IVAN DUFFLES TEIXEIRA ARANEGA

Ensaio de Sistemas Dinâmicos Predador-Presa no Desenvolvimento Econômico Industrial

PROJETO DE GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE PRODUÇÃO
APRESENTADO AO DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA INDUSTRIAL
DA PUC-RIO, COMO PARTE DOS REQUISITOS PARA OBTENÇÃO
DO TÍTULO DE ENGENHEIRO DE PRODUÇÃO

Orientador: André Barreira da Silva Rocha

Departamento de Engenharia Industrial
Rio de Janeiro, 22 de Novembro de 2017.

Agradecimentos

Agradeço a todos que de alguma forma ajudaram a minha chegada a este ponto, deixando suas marcas no meu desenvolvimento acadêmico, profissional e pessoal ao longo do caminho.

Ao meu orientador André Barreira da Silva Rocha, por todo o seu suporte, conselhos e ensino em todos os momentos e pelas direções em que sua incrível didática me levaram. Foi um privilégio ser seu aluno.

À nossa incansável coordenadora Flávia César Teixeira Mendes, que sempre me recebeu de portas abertas e dedica tanto esforço à qualidade de nossa Graduação e nossa Universidade.

Aos Vice-Reitores Sérgio Bruni e Augusto Sampaio, que me deram tanto suporte no final desta jornada e que me lembram, em sua atuação, da importância dos ideais que a PUC-Rio carrega.

À minha querida amiga Fernanda Castro, por ter dividido comigo o peso de tantos momentos difíceis. Sem seu incondicional apoio e força todos esses anos eu jamais teria chegado até aqui.

Aos meus familiares, professores, amigos, e à equipe Rio PUC Games pela jornada, compreensão, aprendizado e apoio.

Resumo

Este trabalho consiste no estudo do impacto econômico de um setor informal considerado improdutivo através da construção e análise de um jogo evolucionário. Com o objetivo de avaliar se este setor constitui um risco de ciclo vicioso entre pobreza e baixa produtividade, conhecido na literatura como *poverty trap*, usou-se uma variante logística no modelo Lotka-Volterra. Foram verificados três pontos críticos no modelo logístico, dois dos quais são de especial interesse. Um implicaria o colapso deste setor informal e o outro um equilíbrio estável entre os setores formal e informal. Quando o equilíbrio estável existe, independentemente do porte da economia, fica definido como uma possível *poverty trap*. Em seguida, compara-se este modelo a uma interpretação econômica existente na literatura. Este estudo, portanto, implica na necessidade de maior entendimento de sistemas dinâmicos no planejamento de políticas de desenvolvimento que visam incentivar o setor formal.

Palavras-chave: armadilha de pobreza; jogos evolucionários; desenvolvimento econômico; setor informal;

Abstract

This work consists of a study on the economic impact brought about by an unproductive informal sector of economic activity. This impact is modeled and evaluated from the perspective of an evolutionary game, with the intent of analyzing whether such a sector could be said to constitute a possible poverty trap for the economy. A logistic variation of the Lotka-Volterra model was used to provide a carrying capacity and evaluate its effect on the population dynamics. The logistic model provided three critical points, two of which are of particular interest and importance. One implies the collapse of the informal sector and the other suggests a stable equilibrium of mutual survival. When this equilibrium exists, it may be defined as a possible poverty trap. This model is then compared to existing economic interpretations in literature. As such, this study implies a need for policies that mean to incentivize formal businesses to acknowledge the importance of understanding system dynamics.

Keywords: poverty trap; evolutionary game theory; economic development; informal sector;

Sumário

LISTA DE FIGURAS

1. Introdução

Em países em desenvolvimento, o baixo acesso a fatores importantes de produtividade individual como alimentação, transporte e educação profissional de qualidade, bem como restrições de acesso a diferentes tipos de capital, individual e conjuntamente dificultam o engajamento sustentável de parte da população na economia formal, ou seja, gerando bens e serviços enquanto respeitando os direitos de propriedade física e intelectual alheia.

Por outro lado, estes fatores, somados a uma fraca proteção institucional a estes direitos de propriedade criam um ambiente extremamente propício ao descaso com os direitos de propriedade alheios em favor da própria sobrevivência, o que leva à formação de um setor informal improdutivo e a uma desvalorização da percepção dos direitos de propriedade. Diz-se aqui setor informal improdutivo qualquer setor que não produza um bem ou serviço próprio e legal, como por exemplo pirataria, extorsão ou corrupção. Ao gerar movimento econômico este setor está, na realidade, parasitando sua contraparte formal e portanto limitando o crescimento socioeconômico da mesma ou até reduzindo seu porte.

Pode-se dizer que este setor informal está impedindo parcial ou completamente o crescimento da economia regional não apenas por seu impacto no setor formal, mas também por sua própria existência, visto que o capital financeiro e humano nele investido poderia estar contribuindo para algum setor formal da economia. Estes setores informais (e o subdesenvolvimento do qual decorrem) são reflexos de inúmeras falhas de mercado individuais, que conjuntamente tendem a formar um conjunto de mentalidades e práticas auto reforçáveis, gerando uma *poverty trap* (Mehlum et al, 2003), um conceito estudado há décadas em economia. Uma *poverty trap* é um ciclo vicioso entre pobreza e baixa produtividade, sendo necessário um auxilio externo expressivo e coordenado para se escapar deste cenário, tipicamente através da interferência de governos e ONGs que, através de políticas variadas, movem a economia para um novo equilíbrio estável e preferível.

Embora existam diversos estudos sobre *poverty trap*s globais e regionais, cobrindo tópicos variados como saúde, educação, distribuição de renda e alimentação, relativamente pouco foi estudado sobre o impacto de setores informais improdutivos e seu papel na criação e manutenção de *poverty trap*s regionais sob um ponto de vista de dinâmica populacional.

Os objetivos deste trabalho são:

1) Modelar a dinâmica populacional entre os setores formal e informal de uma economia em desenvolvimento, usando como base dois modelos. Primeiramente, um modelo Lotka-Volterra geral. Em um segundo momento, o mesmo modelo é modificado com a inclusão de um *carrying capacity* na população do setor formal, de forma que a mesma não cresça exponencialmente na ausência do setor informal. Este modelo modificado leva a conclusões de interesse sobre os possíveis equilíbrios e estabilidades do sistema.

2) Comparar os modelos com e sem limitador logístico e avaliar a possível existência de *poverty traps* no modelo proposto, utilizando a definição proposta por Griebeler e Hillbrecht, 2015.

2. Revisão de Literatura

2.1 Armadilha Populacional Malthusiana

Thomas Malthus propôs uma teoria da relação entre crescimento populacional e desenvolvimento econômico que é muito influente na atualidade. Baseando-se no conceito de retorno decrescente de fatores fixos, Malthus postulou uma tendência universal na qual a população de um país, caso não possua restrições como alimentos, cresceria geometricamente, dobrando a cada trinta a quarenta anos. Simultaneamente, em função do retorno decrescente do fator fixo, no caso território, a produção de alimentos cresceria apenas aritmeticamente (Todaro e Smith, 2015). Ou seja, qualquer ganho de produtividade alimentícia seria inteiramente consumido pelo crescimento populacional e a renda per capita (definida em uma sociedade agraria como a produção alimentícia per capita) tenderia a cair de tal forma a levar a uma população estável vivendo no limiar da subsistência. Em sua forma mais simples, a Armadilha Malthusiana é um argumento do problema de sustentabilidade de um sistema.

Graficamente, a base do modelo Malthusiano pode ser ilustrada comparando a forma e posição das curvas que representam as taxas de crescimento populacional e de crescimento agregado de renda quando estas duas curvas são plotadas em função de níveis de renda per capita. Um exemplo deste modelo é apresentado na Figura 1 a seguir.

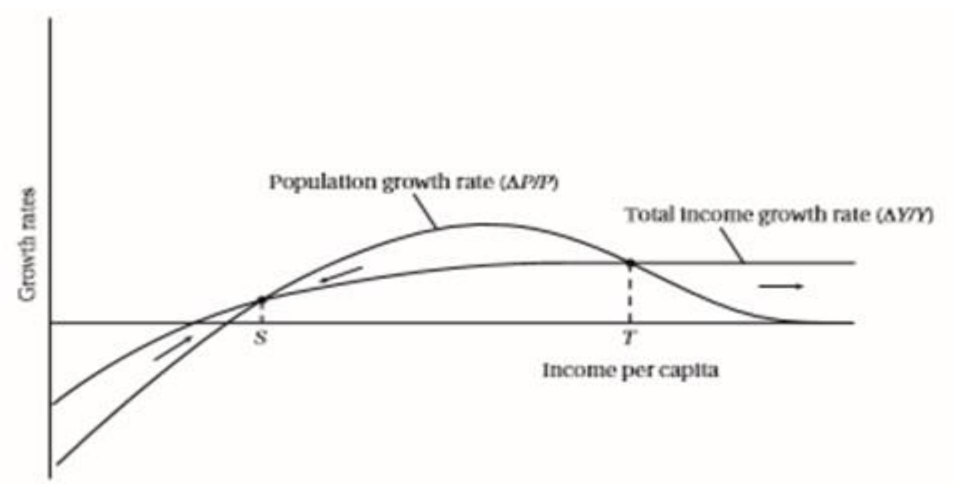

Figura 1: Uma Armadilha Malthusiana.
Fonte: Todaro e Smith, 2015.

O eixo vertical indica variações de porcentagem numéricas, positivas e negativas, nas duas principais variáveis avaliadas (população total e renda agregada). O eixo horizontal indica níveis de renda per capita. Crescimento de renda per capita é, por definição, a diferença do crescimento de renda e crescimento populacional, logo a diferença vertical entre as duas curvas. Segundo o modelo Harrod-Domar, sempre que a taxa de crescimento de renda total é maior do que a taxa de crescimento populacional, a renda per capita está crescendo; isto corresponde a um movimento para a direita ao longo do eixo horizontal. Quando estas taxas são iguais, a renda per capita está constante. Conforme indicado na figura, o equilíbrio S é um equilíbrio estável: Se os níveis de renda per capita crescerem acima de (ou seja, à direita de) S, assume-se que a população crescerá pois maior renda significa melhor nutrição e menor taxa de morte. Por outro lado, quando a população cresce mais rápido do que a renda (a curva $\Delta P/P$ está acima da curva $\Delta Y/Y$), renda per capita decresce e, portanto, nos movemos para a esquerda no eixo horizontal. Se a renda per capita fosse um pouco inferior a S, a curva de renda total estaria acima da curva de crescimento populacional e, portanto, a renda per capita estaria crescendo, ou seja, movendo-se à direita no eixo horizontal. Portanto, pode-se concluir que o ponto S representa um equilíbrio estável.

De acordo com neomalthusianos modernos, nações subdesenvolvidas nunca poderão crescer acima do nível de subsistência de sua renda per capita a menos que iniciem medidas de controle em seu crescimento populacional. Na ausência destas medidas, controles naturais (como guerra, fome e doenças) inevitavelmente o farão. Por outro lado, se a renda per capita de alguma forma alcançar o nível T indicado na figura anterior, a partir deste ponto o crescimento populacional é sempre inferior ao crescimento da renda agregada, e, portanto, a renda per capita cresce continuamente.

Alternativamente, países ou regiões em uma armadilha populacional tal como o ponto S podem escapar ao alcançar avanço tecnológico tal que catapulte o crescimento de renda agregada, assim como mudanças em instituições econômicas e culturais (progresso social) que desloquem a curva de crescimento populacional para baixo. Um exemplo deste cenário é demonstrado na figura abaixo.

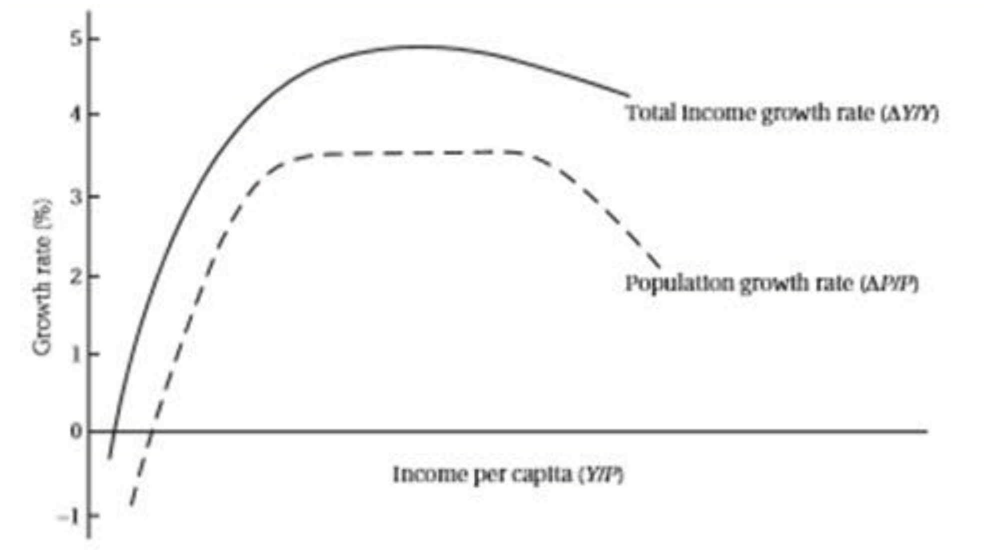

Figura 2: A tecnologia e progresso social permitem que nações evitem a Armadilha Malthusiana. Fonte: Todaro e Smith, 2015.

O crescimento de renda agregada agora supera o crescimento populacional em todo e qualquer nível de renda per capita, portanto a renda per capita cresce continuamente. Na ausência de garantias de choques tecnológicos, as melhores alternativas de escape de armadilhas malthusianas são evoluções progressivas em instituições econômicas e normas culturais, de forma a alcançar estabilidade populacional.

2.2 Predador-Presa e Lotka-Volterra

As equações Predador-Presa de Lotka-Volterra são equações de modelagem de ciclos em taxas de crescimento. Embora tenham origem na matemática biológica, podem ser aplicadas em sua forma geral e em formas modificadas a diversos estudos de taxas cíclicas de crescimento, dentre elas a Economia.

Seja **x** a densidade de presas e **y** a densidade de predadores.

$$\dot{x} = x(a - by)$$

$$\dot{y} = y(-c + dx)$$

$$a, b, c, d > 0$$

A ideia da primeira equação é que na ausência de predadores, as presas possam crescer a uma taxa constante **a** e decrescer em função da densidade **y** de predadores presentes no sistema. Analogamente, na ausência de presas de quem se alimentar, a densidade de predadores decresce até sua extinção, embora aumente proporcionalmente à densidade das presas presentes no sistema. Obviamente estamos interessados em predadores e presas em números positivos, logo observaremos o primeiro quadrante (Sternberg, 2010).

Os pontos onde $\dot{x}$ e/ou $\dot{y}$ são zero são a origem, os eixos e as coordenadas $(c/d, a/b)$. Observa-se que a origem é um ponto de sela. O campo vetorial do sistema de equações para a=2,b=1,c=0.25 e d=1 pode ser visto na Figura 3 a seguir

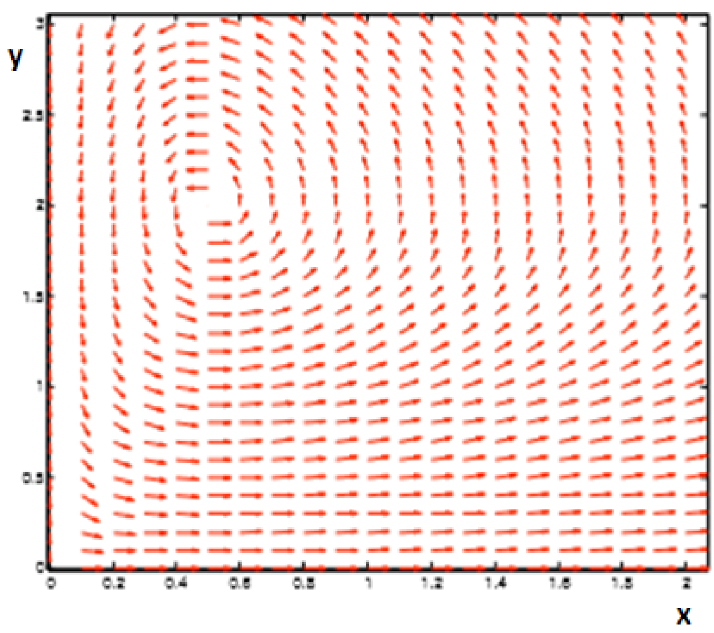

Figura 3: Campo vetorial de Lotka-Volterra com a=2, b=1, c=.25 e d=1.
Fonte: Sternberg, 2010.

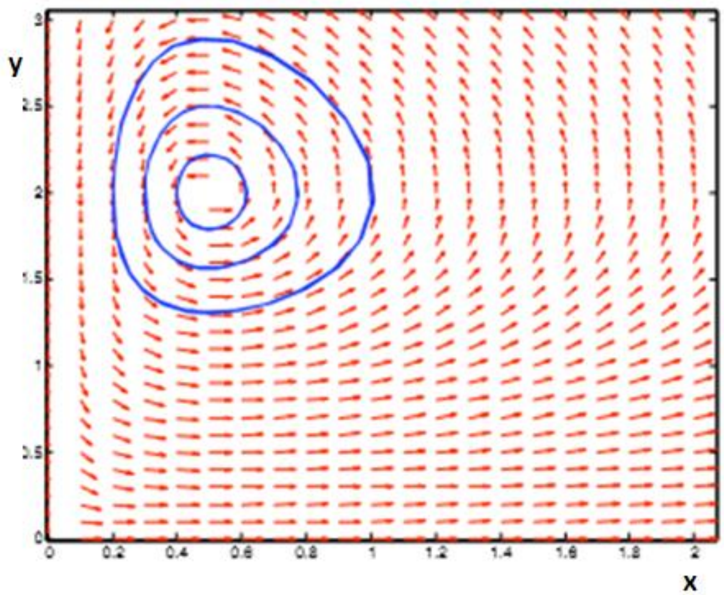

Figura 4: Representação da trajetória cíclica do equilíbrio no ponto interior.
Fonte: Sternberg, 2010.

A Figura 4 ilustra os ciclos populacionais fechados em x e y gerados por diferentes valores iniciais para estas populações. Dependendo destes valores, os ciclos podem ser mais longos ou mais curtos.

2.3 Carrying capacity

Carrying capacity no contexto biológico é o tamanho máximo populacional de uma espécie que o ambiente pode sustentar indefinidamente, em termos de seus recursos disponíveis, ou seja, a "carga máxima" que o ambiente suporta (não é a mesma coisa que equilíbrio populacional).

No contexto de sistemas dinâmicos, pode-se contextualizar a existência deste limitador logístico à auto-interferência por parte da espécie que possuir um fator de *carrying capacity*.

3. Modelos Propostos

3.1 Modelo Original

Partiu-se do modelo abaixo, utilizado como base por Griebeler e Hillbrecht, 2015:

$$\dot{x1} = x1 * (a1 - b12 * y)$$

$$\dot{x2} = x2 * (x1 * b21 - a2)$$

Onde:

x1 é a densidade do setor formal, **x2** a densidade do setor informal;
a1 é a taxa de crescimento do setor formal, **a2** é a taxa de extinção do setor informal;
b21 é a taxa de extinção do setor formal em função das ações parasitarias do setor informal;
b12 é a taxa de conversão do setor formal para o informal, por exemplo o lucro do setor informal.
Todos os parâmetros são positivos e constantes.

Este modelo é composto por agentes econômicos formais e informais. Agentes formais são empresas que produzem bens ou serviços respeitando leis de propriedade e, portanto, contribuem para a economia como um todo. Por questões de simplicidade, todos os agentes serão considerados idênticos. Existem também agentes informais, cuja participação em atividades econômicas não respeita leis de propriedade, sejam físicas ou intelectuais, e, portanto, estão direta ou indiretamente roubando uma fração da atividade econômica potencial formal, reduzindo assim a economia regional (Griebeler e Hillbrecht, 2015). A mesma possui uma taxa positiva de crescimento orgânico e tem seu crescimento parcialmente perdido em função da atividade econômica informal. O crescimento orgânico dos agentes informais é negativo, sendo esta população inteiramente dependente de furto de propriedade alheia para se manter e crescer positivamente.

O modelo considera que o setor informal preda o setor formal por partir do entendimento que o setor informal é danoso à economia formal por impactar o aumento de produtividade e competir de forma desleal com o setor formal pois possui vantagens competitivas como falta de gastos com impostos e leis trabalhistas e regulação de qualidade. Este comportamento também é considerado predatório de um ponto de vista qualitativo por inibir os investimentos recebidos pelo setor formal em função da rentabilidade e riscos do mesmo diante da existência de um segmento informal no mesmo setor. Adicionalmente, como muitos destes agentes informais realizam evasão tributária, impactam também as políticas de desenvolvimento socioeconômico.

Os equilíbrios encontrados no sistema proposto são {0,0} e {a2/b21, a1/b12}.

O primeiro representa a extinção dos dois grupos. O segundo representa um equilíbrio neutramente estável entre as duas populações. Por ter uma Jacobiana de autovalores puramente imaginários, não se pode concluir nada sobre a estabilidade do segundo equilíbrio através de analise linear. O estudo citado propõe uma interpretação que conclui que há uma órbita cíclica de crescimento e decrescimento para as duas populações nas imediações deste equilíbrio.

Note que as equações propostas pelo modelo-base do estudo são exatamente iguais às do modelo predador-presa de Lotka-Volterra.

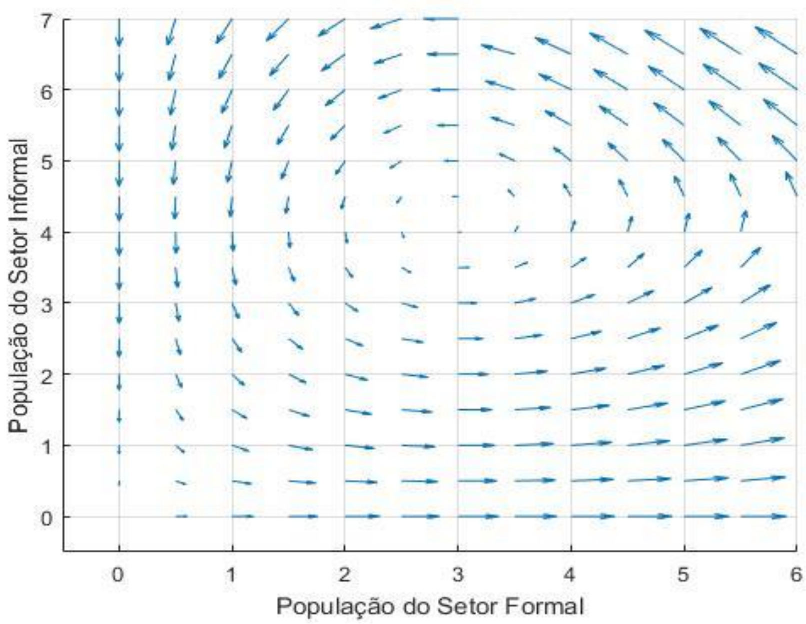

Figura 5: Diagrama de fase do sistema com parâmetros a1=0.5; a2=0.3; b12=0.12; b21=0.10. Fonte: Arquivo Pessoal.

3.2 Modelo com *carrying capacity*

O modelo-base não possui fatores que considerem os efeitos limitantes de fatores fixos na dinâmica do sistema nem sua interpretação no contexto econômico, como por exemplo a limitada capacidade da infraestrutura nacional.

Para aumentar o realismo do estudo das dinâmicas deste sistema populacional, levando em conta estes fatores fixos, foi proposto um modelo similar ao modelo-base, onde uma economia possui dois tipos de agentes, formais e informais.

Assume-se que o fruto da atividade econômica informal é sempre menor do que a parcela que a mesma remove do setor formal. O modelo proposto toma a forma

$$\dot{x}1 = x1(a1 - b11x1 - b12x2)$$

$$\dot{x}2 = x2(-a2 + b21x1)$$

Onde:

x1 é a densidade da população formal, **x2** é a densidade da população informal;
a1 é a taxa de crescimento do setor formal;
b11 é a taxa de extinção natural de empresas do setor formal por atritos intrínsecos à atividade econômica, interpretação contextual de um *carrying capacity*;
b12 é a taxa de extinção do setor formal em função da atividade informal;
a2 é a taxa de decrescimento natural do setor informal, consequência de sua improdutividade;
b21 é a taxa de crescimento do setor informal advinda da predação da propriedade do setor formal.
Todos os parâmetros são positivos e constantes.
Seja $b12 \geq b21$, ou seja, pode haver disparidade no valor de uma unidade monetária aplicada no setor formal ou no informal do ponto de vista governamental.

Ao inserir o limitador logístico no modelo-base, este trabalho busca contribuir para a literatura com um leve aumento de realismo do modelo. Ao realizar um estudo do novo diagrama de fases gerado e sua série temporal, visualizando o impacto do limitador no comportamento do sistema, pode-se fazer uma análise comparativa dos dois modelos e avaliar se o fator inserido de fato cria diferenças significativas na inferência de políticas públicas recomendáveis e o tempo necessário para que elas demonstrem o resultado esperado.

A diferença esperada de realismo se dá pela dissonância entre o crescimento infinito da população formal na ausência do setor informal com o que se observa na realidade. O *carrying capacity* contribui para o realismo do novo modelo por representar no sistema um fator de auto interferência do setor formal, ou seja, elementos como o atrito da competição entre empresas formais, o limite de capacidade da infraestrutura industrial nacional e outros elementos limitadores do crescimento produtivo. Adicionalmente, uma comparação das translações do equilíbrio interior dos dois modelos causadas pela implementação de novas políticas institucionais poderia indicar severas diferenças na eficácia destas políticas. O modelo proposto também sugere que a existência de um equilíbrio interior no primeiro quadrante dependerá da proporção dos parâmetros a1,b21,a2 e b11, uma forte diferença para o modelo base, onde este equilíbrio interior sempre existirá.

Antes de concluir esta seção, cabe chamar a atenção para o fato de que o modelo proposto nesta subseção 3.2 é um modelo intermediário entre aqueles propostos em Griebeler e Hillbrecht, 2015, equações (2.1-2.2) e (2.4-2.6).

4. Análise dos Resultados

Solucionando o sistema proposto, foram encontrados três pontos críticos:

$$X0 = (0,0)$$

$$\overline{X} = (\frac{a1}{b11}, 0)$$

$$\overline{\overline{X}} = (\frac{a2}{b21}, \frac{a1 * b21 - a2 * b11}{b12 * b21})$$

E sua Jacobiana*:*

$$J(x1, x2) = \begin{bmatrix} a1 - 2 * b11 * x1 - b12 * x2 & -b12 * x1 \\ b21 * x2 & b21 * x1 - a2 \end{bmatrix}$$

4.1 Ponto Crítico 1

Para o ponto X0, teremos:

$$J(0,0) = \begin{bmatrix} a1 & 0 \\ 0 & -a2 \end{bmatrix}$$

Que possui autovalores λ1=$a1$ e λ2= $-a2$. Como a1>0, a2>0, o ponto crítico é um ponto de sela.

A interpretação imediata de (0,0), caso existisse, seria obviamente a extinção de todos os agentes. Como o ponto é instável, nunca ocorre e é de pequeno interesse.

4.2 Ponto Crítico 2

O ponto $\overline{\overline{X}} = (\frac{a2}{b21}, \frac{a1*b21-a2*b11}{b12*b21})$, para existir, precisa situar-se no primeiro quadrante e ser diferente de zero.

Ou seja,

$$a1b21 - a2b11 > 0$$

Sua Jacobiana é:

$$J\left(\frac{\mathrm{a2}}{\mathrm{b21}},\frac{\mathrm{a1}*\mathrm{b21}-\mathrm{a2}*\mathrm{b11}}{\mathrm{b12}*\mathrm{b21}}\right)=\begin{bmatrix}-\dfrac{a2*b11}{b21} & -\dfrac{a2*b12}{b21}\\ -\dfrac{a2*b11\ -\ a1*b21}{b12} & 0\end{bmatrix}$$

Cujo traço é

$$\mathrm{Tr}(\mathrm{J}(\overline{\overline{X}}))=-a2*b11/b21, \text{ ou seja, o traço é negativo.}$$

Seu determinante é

$$\det(\mathrm{J}(\overline{\overline{X}}))=-a2*(a2*b11-a1*b21)/b21$$

Em função da restrição $a1b21-a2b11>0$, o determinante será invariavelmente positivo. Quando o determinante é positivo, os autovalores possuem o mesmo sinal do traço. Como o traço será sempre negativo temos uma estabilidade assintótica.

Portanto, quando o ponto $\overline{\overline{X}}$ existe, representa o equilíbrio assintóticamente estável entre os setores formal e informal. Adicionalmente, podemos inferir que economias com baixo policiamento e proteção a direitos terão valores de b21 tipicamente altos (altos lucros em função da falta de proteção) e valores de a2 tipicamente baixos (baixa efetividade da ação policial), levando a valores de a2/b21 baixos (em algum sentido, muito lucro a ser dividido entre os parasitas nascentes).

4.3 Ponto Crítico 3

A Jacobiana do ponto crítico $\overline{X}=(\frac{a1}{b11},0)$ é

$$J(a1/b11{,}0)=\begin{bmatrix}-a1 & -(a1*b12)/b11\\ 0 & (a1*b21)/b11\ -\ a2\end{bmatrix}$$

Que possui autovalores λ1= (a1*b21)/b11 - a2 e λ2=-a1. Lembrando que estamos restritos a

(1) $$a1*b21-a2*b11>0$$

E portanto λ1 será sempre positivo. Portanto, teremos um ponto de sela.

O diagrama de fase na Figura 6 sugere que para qualquer valor inicial positivo das duas populações, invariavelmente o sistema tende ao equilíbrio estável $\overline{\overline{X}}$. Perceba que neste modelo, populações iniciais de parasitas muito superiores às de produtores impedem o crescimento da população produtiva, consequentemente levando a uma redução agressiva da população predadora, portanto acelerando a chegada ao equilíbrio de pobreza.

$\overline{X}$, caso exista (apenas para populações iniciais do setor informal iguais a zero), representaria uma economia plenamente formal e sem perdas parasitárias. Inicialmente, poder-se-ia interpretar este como o cenário ótimo para o desenvolvimento socioeconômico. Entretanto, a análise da Jacobiana indica que o ponto $\overline{X}$ é instável. Neste caso qualquer perturbação no sistema resultaria no ponto $\overline{\overline{X}}$, que se torna nosso principal ponto de interesse.

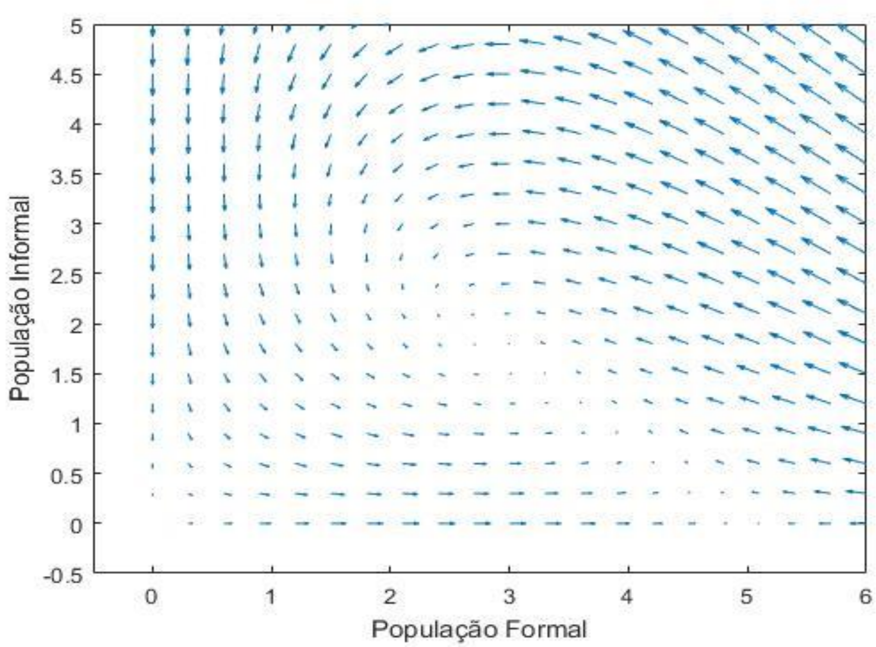

Figura 6: Diagrama de fase para a1=0.5; a2=0.3; b11=0.1; b21=0.1; b12=0.12.
Fonte: Arquivo Pessoal.

4.4 Casos Alternativos

Caso violássemos a restrição (1) acima, teríamos dois casos particulares. O primeiro,

$$a1 * b21 - a2 * b12 < 0$$

Em que o sistema proposto possuiria apenas dois pontos estacionários válidos - a origem (0,0) permanecendo um ponto de sela instável, e o ponto (a1/b11,0), que passa a ser considerado assintóticamente estável (λ1<0, λ2<0). O ponto $\overline{\overline{X}}$, para parâmetros que satisfaçam este caso particular, se desloca para fora do primeiro quadrante e se torna um ponto de sela. Este caso não será o foco deste trabalho, ficando como sugestão de pesquisa futura, muito embora sugira a possibilidade de um equilíbrio desejável para a sociedade.

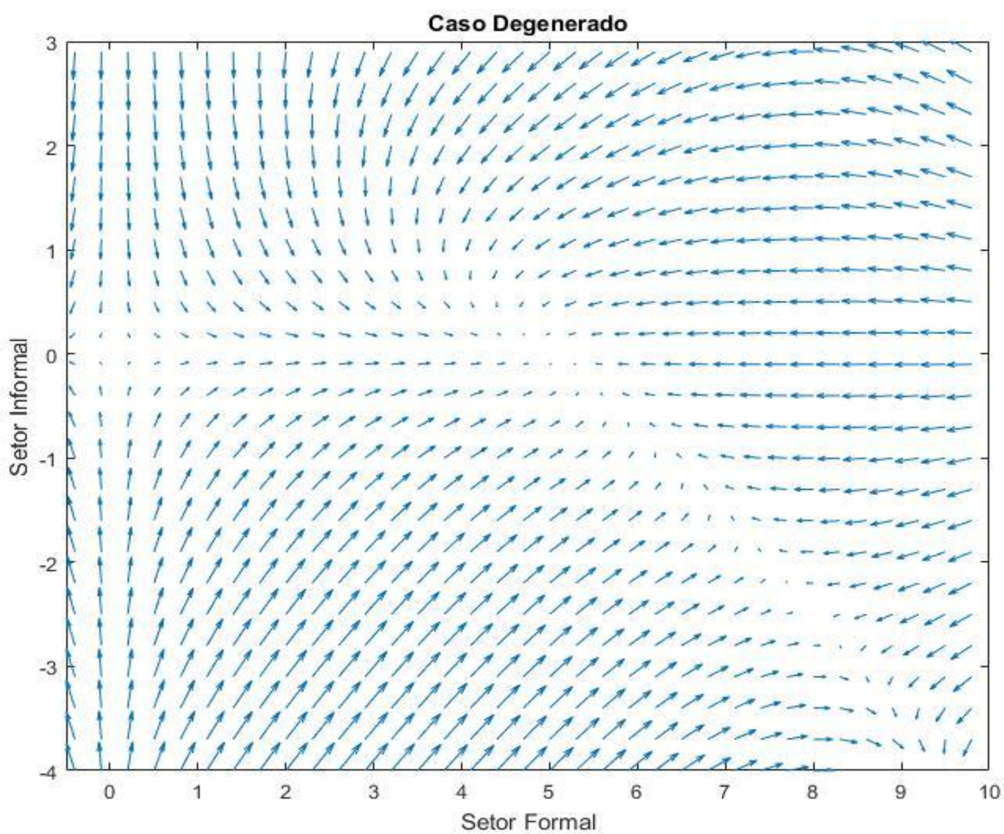

Figura 7: Primeiro caso alternativo. Parâmetros a1=0.5; a2=0.8; b11=0.1; b12=0.12; b21=0.1.
Fonte: Arquivo Pessoal.

O segundo trata-se do caso degenerado em que:

$$a1 * b21 - a2 * b12 = 0$$

Neste caso particular, teríamos apenas dois pontos estacionários, a origem (0,0) permanecendo um ponto de sela instável, e o ponto $\left(\frac{a1}{b11}, 0\right) \equiv (\frac{a2}{b21}, 0)$, que é neutramente estável (λ1=0, λ2<0). Neste caso, o setor informal será extinto, porém por se tratar de um caso muito particular dos parâmetros, não foi considerado na análise do trabalho.

5. Comparação Entre os Modelos

O modelo aqui proposto sugere que aumentos no policiamento, ou seja, aumentos no parâmetro **a2** e reduções no parâmetro **b12** de fato são particularmente eficazes em aproximar a sociedade do ponto (a1/b11,0), ideal para o setor formal e argumentavelmente bom para o desenvolvimento socioeconômico de longo prazo. Entretanto, o próprio ponto (a1/b11,0) não é contemplado no modelo base, mas indica uma necessidade de se investir em políticas que reduzam progressivamente o parâmetro **b11** de forma a aumentar o teto da economia formal. O mesmo raciocínio se aplica ao aumento do parâmetro **a1**.

Estas políticas de incentivo devem ser estudadas, planejadas e implementadas de forma que $a1 > b11 * x1 + b12 * x2$ seja sempre verdadeiro, ou seja, que o setor formal esteja em constante crescimento. Idealmente, estas políticas deveriam ser acompanhadas de (ou ao menos substituídas por) $a2 \geq b21 * x1$, ou seja, uma proteção *crescente* aos direitos de propriedade e equivalente coibição da informalidade, impedindo seu crescimento ou ativamente reduzindo seu porte, pois do contrário essas políticas de incentivo econômico apenas causam a multiplicação dos agentes informais (vide Figura 10).

Como ilustrado pela figura 9, o modelo logístico utilizado tem o benefício adicional de causar um amortecimento na série temporal levando a um equilíbrio estável, diferentemente do comportamento cíclico observado no modelo base, criando uma valiosa previsibilidade dos resultados das políticas implementadas e de seu tempo de maturação.

5.1 Diferenças entre o comportamento dos modelos

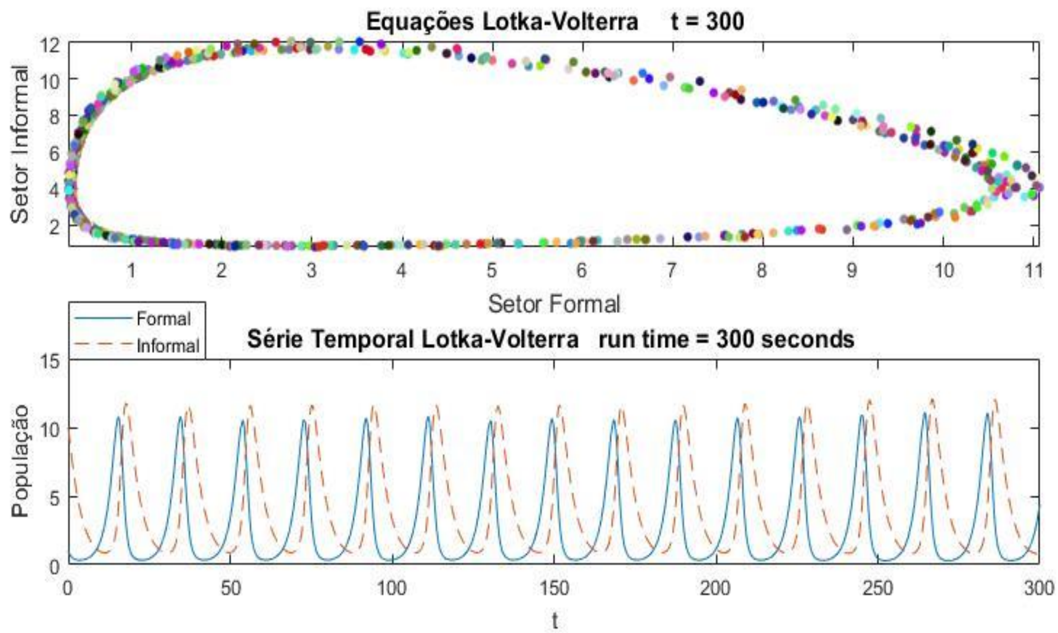

Figura 8: Série Temporal do Modelo Lotka-Volterra Geral, a1=0.5; a2=0.3; b21=0.1; b12=0.12, populações iniciais de x1=1, x2=10.
Fonte: Arquivo Pessoal.

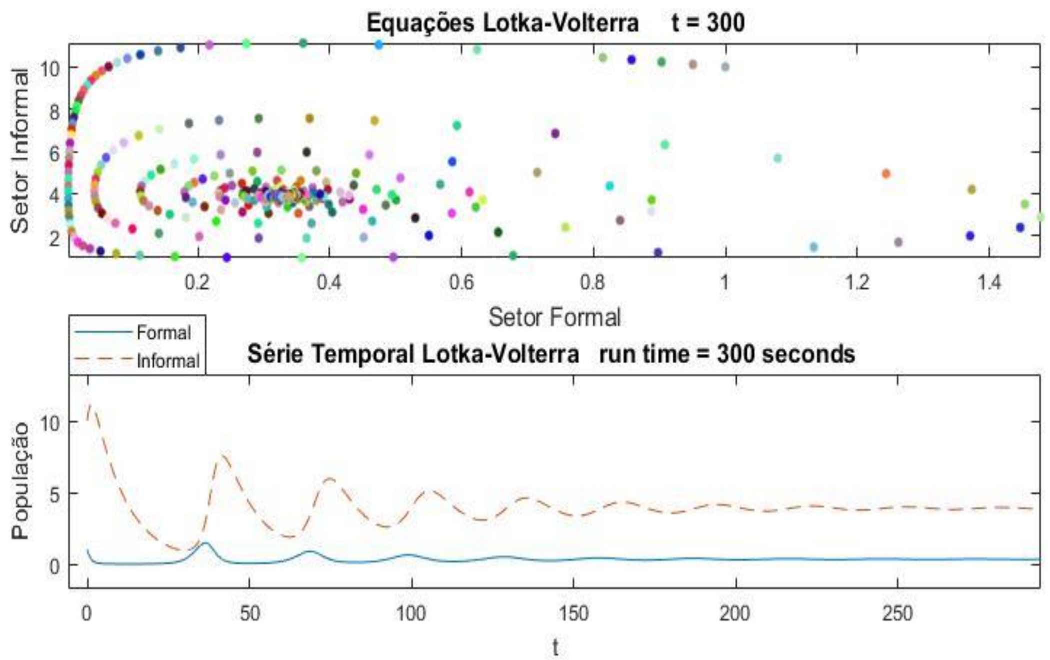

Figura 9: Série temporal do sistema dinâmico proposto para parâmetros a1=0.5; a2=0.1; b11=0.1; b21=0.3; b12=0.12. Populações iniciais de x1=1, x2=10.
Fonte: Arquivo Pessoal.

5.2 Variações no parâmetro logístico **b11**

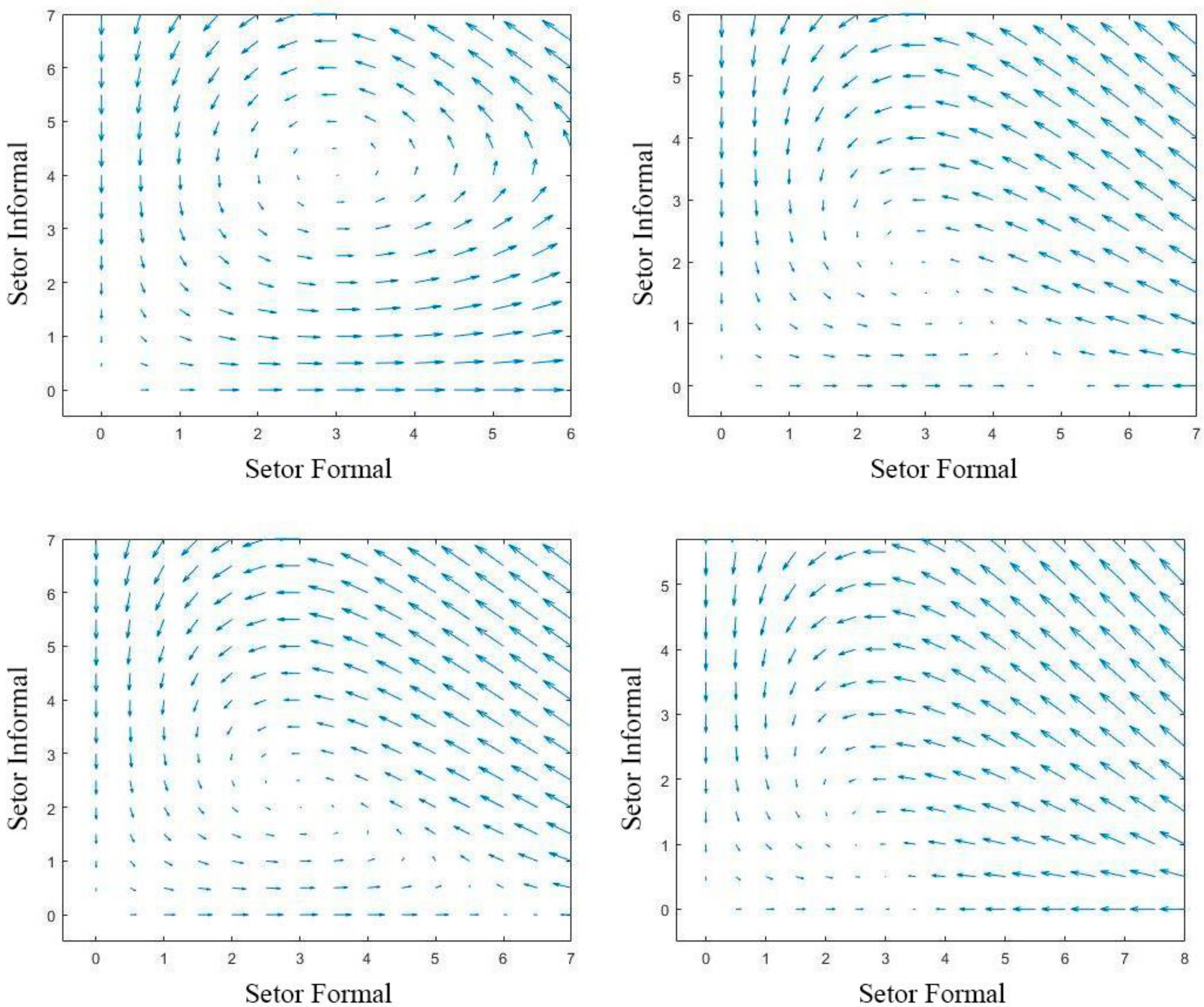

Figura 10: Diagramas de fase das populações formal e informal com parâmetros b11=0, b11=0.08, b11=0.1, b11=0.15, respectivamente.
Fonte: Arquivo Pessoal

A Figura 10 evidencia que reduções no parâmetro b11 (observe os quadros em ordem reversa), embora aumentem o teto *teórico* do setor formal, na prática, se não forem acompanhadas de modificações adequadas nos outros parâmetros, não surtirão qualquer efeito no porte do setor formal – apenas alimentando a informalidade, que faz uso da infraestrutura e muitos benefícios implícitos em **b11**.

Diferentemente de outros modelos, nos quais a entrada endógena de produtores em número suficientemente alto garante um escape da *poverty trap*, o modelo aqui proposto e seu resultado implica que apenas esta mudança não permite escape. De fato, nenhuma mudança institucional permite o *escape* desta armadilha de pobreza e o alcance do ponto crítico $\overline{X}$.

O modelo sugere que a única opção viável é alterar os parâmetros do modelo através de políticas institucionais e socioeconômicas com o intuito de transladar o equilíbrio estável ao longo dos eixos. Isto deve ser feito com muito cuidado, pois uma vez dentro deste equilíbrio, o que é bom para o produtor também o é para o predador, o que explica a dificuldade em se livrar de atividades parasitárias (Mehlum et. al, 2000). Portanto, políticas governamentais de incentivo ao formalismo, sem um aumento correspondente nas políticas de coibição e desincentivo à informalidade (como policiamento e anistia a agentes informais que se formalizem) e uma redução nos ganhos do setor informal (maior proteção ao setor produtivo formal, reduzindo sua vulnerabilidade, ou políticas que incentivem a competitividade do setor formal ante o informal) teriam unicamente o efeito de aumentar a população informal e, mais do que isso, em muitos casos com o efeito adicional de reduzir a população formal. Ou seja, muitas políticas que impactem o fator de nascimento formal **a1** e/ou reduzam significativamente o limitador logístico **b11** sem um controle correspondente nos outros fatores transladam o equilíbrio estável para a esquerda e/ou (como visto na Figura 10) para cima no diagrama de fases.

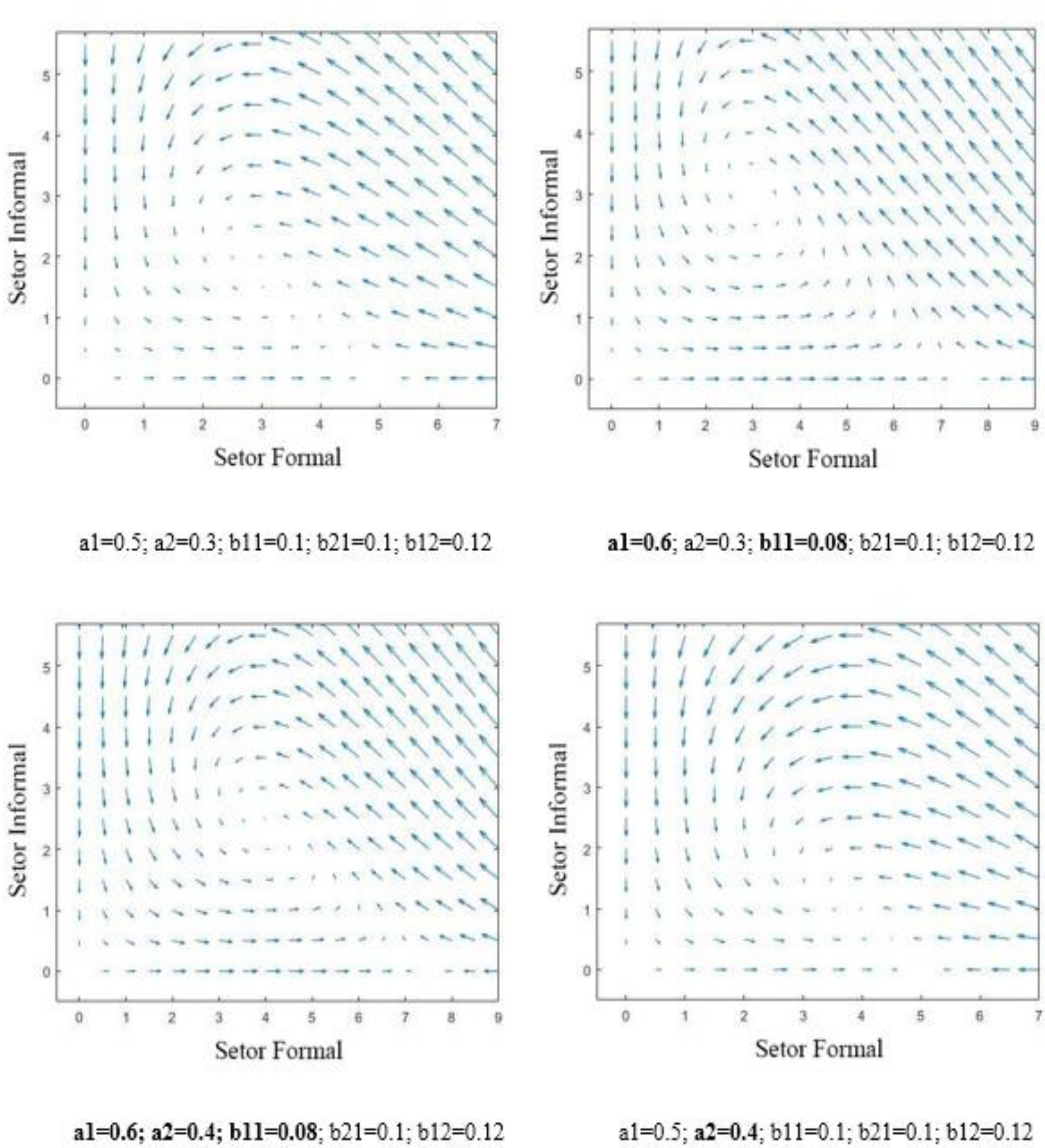

Figura 11: Algumas variações de parâmetros para ilustrar diferentes políticas
Fonte: Arquivo Pessoal

6. Conclusão

O Corolário 3.2 do estudo de Griebeler e Hillbrecht, 2015, propõe que:

"Considere uma economia representada pelo modelo Lotka-Volterra Geral. (...) Assuma que a taxa de crescimento do setor formal e a taxa de nascimento do setor informal são fixas. Então a única forma de se superar a *poverty trap* é por melhoras institucionais, aumentando a proteção de direitos de propriedade e policiamento.

(...) Esta afirmação é particularmente forte ao colocar nas mãos do estado toda a responsabilidade pelo desenvolvimento."

Pode-se argumentar que certas interpretações do parâmetro **b11**, como infraestrutura industrial e avanços tecnológicos, não são domínio único do governo. Investimentos de agentes do setor formal privado para o crescimento da atividade produtiva tendem a impactar positivamente competidores e até setores não relacionados. Adicionalmente, existem agentes formais cuja atividade produtiva é, de fato, criar e vender infraestrutura de longo prazo. Alguns destes agentes o fazem através de licitações públicas, podendo-se argumentar que é essencialmente o Estado que está impactando **b11** – mas este não é sempre o caso, principalmente nos avanços tecnológicos.

Uma política estratégica largamente defendida em estudos de *poverty trap*s (como por exemplo Mehlum et. al, 2000, Griebeler e Hillbrecht, 2015 e outros) é o reforço intensivo de policiamento da parte do governo. Estes estudos argumentam, implícita e explicitamente que, preferencialmente a políticas socioeconômicas complexas, de alto custo e longa maturação, a proteção agressiva aos direitos de propriedade e um policiamento extenso garantem impacto expressivo no setor informal. Entretanto, estes mesmos estudos reconhecem que a causa central de *poverty trap*s em economias em desenvolvimento vem da facilidade comparativa em se tornar um predador ao invés de um produtor – A entrada na informalidade tipicamente envolve custos fixos baixos e portanto é crescentemente tentadora em baixos níveis de desenvolvimento (Mehlum et. al, 2000).

Logo, embora tanto o modelo-base analisado quanto o modelo modificado proposto de fato pontuem a ineficácia de quaisquer políticas econômicas que não sejam, no mínimo, acompanhadas de algum tipo de proteção ao setor formal, vale ressaltar que estes modelos não dimensionam adequadamente o impacto intrínseco de políticas de incentivo ao crescimento do setor formal no setor informal, por exemplo, incentivos à formalidade que captem agentes informais, como a anistia tributária e/ou criminal a agentes informais que se formalizem, bem como apoio à competitividade do setor formal contra o setor informal, reduzindo as perdas da formalidade e simultaneamente os ganhos da informalidade. Essencialmente, existem dependências funcionais entre os parâmetros modelados ainda não definidas, bem como a necessidade de se separar certos parâmetros em dois ou mais novos elementos. Ou seja, a falta de complexidade dos modelos usados pode explicar a ineficácia aparente de ações de incentivo não acompanhadas de coibição da informalidade.

7. Apêndice A: MATLAB

7.1 Comandos

As soluções matemáticas e gráficas foram obtidas no software MATLAB, através dos comandos

- syms x1 x2 a1 b11 b12 a2 b21; %definindo variáveis simbólicas para solução das EDOs
- X1=x1*(a1-b11*x1-b12*x2); % solução do modelo Lotka-Volterra Logístico
- X2=x2*(-a2+b21*x1);
- eqn1=X1==0;
- eqn2=X2==0;
- A=solve([eqn1,eqn2],[x1,x2]);
- P_Critico_1=[A.x1(1),A.x2(1)]; %para posterior avaliação dos autovalores
- P_Critico_2=[A.x1(2),A.x2(2)];
- P_Critico_3=[A.x1(3),A.x2(3)];
- Jacobiana=jacobian([X1,X2],[x1,x2]);
- Jacobiana_1=subs(Jacobiana,{x1,x2},{P_Critico_1});
- Jacobiana_2=subs(Jacobiana,{x1,x2},{P_Critico_2});
- Jacobiana_3=subs(Jacobiana,{x1,x2},{P_Critico_3});
- Autovalores1=subs(Jacobiana_1,{a1,a2,b11,b12,b21},{0.5,0.3,0.1,0.12,0.1});
- [x1 x2] = meshgrid(0:0.3:7, 0:0.3:5); %Cria uma "rede" para desenhar a região nos limites relevantes. O parâmetro central representa o passo dx1 e dx2
- X1b=subs(X1,{a1,a2,b11,b12,b21},{0.5,0.3,0.1,0.12,0.1});%qualquer parâmetro valido
- X2b=subs(X2,{a1,a2,b11,b12,b21},{0.5,0.3,0.1,0.12,0.1});%qualquer parâmetro valido
- X1b=eval(X1b);
- X2b=eval(X2b);
- P=(sqrt(1+X1b.^2)); %uma técnica de otimização da visualização gráfica
- L=(sqrt(1+X2b.^2));
- quiver(x1,x2,X1b./P,X2b./L); %campo de setas
- axis([-0.5 7 -0.5 5])%redefine os eixos do gráfico criado
- title('Sistema Dinamico Lotka-Volterra')

- xlabel('Populacao de Presas')
- ylabel('Populacao de Predadores')

7.2 Função de Série Temporal para Lotka-Volterra

Séries temporais do modelo Lotka-Volterra, como as apresentadas nas Figuras 8 e 9, podem ser adquiridas facilmente através de uma versão modificada de um programa originalmente criado por James Adams, 2014. O programa original, permite visualizar a série temporal de apenas uma das duas populações de cada vez. A versão modificada permite a visualização simultânea das duas populações.

```
function LV_JA_Duffles

clf    % Limpa a janela de figura antes de iniciar a simulação

countdown = 3;  % Timer para o início da simulação
iterations = 1;
pausetime = 0.1;  % Mostra as soluções a cada passo temporal
runtime = 300;    % Duração temporal da simulação.
% ================ Parâmetros das equações ===============================
a1 = 0.5;
a2 = 0.1;
b11 = 0.1;
b12 = 0.4;
b21 = 0.3;
% =============== Condição inicial de x e y ================================
initialx = 4;
initialy = 0.5;

fprintf('\n\nParâmetros estabelecidos,')
fprintf('\n\na1 = %2.6f \nb11- %2.6f \nb12 = %2.6f \na2 = %2.6f \nb21 = %2.6f
',a1,b11,b12,a2,b21)
fprintf('\n\nSimulação começa em ')

for i = 3:-1:1 %se mudar countdown, mudar aqui tambem
    fprintf('\n%8i',countdown')
    countdown = countdown-1;
    pause(1)
end

% Resolve as equações com o ODE solver 45 (nonstiff runge kutta)
deq1=@(t,x) [x(1)*(a1 -b11*x(1)- b12*x(2));x(2)*(-a2+b21*x(1))];
[t,sol] = ode45(deq1,[0 runtime],[initialx initialy]);

arraysize = size(t);  % Estabelece o tamanho da matriz temporal para o loop
%============ Soluções são plotadas a cada passo temporal=====================
```

```
 for i = 1 : max(arraysize)
    subplot(2,1,1)
    plot(sol(iterations,1),sol(iterations,2),'.','color',[rand;          rand;
rand],'markersize',14,'MarkerFaceColor','b');
    hold on
    title(['Equações     Lotka-Volterra                         t     =     '
num2str(t(iterations))],'fontsize',12)
    xlabel('Setor Formal','fontsize',12)
    ylabel('Setor Informal','fontsize',12)
    axis([min(sol(:,1)) max(sol(:,1)) min(sol(:,2)) max(sol(:,2))])

    subplot(2,1,2)
    text(0.1,0.5,'A Série Temporal aparecerá ao fim da simulação')

    iterations = iterations + 1;
    pause(pausetime)
end
% ==== Plota a série temporal ==============
    subplot(2,1,2)
    plot(t(:,1),sol(:,1),'markersize',10,'Linestyle','-')
    hold on
    title(['Série  Temporal  Lotka-Volterra    run  time  =  '  num2str(max(t))  '
seconds '],'fontsize',12)
    plot(t(:,1),sol(:,2),'markersize',10,'Linestyle','--')
    xlabel('t')
    ylabel('População')
    legend('Formal','Informal')

end
```

A função pode ser chamada na janela de comando simplesmente através de seu nome. Caso haja algum problema, ela pode ser cancelada por control+C.

7.3 Sobrepondo a Série Temporal ao Campo Vetorial

Pode-se também visualizar a série temporal sobreposta ao campo vetorial. Após executar a série de comandos encerrada pelo comando quiver(...), deve-se executar o código abaixo.

```
function LV_Temporal

countdown = 3;
iterations = 1;
pausetime = 0.1;
runtime = 300;
% ================ Parâmetros das equações ================================
a1 = 0.5;
a2 = 0.1;
b11 = 0.1;
b12 = 0.4;
b21 = 0.3;
% =============== Condição inicial de x e y ===============================
initialx = 4;
initialy = 0.5;

fprintf('\n\nParâmetros estabelecidos,')
fprintf(['\n\n a1 = %2.6f\n b11- %2.6f \n b12 = %2.6f \n a2 = %2.6f\n b21 =
%2.6f '],a1,b11,b12,a2,b21)
fprintf('\n\nSimulação começa em ')

for i = 3:-1:1
    fprintf('\n%8i',countdown')
    countdown = countdown-1;
    pause(1)
end
% === Resolve as equações com o ODE solver 45 (nonstiff runge kutta) ======
deq1=@(t,x) ...
    [x(1)*(a1 -b11*x(1)- b12*x(2)); ...
     x(2)*(-a2+b21*x(1))];
[t,sol] = ode45(deq1,[0 runtime],[initialx initialy]);
arraysize = size(t);
% =========== Soluções são plotadas a cada passo temporal =================
for i = 1 : max(arraysize)
    hold on
    plot(sol(iterations,1),sol(iterations,2),'.','color',[rand;          rand;
rand],'markersize',14,'MarkerFaceColor','b');
    title(['Equações     Lotka-Volterra                          t     =     '
num2str(t(iterations))],'fontsize',12)
    xlabel('Setor Formal','fontsize',12)
    ylabel('Setor Informal','fontsize',12)

    iterations = iterations + 1;
    pause(pausetime)
end
```

Novamente, caso se deseje parar a execução da função, deve-se usar o comando ctrl+C.

8. Bibliografia

MEHLUM, Halvor; MOENE, Karl Ove; TORVIK, Ragnar. **Predator or prey?: parasitic enterprises in economic development**, (2000). Memorandum from University of Oslo Department of Economics, N° 27/2000.

MEHLUM, Halvor; MOENE, Karl Ove; TORVIK, Ragnar. **Parasites**, (2003). Memorandum from University of Oslo Department of Economics, N° 16/2003.

GRIEBELER, Marcelo de Carvalho; HILLBRECHT, Ronald Otto. **Producers, parasites and *poverty traps***, EconomiA, Vol. 16, Issue 3 (September-December 2015), pp.310-320.

STERNBERG, Shlomo. **Dynamical Systems**, (2010). Dover Publications. Capítulo 11.

TODARO, Michael P.; SMITH, Stephen C. **Economic Development**, (2015). George Washington University. Capítulo 6.4.