

4 Variações e extensão do modelo de Valkó & Oligney

O presente trabalho se propõe a inserir algumas variações no modelo de Valkó & Oligney [3] para a definição do raio de empacotamento durante uma operação de *fracpack*, assim como, extendê-lo para outras geometrias de fratura.

4.1. Etapas do modelo de Valkó & Oligney

O modelo de Valkó & Oligney [3] para a definição do raio da fratura durante uma operação de *fracpack* pode ser dividido em duas etapas. A primeira etapa contempla a definição do raio da fratura para o período anterior ao início do TSO. Este período é identificado através de alguns eventos:

- O agente de sustentação ainda não foi bombeado;
- O bombeio do agente de sustentação já foi iniciado, porém este ainda não atingiu a fratura;
- O agente de sustentação já atingiu a fratura, porém ainda não foi identificado qualquer aumento de pressão, isto é, ainda não ocorreu um TSO.

A segunda etapa do modelo de Valkó & Oligney [3] contempla a definição do raio da fratura para o período após o início do TSO. Cabe ressaltar que, conforme apresentado, este período intercala momentos de interrupção na propagação da fratura, nos quais ocorre o alargamento e empacotamento da abertura da fratura, representados por um aumento na pressão, com períodos de redução de pressão, onde a fratura volta a se propagar. Desta forma, o período de TSO do modelo, que pode ser mais bem definido como intervalos de TSO incompletos, é identificado pelos seguintes eventos em conjunto:

- O agente de sustentação já atingiu a fratura;
- Já foi identificado aumento de pressão;
- Entre os aumentos de pressão podem ser identificados períodos de redução na pressão.

4.1.1.

Questões referentes ao período anterior ao início do TSO

Para a definição do raio da fratura no período anterior ao TSO, Valkó & Oligney [3] utilizam uma adaptação da proposta de Nolte [15,16,17] na qual a área da fratura cresce segundo uma relação de potência com o tempo, apresentada pela eq. (2.57) e reescrita a seguir:

$$\frac{A}{A_{fp}} = \left(\frac{t}{t_p} \right)^\alpha \quad (2.57)$$

Na adaptação de Valkó & Oligney [3], o parâmetro tempo foi substituído pelo volume de pasta bombeado, sendo esta substituição válida para os casos de vazão de injeção constante. Já o parâmetro área foi substituído pelo raio da fratura e, desta forma, o expoente α utilizado foi adaptado para expressar a relação do raio com o tempo e não da área com o tempo. No modelo, Valkó & Oligney [3] utilizam o valor de 4/9 para o expoente, sendo este encontrado assumindo-se fluido Newtoniano ($n=1$) e eficiência próxima de 1, conforme proposto pela eq. (2.63).

$$\alpha_{raio} = \frac{\alpha_1^{radial}}{2} = \frac{(2n + 2)}{(3n + 6)} = \frac{4}{9} \quad (2.63)$$

Outra modificação realizada por Valkó & Oligney [3] na equação de Nolte [15,16,17] foi a definição dos denominadores da eq. (2.57) no tempo inicial do TSO, representado por t_{TSO} , ao invés de utilizá-los no tempo final do bombeio. Esta alteração se deve ao fato da fratura apresentar períodos de área constante após o início do TSO, não obedecendo assim à relação proposta por Nolte para o crescimento da área da fratura com o tempo. Seguindo estas considerações, o raio da fratura antes do início do TSO no modelo de Valkó & Oligney [3] foi definido pela eq. (3.17):

$$\frac{R(t)}{R_p(t_{TSO})} = \left(\frac{V_{i,t}}{V_{i,t_{TSO}}} \right)^{4/9} \quad (3.17)$$

Duas questões podem ser discutidas em relação ao modelo utilizado por Valkó & Oligney [3] para a previsão do raio da fratura antes do início do TSO:

- No período inicial de uma operação de *fracpack* é bombeado o colchão do tratamento, o qual é responsável por propagar a fratura e garantir uma abertura mínima para o bombeio do agente de sustentação. Desta forma, durante esta etapa, é observada uma grande variação na eficiência do fluido, a qual começa próxima de 1

e vai reduzindo em função do crescimento da fratura e do conseqüente aumento da área exposta à filtração. Este cenário permite o questionamento da utilização do modelo de potência de Nolte para a propagação inicial da fratura, já que este modelo assume um valor de α constante, e ao mesmo tempo, conforme definido na eq. (2.64), o expoente α é função da eficiência, a qual está sofrendo grande variação nesta etapa do tratamento. Este trabalho propõe que outro modelo de propagação da fratura seja utilizado nesta etapa.

- Outro ponto a ser discutido com relação ao modelo é a limitação imposta à propagação da fratura pelo raio de empacotamento definido no início do TSO. Conforme mencionado, a etapa anterior ao TSO consiste principalmente no bombeio do colchão, sem ocorrer ainda o bombeio do agente de sustentação. Nestas condições pode-se dizer que o raio da fratura nesta etapa é igual ao seu raio hidráulico. No entanto, utilizando a equação proposta por Nolte adaptada, o modelo sugere que o raio hidráulico da fratura ao longo desta etapa seja sempre igual ou inferior ao raio de empacotamento calculado no início do TSO. É importante lembrar que o raio de empacotamento é função do comportamento da pressão do tratamento, a qual reflete a heterogeneidade existente na rocha em termos de tensão e filtração. Desta forma, refletindo essa heterogeneidade, o raio de empacotamento pode ser formado em qualquer ponto ao longo da fratura. Cabe então questionar se a propagação hidráulica da fratura não deveria ser independente dos raios de empacotamento calculados a partir dos intervalos com TSO.

4.1.2.

Questões referentes ao período após o início do TSO

A partir do primeiro TSO observado, o modelo de Valkó & Oligney estima os raios de empacotamento nos períodos onde ocorre aumento na pressão de fundo. Nestes intervalos a propagação da fratura está bloqueada, resultando no alargamento da abertura da fratura. Com este cenário, o modelo utiliza um balanço de massa para uma área de fratura constante, estimando a vazão de filtração a partir da teoria do declínio de pressão proposta por Nolte [15,16,17], que é função do expoente α . Já nos intervalos onde é observada a redução na

pressão de fundo, resultado da propagação da fratura, Valkó & Oligney definem o raio da fratura utilizando uma interpolação logarítmica entre os raios de empacotamento conhecidos. Duas questões podem ser levantadas em relação ao modelo utilizado:

- No equacionamento da vazão de filtração para a definição do raio de empacotamento é utilizado o expoente α na condição de eficiência próxima de 1 e de fluido Newtoniano. No entanto tem-se sempre disponível o registro do declínio de pressão do teste de calibração o qual permite estimar um melhor valor para o expoente α , de acordo com a eficiência do teste de calibração e ainda utilizando as características não-Newtonianas do fluido do tratamento.
- Outro ponto a discutir é que, ao mesmo tempo em que os períodos de redução da pressão de fundo são interpretados como um desbloqueio da fratura, voltando esta a se propagar, Valkó & Oligney utilizam para a definição do raio da fratura nestes intervalos uma interpolação entre os raios de empacotamento conhecidos. A hipótese assumida ignora que a propagação da fratura possa ocorrer a partir de seu raio hidráulico e a restringe aos raios de empacotamento conhecidos. Além disso, esta restrição pode representar uma redução no raio da fratura caso os raios de empacotamento estejam diminuindo e não uma propagação como era de se esperar.

4.2. Variações propostas para o modelo

Com base nas discussões anteriores, este trabalho propõe a utilização de um modelo de propagação da fratura independente dos raios de empacotamento calculados com o modelo de Valkó & Oligney, devendo ser utilizado para o cálculo do raio da fratura no período anterior ao TSO e também para a definição do raio da fratura nos intervalos de redução de pressão após o início do TSO. Além disso, o trabalho propõe também uma estimativa mais acurada do valor do expoente α , o qual é utilizado no cálculo da vazão de filtração para a definição dos raios de empacotamento. A proposta neste caso é incorporar o registro do declínio de pressão do teste de calibração ao modelo, permitindo assim uma melhor estimativa do expoente α . Outro ajuste a ser realizado é a forma de

resolução da equação do terceiro grau que define o raio de empacotamento no modelo de Valkó & Oligney.

4.2.1. Raio hidráulico versus raio de empacotamento

A utilização de um modelo de propagação da fratura independente dos raios de empacotamento calculados com o modelo de Valkó & Oligney leva a uma clara distinção entre o raio hidráulico da fratura e os raios de empacotamento calculados ao longo do tempo. Em função disto, estes dois parâmetros serão abordados com maior detalhe neste tópico. Vale ressaltar que o raio hidráulico de Valkó & Oligney [3] não deve ser confundido com o raio hidráulico utilizado no dimensionamento de canais, dutos e tubos e outros componentes de obras hidráulicas. Diferentemente do raio hidráulico de Valkó & Oligney, este último é definido pela razão entre a área molhada, que é a área útil de escoamento considerando uma seção transversal do duto, e o perímetro molhado, que é o perímetro da seção molhada do duto.

Nas hipóteses utilizadas por Valkó & Oligney [3] foram definidos o raio hidráulico e o raio de empacotamento. Enquanto o raio de empacotamento pode crescer ou reduzir ao longo do tempo, o raio hidráulico não reduz com o tempo e foi definido como o máximo raio de empacotamento até aquele instante, eq. (4.1).

$$R_h(t) = \max[R_p(t)] \quad (4.1)$$

No exemplo utilizado por Valkó & Oligney [3], apresentado na figura 4.1, os raios de empacotamento calculados são representados por pontos. Como o raio hidráulico da fratura no modelo de Valkó & Oligney é limitado pelo raio de empacotamento, é possível observar que até o instante de 26 minutos o raio hidráulico cresce de forma a atingir o comprimento do primeiro raio de empacotamento calculado. No intervalo entre 22 e 26 minutos, o raio de empacotamento atinge o seu máximo, sendo este igual a 54 ft, e após o instante de 26 min, o raio de empacotamento começa a diminuir chegando até 30 ft no tempo de 42 minutos. Neste período, entre os instantes 22 e 42 minutos, o raio hidráulico se mantém constante e igual a 54 ft, conforme mostrado na figura 4.1 pela linha pontilhada, já que este é o máximo raio de empacotamento atingido. Apesar da área hidráulica criada, o raio de empacotamento vai reduzindo com o tempo, indicando o travamento físico da fratura em direção ao poço. Este

fenômeno é causado pelo bombeio de altas concentrações de agente de sustentação e pode ainda ser intensificado com a redução da vazão de bombeio.

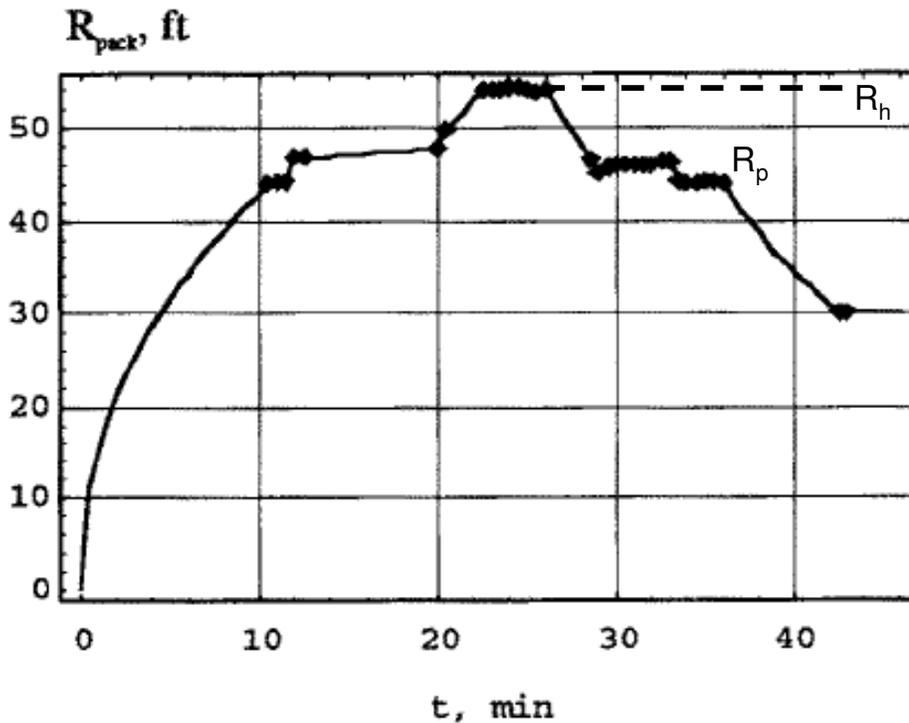


Figura 4.1 – Gráfico do raio de empacotamento ao longo do tempo utilizado no exemplo de Valkó & Oligney [3].

No modelo proposto, o raio hidráulico não é uma função do raio de empacotamento, ao invés disso ele é calculado independentemente e se torna o limite máximo para o raio de empacotamento. A existência de um raio hidráulico e de raios de empacotamento pode ser explicada pelo processo de propagação da fratura e pelos intervalos de TSO chamados incompletos, isto é, intercalados com intervalos de propagação da fratura observados durante a operação de *fracpack*. Durante o bombeio do colchão a fratura se propaga e deve ser garantida uma abertura mínima para o bombeio do agente de sustentação. Neste período a área da fratura é definida apenas por seu raio hidráulico, pois ainda não foi bombeado o agente de sustentação. Quando o bombeio do agente de sustentação é iniciado, o raio hidráulico da fratura continua a se propagar e o agente de sustentação vai preenchendo a fratura até conseguir bloqueá-la em algum determinado ponto. Neste instante é definido um raio de empacotamento e sua dimensão dependerá da posição em que o agente de sustentação bloqueou a fratura. É importante lembrar que o raio de empacotamento tem por

base o comportamento da pressão do tratamento e que este comportamento reflete o estado de tensão real da rocha, podendo variar ponto a ponto. Refletindo esta heterogeneidade, o raio de empacotamento poderá ser igual ou inferior ao raio hidráulico da fratura e o ponto de bloqueio também será função da vazão de bombeio, do diâmetro do agente de sustentação, da concentração bombeada de agente de sustentação e ainda da abertura da fratura ao longo do seu comprimento. Neste momento, durante um TSO, a fratura estará mecanicamente travada, e a continuidade do bombeio levará a um aumento de pressão acarretando no alargamento e empacotamento da abertura da fratura. Como os *fracpacks* são realizados em arenitos inconsolidados de moderada a alta permeabilidade, é possível que haja uma acomodação dos grãos da formação com o TSO. Essa reorganização pode desbloquear a fratura e a continuidade do bombeio levará à propagação do raio hidráulico da fratura, sendo esta identificada pelo declínio de pressão. Novos bloqueios podem ocorrer, definindo novos raios de empacotamento e a readaptação da formação pode permitir novas propagações do raio hidráulico da fratura, como mostrado na figura 4.2. A modificação proposta para o modelo de Valkó & Oligney neste aspecto é a utilização de um modelo de propagação da fratura em paralelo à estimativa dos raios de empacotamento. Este modelo se comportará como o limite máximo de propagação da fratura a cada instante de tempo e desta forma o raio de empacotamento calculado deverá ser sempre igual ou inferior a este limite. Será desenvolvido assim um modelo combinado que utilizará um modelo de propagação da fratura para a representação do raio hidráulico e o modelo de Valkó & Oligney para a estimativa dos raios de empacotamento nos intervalos onde esteja ocorrendo TSO.

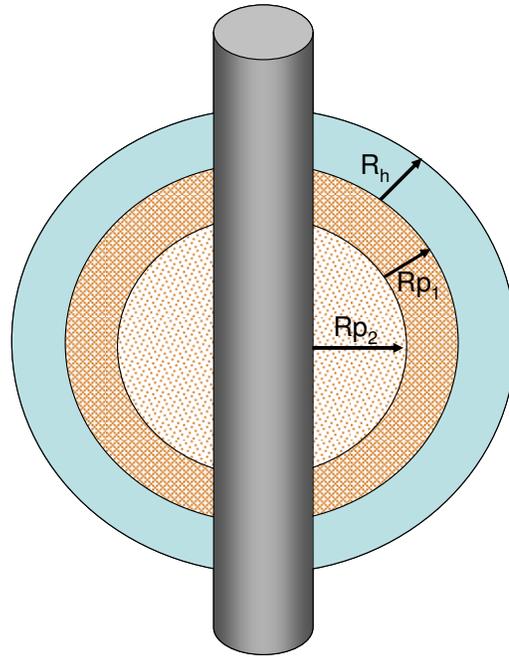


Figura 4.2 – Ilustração do raio hidráulico e dos raios de empacotamento que podem ser formados durante a propagação da fratura em uma operação de *fracpack*.

Apesar de definido nas hipóteses do modelo como o raio que estabelece a área de filtração, Valkó & Oligney [3] não utilizaram o raio hidráulico no equacionamento do balanço de massa para o cálculo do raio de empacotamento. No desenvolvimento do modelo, a área utilizada para o cálculo da vazão de filtração é a mesma área utilizada para a definição do raio de empacotamento. Desta forma, Valkó & Oligney assumiram outra hipótese, a de que durante o TSO, a filtração está ocorrendo através da área definida pelo raio de empacotamento e não através da área definida pelo raio hidráulico. Visando melhor caracterizar o processo de filtração, o presente trabalho realizou um equacionamento considerando que a filtração se daria através da área definida pelo raio hidráulico e não através da área empacotada. No entanto, conforme será apresentado no estudo de caso do *fracpack F*, tópico 5.10.4, a correção da área de filtração trouxe resultados distantes da realidade para o modelo, mostrando que, apesar da existência do raio hidráulico, o fato da fratura estar mecanicamente travada durante o TSO também indica que a filtração está ocorrendo principalmente na área empacotada neste instante. Conforme esperado, é nesta área que a *net pressure* está atuando de forma a aumentar a abertura da fratura.

4.2.2. Modelo de propagação da fratura

O modelo de potência de Nolte utilizado para definir a propagação da fratura no período anterior ao TSO, além de ser função do expoente α assumido como constante, sendo esta uma aproximação, depende também do raio de empacotamento definido no início do TSO. Desta forma, o presente trabalho propõe a utilização do modelo de Carter [7] para a estimativa da propagação da fratura, combinado ao modelo de cálculo do raio de empacotamento, definido por Valkó & Oligney [3].

O modelo desenvolvido para este trabalho permitirá que o raio de empacotamento do modelo de Valkó & Oligney [3] ocorra em um raio igual ou inferior ao raio hidráulico, ou seja, o raio hidráulico será maior que o raio de empacotamento. Assim, tem-se um modelo mais robusto com maior representatividade das heterogeneidades encontradas na formação. Outra vantagem da utilização de um modelo de propagação da fratura em conjunto com o cálculo dos raios de empacotamento de Valkó & Oligney é que para os períodos de declínio de pressão o raio da fratura não será função dos raios de empacotamento conhecidos, ao invés disso serão utilizados os raios calculados pelo modelo de propagação, garantindo assim o crescimento do raio da fratura nos períodos de declínio de pressão.

O modelo de propagação proposto é o balanço de massa formulado por Carter [7], cuja solução foi definida pelas eqs. (2.19) e (2.20).

$$A(t) = \frac{(w + 2S_p)q}{4C_L^2\pi} \left[\exp(\beta^2) \operatorname{erfc}(\beta) + \frac{2\beta}{\sqrt{\pi}} - 1 \right] \tag{2.19}$$

$$\beta = \frac{2C_L\sqrt{\pi}}{w + 2S_p} \tag{2.20}$$

A substituição da equação da área da fratura estabelecida para o modelo radial, eq. (3.2), na solução do balanço de massa de Carter [7] permite a definição do raio da fratura, eq. (4.2), ao longo de todo o tempo de bombeio em paralelo aos raios de empacotamento estimados. Os raios calculados por Carter [7] definirão o crescimento do raio da fratura antes do período de TSO e representarão também a propagação da fratura nos intervalos de declínio de pressão após o início do TSO.

$$R(t) = \left(\frac{2}{\pi} \frac{(w + 2S_p)q}{4C_L^2\pi} \left[\exp(\beta^2) \operatorname{erfc}(\beta) + \frac{2\beta}{\sqrt{\pi}} - 1 \right] \right)^{1/2} \tag{4.2}$$

Para chegar a essa solução analítica, Carter [7] assumiu que a abertura da fratura é constante durante todo o bombeio, apresentando o seu valor final desde o início da injeção. A proposta deste trabalho é, utilizando a equação da abertura média do modelo radial, eq. (2.52), calcular a abertura média para cada intervalo de tempo e atualizá-la na equação do balanço de massa de Carter, como se cada intervalo de tempo representasse um bombeio completo. As eqs. (4.2) e (2.20) podem ser reescritas considerando a abertura média e utilizando o sub-índice c para o raio e para a abertura da fratura de forma a enfatizar que estes parâmetros foram calculados pelo balanço de massa de Carter, eqs. (4.3) e (4.4):

$$R_c(t) = \left(\frac{(\bar{w}_c + 2S_p)q}{2C_L^2\pi^2} \left[\exp(\beta^2) \operatorname{erfcf}(\beta) + \frac{2\beta}{\sqrt{\pi}} - 1 \right] \right)^{1/2} \quad (4.3)$$

$$\beta = \frac{2C_L\sqrt{\pi}}{\bar{w}_c + 2S_p} \quad (4.4)$$

A equação da abertura média para o modelo radial, definida pela eq. (2.52), será reescrita a seguir também utilizando o sub-índice c , pois será aplicada no balanço de massa de Carter :

$$\bar{w}_c = 2.24 \left(\frac{\mu q R}{E'} \right)^{1/4} \quad (2.52)$$

Observando a equação da abertura média percebe-se que esta é função da viscosidade do fluido de fraturamento e do raio da fratura. Como o raio da fratura é a incógnita do modelo, será necessária uma escolha inicial arbitrária do raio para a definição da abertura média, e este será calculado através do balanço de massa de Carter, utilizando a eq. (4.3). O processo iterativo terá continuidade até que a diferença entre o valor inicial e o calculado esteja dentro de um erro tolerável.

A viscosidade equivalente para o fluido cuja reologia é definida pelo modelo de Potência foi apresentada no capítulo 2. Assumindo que na fratura de geometria radial o fluxo é radial através de placas paralelas, a viscosidade equivalente será definida pela eq. (2.4):

$$\mu_e = \frac{2^{n-1}}{3} \left(\frac{1+2n}{n} \right)^n K w^{1-n} u_{avg}^{n-1} \quad (2.4)$$

Observando a equação da viscosidade equivalente, nota-se que esta é função da abertura da fratura, da velocidade média de fluxo e dos parâmetros reológicos do fluido n e K , que variam com a temperatura além de outros fatores.

Serão selecionados valores médios de temperatura, abertura e velocidade de fluxo de forma que a viscosidade equivalente utilizada no modelo seja constante no tempo.

Com relação à temperatura, será utilizado um valor médio entre a temperatura de entrada do fluido no poço e a temperatura da formação para a definição dos parâmetros reológicos n e K .

A velocidade média é dada pela vazão na fratura dividida pela área de fluxo. A vazão na fratura será aproximada pela vazão de injeção. Desta forma, a velocidade média pode ser descrita pela eq. (4.5):

$$u_{avg} = \frac{q}{A_{fluxo}} \quad (4.5)$$

No caso do fluxo radial através de placas paralelas, a área de fluxo, A_{fluxo} , para uma asa de fratura pode ser definida pela eq. (4.6):

$$A_{fluxo}^{Radial} = \frac{(2\pi R)\bar{w}}{2} = \pi R\bar{w} \quad (4.6)$$

Tem-se que a área de fluxo é função da abertura média da fratura e do raio da fratura. Como estão sendo estabelecidos parâmetros médios para que a viscosidade equivalente se mantenha constante no tempo, a abertura média da fratura e o raio da fratura, neste caso, serão definidos pelos valores encontrados no início do TSO. Este intervalo de tempo foi escolhido pois, além de separar as duas etapas do modelo (antes do TSO e durante o TSO), o raio da fratura e a abertura média neste tempo são valores conhecidos já que são calculados pelo modelo de Valkó & Oligney, utilizado em paralelo ao modelo de Carter. Cabe ressaltar também que pequenas variações na viscosidade não levam a alterações significativas no resultado final.

Assumindo que a viscosidade equivalente é conhecida, já que ela é calculada com os parâmetros definidos pelo modelo de Valkó & Oligney, a proposta para a utilização do modelo de propagação da fratura pode ser resumida pelos seguintes passos:

1. Escolha do valor inicial do raio da fratura;
2. Cálculo da abertura média da fratura pela equação de abertura do modelo radial, eq. (2.52);
3. Cálculo do raio da fratura pelo balanço de massa de Carter, eq. (4.3);
4. Comparação entre o valor inicial do raio da fratura e o raio da fratura calculado pelo balanço de massa. A diferença deve ser igual ou inferior a um erro tolerável.

Conhecendo-se o raio da fratura e a abertura média para cada intervalo de tempo, é possível determinar a área da fratura ao longo do tempo, eq. (3.2), o volume da fratura, eq. (2.13) e a eficiência ao longo do tempo, eq. (2.10).

4.2.3.

Ajustes adotados para o modelo de Valkó & Oligney

Dois ajustes foram adotados para o modelo de Valkó & Oligney. O primeiro deles é relativo à definição do expoente α , já que o modelo calcula seu expoente considerando fluido Newtoniano e eficiência igual a 1, e o segundo ajuste é uma questão matemática, relativa a forma de resolução da equação do terceiro grau que define o raio de empacotamento no modelo de Valkó & Oligney.

4.2.3.1.

Estimativa do expoente α

No modelo de Valkó & Oligney, o expoente α é utilizado para o cálculo do raio da fratura no período anterior ao TSO por meio do modelo de potência de Nolte e também é utilizado no período durante o TSO para o cálculo da vazão de filtração. Para a definição do expoente α , Valkó & Oligney [3] assumiram a condição de eficiência próxima de 1 e de fluido Newtoniano. Conforme já mencionado, a eficiência do fluido varia ao longo do tempo, apresentando valores mais altos no início e diminuindo à medida que a área da fratura aumenta, expondo o volume injetado a uma maior área de filtração. Além disso, por se tratar de um fraturamento em formações de moderada a alta permeabilidade, dificilmente a eficiência do tratamento será próxima de 1. Com relação ao comportamento reológico do fluido de fraturamento, conforme já apresentado, ele é predominantemente não-Newtoniano, sendo o modelo de Potência aquele que melhor o representa.

Desta forma, este trabalho propõe que o expoente α seja definido de acordo com as características do fluido utilizado na operação e com base na eficiência do minifrac. Como os testes de calibração são sempre realizados em operações de *fracpack*, este tipo de dado estará sempre disponível, sendo possível acrescentá-lo ao modelo para a estimativa do expoente α . Para tanto, será utilizada a análise do declínio de pressão de Nolte [15,16,17] com os registros do minifrac, sendo o expoente α definido a partir da eficiência do minifrac, conforme será apresentado. Conhecido o valor de α a partir de dados

do próprio tratamento, será possível determinar o valor da função $f(\Delta t_D, \alpha)$ e conseqüentemente da vazão de filtração, acarretando na melhoria do modelo. Cabe ressaltar que a eficiência é uma variável de estado o que implica a obtenção de valores diferentes de eficiência no minifrac e no tratamento principal. No entanto, como essa variação tem pequena interferência no valor de α , será utilizada a eficiência do minifrac para a definição deste expoente.

Conforme descrito na seção 2.9 do capítulo 2, no declínio de pressão em condições ideais, a relação entre a pressão e a função G pode ser aproximada por uma reta, e o ponto de fechamento da fratura será identificado por um desvio da curva de pressão em relação a esta reta. Já no caso dos declínios de pressão não ideais a relação entre a pressão e a função G apresenta curvas e para a estimativa do ponto de fechamento foi desenvolvido por Barree [18,19] uma técnica que utiliza a função $G \frac{dP}{dG}$. Tem-se assim que a função G é de grande importância na análise do declínio de pressão, independentemente deste ser ideal ou não ideal. Conforme apresentado pela eq. (2.77), e reescrita a seguir, a função G depende da função $g(\Delta t_D, \alpha)$, que é função de α .

$$G(\Delta t_D, \alpha) = \frac{4}{\pi} [g(\Delta t_D, \alpha) - g_0(\alpha)] \quad (2.77)$$

Na definição do expoente α , no tópico 2.6.1 do capítulo 2, foi demonstrado que este expoente possui um limite inferior e um limite superior, sendo este último função do parâmetro reológico do fluido n e também da geometria da fratura, isto é, do modelo 2D de propagação da fratura. Apesar de o limite superior ser inferior a 1, os limites de α apresentados a seguir, eq. (4.7), permitem a definição de expressões analíticas simples, utilizadas no declínio de pressão:

$$\frac{1}{2} \leq \alpha < 1 \quad (4.7)$$

Utilizando os limites propostos para α pela eq. (4.7), Nolte [15,16,17] estabeleceu duas soluções analíticas para a função $g(\Delta t_D, \alpha)$, que permitem iniciar a análise do declínio de pressão. Com o registro do tempo e da pressão durante a execução de um minifrac, a análise do declínio de pressão, para a definição da pressão de fechamento e do expoente α , pode ser realizada de acordo com o passo a passo a seguir.

1. Conhecendo-se o tempo de bombeio t_p , definir a função Δt_D ao longo do tempo de declínio utilizando a eq. (2.66).

2. Calcular as funções $g(\Delta t_D, \alpha=1/2)$ e $g(\Delta t_D, \alpha=1)$, definidas pelas eq. (2.67) e (2.68) e reescritas a seguir:

$$g(\Delta t_D, 1/2) = (1 + \Delta t_D) \text{sen}^{-1}(1 + \Delta t_D)^{-1/2} + \Delta t_D^{1/2} \quad (2.67)$$

$$g(\Delta t_D, 1) = \frac{4}{3} \left[(1 + \Delta t_D)^{3/2} - \Delta t_D^{3/2} \right] \quad (2.68)$$

3. Escolher um expoente α inicial, definido aqui como α_i , que será validado posteriormente de acordo com o ponto de fechamento da fratura e com o modelo de propagação que melhor defina a fratura gerada no minifrac.
4. Calcular a função $g(\Delta t_D, \alpha)$ para o expoente α_i escolhido, utilizando a interpolação sugerida por Nolte [15,16,17] e definida pela eq. (2.69), reescrita a seguir em função de α_i :

$$g(\Delta t_D, \alpha_i) = g(\Delta t_D, 1/2) + \frac{\alpha_i - \alpha_0}{1 - \alpha_0} [g(\Delta t_D, 1) - g(\Delta t_D, 1/2)] \quad (2.69)$$

5. Calcular a função G ao longo do tempo através da eq. (2.77), utilizando $g(\Delta t_D, \alpha_i)$ e $g_0(\alpha_i)$.
6. Calcular a função $G \frac{dP}{dG}$, sendo dP/dG a inclinação da curva de pressão em função do tempo G de Nolte em cada instante de tempo durante o declínio de pressão.
7. Utilizando o declínio de pressão versus a função G e a função $G \frac{dP}{dG}$ versus a função G , definir o ponto de fechamento da fratura. Este será determinado quando o declínio de pressão desviar da reta estabelecida na relação entre a pressão e a função G e quando a função $G \frac{dP}{dG}$ desviar da reta que passa pela origem. Com o ponto de fechamento definido é possível determinar a pressão de fechamento, P_c , a função G no fechamento, $G(\Delta t_{cD}, \alpha_i)$, e a função g no fechamento, $g(\Delta t_{cD}, \alpha_i)$.
8. Assumindo o spurt loss igual a zero, calcular a eficiência do minifrac de acordo com a eq. (2.81), reescrita a seguir em função de α_i :

$$\eta = \frac{g(\Delta t_{cD}, \alpha_i) - g_0(\alpha_i)}{g(\Delta t_{cD}, \alpha_i)} \quad (2.81)$$

9. A partir da eficiência do minifrac e dos limites inferior e superior, α_0 e α_1 , calcular o expoente α de acordo com a eq. (2.64), reescrita a seguir. Cabe ressaltar que cada geometria de fratura, isto é, radial,

PKN e KGD, possui um limite superior α_1 , desta forma serão definidos 3 expoentes α distintos.

$$\alpha = \alpha_0 + \eta(\alpha_1 - \alpha_0) \quad (2.64)$$

10. Escolher o expoente α relativo à geometria de fratura utilizada.
11. O valor encontrado para α deve ser comparado ao valor de α_i . Caso sejam iguais, está definido o expoente α que será utilizado no modelo, caso sejam diferentes, o expoente α calculado deve ser o novo α_i deste passo a passo.

4.2.3.2.

Resolução da equação do terceiro grau

Valkó & Oligney sugeriram as eqs. (3.13) a (3.16) para a resolução da equação do terceiro grau que define o raio de empacotamento através de um balanço de massa. Este trabalho, no entanto, utilizará o método de Tartaglia [25] para a resolução desta equação. Considerando a existência de uma raiz real, o método de Tartaglia converte a equação do terceiro grau em uma equação do segundo grau e analisa o discriminante desta equação. Caso o discriminante seja igual a zero a solução da equação do terceiro grau encontrará três raízes reais, sendo duas iguais. Caso o discriminante seja maior que zero, serão determinadas duas raízes complexas conjugadas e uma raiz real. Já caso o discriminante seja menor que zero, serão definidas três raízes reais distintas. Uma comparação das respostas obtidas através do método sugerido por Valkó & Oligney com as respostas obtidas utilizando o método de Tartaglia observa-se que as equações propostas por Valkó & Oligney consideram apenas a solução encontrada na condição de um discriminante não negativo.

4.2.4.

Definição do modelo combinado para a geometria radial

O modelo final proposto é resultado da combinação do modelo de Valkó & Oligney [3] com o modelo de propagação da fratura, no qual foi utilizado o balanço de massa de Carter [7]. No período anterior ao TSO, o modelo combinado utilizará o raio da fratura definido pelo modelo de propagação para a geometria radial. Após o início do TSO, nos períodos de incremento de pressão, o raio da fratura será determinado pelos raios de empacotamento e, na existência de declínios de pressão, os raios calculados pelo modelo de

propagação serão utilizados, representando o crescimento do raio da fratura nestes intervalos. Cabe ressaltar que não será permitido que o raio de empacotamento seja maior que o último raio hidráulico calculado, o qual será igual ao maior raio da fratura calculado até aquele instante de tempo, conforme definido pela eq. (4.8). Caso o raio de empacotamento calculado para um determinado instante de tempo seja maior que o raio hidráulico da fratura, este não será utilizado, sendo considerado neste caso o raio calculado pelo modelo de propagação. Estas situações ocorrem quando o aumento de pressão que define a utilização do raio de empacotamento é de pequena magnitude, não sendo um valor representativo de TSO, mas sim resultado da forma de cálculo do método que utiliza os registros de pressão ponto a ponto.

$$R_p(t) = \max[R(t)] \quad (4.8)$$

A metodologia para a definição dos parâmetros da fratura utilizando o modelo combinado pode ser subdividida em duas etapas. Para a identificação destas etapas deve-se primeiramente definir o ponto de início do TSO e para tanto é necessário calcular ponto a ponto as derivadas da curva de pressão de fundo em relação ao tempo, definindo assim a inclinação da curva de pressão m . No momento em que o agente de sustentação já estiver na fratura e for obtida a primeira inclinação positiva da curva de pressão, será definido o início do TSO.

Para o período anterior ao início do TSO, o raio da fratura será definido diretamente pelo modelo de propagação da fratura, eq. (4.3), assim como a abertura da fratura que será calculada pela equação da abertura média do modelo radial, eq. (2.52). Já os parâmetros de área da fratura, volume da fratura e eficiência ao longo do tempo serão calculados pelas eq. (3.2), eq. (2.13) e eq. (2.10) respectivamente.

Já para o período após o início do TSO, o modelo a ser utilizado dependerá do valor da inclinação da curva de pressão de fundo m . Caso a inclinação da curva de pressão de fundo m seja positiva, o raio de empacotamento deve ser estimado seguindo o equacionamento de Valkó & Oligney. Conhecido o raio de empacotamento, é possível estimar a área empacotada da fratura pela eq. (4.9).

$$A_p = \frac{\pi R_p^2}{2} \quad (4.9)$$

Para a definição da abertura da fratura ao longo do tempo é necessário conhecer o volume da fratura e para tanto, deve-se calcular o volume perdido para a formação. Como se trata dos intervalos com inclinação m positiva, isto é,

intervalos em TSO, a teoria do declínio de pressão pode ser utilizada, já que nestes instantes de tempo a área da fratura permanece constante, enquanto somente ocorre variação na abertura da fratura. Desta forma, o cálculo do volume perdido para a formação pode ser feito pela eq. (2.65), que define o volume filtrado ao término do bombeio e durante o declínio de pressão sem considerar o *spurt loss*. Neste caso será assumido que o intervalo de tempo adimensional da equação Δt_D é igual a zero, como se cada instante de TSO fosse o início do declínio de pressão. Com esta condição, e utilizando a área empacotada definida pela eq. (4.9), o volume perdido para a formação pode ser expresso pela eq. (4.10):

$$V_L = 2C_L A_p \sqrt{t} g_0(\alpha) \quad (4.10)$$

O parâmetro g_0 será definido utilizando o valor de α , estimado a partir do declínio de pressão. Conhecido o volume perdido para a formação nos intervalos onde ocorre aumento de pressão, é possível estimar o volume da fratura através do balanço de massa, utilizando a eq. (2.9), já que o volume injetado é conhecido. Com o volume da fratura é necessário conhecer a área da fratura para o cálculo da abertura média. Por se tratar de uma formação inconsolidada, a abertura média será calculada considerando a possibilidade de uma redistribuição do agente de sustentação ao longo do raio hidráulico da fratura em função da acomodação dos grãos após os intervalos de TSO. Desta forma, ao invés de utilizar a área empacotada para o cálculo da abertura média, será utilizada a área hidráulica da fratura, definida pela eq. (4.11).

$$A_h = \frac{\pi R_h^2}{2} \quad (4.11)$$

Conhecida a área hidráulica e o volume da fratura, a abertura média da fratura na ocorrência de TSO é definida pela eq. (4.12):

$$\bar{w} = \frac{V_f}{A_h} \quad (4.12)$$

Já a eficiência será calculada através da combinação da equação que define a eficiência, eq. (2.10), com a equação que define a abertura média, eq. (2.13), originando a eq. (4.13), que utiliza neste caso a área empacotada, já que esta é a área pela qual ocorre a filtração no instante de ocorrência de um TSO (fratura mecanicamente travada):

$$\eta = \frac{\bar{w} A_p}{V_i} \quad (4.13)$$

Cabe ressaltar que a abertura e o raio da fratura, definidos no instante do início do TSO com o equacionamento de Valkó & Oligney, serão utilizados para o cálculo da viscosidade equivalente, que foi assumida constante ao longo tempo. A viscosidade equivalente é utilizada na estimativa da abertura média, eq. (2.52), que é aplicada no balanço de massa de Carter para o cálculo do raio da fratura no modelo de propagação.

No período após o início do TSO, nos casos em que a inclinação da curva de pressão m é negativa, o raio calculado pelo balanço de massa de Carter deve ser incorporado ao modelo combinado, já que nestes instantes de tempo estará ocorrendo propagação da fratura. A abertura média da fratura será uma combinação do valor obtido através do balanço de massa de Carter no instante de tempo do declínio de pressão com a abertura definida pelo modelo combinado para o instante de tempo anterior, de forma a incorporar os ganhos de abertura ocorridos nos intervalos de TSO. A hipótese assumida é de que a abertura média estimada pelo modelo de propagação corresponde ao crescimento da fratura em relação ao último raio hidráulico calculado, representando assim uma abertura mais fina na ponta da fratura. A utilização do raio hidráulico está de acordo com o cálculo feito nos períodos de TSO em que a abertura média da fratura é função de sua área hidráulica. A eq. (4.14) define a abertura média da fratura nos períodos de declínio de pressão.

$$\bar{w}^n = \frac{R_h^{n-1} \bar{w}^{n-1} + (R_h^n - R_h^{n-1}) \bar{w}_c^n}{R_h^n} \quad (4.14)$$

O índice n se refere ao instante de tempo atual e o índice $n-1$ ao instante de tempo anterior. A abertura \bar{w}_c é a abertura média calculada pelo balanço de massa de Carter, que neste caso utiliza a equação da abertura média para o modelo radial, eq. (2.52). Observando a eq. (4.14), nota-se que a abertura nos períodos de declínio de pressão é formada pela abertura calculada com o modelo combinado no período anterior, incorporando desta forma o ganho de abertura durante um TSO, adicionando a ela a abertura adquirida com a propagação do raio da fratura no instante atual.

Para o cálculo da eficiência será utilizado o mesmo raciocínio aplicado ao cálculo da abertura, no entanto, como a eficiência definida nos períodos de TSO é função da área empacotada, a eficiência nos períodos de declínio de pressão será uma combinação da eficiência do modelo de propagação com a eficiência do modelo combinado utilizando o raio da fratura e não o raio hidráulico, conforme apresentado pela eq. (4.15):

$$\eta^n = \frac{R^{n-1}\eta^{n-1} + (R^n - R^{n-1})\eta_c^n}{R^n} \tag{4.15}$$

Da mesma forma, o índice n se refere ao instante de tempo atual e o índice $n-1$ ao instante de tempo anterior. Já a eficiência η_c é aquela obtida no balanço de massa de Carter através da eq. (2.10).

Cabe ressaltar que, caso o raio de empacotamento calculado nos períodos de inclinação positiva da curva de pressão de fundo seja maior que o raio hidráulico da fratura calculado no instante de tempo anterior, o raio de empacotamento não será utilizado, sendo considerado o raio do modelo de propagação e sendo os parâmetros de abertura e eficiência calculados de acordo com a eq. (4.14) e a eq. (4.15) respectivamente. Estes raios de empacotamento maiores que os raios hidráulicos são resultado de inclinações que, apesar de positivas, apresentam um valor baixo, sendo inferiores às inclinações que definem os períodos efetivos de TSO para o caso em estudo, não sendo considerada a ocorrência de TSO. Nestes intervalos está ocorrendo propagação da fratura e a indicação de TSO pela inclinação positiva é consequência do método de cálculo utilizado que analisa o registro de pressão ponto a ponto, após uma média num intervalo de tempo de apenas 0,1 minuto.

O quadro 4.1 é um resumo das equações sugeridas para a estimativa da evolução da fratura ao longo do tempo através da análise da curva de pressão de fundo durante uma operação de *fracpack* utilizando a geometria radial.

Diagnóstico da fratura com base na curva de pressão de fundo em operações de <i>fracpack</i> utilizando a geometria radial	
Parâmetro	Modelo: de propagação - balanço de massa de Carter
	Período: Antes do TSO
R	$R_c = \left(\frac{2}{\pi} \frac{(\bar{w}_c + 2S_p)q}{4C_L^2\pi} \left[\exp(\beta^2) \operatorname{erfc}(\beta) + \frac{2\beta}{\sqrt{\pi}} - 1 \right] \right)^{1/2}$
R _h	$R_h(t) = \max[R(t)]$
\bar{w}	$\bar{w}_c = 2.24 \left(\frac{\mu q R_c}{E'} \right)^{1/4}$
A	$A = \frac{\pi R^2}{2}$
A _h	$A_h = \frac{\pi R_h^2}{2}$

V_f	$V_f = A\bar{w}$	
V_L	$V_L = V_i - V_f$	
η	$\eta_c = \frac{V_f}{V_i}$	
Parâmetro	Modelo: Combinado utilizado após o primeiro TSO	
	Período: Declínio de pressão	Período: Aumento de pressão
R	$R_c = \left(\frac{2(\bar{w}_c + 2S_p)q}{\pi 4C_L^2\pi} \left[\exp(\beta^2) \operatorname{erfcf}(\beta) + \frac{2\beta}{\sqrt{\pi}} - 1 \right] \right)^{1/2}$	$R_p^3 + R_p^2 \left(\frac{3 \times 1.91 \pi E' C_L}{8m\sqrt{t}} \right) - \left(\frac{3E'q}{8m} \right) = 0$
R_h	$R_h(t) = \max[R(t)]$	$R_h(t) = \max[R(t)]$
\bar{w}	$\bar{w}^n = \frac{R_h^{n-1}\bar{w}^{n-1} + (R_h^n - R_h^{n-1})\bar{w}_c^n}{R_h^n}$	$\bar{w} = \frac{V_f}{A_h}$
A	$A = \frac{\pi R^2}{2}$	$A_p = \frac{\pi R_p^2}{2}$
A_h	$A_h = \frac{\pi R_h^2}{2}$	$A_h = \frac{\pi R_h^2}{2}$
V_f	$V_f = A\bar{w}$	$V_f = V_i - V_L$
V_L	$V_L = V_i - V_f$	$V_L = 2C_L A_p \sqrt{t} g_0(\alpha)$
η	$\eta^n = \frac{R^{n-1}\eta^{n-1} + (R^n - R^{n-1})\eta_c^n}{R^n}$	$\eta = \frac{\bar{w} A_p}{V_i}$

Quadro 4.1 – Resumo das equações utilizadas para a estimativa da evolução de uma fratura radial ao longo do tempo através da análise da curva de pressão de fundo de uma operação de *fracpack*.

4.3. Extensão do modelo de Valkó & Oligney para outras geometrias

O trabalho de Valkó & Oligney [3] para o diagnóstico da evolução da fratura com o tempo foi desenvolvido utilizando uma fratura de geometria radial. O modelo radial assume que a fratura se desenvolve sem encontrar barreiras, ou seja, a fratura cresce de forma não confinada. Este tipo de propagação pode ser constatado quando o fraturamento é realizado a partir de um pequeno intervalo canhoneado e pode se prolongar caso o reservatório seja homogêneo e espesso. No entanto, muitas vezes o intervalo canhoneado não é pontual, e pelo contrário, se estende por toda a altura permeável do reservatório. Nestas

condições, a propagação da fratura já pode se iniciar em contato com as barreiras, e caso estas sejam competentes, será possível constatar um desenvolvimento confinado, invalidando a hipótese do modelo radial. Com base neste cenário, este trabalho propõe a extensão da teoria de Valkó & Oligney [3] para os modelos PKN e KGD. Esses dois modelos se aplicam aos casos em que o desenvolvimento da fratura é confinado, e desta forma, toda a altura permeável do reservatório é canhoneada e as barreiras capeadoras do reservatório são competentes. A geometria de fratura que melhor representa o modelo PKN é aquela em que o comprimento total da fratura é maior que a altura da fratura. Já a geometria de fratura que melhor representa o modelo KGD é aquela em que a altura da fratura é maior que seu comprimento total.

4.3.1. Desenvolvimento para o modelo PKN

A área da fratura no modelo PKN pode ser definida pela eq. (4.16). Cabe ressaltar que a altura da fratura no modelo PKN é um parâmetro conhecido, já que esta pode ser aproximada pelo intervalo canhoneado ou pela altura permeável, de forma que a geometria da fratura se mantenha confinada no reservatório em função do contraste de tensão.

$$A = h_f x_f \tag{4.16}$$

Utilizando a complacência do modelo PKN, definida pela eq. (2.85), a relação entre a pressão líquida e a abertura para o modelo PKN pode ser expressa pela eq. (4.17), sendo E' o módulo de deformação plana, já definido pela eq. (2.22).

$$P_{NET} = \frac{2E'}{\pi h_f} \bar{w} \tag{4.17}$$

Estas duas últimas equações, eq. (4.16) e eq. (4.17), podem ser substituídas no balanço de massa do modelo de Valkó & Oligney [3], dado pela eq. (3.1), para o cálculo do comprimento de empacotamento no modelo PKN, sendo encontrada a eq. (4.18):

$$\frac{dP_w}{dt} = \left(\frac{2E'}{\pi h_f} \right) \left(\frac{1}{h_f x_f} \right) (q - q_L) \tag{4.18}$$

Substituindo a eq. (4.16), que define a área da fratura no modelo PKN, na eq. (3.5), que define a vazão de filtração, aplicando-a no balanço de massa da eq. (4.18), e assumindo que a inclinação da curva de pressão é expressa por

$m(t)$, o balanço de massa de Valkó & Oligney para o modelo PKN pode ser definido pela eq. (4.19). A vazão de filtração, eq. (3.5), possui a função $f(\Delta t_D, \alpha)$ que será determinada a partir do conhecimento de α , o qual será estimado pela análise do declínio de pressão do minifrac.

$$m(t) = \left(\frac{2E'}{\pi h_f} \right) \left(\frac{1}{h_f x_f} \right) \left(q - \frac{2C_L h_f x_f}{\sqrt{t}} f(\Delta t_D, \alpha) \right) \quad (4.19)$$

No caso do modelo PKN foi visto no tópico 2.5.1 que a relação da pressão com o tempo durante a propagação da fratura é positiva, isto é, a pressão aumenta com o tempo. Desta forma, para o cálculo do comprimento de empacotamento é necessário diferenciar a propagação da fratura no modelo PKN de um TSO, evento no qual também ocorre o aumento da pressão com o tempo. Para tanto será considerada a magnitude desse aumento de pressão. A relação da pressão com o tempo para o modelo PKN pode ser estimada para os dois valores extremos de eficiência, isto é, eficiência se aproximando de 1 e de 0 [5], conforme apresentado pelas eqs. (4.20) e (4.21):

$$P_{net} \propto t^{1/(4n+4)} \quad \eta \rightarrow 0 \quad (4.20)$$

$$P_{net} \propto t^{1/(2n+3)} \quad \eta \rightarrow 1 \quad (4.21)$$

Considerando o valor de n do fluido utilizado no tratamento, o modelo utilizará como limite a relação entre a pressão e o tempo estabelecida pela eficiência se aproximando de 1, eq. (4.21), por ser a mais conservadora. Assim, conhecendo-se o registro de pressão de fundo ao longo do tempo, e considerando o período após a chegada do agente de sustentação na fratura, será considerada a ocorrência de um TSO caso a eq. (4.22) seja obedecida.

$$\frac{\Delta P}{\Delta t} > \frac{1}{2n+3} t^{\frac{-2-2n}{2n+3}} \quad (4.22)$$

Nestas condições, rearranjando a eq. (4.19), é possível determinar o comprimento de empacotamento, x_{fp} , caso a condição estabelecida pela eq. (4.22) seja obedecida:

$$x_{fp} = \frac{2E' q \sqrt{t}}{m \pi h_f^2 \sqrt{t} + 4E' h_f C_L f(\Delta t_D, \alpha)} \quad (4.23)$$

A eq. (4.23) calcula o comprimento de empacotamento da fratura durante um TSO para o modelo PKN, sendo esta equação uma extensão da metodologia proposta por Valkó & Oligney [3].

Para o período anterior ao TSO e para os períodos após o início do TSO em que a fratura estará se propagando de acordo com o modelo PKN, isto é, nos

quais a condição estabelecida pela eq. (4.22) não é obedecida, a área da fratura será calculada utilizando um modelo de propagação, sendo este o balanço de massa formulado por Carter [7], cuja solução foi definida pelas eqs. (2.19) e (2.20), conforme sugerido para a geometria radial. Considerando que a área da fratura no modelo PKN é definida pela eq. (4.16), o comprimento da fratura nos intervalos citados pode ser calculado pela eq. (4.24), sendo o parâmetro β definido pela eq. (4.4).

$$x_{fc}(t) = \frac{(\bar{w}_c + 2S_p)q}{4h_f C_L^2 \pi} \left[\exp(\beta^2) \operatorname{erfcf}(\beta) + \frac{2\beta}{\sqrt{\pi}} - 1 \right] \quad (4.24)$$

Da mesma forma que foi estabelecida para a geometria radial, no balanço de massa de Carter para a geometria PKN, eq. (4.24), foi considerada a abertura média da fratura que deve ser atualizada em cada instante de tempo. Para tanto, o cálculo da abertura média será realizado com a equação de abertura do modelo PKN, definida pela eq. (2.38) e reescrita a seguir com o sub-índice c , para evidenciar que ela será aplicada ao balanço de massa de Carter [7] em cada intervalo de tempo.

$$\bar{w}_c = 2,05 \left(\frac{\mu q x_{fc}}{E'} \right)^{1/4} \quad (2.38)$$

Como a equação da abertura média é função da viscosidade, será utilizada para o modelo PKN a viscosidade equivalente fornecida pela eq. (2.6), que considera o fluxo em um canal de seção elíptica, já que a seção vertical do modelo PKN é dada por uma elipse. A equação da viscosidade é função da abertura máxima da elipse e também da velocidade média de fluxo. Conforme assumido para a geometria radial, será considerada uma viscosidade equivalente constante no tempo, sendo utilizados os parâmetros da fratura definidos no tempo inicial do TSO. A abertura máxima no modelo PKN é dada por $w_{w,0}$ e pode ser definida a partir da abertura média da fratura utilizando-se a eq. (2.31), onde γ no modelo PKN é igual a $\pi/5$.

$$w_{w,0} = \frac{\bar{w}}{\gamma} \quad (2.31)$$

A velocidade média de fluxo foi definida pela eq. (4.5), sendo esta a razão entre a vazão na fratura, aproximada pela vazão de injeção, e a área de fluxo. A área de fluxo no modelo PKN pode ser definida pela área média de uma elipse, conforme apresentado pela eq. (4.25):

$$A_{fluxo}^{PKN} = \pi \frac{h_f}{2} \frac{\bar{w}}{2} = \frac{\pi h_f \bar{w}}{4} \quad (4.25)$$

Como a equação de abertura do modelo PKN é uma função do comprimento da fratura, o qual é a nossa incógnita, será necessária a escolha de um valor inicial de comprimento de fratura para a definição da abertura média, que será utilizada no balanço de massa de Carter [7], eq. (4.24), para o cálculo do comprimento da fratura. O processo iterativo terá continuidade até que a diferença entre o valor inicial e o calculado esteja dentro de um erro tolerável.

Cabe ressaltar que não será permitido nenhum comprimento de empacotamento maior que o comprimento da fratura calculado pelo modelo de propagação. O modelo de propagação será responsável pelo estabelecimento do raio hidráulico da fratura e desta forma o comprimento de empacotamento deve ser igual ou inferior ao raio hidráulico.

Resumindo o que foi apresentado neste tópico, a metodologia para a estimativa da evolução da fratura para o modelo PKN segue o seguinte procedimento, dividido entre antes do TSO, após o início do TSO com a condição de ocorrência de TSO obedecida e após o início do TSO durante os intervalos de propagação da fratura:

Período anterior ao TSO:

1. Deve ser escolhido um valor inicial para o comprimento da fratura.
2. Com este valor inicial é possível calcular a abertura média da fratura utilizando a equação de abertura do modelo PKN, eq. (2.38).
3. Com a abertura média, calcula-se o comprimento da fratura por meio do balanço de massa de Carter, eq. (4.24).
4. Caso a comparação entre o valor inicial do comprimento da fratura e o comprimento calculado pelo balanço de massa apresente uma diferença igual ou inferior a um erro tolerável, o comprimento da fratura estará definido para aquele instante de tempo. O processo deve ser repetido para todos os intervalos de tempo no período anterior ao TSO.
5. Como a altura da fratura é definida por hipótese igual a espessura permeável, é possível determinar a área da fratura ao longo do tempo utilizando a eq. (4.16).
6. Com a abertura e a área da fratura, é possível calcular o volume da fratura ao longo do tempo por meio da eq. (2.13).
7. Como o volume injetado é conhecido, a eficiência da fratura ao longo do tempo pode ser determinada utilizando a eq. (2.10).

Período após o início do TSO para o caso em que a condição de ocorrência de TSO, eq. (4.22), é obedecida:

1. Como a fratura está em TSO, o comprimento de empacotamento deve ser calculado utilizando a eq. (4.23), que é a extensão do modelo de Valkó & Oligney para a geometria PKN.
2. Com o comprimento de empacotamento, é possível calcular a área empacotada da fratura, definida pela eq. (4.26), já que a altura da fratura é conhecida:

$$A_p = h_f x_{fp} \quad (4.26)$$

3. O comprimento hidráulico da fratura, eq. (4.27), é definido como o maior comprimento calculado pelo modelo combinado até aquele instante de tempo.

$$x_{fh}(t) = \max[x_f(t)] \quad (4.27)$$

4. Com o comprimento hidráulico é possível calcular a área hidráulica da fratura, a qual é definida pela eq. (4.28):

$$A_h = h_f x_{fh} \quad (4.28)$$

5. Como a fratura está em TSO, o volume perdido para a formação pode ser calculado com a eq. (4.10), já definida no desenvolvimento do modelo radial, utilizando a eq. (4.26) que estabelece a área empacotada para o modelo PKN e estimando o expoente α da função $g_o(\alpha)$ para a geometria PKN, utilizando o procedimento estabelecido no tópico 4.2.3.1.
6. Como o volume injetado é conhecido, é possível estabelecer o volume da fratura utilizando a eq. (2.9), após a determinação do volume perdido para a formação.
7. Com o volume da fratura, a abertura média pode ser calculada pela eq. (4.12), utilizando a área hidráulica do modelo PKN, eq. (4.28). Conforme mencionado para o modelo radial, o cálculo da abertura média utiliza a área hidráulica da fratura com base na hipótese de que após o TSO ocorre uma reorganização dos grãos da formação, que redistribui o agente de sustentação por toda área hidráulica.
8. Conhecida a abertura média, a eficiência da fratura pode ser calculada pela eq. (4.13), utilizando a eq. (4.26) que estabelece a área empacotada para o modelo PKN. Cabe ressaltar que a área empacotada é utilizada, pois durante o TSO a fratura está mecanicamente travada e desta forma a filtração está ocorrendo através da área empacotada, e não através da área hidráulica.

Período após o início do TSO para o caso em que a condição de ocorrência de TSO, eq. (4.22), não seja obedecida, isto é, a fratura está se propagando:

1. O modelo de propagação definido pelo balanço de massa de Carter, eq. (4.24), deve ser utilizado para o cálculo do comprimento da fratura.
2. A abertura média da fratura será calculada pela eq. (4.29), semelhante à estabelecida para o modelo radial, eq. (4.14), substituindo, no entanto, o raio hidráulico pelo comprimento hidráulico da fratura, eq. (4.27), e as aberturas, que devem ser calculadas para a geometria PKN. O índice n se refere ao instante de tempo atual e o índice $n-1$ ao instante de tempo anterior. Desta forma, a abertura \bar{w}^{n-1} é a abertura do modelo combinado no intervalo de tempo anterior e a abertura \bar{w}_c^n é a abertura média calculada pelo balanço de massa de Carter, utilizando a equação da abertura média para a geometria PKN, eq. (2.38). Com esta equação, a abertura média do modelo combinado nos períodos de declínio de pressão após o início do TSO é resultado da abertura calculada no tempo anterior, incorporando o ganho de abertura do TSO, com a abertura definida pelo modelo de propagação, a qual representa a extremidade da fratura, sendo a abertura do intervalo que se propagou com relação ao último comprimento hidráulico calculado.

$$\bar{w}^n = \frac{x_{fh}^{n-1} \bar{w}^{n-1} + (x_{fh}^n - x_{fh}^{n-1}) \bar{w}_c^n}{x_{fh}^n} \quad (4.29)$$

3. A eficiência deve ser calculada com a eq. (4.30), que é semelhante à definida para a geometria radial, eq. (4.15), substituindo, no entanto, o raio da fratura pelo comprimento da fratura. O comprimento x_f^{n-1} é aquele calculado pelo modelo combinado no intervalo de tempo anterior. Já o comprimento x_{fc}^n é o comprimento calculado pelo modelo de propagação, sendo incorporado ao modelo combinado neste instante de tempo. O mesmo pode ser mencionado a respeito das eficiências, onde a eficiência η^{n-1} é aquela calculada pelo modelo combinado no

intervalo anterior e a eficiência η_c^n é calculada pelo modelo de propagação no instante de tempo atual.

$$\eta^n = \frac{x_f^{n-1} \eta^{n-1} + (x_{fc}^n - x_f^{n-1}) \eta_c^n}{x_{fc}^n} \tag{4.30}$$

Com a metodologia apresentada é possível definir, além de outros parâmetros, o valor do comprimento da fratura, da abertura e da eficiência ao longo do tempo para toda a operação. Para o estabelecimento da concentração areal do agente de sustentação em função do comprimento da fratura deve-se inicialmente determinar a massa de agente de sustentação entrando na fratura em cada intervalo de tempo, tendo por base a curva de concentração do agente de sustentação no fundo. Para cada comprimento de fratura calculado a massa de agente de sustentação daquele intervalo de tempo deve ser uniformemente distribuída na área gerada por este comprimento de fratura. A curva de distribuição da concentração areal será obtida com a soma acumulada das concentrações calculadas para cada intervalo de tempo.

O quadro 4.2 é um resumo das equações sugeridas para a estimativa da evolução da fratura ao longo do tempo através da análise da curva de pressão de fundo durante uma operação de *fracpack* utilizando a geometria PKN.

Diagnóstico da fratura com base na curva de pressão de fundo em operações de <i>fracpack</i> utilizando a geometria PKN	
Parâmetro	Modelo: de propagação – balanço de massa de Carter
	Período: Antes do TSO
x_f	$x_{fc}(t) = \frac{(\bar{w}_c + 2S_p)q}{4h_f C_L^2 \pi} \left[\exp(\beta^2) \operatorname{erfc}(\beta) + \frac{2\beta}{\sqrt{\pi}} - 1 \right]$
x_{fh}	$x_{fh}(t) = \max [x_f(t)]$
\bar{w}	$\bar{w}_c = 2,05 \left(\frac{\mu q x_{fc}}{E'} \right)^{1/4}$
A	$A = h_f x_f$
A_h	$A_h = h_f x_{fh}$
V_f	$V_f = A \bar{w}$
V_L	$V_L = V_i - V_f$

η	$\eta_c = \frac{V_f}{V_i}$	
Parâmetro	Modelo: Combinado utilizado após o primeiro TSO	
	Período: $\frac{\Delta P}{\Delta t} < \frac{1}{2n+3} t^{\frac{-2-2n}{2n+3}}$	Período: $\frac{\Delta P}{\Delta t} > \frac{1}{2n+3} t^{\frac{-2-2n}{2n+3}}$
x_f	$x_{fc}(t) = \frac{(\bar{w}_c + 2S_p)q}{4h_f C_L^2 \pi} \left[\exp(\beta^2) \operatorname{erfcf}(\beta) + \frac{2\beta}{\sqrt{\pi}} - 1 \right]$	$x_{fp} = \frac{2E' q \sqrt{t}}{m\pi h_f^2 \sqrt{t} + 4E' h_f C_L f(\Delta t_D, \alpha)}$
x_{fh}	$x_{fh}(t) = \max[x_f(t)]$	$x_{fh}(t) = \max[x_f(t)]$
\bar{w}	$\bar{w}^n = \frac{x_{fh}^{n-1} \bar{w}^{n-1} + (x_{fh}^n - x_{fh}^{n-1}) \bar{w}_c^n}{x_{fh}^n}$	$\bar{w} = \frac{V_f}{A_h}$
A	$A = h_f x_f$	$A_p = h_f x_{fp}$
A_h	$A_h = h_f x_{fh}$	$A_h = h_f x_{fh}$
V_f	$V_f = A \bar{w}$	$V_f = V_i - V_L$
V_L	$V_L = V_i - V_f$	$V_L = 2C_L A_p \sqrt{t} g_0(\alpha)$
η	$\eta^n = \frac{x_f^{n-1} \eta^{n-1} + (x_{fc}^n - x_f^{n-1}) \eta_c^n}{x_{fc}^n}$	$\eta = \frac{\bar{w} A_p}{V_i}$

Quadro 4.2 - Resumo das equações utilizadas para a estimativa da evolução de uma fratura ao longo do tempo através da análise da curva de pressão de fundo de uma operação de *fracpack* utilizando a geometria PKN.

4.3.2. Desenvolvimento para o modelo KGD

Utilizando a complacência do modelo KGD, definida pela eq. (2.87), a relação entre a *net pressure* e a abertura para o modelo KGD pode ser expressa pela eq. (4.31), sendo E' o módulo de deformação plana, já definido pela eq. (2.22).

$$P_{NET} = \frac{E'}{\pi x_f} \bar{w} \tag{4.31}$$

Sabendo-se que a fórmula da área da fratura no modelo KGD é igual a da área da fratura no modelo PKN, as eqs. (4.16) e (4.31) podem ser substituídas no balanço de massa do modelo de Valkó & Oligney [3], definido para o período do TSO, eq. (3.1), sendo obtida a eq. (4.32):

$$\frac{dP_w}{dt} = \left(\frac{E'}{\pi x_f} \right) \left(\frac{1}{h_f x_f} \right) (q - q_L) \quad (4.32)$$

Substituindo a eq. (4.16), que define a área da fratura nos modelos PKN e KGD, na eq. (3.5), que define a vazão de filtração, aplicando-a no balanço de massa da eq. (4.32), e assumindo que a inclinação da curva de pressão é expressa por $m(t)$, o balanço de massa de Valkó & Oligney para o modelo KGD pode ser definido pela eq. (4.33). A vazão de filtração, eq. (3.5), possui a função $f(\Delta t_D, \alpha)$ que será determinada a partir do conhecimento de α , o qual será estimado por meio da análise do declínio de pressão do minifrac.

$$m(t) = \left(\frac{E'}{\pi x_f} \right) \left(\frac{1}{h_f x_f} \right) \left(q - \frac{2C_L h_f x_{fp}}{\sqrt{t}} f(\Delta t_D, \alpha) \right) \quad (4.33)$$

Após a chegada do agente de sustentação na fratura, caso a inclinação m calculada apresente um valor positivo, o tratamento estará em TSO e, rearranjando a eq. (4.33), o comprimento de empacotamento da fratura, x_{fp} , pode ser calculado por meio de uma equação do 2º grau, conforme mostrado pela eq. (4.34):

$$x_{fp}^2 + \left(\frac{2E' C_L f(\Delta t_D, \alpha)}{\pi m \sqrt{t}} \right) x_{fp} - \frac{E' q}{\pi m h_f} = 0 \quad (4.34)$$

Considerando que x_{fp} deve ser sempre positivo, a solução da equação do 2º grau é dada pela eq. (4.35):

$$x_{fp} = \frac{- \left(\frac{2E' C_L f(\Delta t_D, \alpha)}{\pi m \sqrt{t}} \right) + \sqrt{\left(\frac{2E' C_L f(\Delta t_D, \alpha)}{\pi m \sqrt{t}} \right)^2 + 4 \left(\frac{E' q}{\pi m h_f} \right)}}{2} \quad (4.35)$$

A eq. (4.35) calcula o comprimento de empacotamento da fratura durante um TSO para o modelo KGD, sendo esta equação uma extensão da metodologia proposta por Valkó & Oligney [3].

Para o período anterior ao TSO e para os períodos onde ocorre decréscimo de pressão após o início do TSO, isto é, períodos onde a fratura volta a se propagar, da mesma forma que sugerido para os modelos radial e PKN, a área da fratura será calculada utilizando o balanço de massa formulado por Carter [7], definido pelas eqs. (2.19) e (2.20). Como a fórmula da área da fratura para o modelo KGD é igual a da área da fratura para o modelo PKN, o equacionamento do balanço de massa formulado por Carter para o cálculo do comprimento da fratura no modelo KGD será o mesmo equacionamento utilizado

para o modelo PKN, sendo este definido pela eq. (4.24), onde o parâmetro β foi estabelecido pela eq. (4.4).

$$x_{fc}(t) = \frac{(\bar{w}_c + 2S_p)q}{4h_f C_L^2 \pi} \left[\exp(\beta^2) \operatorname{erfcf}(\beta) + \frac{2\beta}{\sqrt{\pi}} - 1 \right] \quad (4.24)$$

No caso do modelo KGD, o cálculo da abertura média utilizará a equação de abertura desta geometria, definida pela eq. (2.46) e reescrita a seguir com o sub-índice c para enfatizar que ela será calculada em cada intervalo de tempo, atualizando o balanço de massa de Carter [7].

$$\bar{w}_c = 2.53 \left(\frac{\mu q x_f^2}{E' h_f} \right)^{1/4} \quad (2.46)$$

Da mesma forma que ocorre para os outros modelos, a equação de abertura é função da viscosidade e do comprimento da fratura, sendo este último a incógnita do problema. Para o modelo KGD, será utilizada a viscosidade equivalente fornecida pela eq. (2.4) que considera o fluxo através de placas paralelas. Como a seção vertical do modelo é dada por um retângulo, será assumido que o fluxo ocorre através de um canal de seção retangular, sendo a área de fluxo definida pela eq. (4.36).

$$A_{fluxo}^{KGD} = h_f \bar{w} \quad (4.36)$$

A equação da viscosidade, eq. (2.4), é função da abertura da fratura e também da velocidade média de fluxo. A velocidade média de fluxo foi definida pela eq. (4.5), sendo a razão entre a vazão na fratura, aproximada pela vazão de injeção, e a área de fluxo, definida pela eq. (4.36). Conforme assumido nos modelos radial e PKN, será considerada uma viscosidade equivalente constante no tempo. Para tanto será utilizada a abertura média da fratura calculada no tempo inicial do TSO.

Da mesma forma que ocorrido para os outros modelos, será necessária a escolha de um valor inicial de comprimento de fratura para a definição da abertura média que será utilizada no balanço de massa de Carter [7], eq. (4.24), para o cálculo do comprimento da fratura. O processo iterativo terá continuidade até que a diferença entre o valor inicial e o calculado esteja dentro de um erro tolerável.

O comprimento da fratura ao longo do tempo será uma combinação dos comprimentos calculados pelo balanço de massa de Carter com os comprimentos de empacotamento calculados pelo modelo de Valkó & Oligney estendido para a geometria KGD.

Cabe ressaltar que não será permitido nenhum comprimento de empacotamento maior que o comprimento da fratura calculado pelo modelo de propagação. O modelo de propagação será responsável pelo estabelecimento do raio hidráulico da fratura e desta forma o empacotamento deve ser igual ou inferior ao raio hidráulico.

Como as equações necessárias para a estimativa dos parâmetros da fratura no modelo KGD já foram todas definidas, estas serão indicadas no passo a passo a seguir, que apresenta a metodologia para a estimativa da evolução da fratura ao longo do tempo através da análise da curva de pressão de fundo de uma operação de *fracpack* utilizando o modelo KGD.

Período anterior ao TSO:

1. Escolha do valor inicial do comprimento da fratura.
2. Cálculo da abertura média da fratura por meio da equação de abertura do modelo KGD, eq. (2.46).
3. Cálculo do comprimento da fratura pelo balanço de massa de Carter, eq. (4.24).
4. Comparação entre o valor inicial do comprimento da fratura e o comprimento da fratura calculado pelo balanço de massa. A diferença deve ser igual ou inferior ao erro tolerável.
5. Como a altura da fratura é definida por hipótese igual a espessura permeável, é possível determinar a área da fratura ao longo do tempo utilizando a eq. (4.16).
6. O volume da fratura pode ser calculado por meio da eq. (2.13).
7. A eficiência da fratura pode ser determinada utilizando a eq. (2.10).

Período após o início do TSO, durante aumento de pressão (inclinação m positiva):

1. O comprimento de empacotamento da fratura deve ser calculado utilizando a eq. (4.35).
2. O comprimento hidráulico deve ser definido a cada intervalo de tempo de acordo com a eq. (4.27).
3. A área hidráulica é calculada pela eq. (4.28).
4. A área empacotada da fratura deve ser calculada pela eq. (4.26), a abertura média da fratura pela eq. (4.12), o volume perdido para a formação pela eq. (4.10) e a eficiência deve ser definida pela eq. (4.13).

Período após o início do TSO, durante os declínios de pressão (inclinação m negativa):

1. Neste caso a fratura estará se propagando de acordo com o modelo de propagação e, desta forma, o comprimento da fratura deve ser calculado utilizando o balanço de massa de Carter, eq. (4.24).
2. A abertura média da fratura deve ser calculada com a eq. (4.29).
3. A eficiência pode ser estimada utilizando a eq. (4.30).

Este procedimento permite a determinação, entre outros parâmetros, do comprimento da fratura, da abertura da fratura e da eficiência ao longo do tempo. Com o conhecimento do comprimento ao longo do tempo, e conhecendo-se a curva de concentração do agente de sustentação no fundo, o estabelecimento da concentração areal do agente de sustentação em função do comprimento da fratura segue os mesmos passos apresentados para a geometria PKN. Inicialmente deve-se determinar a massa de agente de sustentação entrando na fratura em cada intervalo de tempo, tendo por base a curva de concentração do agente de sustentação no fundo. Para cada comprimento de fratura calculado a massa de agente de sustentação daquele intervalo de tempo deve ser uniformemente distribuída na área gerada por este comprimento de fratura. A curva de distribuição da concentração areal será obtida com a soma acumulada das concentrações calculadas para cada intervalo de tempo.

O quadro 4.3 é um resumo das equações sugeridas para a estimativa da evolução da fratura ao longo do tempo através da análise da curva de pressão de fundo durante uma operação de *fracpack* para a geometria KGD.

Diagnóstico da fratura com base na curva de pressão de fundo em operações de <i>fracpack</i> utilizando a geometria KGD	
Parâmetro	Modelo: de propagação – balanço de massa de Carter
	Período: Antes do TSO
x_f	$x_{fc}(t) = \frac{(\bar{w}_c + 2S_p)q}{4h_f C_L^2 \pi} \left[\exp(\beta^2) \operatorname{erfc}(\beta) + \frac{2\beta}{\sqrt{\pi}} - 1 \right]$
x_{fh}	$x_{fh}(t) = \max [x_f(t)]$
\bar{w}	$\bar{w}_c = 2.53 \left(\frac{\mu q x_f^2}{E' h_f} \right)^{1/4}$
A	$A = h_f x_f$
A_h	$A_h = h_f x_{fh}$

V_f	$V_f = A \bar{w}$	
V_L	$V_L = V_i - V_f$	
η	$\eta_c = \frac{V_f}{V_i}$	
Parâmetro	Modelo: Combinado utilizado após o primeiro TSO	
	Período: Declínio de pressão	Período: Aumento de pressão
x_f	$x_{fc}(t) = \frac{(\bar{w}_c + 2S_p)q}{4h_f C_L^2 \pi} \left[\exp(\beta^2) \operatorname{erfcf}(\beta) + \frac{2\beta}{\sqrt{\pi}} - 1 \right]$	$x_{fp}^2 + \left(\frac{2E' C_L f(\Delta t_D, \alpha)}{\pi m \sqrt{t}} \right) x_{fp} - \frac{E' q}{\pi m h_f} = 0$
x_{fh}	$x_{fh}(t) = \max[x_f(t)]$	$x_{fh}(t) = \max[x_f(t)]$
\bar{w}	$\bar{w}^n = \frac{x_{fh}^{n-1} \bar{w}^{n-1} + (x_{fh}^n - x_{fh}^{n-1}) \bar{w}_c^n}{x_{fh}^n}$	$\bar{w} = \frac{V_f}{A_h}$
A	$A = h_f x_f$	$A_p = h_f x_{fp}$
A_h	$A_h = h_f x_{fh}$	$A_h = h_f x_{fh}$
V_f	$V_f = A \bar{w}$	$V_f = V_i - V_L$
V_L	$V_L = V_i - V_f$	$V_L = 2C_L A_p \sqrt{t} g_0(\alpha)$
η	$\eta^n = \frac{x_f^{n-1} \eta^{n-1} + (x_{fc}^n - x_f^{n-1}) \eta_c^n}{x_{fc}^n}$	$\eta = \frac{\bar{w} A_p}{V_i}$

Quadro 4.3 - Resumo das equações utilizadas para a estimativa da evolução de uma fratura ao longo do tempo através da análise da curva de pressão de fundo de uma operação de *fracpack* utilizando a geometria KGD.