DEENDARLIANTO. **Experimental investigation on the initiation and flow development of gas-liquid slug two-phase flow in a horizontal pipe**. Experimental Thermal and Fluid Science 81, p. 93-108, 2017.

DRAZIN, P. G. **Introduction to Hydrodynamic Stability**. First Edition. Cambridge University Press, 2002.

DRAZIN, P. G.; REID, W. H. **Hydrodynamic Stability**. Cambridge University Press, 1981.

DUKLER, A. E.; HUBBARD, M. G. **A Model for Gas-Liquid Slug Flow in Horizontal and Near Horizontal Tubes**. Ind. Eng. Chem., Fundam., Vol. 14, No. 4, 1975.

EDUARDO, T. H. T. **Estudo Numérico da Evolução de Perturbações no Escoamento Estratificado Gás-Líquido em Tubulações Horizontais**. Dissertação de Mestrado, DEM, PUC-Rio. 2014.

ELGAR, S.; CHANDRAN, V. **Higher-order spectral analysis to detect nonlinear interactions in measured time series and an application to Chua's circuit**. International Journal of Bifurcation and Chaos, Vol. 3, N°1, p. 19-34, 1993.

FARGE, M. **Wavelet transforms and their applications to turbulence**. Annual Review of Fluid Mechanics. Vol. 24, p. 395-457, 1992.

FARIAS, P. S. C. **Método óptico para caracterização do filme líquido em escoamento horizontal bifásico anular**. Dissertação de Mestrado, DEM, PUC-Rio. 2010.

FRANCIS, J. G. F. **The QR Transformation. A Unitary Analogue to the LR Transformation – Part 1**. The Computer Journal, Vol. 4, 3, p. 265-271, 1961.

GADA, V. H.; SHARMA, A. **Analytical and level-set method based numerical study on oil-water smooth/wavy stratified-flow in an inclined plane-channel**. International Journal of Multiphase Flow 38, p. 99-117, 2012.

GASTER, M. **A note on the relation between temporally-increasing and spatially-increasing disturbances in hydrodynamic stability**. Journal of Fluid Mechanics, Vol. 14, 2, p. 222-224, 1962.

GOKCAL, B.; WANG, Q.; ZHANG, H. Q.; SARICA, C. **Effects of High Oil Viscosity on Oil/Gas Flow Behavior in Horizontal Pipes**. SPE Projects, Facilities & Construction, 102727, p. 1-11, 2008.

GOVIER, G. W.; OMER, M. M. **The horizontal pipeline flow of air-water mixtures**. Can. J. Chem. Eng. 40, p. 93-104, 1962.

GOVIER, G. W.; AZIZ, K. **The flow of complex mixtures in pipes**. Van Nostrand Reinhold Co, New York, 1972.

GROSSMANN, A.; MORLET, J. **Decomposition of Hardy functions into square integrable wavelets of constant shape**. SIAM J. of Math. Anal., 15(4), p. 723-736, 1984.

GUO, L.; LI, G.; CHEN, X. **A linear and non-linear analysis on interfacial instability of gas-liquid two-phase flow through a circular pipe**. International Journal of Heat and Mass Transfer 45, p. 1525-1534, 2002.

HARTEN, A. **High resolution schemes for hyperbolic conservation laws**. Journal of Computational Physics 49 (3), p. 357-393, 1983.

HIRT, C. W.; NICHOLS, B. D. **Volume of Fluid (VOF) Method for the Dynamics of Free Boundaries**. Journal of computational physics, 39, p. 201-225, 1981.

HOOGENDOORN, C. J. **Gas-liquid flow in horizontal pipes**. Chem. Engng Sci., 9, p. 205-217, 1959.

HURLBURT, E. T.; HANRATTY, T. J. **Prediction of the transition from stratified to slug and plug flow for long pipes**. International Journal of Multiphase Flow, 28, p. 707-729, 2002.

HUTCHINSON, B. R.; RATHBY. **A Multigrid Method based on the Additive Correction Strategy**. Numerical Heat Transfer, Vol. 9, p. 511-537, 1986.

ISHII, M.; HIBIKI, T. **Thermo-Fluid Dynamics of Two-Phase Flow**. Second Edition. Springer, New York, 2011.

ISSA, R. I.; KEMPF, M. H. W. **Simulation of slug flow in horizontal and nearly horizontal pipes with the two-fluid model**. Int. J. of Multiphase Flow 29, p. 69-95, 2003.

ISSA, R. I. **Review of Applicability of the One-dimensional Two-fluid Model to the Prediction of Wave Growth and Slug Evolution in Horizontal Pipes**. Proceedings 6th International Symposium on Multiphase Flow, Heat Mass Transfer and Energy Conversion, American Institute of Physics, CPI207, p. 74-80, 2010.

IVEY, C. B.; MOIN, P. **Conservative volume of fluid advection method on unstructured grids in three dimensions**. Center for Turbulence Research Annual Research Briefs, p. 179-192, 2012.

JELALI, M.; HUANG, B. **Detection and Diagnosis of Stiction in Control Loops: State of the Art and Advanced Methods**. Springer-Verlag, London, 2010.

JOSEPH, D. D.; RENARDY, Y. **Fundamentals of Two-Fluid Dynamics, Part I: Mathematical Theory and Applications**. Springer-Verlag New York, 1993.

JUNIPER, M. P.; HANIFI, A.; THEOFILIS, V. **Modal Stability Theory**. Lecture notes from the FLOW-NORDITA Summer School on Advanced Instability Methods for Complex Flows, Stockholm, Sweden (2013). Appl. Mech. Rev 66(2), 024804, p. 1-22, 2014.

JURMAN, L. A.; DEUTSCH, S. E.; MCCREADY, M. J. **Interfacial mode interactions in horizontal gas-liquid flows**. J. Fluid Mech. 238, p. 187-219, 1992.

KACHANOV, Y. S.; KOZLOV, V. V.; LEVCHENKO, V. Y. **Origin of Turbulence in Boundary Layer**. Nauka. Sib. Otd. Novosibirsk, 1982.

KACHANOV, Y. S. **Physical mechanisms of laminar-boundary-layer transition**. Ann. Rev. Fluid Mech., 26, p. 411-482, 1994.

KAFFEL, A.; RIAZ, A. **Eigenspectra and mode coalescence of temporal instability in two-phase channel flow**. Physics of Fluids 27, 042101, p. 1-23, 2015.

KALOGERAKOS, S. **Slug initiation and prediction using high accuracy methods - applications with field data**. Engineering Doctorate Thesis, Cranfield University, 2011.

KAO, T. W.; PARK, C. **Experimental investigations of the stability of channel flows. Part 2. Two-layered co-current flow in a rectangular channel**. Journal of Fluid Mechanics 52 (3), p. 401-423, 1972.

KAPITZA, P. L. **Wave flow of thin viscous liquid films**. Zh. Teor. Fiz. 18, p. 3-28, 1948.

KELVIN, W. **Hydrokinetic solutions and observations**. Phil. Mag. 42(4), p. 362-377, 1871.

KIM, Y. C.; POWERS, E. J. **Digital Bispectral Analysis and Its Applications to Nonlinear Wave Interactions**. IEEE Transactions of Plasma Science, Vol. PS-7, N°2, 1979.

KING, M. R.; MCCREADY, M. J. **Weakly nonlinear simulation of planar stratified flows**. American Institute of Physics, Vol. 12, p. 92-102, 2000.

KORDYBAN, E. S.; RANOV, T. **Mechanism of Slug Formation in Horizontal Two-Phase Flow**. Journal of Basic Engineering, Vol. 92, No. 4, p. 857-864, 1970.

KUNDU, P. K.; COHEN, I. M.; DOWLING, D. R. **Fluid Mechanics**. Fifth Edition. Elsevier Inc., 2012.

KURU, W. C.; SANGALLI, M.; UPHOLD, D. D.; McCREADY, M. J. **Linear Stability of Stratified Channel Flow**. Int. J. Multiphase Flow 21 5, p. 733-753, 1995.

LIN, C. C. **On the stability of two-dimensional parallel flows. Parts I, II, III**. Quart. Appl. Math. 3, p. 117-142, p. 218-234, p. 277-301, 1945.

LIN, P. Y.; HANRATTY, T. J. **Prediction of the Initiation of Slugs with Linear Stability Theory**. Int. J. Multiphase Flow, Vol. 12, No 1, p. 79-98, 1986.

LIN, P. Y.; HANRATTY, T. J. **Effect of pipe diameter on the interfacial configurations for air-water flow in horizontal pipes**. Int. J. Multiphase Flow, Vol. 13, No. 4, p. 549-563, 1987a.

LIN, P. Y.; HANRATTY, T. J. **Detection of slug flow from pressure measurements**. Int. J. Multiphase Flow, Vol. 13, No. 1, p. 13-21, 1987b.

MANDHANE, J. M.; GREGORY, G. A.; AZIZ, K. **A Flow Pattern Map for Gas-Liquid Flow in Horizontal Pipes**. International Journal of Multiphase Flow, Vol. 1, p. 537-553, 1974.

MAZA, D.; CARVALHO, M. S. **Transient response of two-layer slot coating flows to periodic disturbances**. AIChE Journal, vol. 61, p. 1699-1707, 2015.

MATA, C.; PEREYRA, E.; TRALLERO, J. L.; JOSEPH, D. D. **Stability of stratified gas-liquid flows**. International Journal of Multiphase Flow, Vol. 28, p. 1249-1268, 2002.

MATSUBARA, H.; NAITO, K. **Effect of liquid viscosity on flow patterns of gas-liquid two-phase flow in a horizontal pipe**. International Journal of Multiphase Flow 37, p. 1277-1281, 2011.

McCREADY, M. J.; UPHOLD, D. D. **Formation of large disturbances in separated fluid-fluid flows**. ASME Fluids Engineering Division Proceedings of the 1997 ASME International Mechanical Engineering Congress and Exposition, Nov 16-21, v244, 1997.

McCREADY, M. J.; WOODS, B. D.; KING, M. R. **Interfacial Wave Transitions in Liquid-Liquid Flows and Insight into Flow Regime Transition**. Eighteenth Symposium on Energy Engineering Sciences, 65, p. 1-8, 2000.

MEDEIROS, M.A.F.; GASTER, M. **The production of subharmonic waves in the nonlinear evolution of wavepackets in boundary layers**. Journal of Fluid Mechanics, Vol. 399, p. 301-318, 1999a.

MEDEIROS, M.A.F.; GASTER, M. **The influence of phase on the nonlinear evolution of wavepackets in boundary layers**. Journal of Fluid Mechanics, Vol. 397, p. 259-283, 1999b.



MENTER, F. **Zonal Two Equation k-w Turbulence Models For Aerodynamic Flows**. AIAA, 23rd Fluid Dynamics, Plasmadynamics, and Lasers Conference. Fluid Dynamics and Co-located Conferences, Orlando, Florida USA, 1993.

MISHIMA, K.; ISHII, M. **Theoretical Prediction of Onset of Horizontal Slug Flow**. Journal of Fluids Engineering, Vol. 102, p. 441-445, 1980.

MOLER, C. B.; STEWART, G. W. **An Algorithm for Generalized Matrix Eigenvalue Problems**. SIAM J. Numer. Anal., 10 (2), p. 241-256, 1973.

NÄDLER, M.; MEWES, D. **Effects of the liquid viscosity on the phase distributions in horizontal gas-liquid slug flow**. Int. J. Multiphase Flow, Vol. 21, No. 2, p. 253-266, 1995.

NÁRAIGH, L. Ó.; VALLURI, P.; SCOTT, D. M.; BETHUNE, I.; SPELT, P. D. M. **Linear instability, nonlinear instability and ligament dynamics in three-dimensional laminar two-layer liquid-liquid flows**. J. Fluid Mech. 750, p. 464-506, 2014.

NIECKELE, A. O.; CARNEIRO, J. N. E.; CHUCUYA, R. C.; AZEVEDO, J. H. P. **Initiation and Statistical evolution of horizontal slug flow with a Two-Fluid Model**. ASME J. Fluids Engineering, Vol. 135, p. 121302-1,121302-11, 2013.

NUTTALL, A. **Some windows with very good sidelobe behavior**. IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing, vol. 29, no. 1, p. 84-91, 1981.

NYQUIST, H. **Certain topics in telegraph transmission theory**. Trans. AIEE, vol. 47, p. 617-644, 1928.

NORDBERG, M. E.; WINTER, H. H. **Fully developed multilayer polymer flows in slits and annuli**. Polym. Engng Sci. 28, p. 444-452, 1988.

ORR, W. M'F. **Stability or instability of the steady motions of a perfect liquid**. Proc. Roy. Irish Acad. A 27, p. 9-69, 1907a.

ORR, W. M'F. **The stability or instability of the steady motions of a liquid**. Proc. Roy. Irish Acad. A 27, p. 69-138, 1907b.

PAPAEFTHYMIU, E. S.; PAPAGEORGIU, D. T.; PAVLIOTIS, G. A. **Nonlinear interfacial dynamics in stratified multilayer channel flows**. J. Fluid Mech. 734, p. 114-143, 2013.

PATANKAR, S. V.; SPALDING, D. B. **A calculation procedure for heat, mass and momentum transfer in three-dimensional parabolic flows**. Int. J. Heat Mass Transfer Vol. 15, p. 1787-1806, 1972.

PATANKAR, S. V. **Numerical Heat Transfer and Fluid Flow**, 1980.

PETRILA, T.; TRIF, D. **Basics of Fluid Mechanics and Introduction to Computational Fluid Dynamics**. Springer US, 2005.

PROSPERETTI, A.; TRYGGVASON, G. **Computational Methods for Multiphase Flow**. Cambridge University Press, 2007.

RAYLEIGH, J. W. S. **On the stability, or instability, of certain fluid motions**. Proc. Lond. Math. Soc. 11, p. 57-70, 1880.

RAYLEIGH, J. W. S. **Investigation of the character of the equilibrium of an incompressible heavy fluid of variable density**. Proc. Lond. Math. Soc. 14, p. 170-177, 1883.

RAYTHBY, G. D.; SCHNEIDER, G. E. **Numerical solution of problems in incompressible fluid flow: treatment of the velocity-pressure coupling**. J. Numerical Heat Transfer, v.2, p. 417-440, 1979.

RENARDY, Y. **Instability at the interface between two shearing fluids in a channel**. Physics of Fluids 28, p. 3441-3443, 1985.

RENARDY, M.; RENARDY, Y. **Derivation of amplitude equations and analysis of sideband instabilities in two-layer flows**. Physics of Fluids A: Fluid Dynamics 5 (11), p. 2738-2762, 1993.

REYNOLDS, O. **An experimental investigation of the circumstances which determine whether the motion of water shall be direct or sinuous, and of the law of resistance in parallel channels**. Phil. Trans. Roy. Soc. Lond. A 174, p. 935-982, 1883

RHIE, C. M.; CHOW, W. L. **Numerical Study of the Turbulent Flow past an Airfoil with Trailing Edge Separation**. AIAA Journal 21 (11), p. 1525-1532, 1983.

RIDER, W. J.; KOTHE, D. B. **Reconstructing Volume Tracking**. Journal of Computational Physics, Vol 141, p. 112–152, 1998.

RÖBKE, B. R.; VÖTT, A. **The tsunami phenomenon**. Progress in Oceanography 159, p. 296-322, 2017.

RODRIGUEZ, O. M. H.; OLIEMANS, R. V. A. **Experimental study on oil-water flow in horizontal and slightly inclined pipes**. International Journal of Multiphase Flow 32, p. 323-343, 2006.

RODRIGUEZ, O. M. H.; CASTRO, M. S. **Interfacial-tension-force model for the wavy-stratified liquid–liquid flow pattern transition**. International Journal of Multiphase Flow 58, p. 114–126, 2014.

RODRÍGUEZ, D. **A novel modeling method for the interfacial instability of immiscible fluids along ducts**. COBEM 2015, 23 ABCM International Congress of Mechanical Engineering. Rio de Janeiro, RJ, Brazil, 2015.

RODRÍGUEZ, D.; GENNARO, E. M. **Development of a new approach for the prediction of pattern transition of two-phase stratified flow in ducts and pipes.** Proceedings of ENCIT 2016, ABCM. 16 Brazilian Congress of Thermal Sciences and Engineering. Vitória, ES, Brazil, 2016.

RODRÍGUEZ, D. **A combination of parabolized Navier–Stokes equations and level-set method for stratified two-phase internal flow.** International Journal of Multiphase Flow 88, p. 50-62, 2017.

RUSSELL, T. W. F.; CHARLES, M. E. **The effect of the less viscous liquid in the laminar flow of two immiscible liquids.** Can. J. Chem. Eng. 37, p. 18-24, 1959.

SANCHIS, A.; JOHNSON, G. W.; JENSEN, A. **The formation of hydrodynamic slugs by the interaction of waves in gas-liquid two-phase pipe flow.** Int. J. Multiphase Flow, Vol. 37, p. 358-368, 2011.

SANGALLI, M.; GALLAGHER, C. T.; LEIGHTON, D. T.; CHANG, H. C.; McCREADY, M. J. **Finite-amplitude waves at the interface between fluids with different viscosity - theory and experiments.** Phys. Rev. Lett., 75, p. 77-80, 1995.

SANGALLI, M.; McCREADY, M. J.; CHANG, H-C. **Stabilization mechanisms of short waves in stratified gas–liquid flow.** American Institute of Physics 9 (4), p. 919-939, 1997.

SALHI, Y.; SI-AHMED EL-K.; LEGRAND, J.; DEGREGZ, G. **Stability analysis of inclined stratified two-phase gas–liquid flow.** Nuclear Engineering and Design 240, p. 1083-1096, 2010.

SCHLICHTING, H. **Boundary-layer theory.** McGraw-Hill, 1979.

SCHMID, P. J.; HENNINGSON, D. S. **Stability and Transition in Shear Flows.** Springer-Verlag New York, Inc., 2001.

SCHMID, P. J. **Nonmodal Stability Theory.** Annu. Rev. Fluid Mech. Vol. 39:129-162, 2007.

SELVAM, V S.; DEVI, S. **Bispectral analysis of scalp electroencephalograms: quadratic phasecoupling phenomenon in detecting brain tumor.** American Journal of Applied Sciences, Vol. 10, p. 294-306, 2013.

SHOHAM, O. **Mechanistic Modeling of Gas-Liquid Two-Phase Flow in Pipes.** Society of Petroleum Engineers - SPE, 2005.

SIGL, J. C.; CHAMOUN, N. G. **An Introduction to Bispectral Analysis for the Electroencephalogram.** Journal of Clinical Monitoring and Computing, Vol. 10, No. 6, p. 392-404, 1994.

SIMMONS, M. J. H.; HANRATTY, T. J. **Transition from stratified to intermittent flows in small angle upflows.** Int. J. Multiphase Flow 27, p. 599-616, 2001.

SIMÕES, E. F.; CARNEIRO, J. N. E.; NIECKELE, A. O. **Numerical prediction of non-boiling heat transfer in horizontal stratified and slug flow by the two-fluid model.** Int. J. of Heat and Fluid Flow, Vol. 47, p. 135-145, 2014.

SOMMERFELD, A. **Ein Beitrag zur hydodynamische Erklarung der turbulenten Flussigkeitsbewegungen.** Proc. 4thIntl Congr. Math.. Rome, vol. III, p. 116-124, 1908.

SQUIRE, H. B. **On the stability of three-dimensional disturbances of viscous flow between parallel walls.** Proc. Roy. Soc. Lond. A 142, p. 621-628, 1933.

SPEEDING, P. L.; CHEN, J. J. J. **A simplified method of determining flow pattern transition of two-phase flow in a horizontal pipe.** Int. J. Multiphase Flow 6, p. 729– 731, 1981.

STUART, J. T. **On the non-linear mechanics of wave disturbances in stable and unstable parallel flows. Part 1. The basic behaviour in plane Poiseuille flow.** J. Fluid Mech. 9, p. 353-370, 1960.

SVENDSEN, A. **Introduction to Nearshore Hydrodynamics.** Advanced Series on Ocean Engineering - Volume 24. World Scientific Publishing Co. Re. Ltd., 2006.

SU, Y. Y.; Khomami, B. **Numerical solution of eigenvalue problems using spectral techniques.** J Comput Phys 100, 297-305, 1992.

TAITEL, Y.; DUKLER, A. **A Model for predicting flow Regime transitions in horizontal and near horizontal gas-liquid flow.** AIChE Journal, v. 22, p. 47-55, 1976.

THEOFILIS, V. **Global Linear Instability.** Annual Review of Fluid Mechanics. Vol. 43, p. 319-352, 2011.

TORRES, C. F.; MOHAN, R. S.; GOMEZ, L. E.; SHOHAM, O. **Oil-water flow pattern transition prediction in horizontal pipes.** J. Energy Res. Technol. 138, 022904, p. 1-11, 2016.

TRALLERO, J. L. **Oil/Water Flow Patterns in Horizontal Pipes.** Ph.D.Dissertation, The University of Tulsa, 1995.

TRALLERO, J. L.; SARICA, C.; BRILL, J. P. **A study of oil/water flow patterns in horizontal pipes.** SPE Production & Facilities, 3, 6609, p. 165-172, 1997.

TRIFONOV, Y. Y. **Instabilities of a gas-liquid flow between two inclined plates analyzed using the Navier–Stokes equations.** International Journal of Multiphase Flow 95, p. 144-154, 2017.

TROPEA, C.; YARIN, A. L.; FOSS, J. F. **Springer Handbook of Experimental Fluid Mechanics**. Springer, 2007.

URSELL, F. **The Long Wave Paradox in the Theory of Gravity Waves**. Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, vol. 49, p. 685-694, 1953.

VALLÉE, C.; HÖHNE, T.; PRASSER, H-M.; SÜHNEL, T. **Experimental investigation and CFD simulation of horizontal stratified two-phase flow phenomena**. Nuclear Engineering and Design 238, p. 637-646, 2008.

VALLURI, P.; SPELT, P. D. M.; LAWRENCE, C. J.; HEWITT, G. F. **Numerical simulation of the onset of slug initiation in laminar horizontal channel flow**. International Journal of Multiphase Flow 34, p. 206-225, 2008.

VALLURI, P.; NÁRAIGH, L. Ó; DING, H.; SPELT, P. D. M. **Linear and nonlinear spatio-temporal instability in laminar two-layer flows**. J. Fluid Mech. 656, p. 458-480, 2010.

VAN LEER, B. **Towards the ultimate conservative difference scheme. V. A second-order sequel to Godunov's method**. J. Com. Phys., 32, p. 101–136, 1979.

VENKATESAN, M.; DAS, S. K.; BALAKRISHNAN, A. R. **Effect of tube diameter on two-phase flow patterns in mini tubes**. Can. J. Chem. Eng. 88, p. 936-944, 2010.

WALLIS, G. B. **One-dimensional Two-phase Flow**. McGraw-Hill, 1969.

WANG, W.; CHENG, W.; LI, K.; LOU, C.; GONG, J. **Flow Patterns Transition Law of Oil-Water Two-Phase Flow under a Wide Range of Oil Phase Viscosity Condition**. Journal of Applied Mathematics. Vol. 291217, p. 1-8, 2013.

WANG, Z. J. **High-order computational fluid dynamics tools for aircraft design**. Philos Trans A Math Phys Eng Sci., 372(2022): 20130318, 2014.

WEGMANN, A.; VON ROHR, P. R. **Two phase liquid–liquid flows in pipes of small diameters**. Int. J. Multiphase Flow 32, p. 1017-1028, 2006.

WEISMAN, J.; DUNCAN, D.; GIBSON, J.; CRAWFORD, T. **Effects of fluid properties and pipe diameter on two-phase flow patterns in horizontal lines**. Int. J. Multiphase Flow Vol. 5, p. 437-462, 1979.

WELLER, H. G. **A new approach to VOF-based interface capturing methods for incompressible and compressible flow**. Technical Report TR/HGW/04, OpenCFD Ltd., 2008.

WHITHAM, G. B. **Linear and Nonlinear waves**. John Wiley & Sons, Inc. USA, 1974.

WRIGHT, K. **Chebyshev collocation methods for ordinary differential equations**. Computer J. 6, p. 358-363, 1964.

WU, Q.; ISHII, M. **Interfacial wave stability of concurrent two-phase flow in a horizontal channel**. Int. J. Heat Mass Transfer 39 (10), p. 2067-2075, 1996.

XU, X. **Study on oil-water two-phase flow in horizontal pipelines**. Journal of Petroleum Science and Engineering 59, p. 43-58, 2007.

YIANTSIOS, S. G.; HIGGINS, B. G. **Analysis of superposed fluids by the finite element method: Linear stability and flow development**. Int. J. Numer. Meth. Fluids 7, p. 247-261, 1987.

YIANTSIOS, S. G.; HIGGINS, B. G. **Linear stability of plane Poiseuille flow of two superposed fluids**. Physics of Fluids 31, No 11, p. 3225- 3238, 1988.

YIH, C. S. **Instability due to viscosity stratification**. Journal of Fluid Mechanics, v. 27, p. 337-352, 1967.

ZHAI, L. S.; ANGELI, P.; JIN, N. D.; ZHOU, D. S.; ZHU, L. **The nonlinear analysis of horizontal oil-water two-phase flow in a small diameter pipe**. International Journal of Multiphase Flow 92, p. 39-49, 2017.

ZHANG, H. Q.; WANG, Q.; SARICA, C.; BRILL, J. P. **Unified model for gas-liquid pipeflow via slug dynamics - Part 1: Model Development**. ASME Journal of Energy Resources Technology 125 (4), p. 266-273, 2003.

ZHAO, Y.; LAO, L.; YEUNG, H. **Investigation and prediction of slug flow characteristics in highly viscous liquid and gas flows in horizontal pipes**. Chemical Engineering Research and Design, Vol. 102, p. 124-137, 2015.

ZHONG, X.; TATINENI, M. **High-order non-uniform grid schemes for numerical simulation of hypersonic boundary-layer stability and transition**. Journal of Computational Physics 190, p. 419-458, 2003.

## Apêndice A

### Códigos Fluent (User-Defined Function UDF)

Neste apêndice, são listados os códigos desenvolvidos neste trabalho como “sub-rotina do usuário” e introduzidos no código do Fluent, de forma a gerar os forçantes para criar os diferentes tipos de perturbações investigados no presente trabalho.

#### A.1

##### Forçante instantânea

Abaixo, o código utilizado para criar o forçante apresentado na Eq. (4.39).

```
#include "udf.h"
#define L 30.          /*Comprimento do canal*/
#define n 15.         /*Períodos completos em L*/
#define t_ini 0.00    /*Tempo inicial*/
#define t_fin 0.01    /*Tempo final*/
#define Amp 1.        /*Amplitude*/
#define pi 3.14159265358979

DEFINE_SOURCE(ymomentum_source, c, t, dS, eqn)
{
    #if !RP_HOST
    real x[ND_ND], source;
    Thread **pt = THREAD_SUB_THREADS(t);
    real vof = C_VOF(c,pt[0]);

    C_CENTROID(x,c,t);
    if ((CURRENT_TIME >= t_ini) && (CURRENT_TIME <= t_fin))
    {
        if ((x[0] >= 0.) && (x[0] <= L))
        {
            source = Amp*sin(n*(2*pi*x[0]/L))*(vof*(1-vof));
        }
        /*Perturbação*/
    }
    else
        source = 0.;
    }
    else
    {
        source = 0.;
    }
}
return source;
#endif
}
```

## A.2 Forçante periódica para o pacote de ondas

Nos casos, em que um forçante periódico foi introduzido, conforme descrito pela Eq. (4.41), o código utilizado encontra-se listado a seguir.

```
#include "udf.h"
#define Nw 3.          /*Períodos perturbados*/
#define w2 4.6434     /*Frequência angular*/
#define A 0.2         /*Amplitude*/
#define t_ini 0.0     /*Tempo inicial*/
#define Li 1.         /*Posição inicial da perturbação*/
#define L 0.2         /*Comprimento perturbado*/
#define pi 3.14159265358979

DEFINE_SOURCE(ymomentum_source, c, t, dS, eqn)
{
  #if !RP_HOST
  real x[ND_ND], source;
  Thread **pt = THREAD_SUB_THREADS(t);
  real vof = C_VOF(c,pt[0]);
  real t_fin, f1, w1;
  t_fin = t_ini+Nw*(2*pi/w2);    /*Duração da perturbação*/
  f1=0.5/(t_fin-t_ini);        /*Envelope frequency*/
  w1=2*pi*f1;                  /*Envelope angular frequency*/
  C_CENTROID(x,c,t);
  if ((CURRENT_TIME >= t_ini) && (CURRENT_TIME <= t_fin))
  {
    if ((x[0] >= Li) && (x[0] <= Li+L))
    {
      Source = -A*sin(2*pi*(x[0]-Li)/(2.*L))*cos(w2*(CURRENT_TIME-
t_ini))*(0.3635819-0.4891775*cos(2*pi*(CURRENT_TIME-
t_ini)/t_fin)+0.1365995*cos(4*pi*(CURRENT_TIME-t_ini)/t_fin)-
0.0106411*cos(6*pi*(CURRENT_TIME-t_ini)/t_fin))*vof*(1-vof);
    }
    else
      source = 0.;
  }
  else
  {
    source = 0.;
  }
}
return source;
#endif
}
```

## A.3 Scripts dos UDF para execução paralela (cluster)

Para facilitar a submissão dos executáveis no *cluster* para processamento paralelo, três *scripts* foram criados, dos quais somente o script “script3.Script.txt” deve ser transformado em executável via o comando `chmod`. Por exemplo, “`chmod +x script3.Script.txt`”. Iniciar simulação com “`./script3.Script.txt`”.



A seguir, apresentam-se os três *scripts*.

**script1.jou**

```
/file/read-case ./CaseData.cas
/define/user-defined/compiled-functions compile "libudf" yes
"UDF_domain_disturb_temporal.c" "" ""
/define/user-defined/compiled-functions load "libudf"
;
/define/boundary-conditions/fluid surface_body mixture yes 0 1 no
yes "ymomentum_source::libudf" no no no 0 no 0 no no no
;
/file/read-data ./CaseData.dat
;
/file/auto-save/data-frequency 10
/file/auto-save/case-frequency if-case-is-modified
/file/auto-save/retain-most-recent-files yes
/file/auto-save/max-files 10000
/file/auto-save/root-name "./savedFiles/CaseData"
;
/solve/dual-time-iterate
10000000
20
/file/write-data ./CaseData.dat ok
/exit
yes
/exit
ok
```

**script2**

n12

**script3.Script.txt**

```
#!/bin/sh
#PBS -q main
#PBS -m abe
PBS_script2=./script2
CPUCOUNT=16
INPUT=./script1.jou
OUTPUT=Output.report
echo "Nos usados"
cat script2
fluent 2ddp -t$CPUCOUNT -g -ssh -cnf=$PBS_script2 -i $INPUT
> $OUTPUT 2>&1
```

## Apêndice B

### Escoamento Base

Conforme descrito no Capítulo 4 (Modelagem), o primeiro passo da presente metodologia consiste na obtenção do escoamento base, com o mínimo de ruído possível. Inicialmente foram realizadas simulações em canais não periódicos, impondo perfil de velocidade desenvolvido na entrada e diferentes condições na saída. Estes resultados não foram satisfatórios como apresentado a seguir. Posteriormente, empregou-se a condição de contorno periódica, conforme descrito no Capítulo 4, e estes resultados também são discutidos neste apêndice.

#### B.1

##### Simulações em canais não periódicos

Inicialmente, testes foram realizados, impondo o perfil de velocidade de escoamento estratificado desenvolvido na entrada (Eq. 4.28) e (4.29). No entanto, as pequenas diferenças entre a solução analítica e a solução discreta introduziram ruído muito elevado na solução, inviabilizando sua utilização. Optou-se então, pela utilização do perfil de velocidade desenvolvido obtido numericamente. Este mesmo perfil foi imposto ao longo de todo o domínio como condição inicial para a obtenção da solução em regime permanente.

Com relação a condição de contorno na saída, uma vez, que o escoamento base é desenvolvido, impôs-se condição de difusão nula na saída (condição de *outflow*). Os resultados obtidos também foram insatisfatórios, pois esta condição introduziu uma perturbação no escoamento na região de saída, a qual se propaga para o interior do domínio. A seguir, impôs-se condição de pressão no plano de saída. Apesar dos resultados também não serem satisfatórios, como mostrado a seguir, foram superiores aos resultados obtidos com a condição de difusão nula.

Conforme descrito acima, os testes prévios estabeleceram que nos casos espaciais, as condições de contorno na entrada e na saída do canal, introduziam considerável ruído numérico nas fronteiras impossibilitando a obtenção de um escoamento base adequado. A Fig. B.1a apresenta o campo do componente

vertical de velocidade, onde claramente pode-se observar as perturbações introduzidas no escoamento pela imposição das condições de contorno na entrada e saída do domínio. Adicionalmente, observou-se um aumento do ruído numérico com o refino da malha, impossibilitando a obtenção de resultados satisfatórios, pelo menos na versão utilizada ANSYS Fluent® Release 15.0.

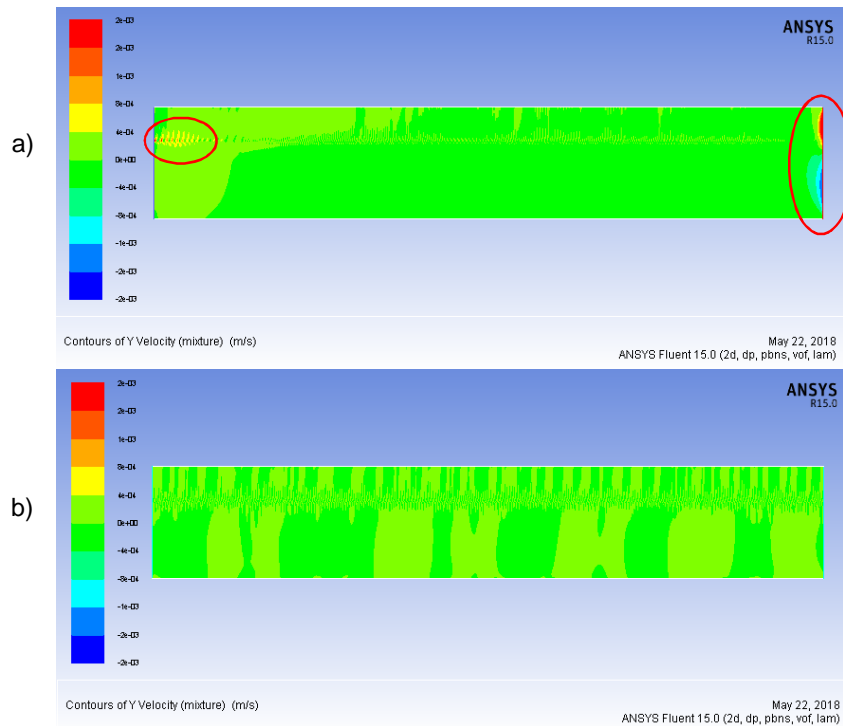


Figura B.1: Regime permanente para obter o escoamento base no canal  $L=30$ . Malha  $L30 \times H1$  ( $4200 \times 140$ ), caso  $h_{eq}=0,7$ . (a) Canal não periódico, ruído é gerado na entrada e saída. (b) Canal periódico, ruído é suprimido.

Uma vez que as soluções obtidas com as condições de contorno de “entrada” e “saída” descritas acima não foram satisfatórias, investigou-se o desempenho da ferramenta numérica, ao empregar a condição de contorno periódica. A Fig. B.1b ilustra o campo do componente vertical, onde pode-se observar o desaparecimento das perturbações nas regiões de fronteira. Dessa forma a evolução convectiva de um pacote de ondas foi realizada considerando canais longos  $L=30$  e periódicos.

## B.2 Simulações em canais periódicos

A utilização das condições de contorno periódicas eliminou ruídos

localizados nas regiões de fronteira. No entanto, os erros de truncamento gerados na obtenção da solução do escoamento base introduzem ruídos que devem ser substancialmente inferiores a ordem de grandeza das perturbações infinitesimais a serem investigadas.

Alguns testes foram realizados, introduzindo amortecimentos específicos na região da interface, como aumento da tensão superficial ( $\sigma$ ) ou da viscosidade na região da interface. No entanto, estes testes foram descartados por não serem físicos. Optou-se então, em investir um tempo elevado nas simulações, visando a redução ao máximo do resíduo das equações de conservação, e dessa forma, obter ruído numérico em um nível aceitável, conforme ilustrado na Fig. B.2.

Considerou-se aceitável, uma solução com resíduo da velocidade  $V_y$  (que analiticamente é nula) na ordem de  $\pm 5 \times 10^{-7}$ , o que resultou em um número de iterações considerável ( $> 5 \times 10^5$ ), levando a um elevado tempo de simulação, i.e., alto custo computacional.

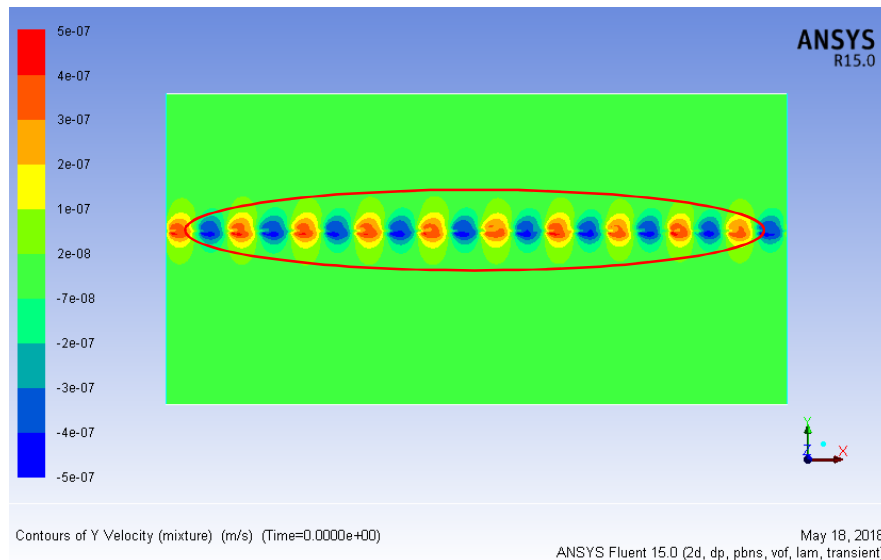


Figura B.2: Escoamento base obtido no regime permanente em um canal  $L=2$  periódico. Para baixar o ruído numérico que aparece na interface, a solução é convergida até a velocidade  $V_y$  atingir resíduo em torno de  $\pm 5 \times 10^{-7}$ . Malha  $L2 \times H1$  ( $560 \times 280$ ), caso  $h_{eq}=0,558$ .

A Figura B.3 mostra a evolução temporal da amplitude da onda perturbada  $\lambda=3$  em um canal com  $L=3$ . Os casos correspondem a diferentes estados de convergência do escoamento base em relação das iterações atingidas. A mesma perturbação inicial é utilizada em todos os casos. Pode-se observar a

sensibilidade da evolução da interface do escoamento, o que efetivamente comprova a necessidade de se obter escoamentos base numéricos com o menor ruído possível.

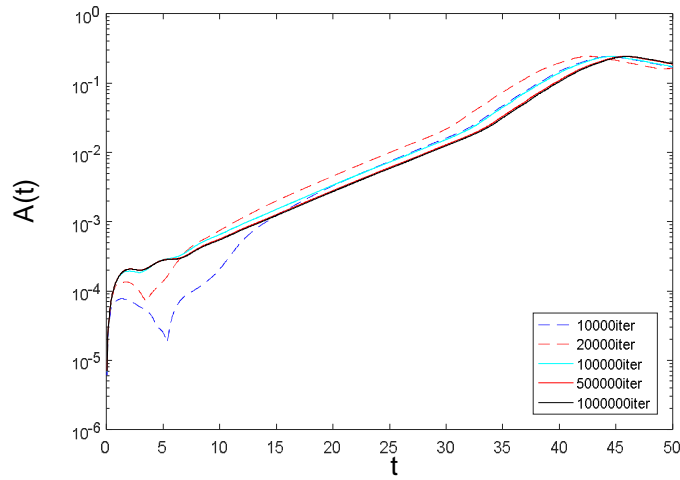


Figura B.3: Evolução temporal da amplitude para  $L=\lambda=3$ , para diversos estados de convergência do escoamento base. Evolução da amplitude é sensível ao nível de ruído interfacial contido no escoamento base. Malha  $L3 \times H1$  ( $210 \times 70$ ), caso  $h_{eq}=0,558$ .

## Apêndice C

### C.1 Excitação de Ondas – Estágios Lineares

#### C.1.1

#### Caso com escoamento base fracamente instável ( $h_{eq}=0,558$ )

As figuras seguintes correspondem aos casos complementares da seção 6.1.3 (Casos com excitação de ondas curtas, médias e longas).

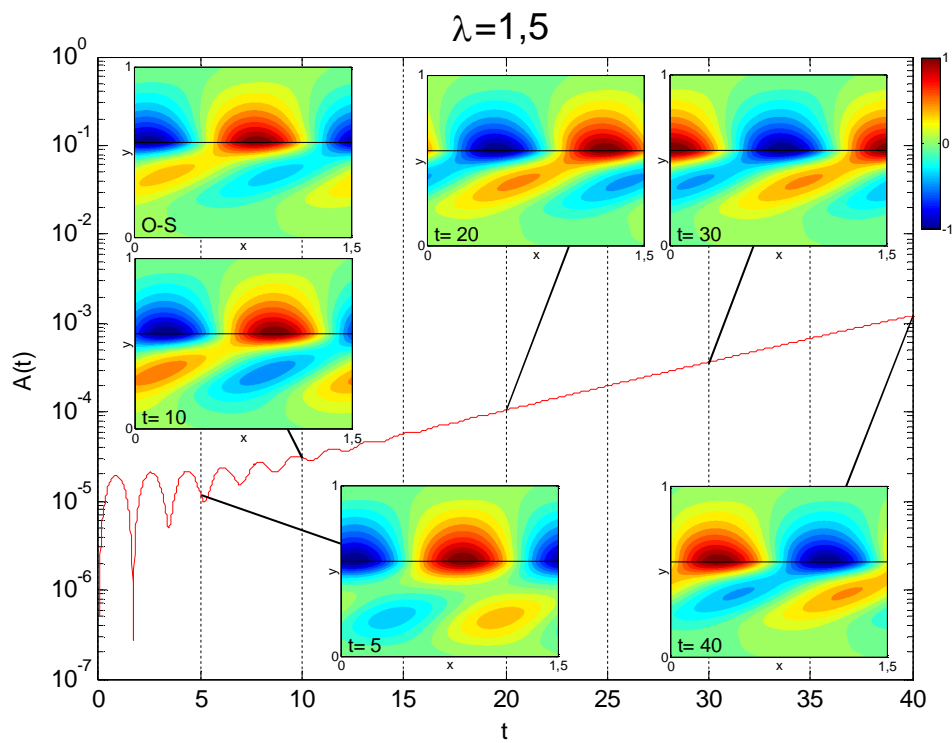


Figura C.1: Evolução temporal da amplitude do modo fundamental ( $\lambda=1,5$ ). Instantes da flutuação  $v'$  mostram o comportamento qualitativo da onda avaliada.

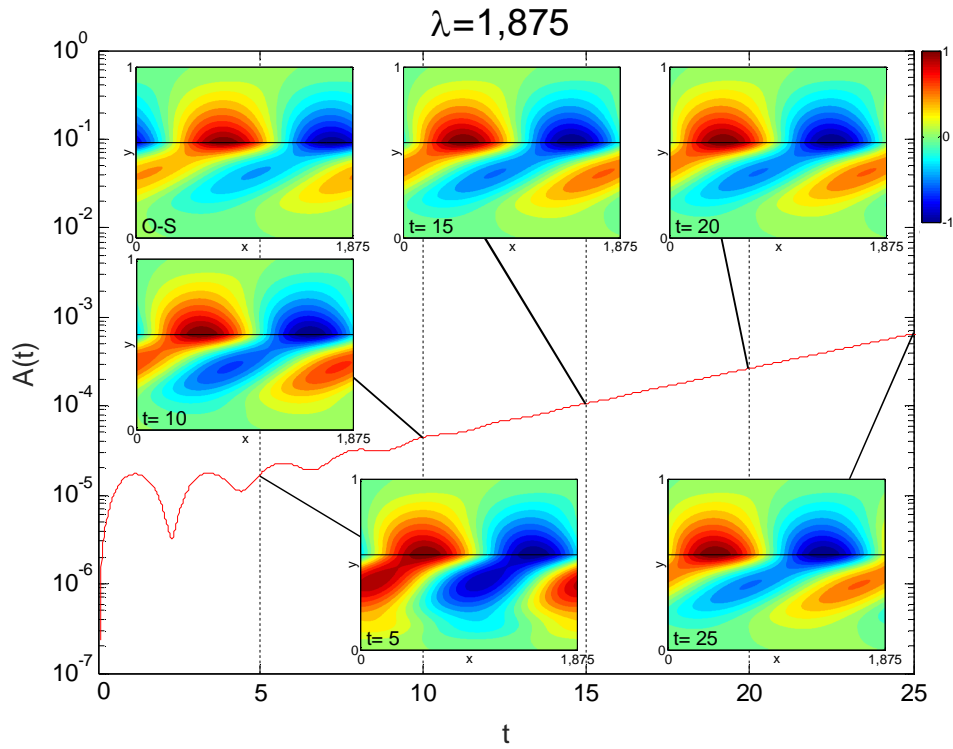


Figura C.2: Evolução temporal da amplitude do modo fundamental ( $\lambda=1,875$ ). Instantes da flutuação  $v'$  mostram o comportamento qualitativo da onda avaliada.

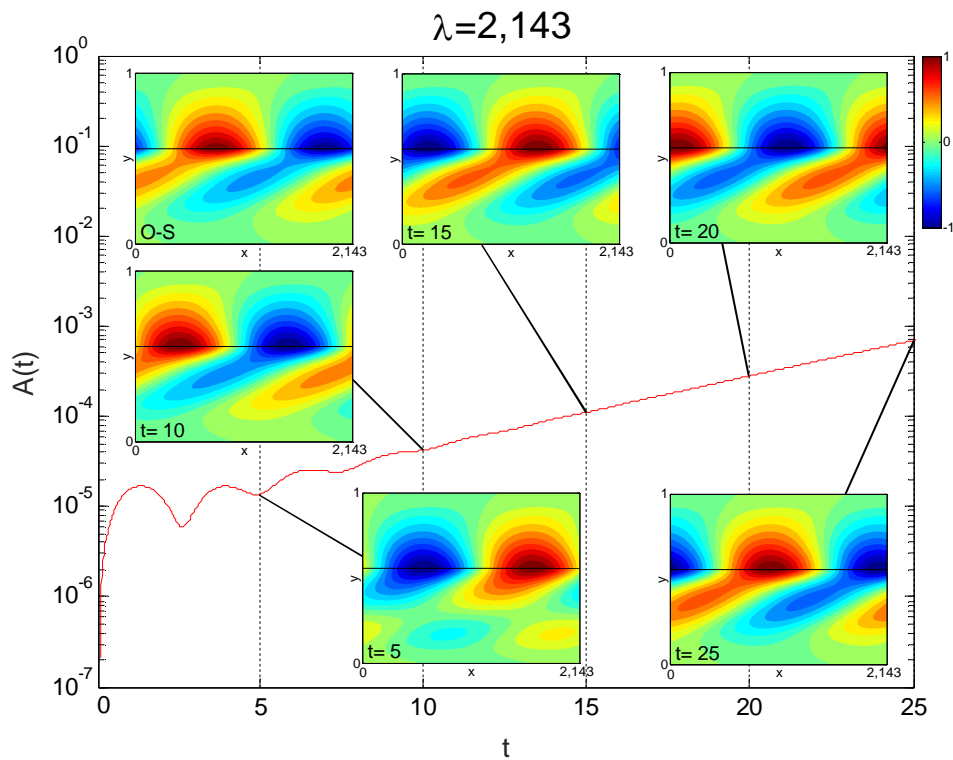


Figura C.3: Evolução temporal da amplitude do modo fundamental ( $\lambda=2,143$ ). Instantes da flutuação  $v'$  mostram o comportamento qualitativo da onda avaliada.

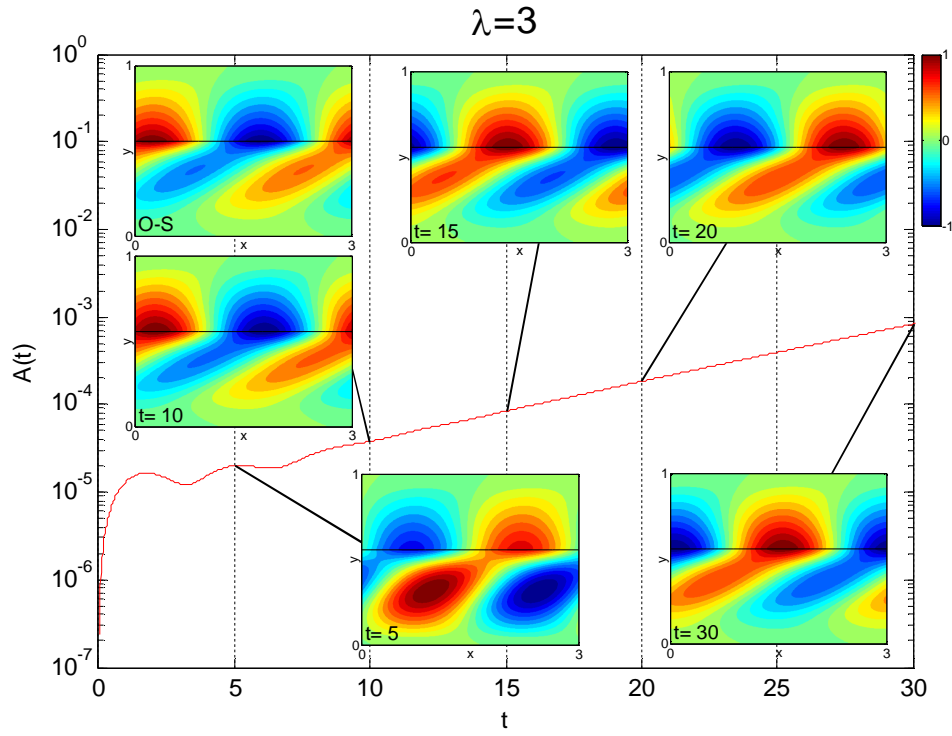


Figura C.4: Evolução temporal da amplitude do modo fundamental ( $\lambda=3$ ). Instantes da flutuação  $v'$  mostram o comportamento qualitativo da onda avaliada.

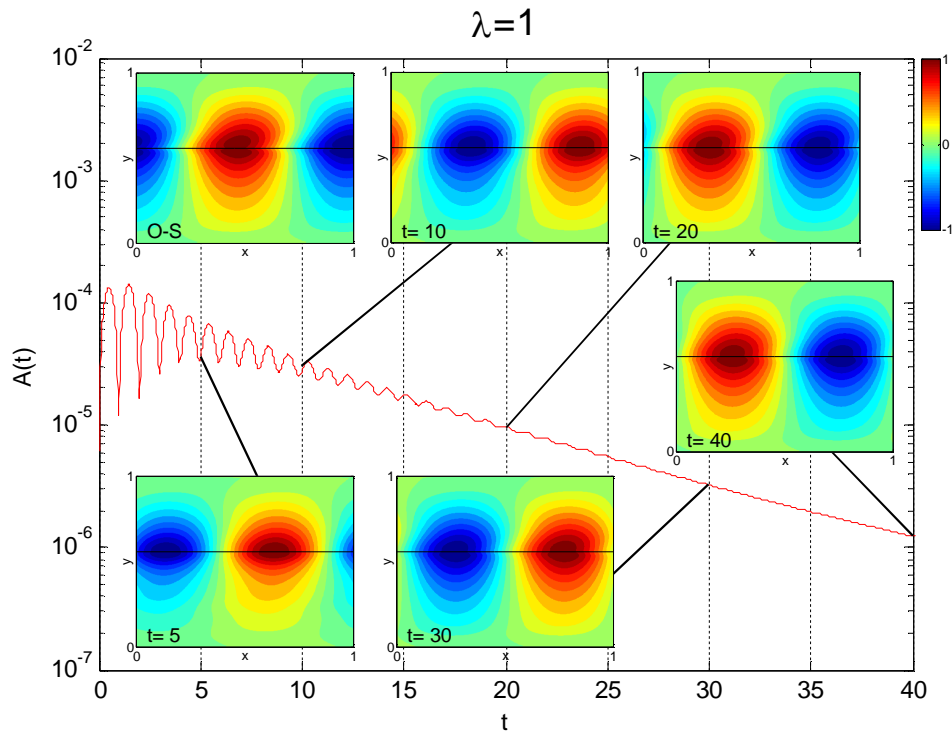


Figura C.5: Evolução temporal da amplitude do modo fundamental ( $\lambda=1$ ). Instantes da flutuação  $v'$  mostram o comportamento qualitativo da onda avaliada.



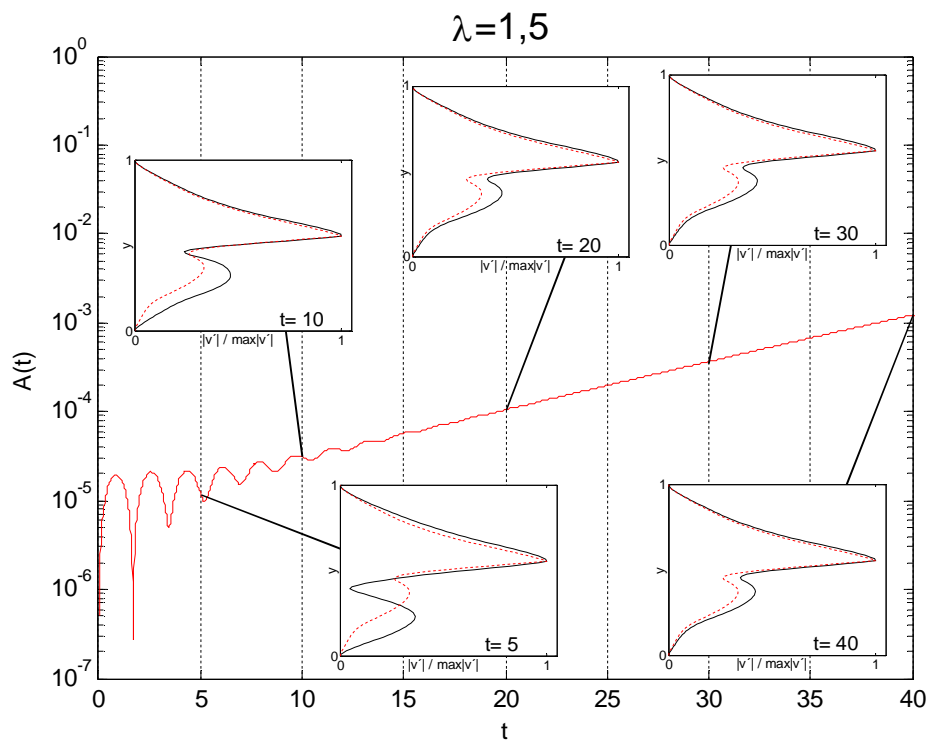


Figura C.6: Evolução temporal da amplitude de onda ( $\lambda=1,5$ ). Perfis de magnitude de  $v'$  (curva contínua preta) são comparados com a teoria linear (curva tracejada vermelha).

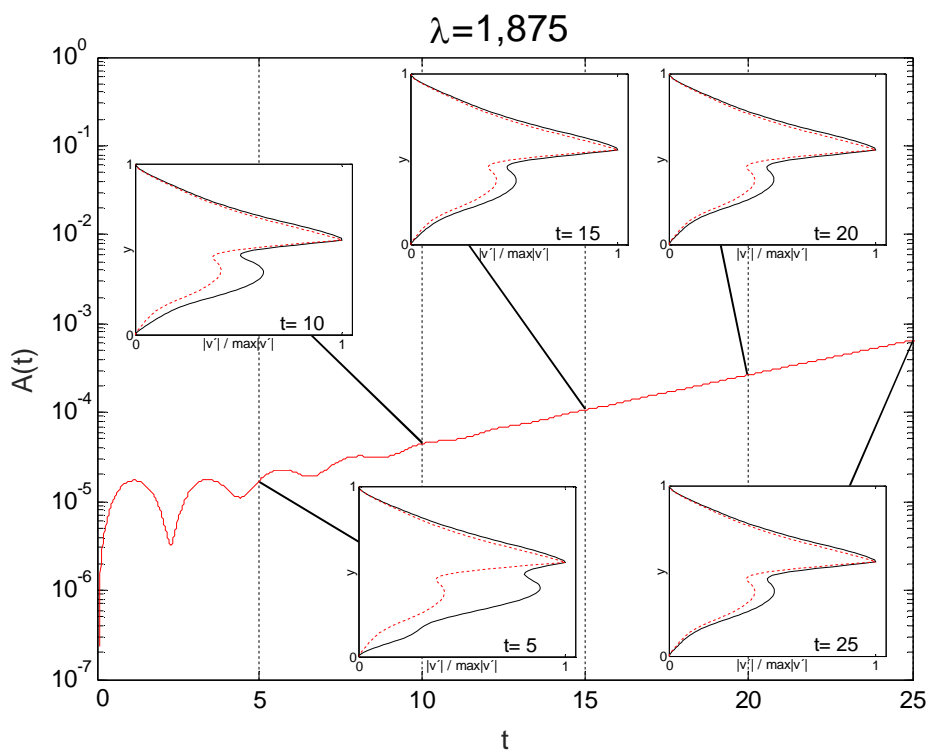


Figura C.7: Evolução temporal da amplitude de onda ( $\lambda=1,875$ ). Perfis de magnitude de  $v'$  (curva contínua preta) são comparados com a teoria linear (curva tracejada vermelha).

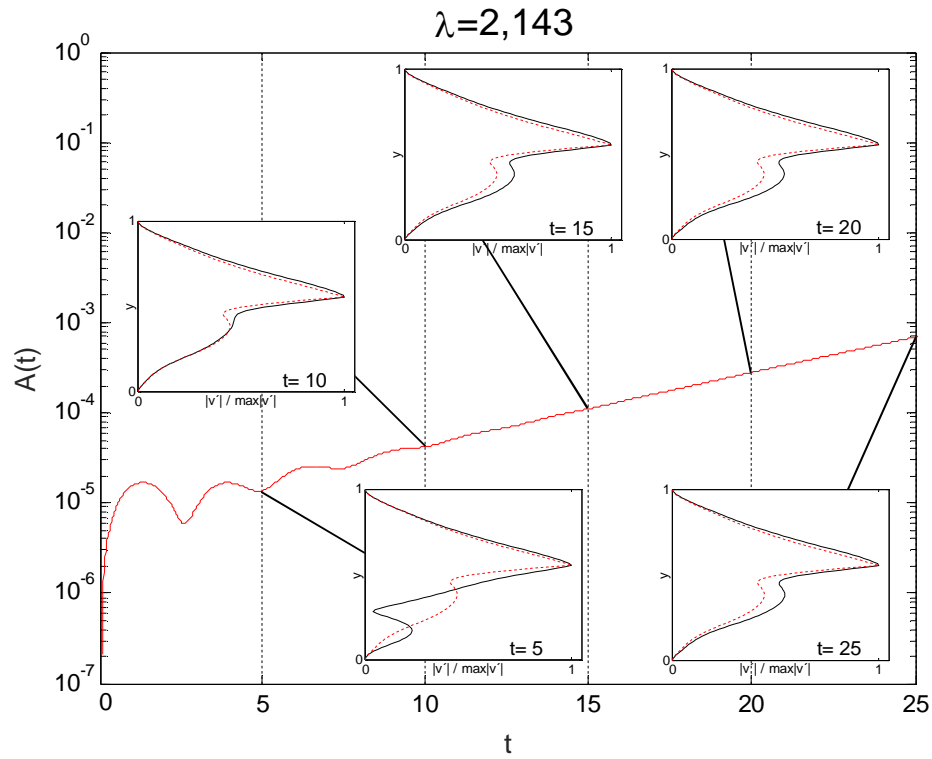


Figura C.8: Evolução temporal da amplitude de onda ( $\lambda=2,143$ ). Perfis de magnitude de  $v'$  (curva contínua preta) são comparados com a teoria linear (curva tracejada vermelha).

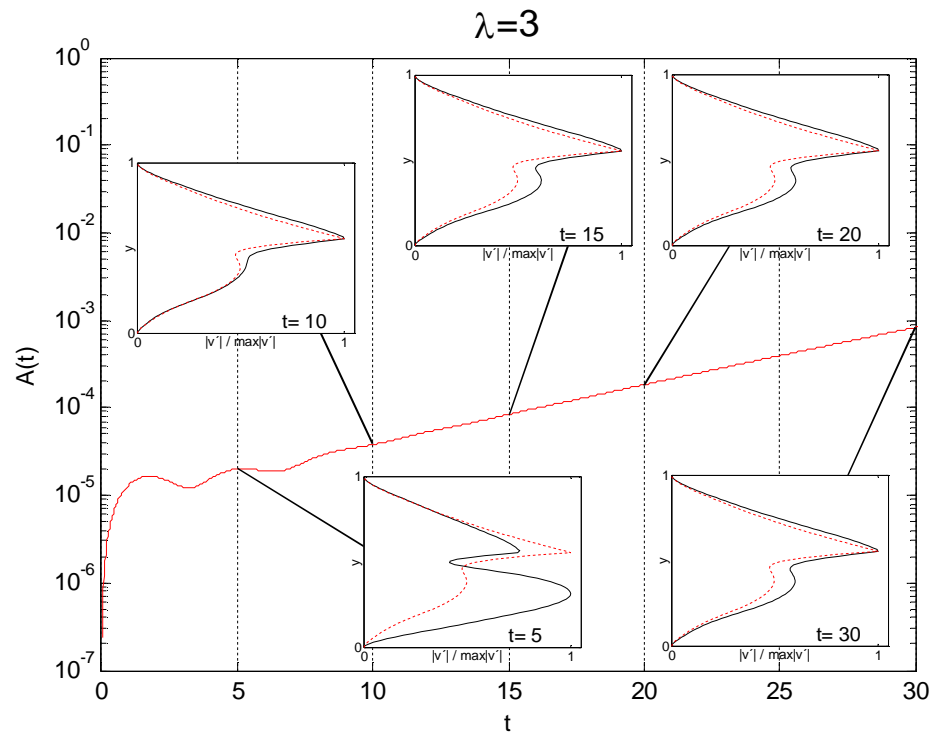


Figura C.9: Evolução temporal da amplitude de onda ( $\lambda=3$ ). Perfis de magnitude de  $v'$  (curva contínua preta) são comparados com a teoria linear (curva tracejada vermelha).

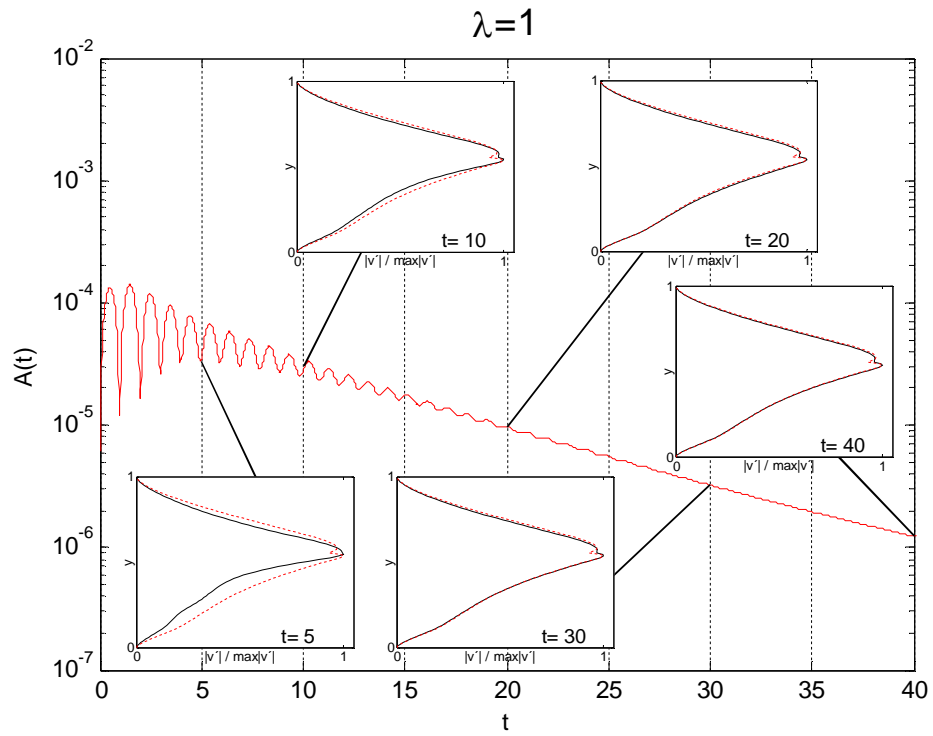


Figura C.10: Evolução temporal da amplitude de onda ( $\lambda=1$ ). Perfis de magnitude de  $v'$  (curva contínua preta) são comparados com a teoria linear (curva tracejada vermelha).

### C.1.2 Caso com escoamento base instável ( $h_{eq}=0,7$ )

As figuras seguintes correspondem aos casos complementares da seção 6.2 (Caso com Escoamento Base Instável  $h_{eq}=0,7$ ).

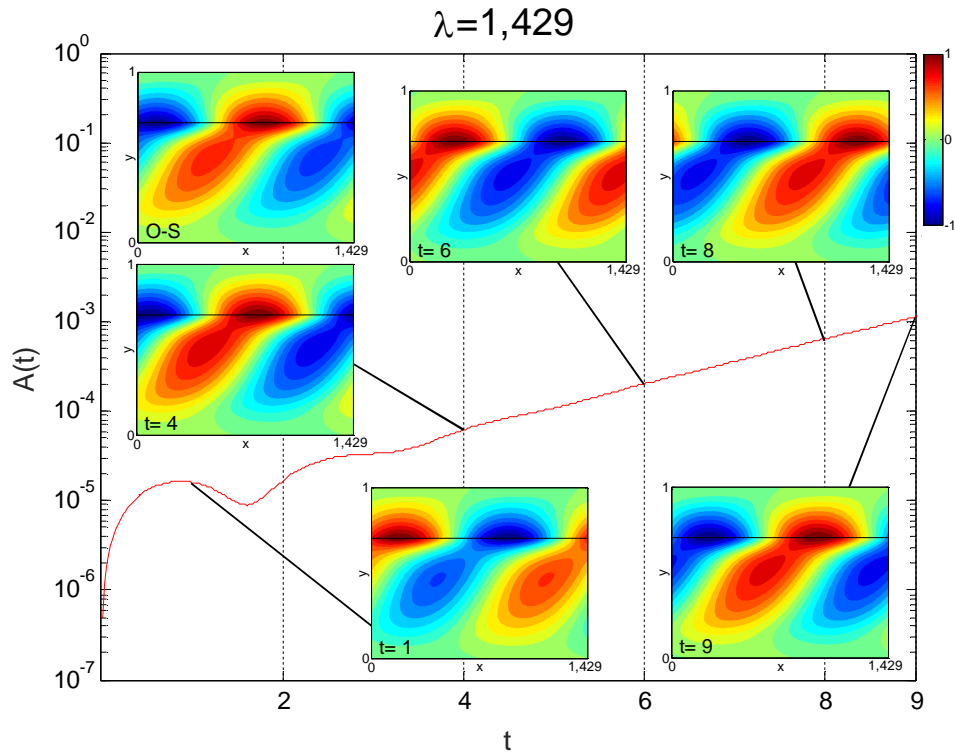


Figura C.11: Evolução temporal da amplitude do modo fundamental ( $\lambda=1,429$ ). Instantes da flutuação  $v'$  mostram o comportamento qualitativo da onda avaliada.

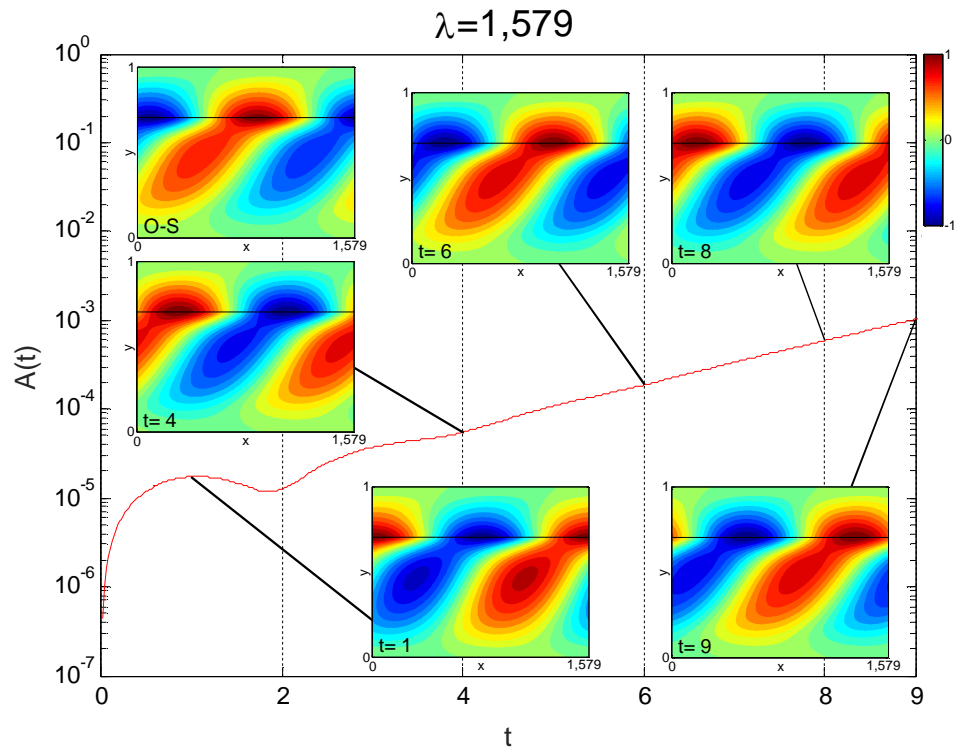


Figura C.12: Evolução temporal da amplitude do modo fundamental ( $\lambda=1,579$ ). Instantes da flutuação  $v'$  mostram o comportamento qualitativo da onda avaliada.

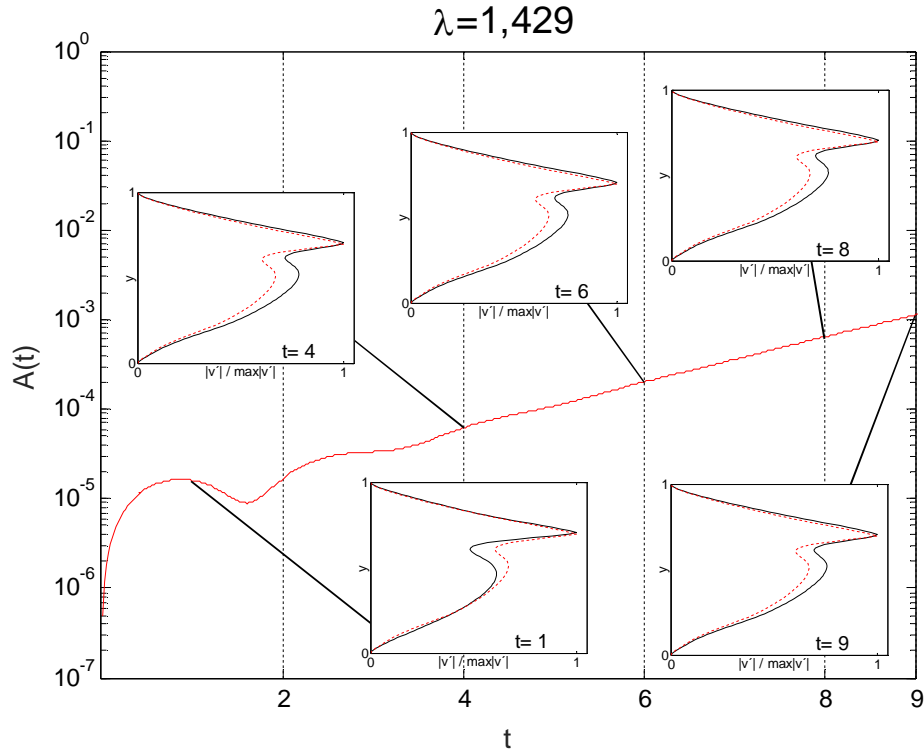


Figura C.13: Evolução temporal da amplitude de onda ( $\lambda=1,429$ ). Perfis de magnitude de  $v'$  (curva contínua preta) são comparados com a teoria linear (curva tracejada vermelha).

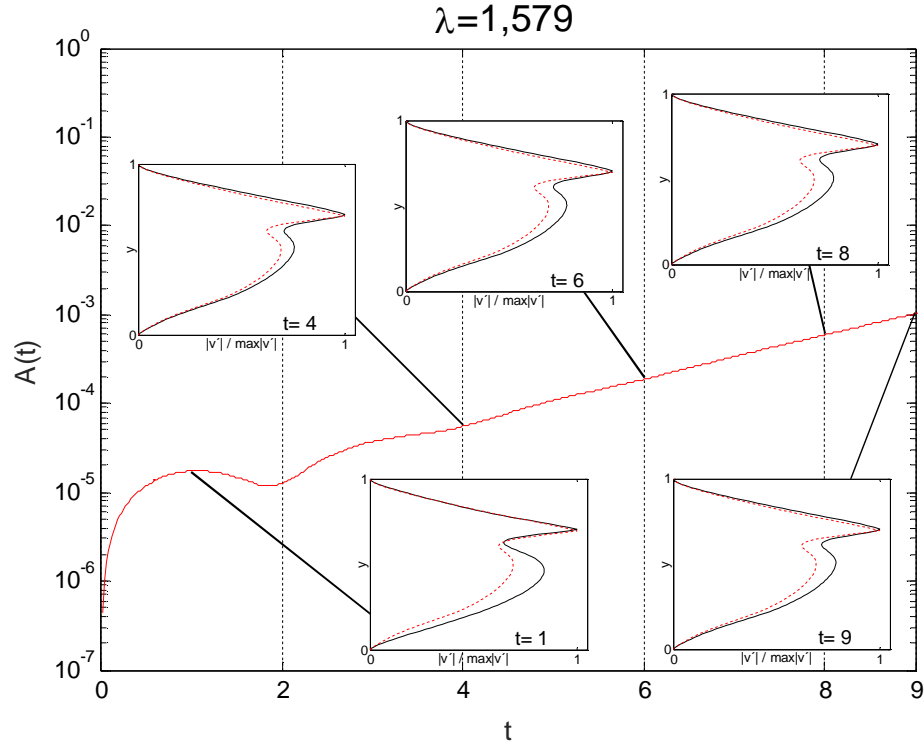


Figura C.14: Evolução temporal da amplitude de onda ( $\lambda=1,579$ ). Perfis de magnitude de  $v'$  (curva contínua preta) são comparados com a teoria linear (curva tracejada vermelha).

## C.2 Excitação de Ondas – Estágios Não Lineares

### C.2.1 Caso com escoamento base fracamente instável ( $h_{eq}=0,558$ )

Casos complementares da seção 7.2 (Evolução Não Linear - Caso Fracamente Instável  $h_{eq}=0,558$ ).

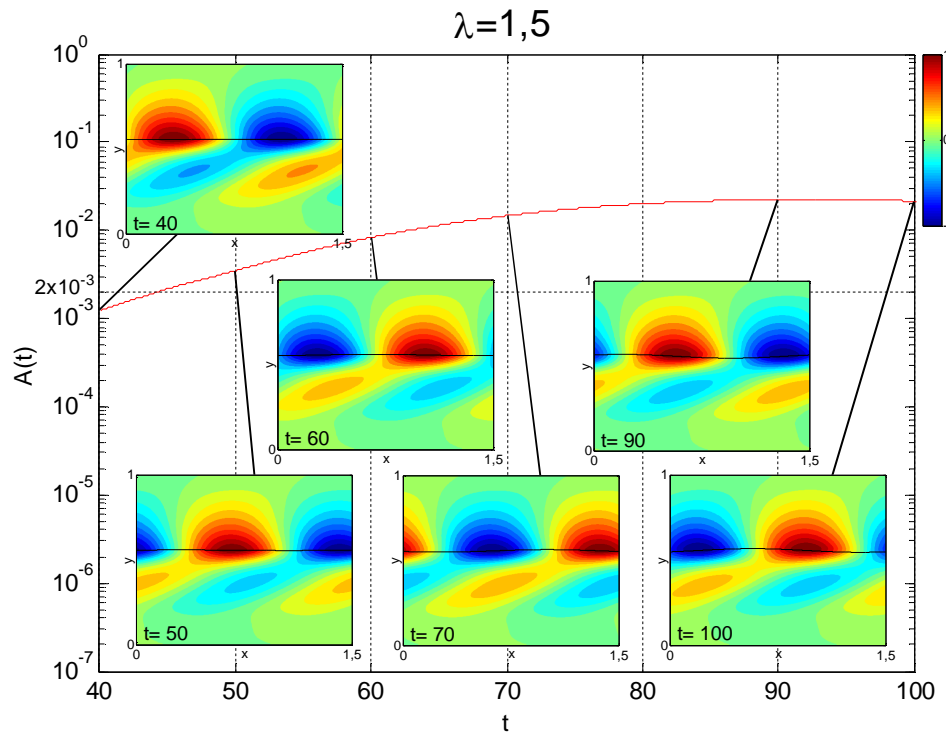


Figura C.15: Evolução temporal da amplitude do modo fundamental ( $\lambda=1,5$ ). Caso  $h_{eq}=0,558$ . Instantes da flutuação  $v'$  mostram o comportamento qualitativo da onda.

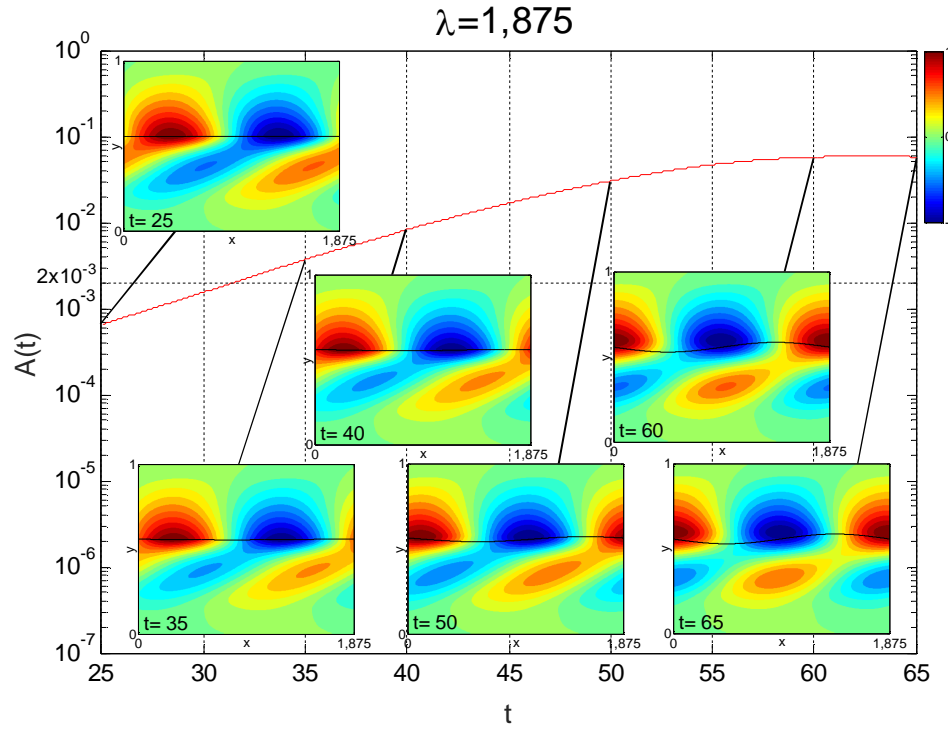


Figura C.16: Evolução temporal da amplitude do modo fundamental ( $\lambda=1,875$ ). Caso  $h_{eq}=0,558$ . Instantes da flutuação  $v'$  mostram o comportamento qualitativo da onda.

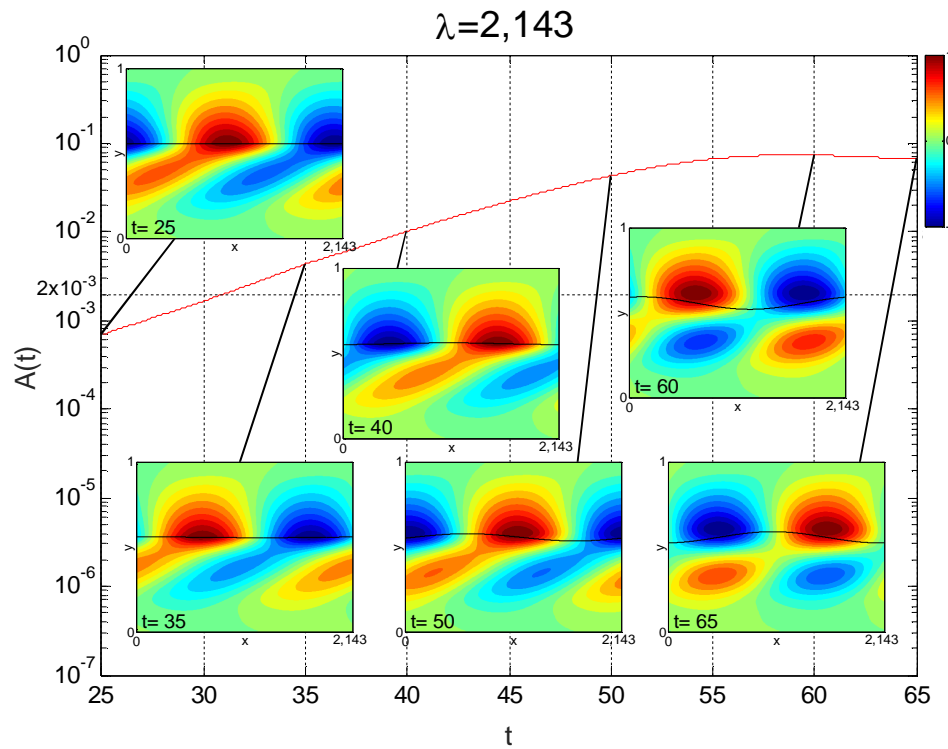


Figura C.17: Evolução temporal da amplitude do modo fundamental ( $\lambda=2,143$ ). Caso  $h_{eq}=0,558$ . Instantes da flutuação  $v'$  mostram o comportamento qualitativo da onda.

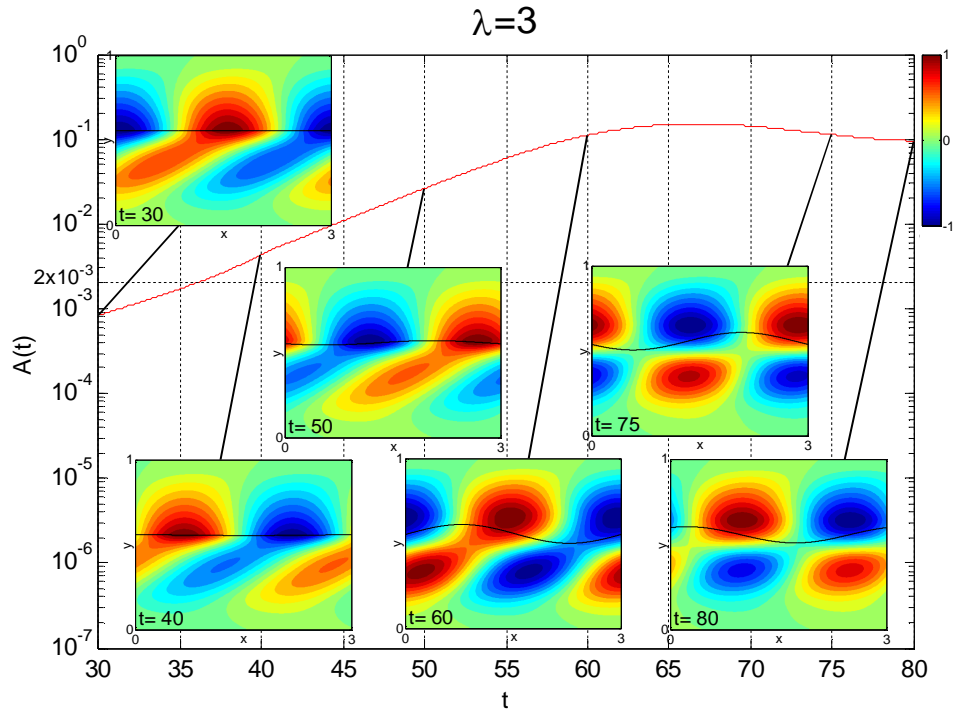


Figura C.18: Evolução temporal da amplitude do modo fundamental ( $\lambda=3$ ). Caso  $h_{eq}=0,558$ . Instantes da flutuação  $v'$  mostram o comportamento qualitativo da onda.

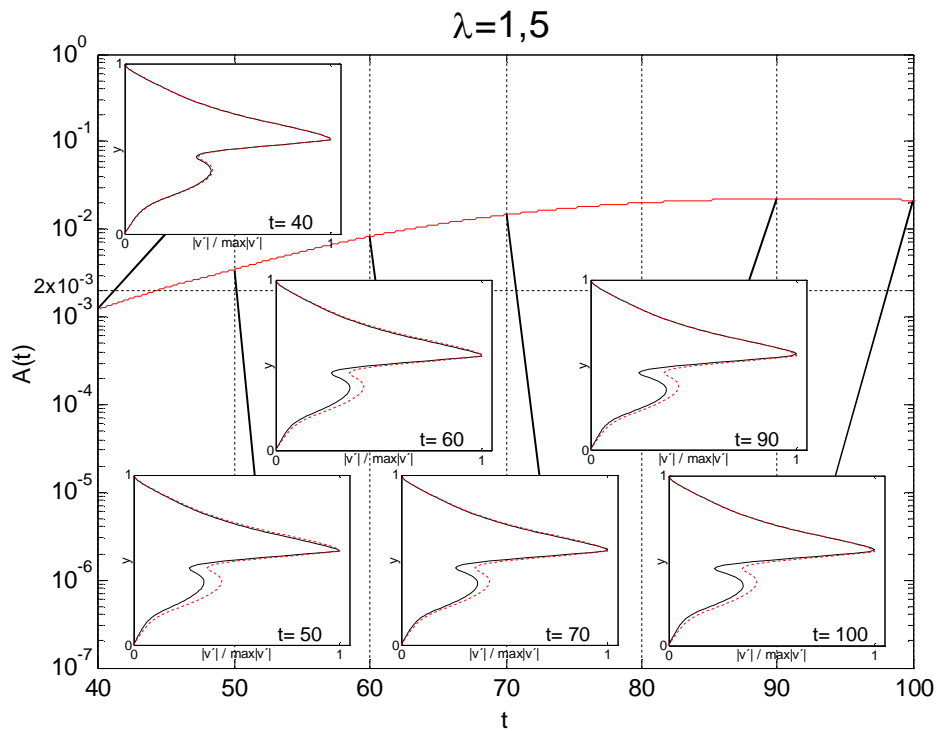


Figura C.19: Evolução da amplitude para  $\lambda=1,5$ . Perfis de magnitude de  $v'$  (curva contínua preta) são comparados com o perfil de  $t=30$  (curva tracejada vermelha).



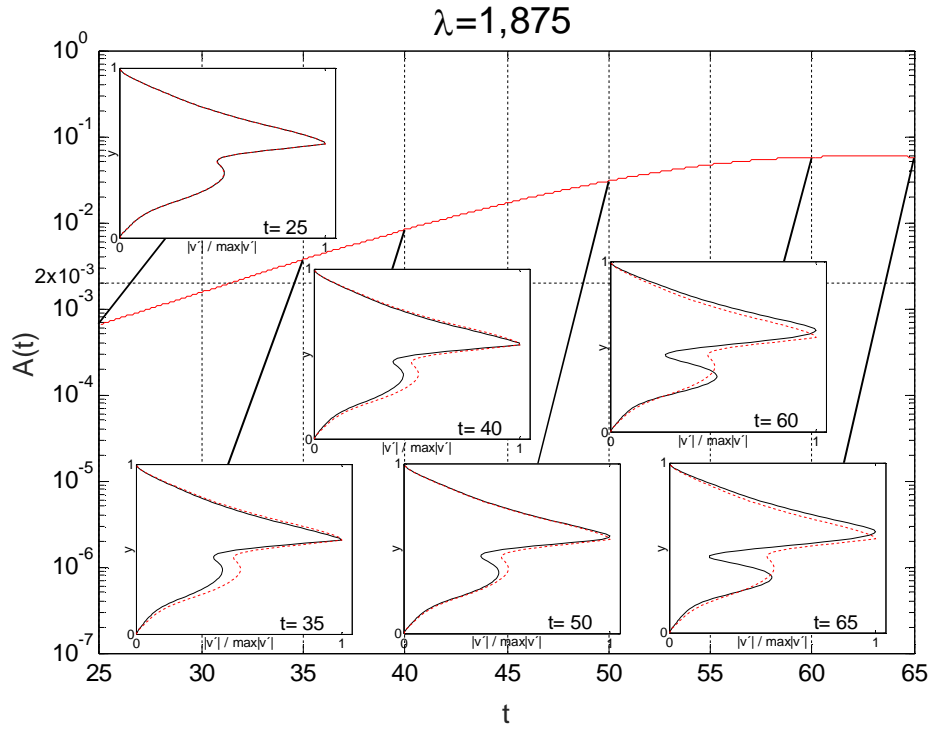


Figura C.20: Evolução da amplitude para  $\lambda=1,875$ . Perfis de magnitude de  $v'$  (curva contínua preta) são comparados com o perfil de  $t=20$  (curva tracejada vermelha).

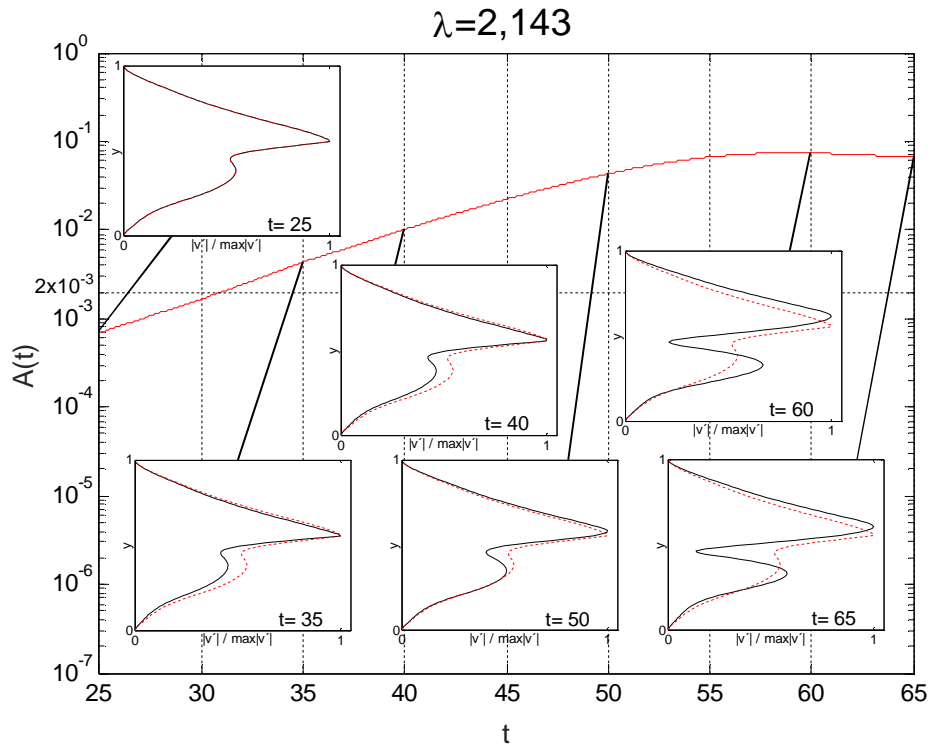


Figura C.21: Evolução da amplitude para  $\lambda=2,143$ . Perfis de magnitude de  $v'$  (curva contínua preta) são comparados com o perfil de  $t=20$  (curva tracejada vermelha).

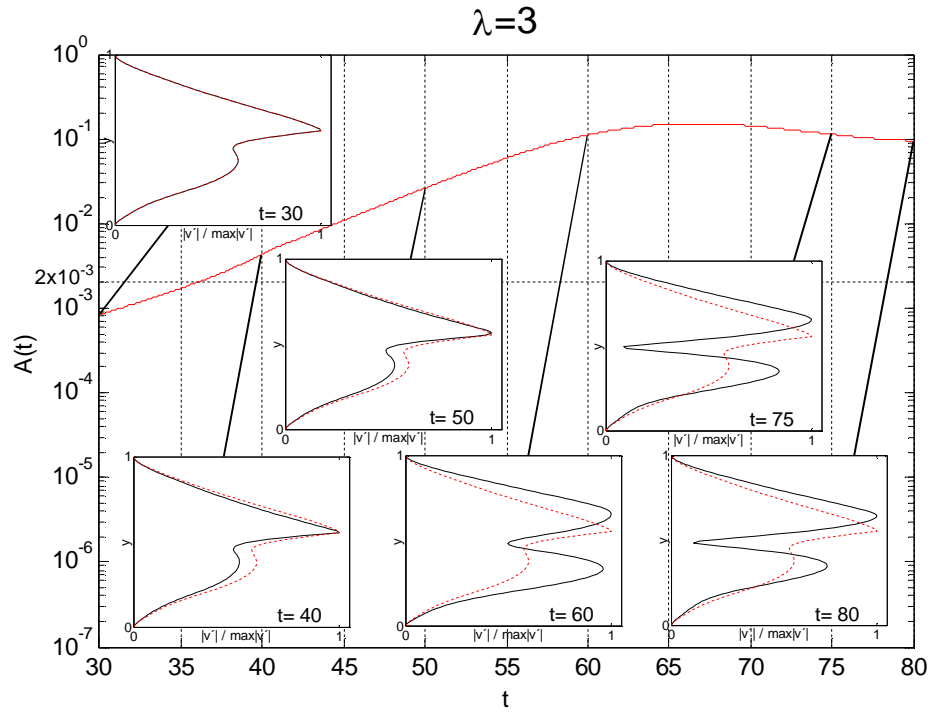


Figura C.22: Evolução da amplitude para  $\lambda=3$ . Perfis de magnitude de  $v'$  (curva contínua preta) são comparados com o perfil de  $t=20$  (curva tracejada vermelha).

**C.2.2**  
**Caso com escoamento base instável ( $h_{eq}=0,7$ )**

Casos complementares da seção 7.3 (Evolução Não Linear - Caso Instável  $h_{eq}=0,7$ ).

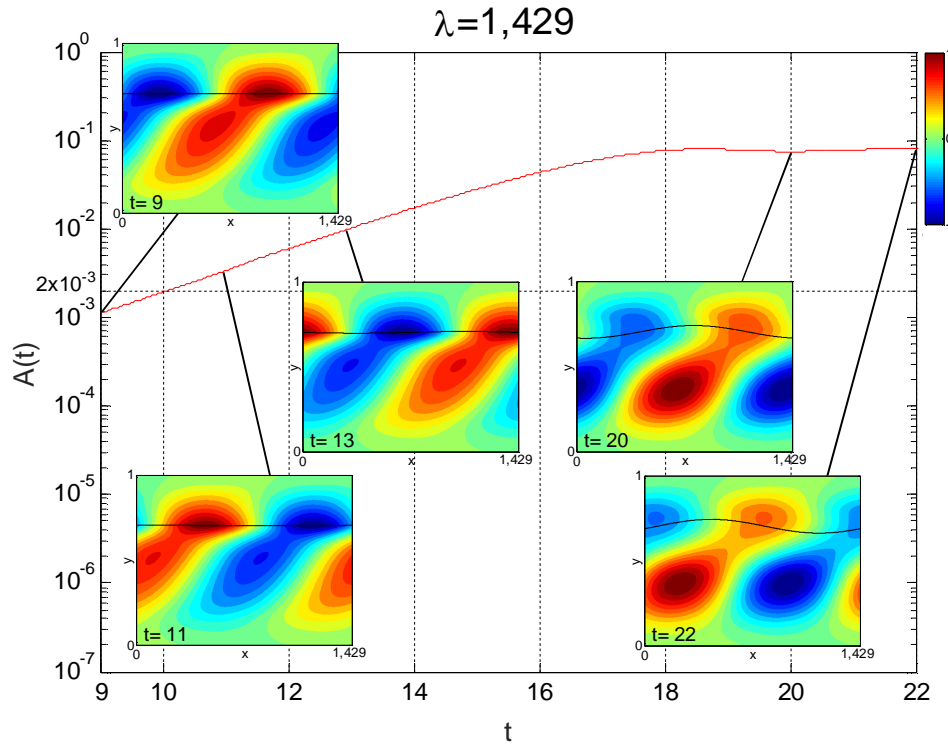


Figura C.23: Evolução temporal da amplitude do modo fundamental ( $\lambda=1,429$ ). Caso  $h_{eq}=0,7$ . Instantes da flutuação  $v'$  mostram o comportamento qualitativo da onda.

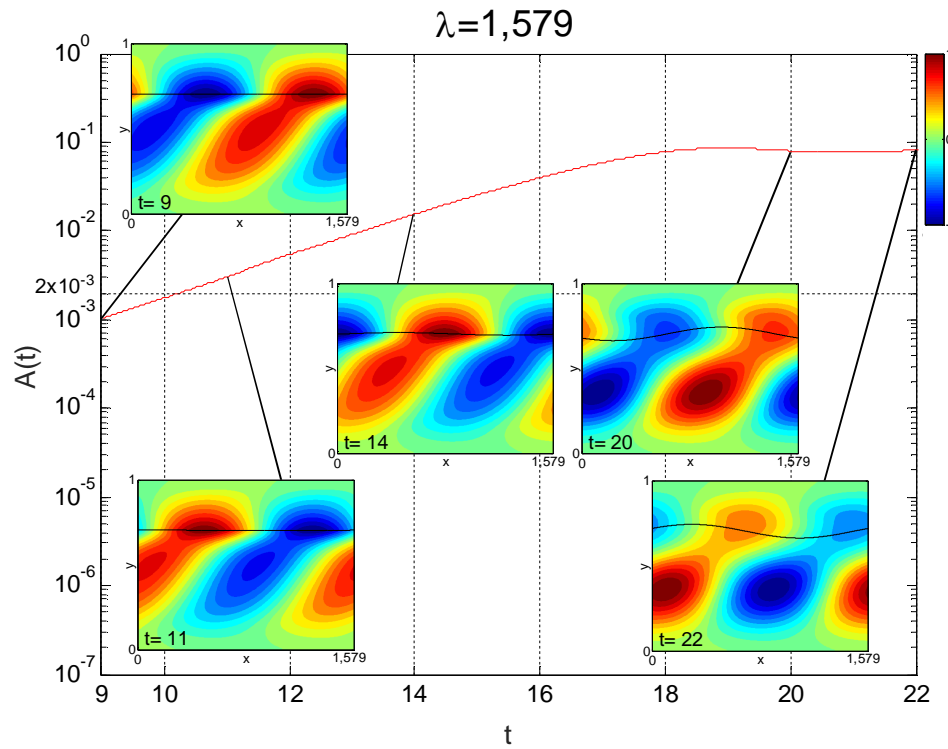


Figura C.24: Evolução temporal da amplitude do modo fundamental ( $\lambda=1,579$ ). Caso  $h_{eq}=0,7$ . Instantes da flutuação  $v'$  mostram o comportamento qualitativo da onda.

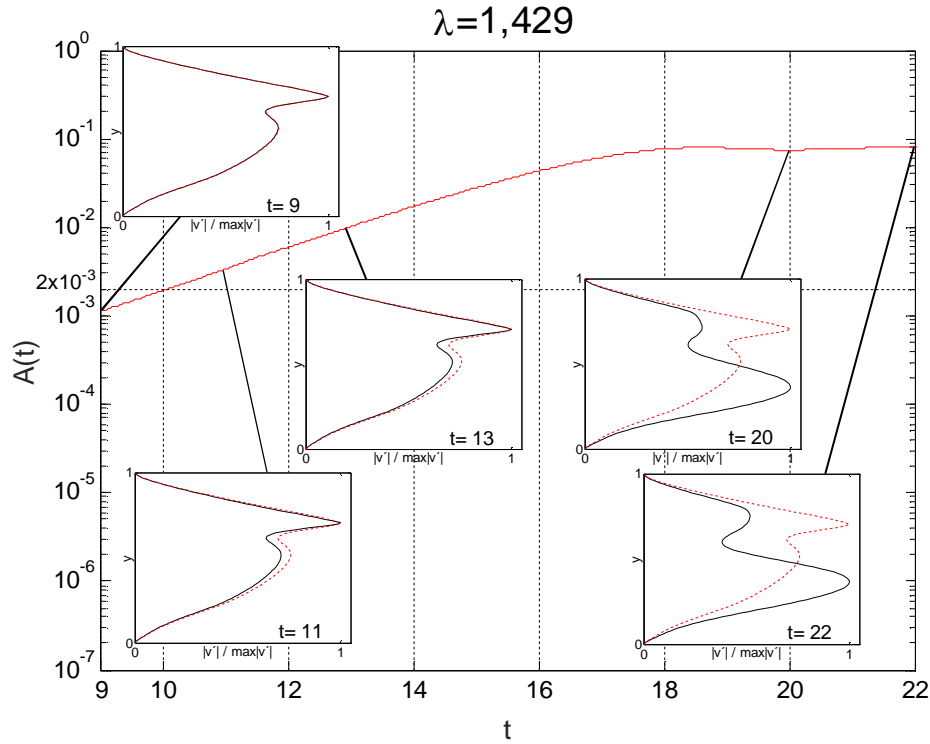


Figura C.25: Evolução da amplitude para  $\lambda=1,429$ . Perfis de magnitude de  $v'$  (curva contínua preta) são comparados com o perfil de  $t=8$  (curva tracejada vermelha).

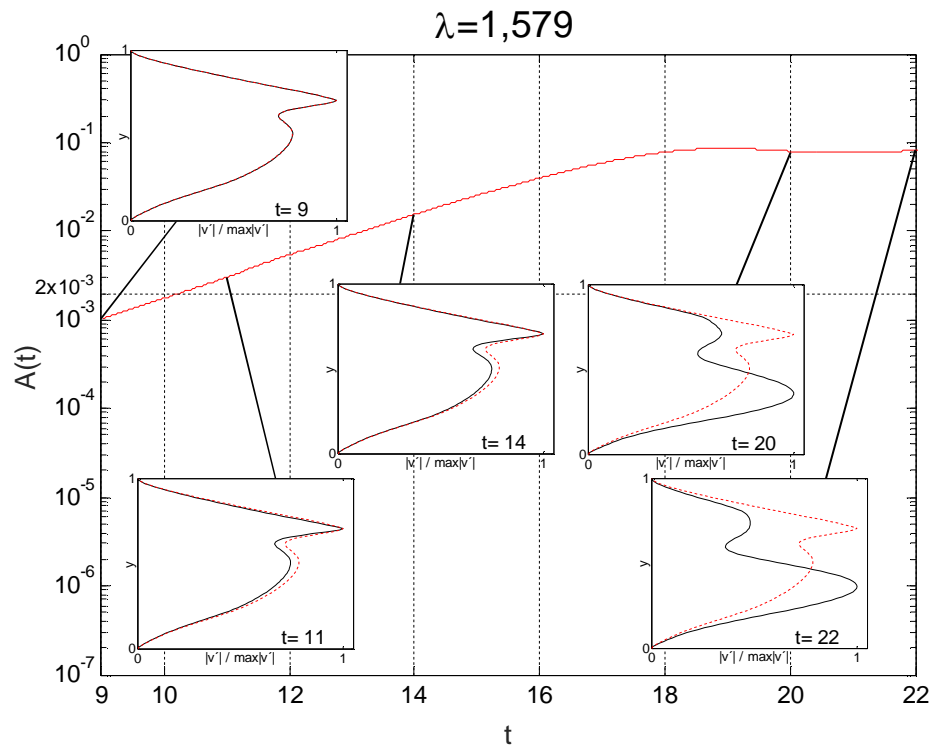


Figura C.26: Evolução da amplitude para  $\lambda=1,579$ . Perfis de magnitude de  $v'$  (curva contínua preta) são comparados com o perfil de  $t=8$  (curva tracejada vermelha).