Pontifícia Universidade Católica
do Rio de Janeiro

Julio César Coaquira Nina

Oscilações Não Lineares e Instabilidade Dinâmica de Vigas de Seção Aberta e Paredes Delgadas.

Dissertação de Mestrado

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da PUC-Rio como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil.

Orientador: Prof. Paulo Batista Gonçalves

Rio de Janeiro
Março de 2016

Pontifícia Universidade Católica
do Rio de Janeiro

Julio César Coaquira Nina

Oscilações Não Lineares e Instabilidade Dinâmica de Vigas de Seção Aberta e Paredes Delgadas

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil do Departamento de Engenharia Civil do Centro Técnico Científico da PUC-Rio. Aprovada pela Comissão Examinadora abaixo assinada.

Prof. Paulo Batista Gonçalves
Orientador
Departamento de Engenharia Civil – PUC-Rio

Prof. Eulher Chaves Carvalho
Co-Orientador
Instituto Federal de Educação / Goiás

Profª. Deane de Mesquita Roehl
Departamento de Engenharia Civil – PUC-Rio

Prof. Daniel Carlos Taissum Cardoso
Departamento de Engenharia Civil – PUC-Rio

Prof. Pedro Colmar Gonçalves da Silva Vellasco
Universidade do Estado do Rio de Janeiro

Prof. Márcio da Silveira Carvalho
Coordenador Setorial do Centro Técnico Científico – PUC-Rio

Rio de Janeiro, 04 de março de 2016.

Julio César Coaquira Nina

Graduou-se em Engenharia Civil na Universidade Nacional San Antonio Abad del Cusco, UNSAAC (Cusco - Peru), em Janeiro de 2010. Ingressou em março de 2014 no curso de Mestrado em Engenharia Civil da Pontifícia Universidade Católica de Rio de Janeiro (PUC-Rio), na área de Estruturas. Já desenvolveu trabalhos na área de projetos de estruturas e mais recentemente na área de dinâmica das estruturas, abrangendo nesta última os temas de estabilidade e dinâmica de colunas e vigas com seções não simétricas.

Ficha Catalográfica

Nina, Julio Cesar Coaquira

Oscilações não lineares e instabilidade dinâmica de vigas de seção aberta e paredes delgadas / Julio Cesar Coaquira Nina ; orientador: Paulo Batista Gonçalves ; co-orientador: Eulher Chaves Carvalho. – 2016.

134 f. : il. color. ; 30 cm

Dissertação (mestrado)–Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Engenharia Civil, 2016.

Inclui bibliografia

1. Engenharia civil – Teses. 2. Vigas de paredes delgadas. 3. Instabilidade dinâmica. 4. Oscilações não lineares. 5. Vigas de seção aberta. I. Gonçalves, Paulo Batista. II. Carvalho, Eulher Chaves. III. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Engenharia Civil. IV. Título.

CDD: 624

Agradecimentos

Ao professor Paulo Batista Gonçalves, quem soube transmitir com paciência e dedicação cada passo da orientação e tornou-se um símbolo como profissional e amigo.

Ao meu co-orientador, professor Eulher Chaves Carvalho, pela orientação e esclarecimento de muitas dúvidas que ajudaram no desenvolvimento da dissertação.

Aos professores que participaram da comissão examinadora.

A instituição PUC-Rio.

Aos professores e funcionários do Departamento de Engenharia Civil.

Ao CNPq e CAPES.

Resumo

Julio César Coaquira Nina; Gonçalves, Paulo Batista; Carvalho, Eulher Chaves, **Oscilações Não Lineares e Instabilidade Dinâmica de Vigas de Seção Aberta e Paredes Delgadas**. Rio de Janeiro, 2016. 134p. Dissertação de Mestrado – Departamento de Engenharia Civil, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Estruturas com elementos de seção aberta e paredes delgadas são amplamente utilizados em estruturas metálicas. Estes elementos têm, em geral, baixa rigidez a torção. Para seções monosimétricas e assimétricas, quando o centro de cisalhamento não coincide com o centro de gravidade, pode ocorrer acoplamento entre flexão e torção. Devido à baixa rigidez à torção, podem ocorrer grandes rotações das seções transversais da viga. Assim, uma análise do comportamento de tais elementos estruturais, levando em consideração a não linearidade geométrica, é desejável. Com este objetivo, equações diferenciais parciais de movimento que descrevem o acoplamento flexão-flexão-torção são utilizadas, em conjunto com o método de Galerkin, para se obter um conjunto de equações discretizadas de movimentos, que é resolvido pelo método Runge-Kutta. A partir das equações linearizadas, obtêm-se as frequências naturais, cargas críticas axiais e a relação entre carga axial e frequência para vigas com diferentes condições de contorno. A seguir, estudam-se as oscilações não lineares e bifurcações de uma viga engastada-livre submetida a cargas laterais harmônicas. Uma análise paramétrica detalhada, usando várias ferramentas de dinâmica não linear, investiga o comportamento dinâmico não linear e não planar da viga nas três primeiras regiões de ressonância e a influência da não linearidade, posição do carregamento, restrições à torção e parâmetros de controle do carregamento na estabilidade dinâmica da estrutura.

Palavras-chave

Vigas de paredes delgadas; Instabilidade dinâmica; oscilações não lineares; vigas de seção aberta.

Abstract

Julio César Coaquira Nina; Gonçalves, Paulo Batista (Advisor); Carvalho, Eulher Chaves (Co-Advisor), **Nonlinear Oscillations and Dynamic Instability of Thin-Walled Beams with Open Cross-Section.** Rio de Janeiro, 2016. 134p. MSc. Dissertation – Departamento de Engenharia Civil, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Structural elements with open and thin-walled section are widely used in metal structures. These elements have, in general, low torsional stiffness. For monosymmetric and asymmetric sections, when the shear center does not coincide with the center of gravity coupling between bending and torsion may occur. Due to the low torsional stiffness, large twist beam cross sections may arise. Thus, an analysis of the behavior of such structural elements, taking into account the geometric nonlinearity, is desirable. For this purpose, partial differential equations describing the flexural-flexural-torsional coupling are used in conjunction with the Galerkin method to obtain a set of discretized equations of motion, which is solved by the Runge-Kutta method. From the linearized equations, we obtain the natural frequencies, axial critical loads, and the axial load and frequency relationship for beams with different boundary conditions. Next, we study the nonlinear oscillations and bifurcations of a clamped-free beam subjected to harmonic lateral loads. A detailed parametric analysis, using various nonlinear dynamics tools, investigates the nonlinear dynamic behavior and non-planar motions of the beam for the first three regions of resonance and the influence of the non-linearity, loading position, torsional restraints and load control parameters on the dynamic stability of the structure.

Keywords

Thin-walled beams; dynamic instability; nonlinear oscillations; beams with open cross-section.

Sumário

Lista de símbolos

A	-Área da seção transversal.
B_ω	-Bi momento.
b, h	-Dimensões da seção transversal.
SC	-Centro de cisalhamento.
"C"	-Seções do perfil.
d	-Distância de C ao ponto o.
ds	-Diferencial de comprimento.
E	-Módulo de Young.
e_z, e_y	-Excentricidade do carregamento Q_z.
{F}	-Vetor de forças externas.
F, F_v	-Resultante da força externa.
$f(x)$, $g(x)$	-Modos de vibração a flexão da viga.
CG	-Centro de gravidade.
G	-Módulo de distorção.
3GDL	-Três graus de liberdade: u, v e w
$h(x)$	-primeiro modo de torção.
$h(s)$	-Distância perpendicular desde o centro de cisalhamento até o contorno da seção.
I	-Momento de inércia.
I_o	-Momento polar de inércia com relação ao centro de cisalhamento.
I_R	-Quarto momento de inércia com relação ao centro de cisalhamento.
I_t	-Constante de torsão de maior ordem.
I_y	-Momento principal de inércia com relação ao eixo Y.
I_z	-Momento principal de inércia com relação ao eixo Z.
I_ω, C_w	-Constante de empenamento.
I_{max}, I_2	-Momento de inércia máximo.
I_{min}, I_1	-Momento de inércia mínimo.

I_{yz}	-Produto de inércia.
J	-Constante de torção de St. Venant.
$[K_e]$	-Matriz de rigidez elástica.
$[K_G]$	-Matriz de rigidez geométrica.
K_y	-Curvatura com relação ao eixo *Y*.
K_z	-Curvatura com relação ao eixo *Z*.
L	-Comprimento do elemento.
L_a	-Função de Lagrange.
[M]	-Matriz de massa.
M_{oy}, M_{oz}	-Máximos momentos de flexão.
M_{ocr}	-Momento crítico estático.
M_o	-Momento com respeito ao ponto o.
M_s	-Momento estático.
M_c	-Momento no centro de cisalhamento.
m	-Massa do elemento por unidade de comprimento.
m_x	-Momento de torção distribuído.
M_y	-Momento de torção com relação ao eixo *Y*.
M_z	-Momento de torção com relação ao eixo *Z*.
M_R	-Tensão resultante de ordem superior.
M_{sv}	-Momento de torção de St. Venant.
M_{max}	-Momento máximo de flexão.
M_{CR}	-Momento crítico de flambagem.
o	-Ponto acima da linha média da seção.
P, N	-Carga axial compressiva.
P_y, P_z, P_θ	-Cargas de Flambagem em flexão e torção.
P_{cr}	-Carga critica de flambagem.
P_e	-Carga crítica de Euler.
q_x, q_y, q_z	-Componentes da carga distribuída nos eixos *X*, *Y* e *Z*.
q_{CR}	-Carga critica de Flambagem.
$q_y max$, $q_z max$	-Cargas máximas de plastificarão nas direções v e w.
Q_z, Q_y	-Forças laterais de excitação.
Q_{zcr}	-Carregamento lateral crítico estático.
r	-Raio vetor.

$r(s)$	-Componente curvilíneo do centro de cisalhamento nas coordenadas de referência.
R	-Distância de um ponto M ao centro de cisalhamento.
s	-Coordenada curvilínea.
S_t	-Perímetro da seção.
s1, s2	-Pontos da coordenada curvilínea.
t	-Espessura da seção.
T	-Momento de torção
T	-Energia cinética.
t_f, t_w	-Espessuras da seção transversal.
T_t	-Momento torsor devido à torção.
T_e	-Momento torsor devido ao empenamento.
U	-Energia de deformação interna e total.
u, v, w	-Componentes do deslocamento do centro de cisalhamento nos eixos X, Y e Z.
u_M, $v_{M,}$, w_M	-Componentes do deslocamento do ponto M nos eixos X, Y e Z.
v_t	-Componente do deslocamento do ponto M na coordenada curvilínea no eixo Y.
V, V_y, V_z	-Esforços cortantes.
v	-Coeficiente de Poisson.
v_o, w_o, θ_o	-Amplitudes dos deslocamentos dependentes do tempo.
v_{max}	-Deslocamentos máximos na direção Y.
$\bar{v}$, $\bar{w}$, $\bar{\theta}$	-Amplitudes modais.
w_t	-Componente do deslocamento do ponto M na coordenada curvilínea no eixo Z.
W	-Energia do trabalho das cargas externas.
w_{max}	-Deslocamentos máximos na direção Z.
X,Y,Z	-Eixos principais
XY, XZ	-Planos paralelos.
x, y, z	-Coordenadas principais do ponto M nos eixos X, Y e Z.

y_{SC}, z_{SC}	-Coordenadas principais do ponto de cisalhamento C nos eixos *Y* e *Z*.
y_{CG}, z_{CG}	-Coordenadas do centro de gravidade.
y_0, y_2, y_4	- Amplitudes dos deslocamentos v_o, w_o, θ_o.
y_1, y_3, y_5	-Velocidades.
α	-Ângulo entre o eixo Y e a tangente à coordenada curvilínea.
β_y, β_z	-Coeficientes de Wagner nos eixos *Y* e *Z*.
β_ω	-Coeficiente de Wagner.
β_v, β_w	-Fatores de amplificação dinâmica nas direções v e w.
δ	-Fator que representa o efeito de flexão.
ξ	-Amortecimento viscoso.
ε_{xx}	-Deformação axial.
ε_1, ε_2	-Componentes da deformação axial.
ε_{xy}	-Deformação de cisalhamento no plano *XY*.
ε_{xz}	-Deformação de cisalhamento no plano *XZ*.
λ	-Autovalores.
Ω_z, Ω_y	-Frequências das forças de excitação.
Ω_{z01}, Ω_{z02}, Ω_{z03}	-Primeira, segunda e terça frequência natural.
ρ	-Densidade do material.
$\sigma_{y\ aço}$	-Tensão de inicio de escoamento do aço.
ω_o	-Frequência natural.
ω_s	-Coordenada setorial ou área setorial principal.
θ_x	-Ângulo de rotação no eixo x.

“There are no constraints on the human mind, no walls around the human spirit, no barriers to our progress except those we ourselves erect"

"There are no great limits to growth because there are no limits of human intelligence, imagination, and wonder"

Ronald Reagan

1
Introdução

Neste primeiro capítulo da dissertação encontra-se uma descrição geral do problema estudado, uma breve revisão bibliográfica, a descrição dos objetivos desta pesquisa e uma síntese dos capítulos que compõem este trabalho.

1.1
Considerações iniciais

Vigas de paredes finas e seção aberta são comumente encontradas na maioria dos ramos da engenharia estrutural, sendo importante garantir que projetos utilizando tais elementos atendam a requisitos de segurança exigidos em normas e regulamentações. Análises preliminares das estruturas de vigas com paredes finas contribuem nesse sentido, prevenindo futuros gastos com reparos. Estes elementos estruturais são, em muitos casos, esbeltos e apresentam problemas de estabilidade sob diversos tipos de carregamento. É, portanto, essencial que engenheiros projetistas saibam avaliar a estabilidade e as características dinâmicas destas estruturas com precisão, bem como a interação entre instabilidade e dinâmica. A maioria das estruturas com elementos estruturais de paredes finas têm seção aberta, resultando em uma baixa resistência à torção, e, em geral, possuem um ou nenhum eixo de simetria (Murray, 1986; Mori e Munaiar Neto, 2009, Allen e Bulson 1980). Nesses casos a análise é complexa devido ao acoplamento entre flexão e torção e devido ao empenamento.

Sabe-se que, quando as seções transversais das vigas têm dois eixos de simetria, o centro de cisalhamento e centro de gravidade da seção transversal coincidem, e a flexão e torção são fenômenos independentes em uma análise linear. No entanto, para um grande número de vigas com seções de paredes finas encontradas na prática, o centro de gravidade e o centro de cisalhamento das seções transversais não são coincidentes. Quando as seções transversais têm um eixo de simetria, a vibração de flexão na direção do eixo de simetria é desacoplada, mas a vibração de flexão na direção perpendicular ao eixo de simetria é acoplada com o modo de vibração torsional, mesmo em uma análise linear. Esta característica tem estimulado pesquisas sobre o comportamento dinâmico de vigas com paredes finas. O acoplamento torna-se ainda mais importante quando se consideram, em perfis com paredes finas, os efeitos da não linearidade geométrica.

Nesta dissertação, um modelo não linear para vigas de seção aberta e paredes finas, considerando grandes deslocamentos, os efeitos de encurtamento e acoplamentos entre flexão e torção, é adotado. Um estudo das frequências naturais, das cargas críticas e da relação frequência-carga axial é apresentado para perfis com diferentes condições de contorno, a saber: simplesmente apoiado, engastado e livre, engastado e apoiado e bi-engastado, e três diferentes modos de torção. Com base nestes resultados, faz-se um estudo detalhado do comportamento dinâmico não linear de um perfil engastado e livre, destacando o efeito do acoplamento não linear na região de ressonância e sua influência na estabilidade dinâmica da estrutura. Para isto são usadas diversas ferramentas de dinâmica não linear, tais como diagramas de bifurcação, respostas no tempo, planos de fase e seções de Poincaré. Os resultados mostram que a consideração dos acoplamentos não lineares é essencial para se avaliar o nível de segurança destas estruturas.

1.2
Breve revisão bibliográfica

Apesar da extensa literatura sobre perfis de parede delgada, pouco se conhece sobre o seu comportamento dinâmico não linear. Formulações para a análise do acoplamento dos esforços de flexão e torção em vigas de paredes finas foram inicialmente desenvolvidas por Timoshenko e Young (1955), Gere e Lin (1958) e Vlasov (1961).

Em particular, a teoria de Vlasov tem desempenhado um papel bastante importante na análise destas estruturas (Barsoum e Gallagher, 1970; Wang e Kitipornchai, 1986; Laudiero e Zaccaria, 1988; Trahair, 1993). Neste modelo, o momento de torção aplicado é equilibrado pelas torções de St-Venant e devido ao empenamento. Entretanto, Gregory (1961), Ghobarah e Tso (1971) e Black (1967), estudando o comportamento de perfis de seção aberta sob grandes deslocamentos, verificaram que as equações contêm termos não lineares que são negligenciados na formulação original de Vlasov, e que levam ao chamado “efeito de encurtamento”. Moore (1986) prova que este efeito é importante e leva a uma melhor correlação entre resultados teóricos e experimentais. Posteriormente esta formulação foi usada para estudar a estabilidade e vibrações lineares de várias estruturas de paredes delgadas.

Para grandes ângulos de torção, vários modelos não lineares têm sido desenvolvidos, levando a sistemas de equações acopladas altamente não lineares (Ghobarah e Tso, 1971; Attard, 1986; Ronagh *et.al.*, 2000). Mohri *et al.* (2001) desenvolveram uma formulação não linear onde as relações de deslocamento são expressas primeiro sem qualquer hipótese simplificadora para a magnitude do ângulo de torção. Relações não lineares entre os momentos de flexão e curvaturas principais são usadas e as equações de equilíbrio são estabelecidas, levando-se em conta os efeitos de encurtamento e o acoplamento entre torção e flexão. Este modelo pode ser utilizado para prever o comportamento das estruturas carregadas em flexão e torção e submetidas a grandes deslocamentos. Posteriormente esta formulação foi usada para estudar a estabilidade e vibrações lineares de várias estruturas de paredes delgadas (Mohri *et al*., 2003, 2008, 2010). Mancilla *et al.* (2014, 2015) partiram desta formulação para estudar as vibrações não lineares de perfis simplesmente apoiados. Esta formulação é a base do presente trabalho.

O comportamento dinâmico não linear e não planar de vigas tem sido objeto de várias pesquisas nas últimas décadas. Uma das primeiras teorias foi desenvolvida por Crespo da Silva e Glynn (1978) para seções compactas onde a componente de torção é condensada estaticamente e o empenamento é desprezado. Rosen e Friedmann (1979), na mesma época, desenvolveram uma formulação para seções compactas considerando o empenamento. Em Crespo da Silva (1988, 1991) e Zaretzky e Crespo da Silva (1994) o acoplamento flexo-torção é estudado considerando empenamento. Schulz e Filippou (1998) desenvolveram um modelo onde um empenamento não uniforme de barras é considerado. Mais recentemente Di Egidio *et al.* (2003a, 2003b) desenvolveram um modelo mecânico não linear para vigas de seção aberta a partir de um contínuo tridimensional. Aproximações para mudanças de curvatura devidas a torção e flexão de mesma ordem de magnitude são consideradas e o empenamento é obtido estendendo a teoria de Vlasov para o regime não linear.

1.3
Base teórica da presente pesquisa

A seguir descrevem-se, em ordem cronológica, os trabalhos que formam a base teórica da presente pesquisa.

Tanaka e Bercin (1999) estudaram as vibrações lineares de perfis de seção transversal assimétrica considerando o acoplamento entre flexão e torção e diversas condições de contorno.

Kollár (2001) analisou as frequências naturais de vigas de paredes delgadas e seção aberta de material composto, modificando a teoria clássica de Vlasov para incluir tanto as deformações por cisalhamento transversal e as induzidas pelo empenamento restringido.

Mohri *et al.* (2001) apresentaram uma análise pós-flambagem de elementos de parede delgada e seção aberta sob compressão axial. Efeitos de deformação e encurtamento são considerados na equação de equilíbrio de torção. Com base no método de Galerkin, as três equações resultantes de flexão e torção, altamente acopladas, são obtidas e resolvidas através do método de Newton-Raphson. Considerando uma viga simplesmente apoiada, obteve os caminhos não lineares de equilíbrio para diferentes perfis.

Arpaci e Bozdag (2002) derivaram e resolveram analiticamente as equações diferenciais que regem as vibrações livres de vigas de paredes finas com seção aberta assimétrica considerando o acoplamento entre as componentes de flexão e a torção.

Mohri *et al.* (2003) estudaram a estabilidade de elementos de parede delgada e seção aberta, derivando uma solução analítica para a carga crítica lateral de vigas sem restrições, chegando a obter também as constantes para os parâmetros de Wagner.

Jun *et al.* (2004) usaram o método da matriz de transferência dinâmica para o cálculo das frequências naturais e modos de vibração de vigas de paredes finas não simétricas.

Mohri *et al.* (2004) estudaram as vibrações de vigas de parede delgada e seção aberta, para entender as características do comportamento pós-flambagem destas estruturas sob cargas axiais e laterais. Nesta análise foi utilizado um modelo que representa a interação não linear de flexão-flexão e acoplamentos de flexo-torção. Os resultados foram obtidos mediante métodos numéricos.

Li *et al.* (2004) determinaram as frequências naturais e modos de vibração de uma viga Timoshenko de parede delgada, carregada axialmente pelo método da matriz de transferência dinâmica.

Mohri *et al.* (2008), baseado em um modelo não linear, derivaram soluções analíticas para elementos de viga-coluna simplesmente apoiados de seção simétrica. As soluções propostas são validadas através de uma análise não linear por elementos finitos, onde a estrutura foi discretizada com elementos de casca.

Vörös (2009) analisou as vibrações de vigas onde o acoplamento entre flexão e torção é induzido por cargas estáticas laterais.

Mohri *et al.* (2010) pesquisaram a estabilidade lateral de elementos de seção monosimétrica de paredes delgadas. Com base em um modelo de elementos finitos, desenvolvido para vigas de parede delgada, sujeitas a grandes ângulos de torção, diferentes tipos de carregamento e considerando os coeficientes de Wagner, os autores chegaram à conclusão que a flambagem lateral das vigas não depende apenas da pré-deformação, mas também da forma da seção e da distribuição de carga.

Di Egidio e Vestroni (2011) validaram numérica e experimentalmente um modelo não linear unidimensional, indeformável por cisalhamento e não extensível, desenvolvido para uma viga de parede delgada com seção transversal aberta.

Stoykov e Ribeiro (2013) pesquisaram as vibrações não planares, livres e forçadas, de vigas com seções transversais não simétricas, no domínio da frequência, pelo método dos elementos finitos versão-p, usando uma formulação geometricamente não linear.

Mohri, *et al*. (2013) pesquisaram os efeitos das forças axiais na flambagem lateral em vigas, no caso de elementos com secções transversais monosimétricas. A forma única, fechada e compacta é estabelecida para a interação do momento lateral de flambagem com forças axiais. Esta nova equação é derivada a partir de um modelo de estabilidade não linear.

Entretanto nenhum destes trabalhou investigou as vibrações não lineares e instabilidade dinâmica destes perfis.

1.4
Objetivos

Este trabalho faz parte da linha de pesquisa em Instabilidade e Dinâmica das Estruturas do Departamento de Engenharia Civil da PUC-Rio. É uma continuidade natural dos trabalhos desenvolvidos por Carvalho (2013) e Mancilla (2014) sobre vibrações não lineares e não planares de vigas esbeltas. O objetivo desta pesquisa é enfatizar o comportamento dinâmico e estudar as vibrações não lineares e não planares do perfil de seção aberta *"C"* de paredes delgadas com um único eixo de simetria, considerando diferentes condições de contorno relativas aos deslocamentos transversais e torção.

1.5
Descrição dos capítulos da dissertação

Esta dissertação está dividida em seis capítulos, sendo o primeiro esta introdução.

No Capítulo 2 são deduzidos, com auxílio do programa de álgebra simbólica Maple, os funcionais de energia e as equações de movimento para uma viga sob carregamentos axiais e laterais. As equações diferenciais parciais de movimento com não linearidades quadráticas e cúbicas são discretizadas pelo método de Galerkin, usando como funções de interpolação os modos de vibração a flexão e torção, sendo as equações ordinárias de movimento daí decorrentes utilizadas nos capítulos seguintes.

No Capítulo 3 faz-se a análise linear do perfil monosimétrico de seção aberta *"C"* de paredes delgadas. Este capítulo apresenta, inicialmente, as equações de movimento linearizadas e o processo para resolver o problema de autovalor. Também, calculam-se as frequências do sistema e as cargas críticas, assim como, as relações entre as cargas aplicadas, frequências e comprimento da viga.

Sabe-se que, de um modo geral, não existem soluções analíticas exatas para as equações diferenciais não lineares com coeficientes periódicos. Assim sendo, o Capítulo 4 trata da análise não linear de uma viga engastada - livre. Para a resolução do sistema, utiliza-se o método de Runge Kutta de quarta ordem, obtendo-se assim as amplitudes modais. Com a finalidade de entender e explicar o comportamento dinâmico não linear apresentam-se os diagramas de bifurcação, respostas no tempo, planos de fase e diagramas de Poincaré para diversos casos de carregamento.

O penúltimo capítulo apresenta, de forma sucinta, as principais conclusões do trabalho e sugestões para trabalhos futuros, culminando a dissertação, no capítulo seis, com as referências bibliográficas.

2.
Formulação Matemática para Análise Não Linear

Neste capítulo é apresentada a formulação utilizada para a obtenção do funcional de energia e das equações de movimento não lineares para vigas e colunas de seção transversal aberta de paredes delgadas, com base no trabalho de Mohri, Azrar e Potier-Ferry (2001). A seguir, apresenta-se o processo de discretização das equações diferenciais parciais de movimento pelo método de Galerkin para diferentes conjuntos de condições de contorno.

2.1
Elementos de seção transversal aberta de paredes delgadas.

Um elemento de barra reta de seção transversal aberta é mostrado na Figura 2.1. Para a formulação do problema adota-se um sistema retangular de coordenadas globais (X,Y,Z), como mostra a Figura 2.1, onde X representa o eixo da barra na configuração inicial indeformada e Y e Z definem a seção transversal, coincidindo com os eixos principais de inércia.

Adota-se como origem do sistema de eixos o centro de gravidade da seção, denotado por CG. Em seções com um único eixo de simetria (monosimétricas) ou assimétricas, o centro de cisalhamento SC, não coincide com o centro de gravidade, sendo suas coordenadas dadas por (y_c, z_c). Um ponto M, ao longo do contorno da seção, utilizado no modelo de Vlasov para torção não uniforme (Vlasov, 1961), é identificado pelas coordenadas (y, z) e pela área setorial ω_s.

As hipóteses fundamentais da teoria de Vlasov para elementos de seção transversal aberta e paredes delgadas (Vlasov, 1961) são:

- O contorno da seção transversal permanece rígido em seu próprio plano durante a deformação.
- As deformações por cisalhamento na superfície média da barra podem ser desprezadas.

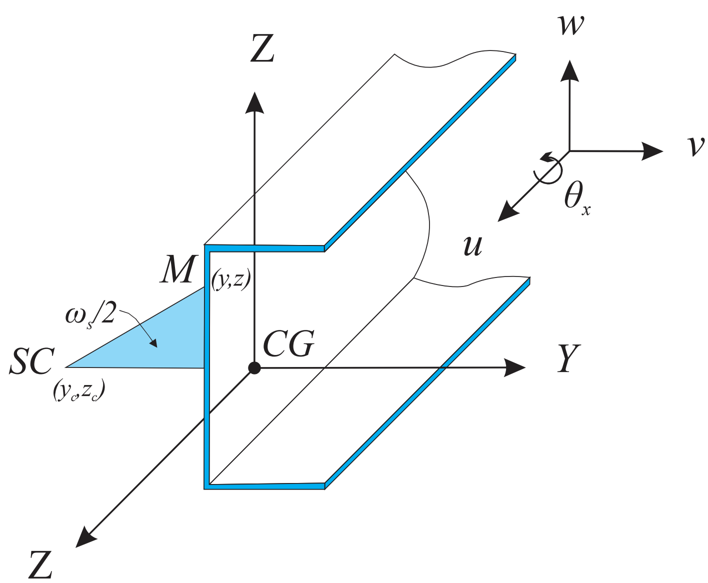


Figura 2.1: Elemento de seção transversal aberta. Sistema de referência e notação.

2.2
Campo de deslocamentos.

O campo de deslocamentos do ponto M pode ser escrito em função das coordenadas do centro de cisalhamento. A primeira hipótese de Vlasov implica que as componentes de deslocamento no plano da seção transversal correspondem a um movimento de corpo rígido, como mostra a Figura 2.2.

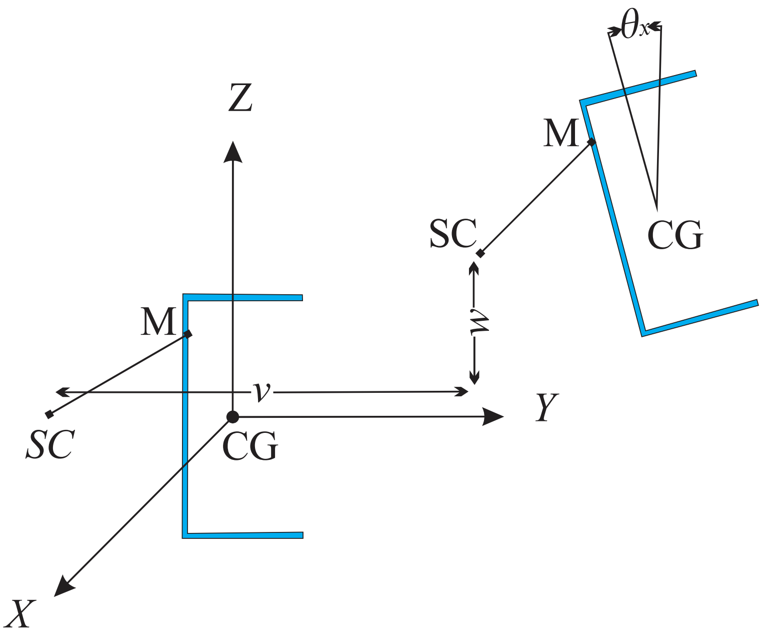


Figura 2.2: Componentes do deslocamento do centro de cisalhamento.

Assim os deslocamentos transversais da viga em *M*, v_M e w_M, são dados por:

$$v_M = v - (z - z_c)sen\theta_x - (y - y_c)(1 - \cos\theta_x) \tag{2.1}$$

$$w_M = w + (y - y_c) sen\theta_x - (z - z_c)(1 - \cos\theta_x) \tag{2.2}$$

Nas Equações (2.1) e (2.2), v e w são as componentes de deslocamento do centro de cisalhamento e θ_x é o ângulo de torção.

O deslocamento longitudinal u_M é obtido a partir da segunda hipótese de Vlasov que considera que as deformações por cisalhamento na superfície média da seção são nulas. Introduzindo no ponto M da seção um sistema de coordenadas curvilíneo s (Figura 2.3), têm-se as componentes de deslocamento deste ponto na direção tangencial e transversal à parede do elemento, v_t e w_t. Assim, a componente na direção X do tensor de deformações de Green, devido ao cisalhamento ao longo do contorno, deve ser nula, ou seja:

$$\varepsilon_{xs} = \frac{\partial u_M}{\partial s} + \frac{\partial v_t}{\partial x} + \frac{\partial v_t}{\partial x}\frac{\partial v_t}{\partial s} + \frac{\partial w_t}{\partial x}\frac{\partial w_t}{\partial s} = 0 \tag{2.3}$$

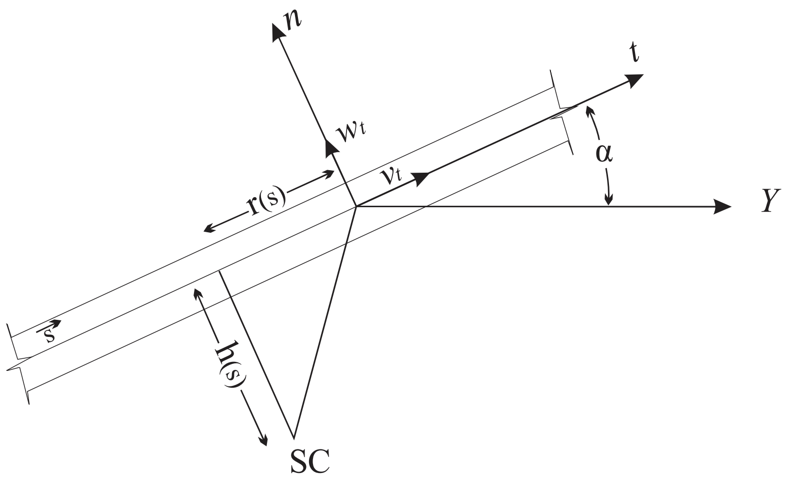


Figura 2.3: Eixo normal e tangencial ao contorno da seção.

A partir das Equações (2.1), (2.2) e (2.3) são obtidos os deslocamentos v_t e w_t, a saber:

$$v_t = v\cos\alpha + w sen\alpha + h(s) sen\theta_x + r(s)(\cos\theta_x - 1) \tag{2.4}$$

$$w_t = -v sen\alpha + w\cos\alpha + r(s) sen\theta_x - h(s)(\cos\theta_x - 1) \tag{2.5}$$

onde α é o angulo entre o eixo Y e a tangente t e $h(s)$ e $r(s)$ são as coordenadas do centro de cisalhamento no sistema de coordenadas curvilíneo, como mostra a Figura 2.3.

Partindo das Equações ~~s~~ (2.3), usando as seguintes relações:

$$\frac{\partial h(s)}{\partial s} = 0 \tag{2.6}$$

$$\frac{\partial r(s)}{\partial s} = 1 \tag{2.7}$$

$$dy = ds\cos\alpha \tag{2.8}$$

$$dz = ds\,sen\alpha \tag{2.9}$$

$$\omega_s = \int_s h(s)ds \tag{2.10}$$

e fazendo a integração com respeito à variável s, obtém-se o deslocamento axial do ponto M dado por:

$$u_M = u - y\left(v^{'}\cos\theta_x + w^{'}sen\theta_x\right) - z\left(w^{'}\cos\theta_x - v^{'}sen\theta_x\right) - \omega\theta_x^{'} \tag{2.11}$$

onde $(')$ representa a derivada com respeito a x.

2.3
Campo de deformações.

A teoria de vigas considera que os deslocamentos axiais u_M, Equação (2.11), são muito menores que os deslocamentos w_M, Equação (2.2), e v_M, Equação (2.1). Com base nesta hipótese têm-se as seguintes componentes do tensor de deformações de Green:

$$\varepsilon_{xx} = u_M^{'} + \frac{1}{2}\left[\left(u_M^{'}\right)^2 + \left(v_M^{'}\right)^2 + \left(w_M^{'}\right)^2\right] \approx u_M^{'} + \frac{1}{2}\left[\left(v_M^{'}\right)^2 + \left(w_M^{'}\right)^2\right] \tag{2.12}$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_M}{\partial y} + \frac{\partial v_M}{\partial x} + \frac{\partial v_M}{\partial x}\frac{\partial v_M}{\partial y} + \frac{\partial w_M}{\partial x}\frac{\partial w_M}{\partial y}\right) \tag{2.13}$$

$$\varepsilon_{xz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_M}{\partial z} + \frac{\partial w_M}{\partial x} + \frac{\partial v_M}{\partial x}\frac{\partial v_M}{\partial z} + \frac{\partial w_M}{\partial x}\frac{\partial w_M}{\partial z}\right) \tag{2.14}$$

Substituindo as Equações (2.1), (2.2) e (2.11) nas Equações (2.12) a (2.14), chega-se às seguintes expressões para as deformações:

$$\varepsilon_{xx} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \tag{2.15}$$

$$\varepsilon_1 = u^{'} - y\left(v''\cos\theta_x + w''sen\theta_x\right) - z\left(w''\cos\theta_x - v''sen\theta_x\right) - \omega\theta_x^{''} \tag{2.16}$$

$$\begin{aligned}\varepsilon_2 = {} & \frac{1}{2}\left(v'^2 + w'^2 + R^2\theta_x'^2\right) - y_c\theta_x^{'}\left(w^{'}\cos\theta_x - v^{'}sen\theta_x\right) + \\ & z_c\theta_x^{'}\left(v^{'}\cos\theta_x + w^{'}sen\theta_x\right)\end{aligned} \tag{2.17}$$

$$\varepsilon_{xy} = -\frac{1}{2}\left(z - z_c + \frac{\partial \omega_s}{\partial y} \right)\theta_x^{'} \tag{2.18}$$

$$\varepsilon_{xz} = \frac{1}{2}\left(y - y_c + \frac{\partial \omega_s}{\partial z} \right)\theta_x^{'} \tag{2.19}$$

onde R é a distância entre o centro de cisalhamento e o ponto M, dada pela seguinte relação:

$$R^2 = (y - y_{sc})^2 + (z - z_{sc})^2 \tag{2.20}$$

2.4
Formulação variacional.

Tendo em conta as hipóteses anteriores, as equações não lineares de movimento podem ser obtidas a partir do princípio variacional de Hamilton, considerando a função de Lagrange $L_\alpha = U - T + W$, onde U é a energia interna de deformação, T a energia cinética e W o trabalho das cargas externas. A seguir, mostra-se a variação das parcelas de energia para vigas de paredes delgadas e seção aberta.

2.4.1
Variação de energia interna de deformação.

A variação da energia interna de deformação de um corpo elasticamente deformado, U, é dada por:

$$\delta U = \int_L \int_A \left(\sigma_{xx}\delta\varepsilon_{xx} + 2\sigma_{xy}\delta\varepsilon_{xy} + 2\sigma_{xz}\delta\varepsilon_{xz} \right) dA\, dx \tag{2.21}$$

onde σ_{ij} é o tensor de tensões de Piola-Kirchoff.

Utilizando as Equações (2.15) a (2.20), obtém-se a variação dos componentes do tensor de deformações;

$$\begin{aligned} \delta\varepsilon_{xx} = {} & \delta u' - y(\delta v''\cos\theta_x + \delta w'' sen\theta_x) - y(w''\cos\theta_x - v'' sen\theta_x)\delta\theta_x - \\ & z(\delta w''\cos\theta_x - \delta v'' sen\theta_x) + z(w'' sen\theta_x + v''\cos\theta_x)\delta\theta_x - \omega\delta\theta_x^{''} + \\ & \delta v'(v' + y_c\theta_x^{'} sen\theta_x + z_c\theta_x^{'}\cos\theta_x) + \delta w'(w' - y_c\theta_x^{'}\cos\theta_x + z_c\theta_x^{'} sen\theta_x) + \\ & \delta\theta_x^{'}\left[R^2\theta_x^{'} + y_c(-w'\cos\theta_x + v' sen\theta_x) + z_c(v'\cos\theta_x + w' sen\theta_x)\right] + \\ & \delta\theta_x\left[y_c(w'\theta_x^{'} sen\theta_x + v'\theta_x^{'}\cos\theta_x) + z_c(w'\theta_x^{'}\cos\theta_x - v'\theta_x^{'} sen\theta_x)\right] \end{aligned} \tag{2.22}$$

$$\delta\varepsilon_{xy} = -\frac{1}{2}\left(z - z_c + \frac{\partial \omega_s}{\partial y} \right)\delta\theta_x^{'} \tag{2.23}$$

$$\delta\varepsilon_{xz} = \frac{1}{2}\left(y - y_c - \frac{\partial\omega_s}{\partial y} \right)\delta\theta_x^{'} \tag{2.24}$$

Finalmente, a variação da energia interna de deformação pode ser expressa em função das forças internas que agem em um elemento da seção transversal da viga em seu estado deformado, as quais são definidas por:

$$N = \int_A \sigma_{xx} dA \tag{2.25}$$

$$M_y = \int_A \sigma_{xx} z\, dA \tag{2.26}$$

$$M_z = -\int_A \sigma_{xx} y\, dA \tag{2.27}$$

$$B_\omega = -\int_A \sigma_{xx}\omega_s\, dA \tag{2.28}$$

$$M_{sv} = \int_A \left[\sigma_{xz}\left(y - y_c - \frac{\partial\omega_s}{\partial z} \right) - \sigma_{xy}\left(z - z_c + \frac{\partial\omega_s}{\partial z} \right) \right] dA \tag{2.29}$$

$$M_R = \int_A \sigma_{xx} R^2\, dA \tag{2.30}$$

onde N é a força axial, M_y e M_z são os momentos fletores, B_ω é o bi momento, M_{sv} é o momento de torção de Saint Venant e M_R é uma resultante de ordem superior. Estes esforços generalizados são ilustrados na Figura 2.4.

Substituindo as equações (2.22) a (2.30) na equação (2.21), chega-se à seguinte expressão:

$$\begin{aligned}
\delta U = & \int_L N\left[\delta u' + \delta v'\left(v' + y_c\theta_x^{'} sen\theta_x + z_c\theta_x^{'}\cos\theta_x\right) + \delta w'\left(w' - y_c\theta_x^{'}\cos\theta_x + z_c\theta_x^{'} sen\theta_x\right)\right]dx + \\
& \int_L N\delta\theta_x\left[y_c\left(w'\theta_x^{'} sen\theta_x + v'\theta_x^{'}\cos\theta_x\right) + z_c\left(w'\theta_x^{'}\cos\theta_x - v'\theta_x^{'} sen\theta_x\right)\right]dx + \\
& \int_L N\delta\theta_x^{'}\left[y_c\left(-w'\cos\theta_x + v' sen\theta_x\right) + z_c\left(v'\cos\theta_x + w' sen\theta_x\right)\right]dx - \\
& \int_L M_y\left(\delta w''\cos\theta_x - \delta v'' sen\theta_x\right)dx + \int_L M_y\left(w'' sen\theta_x + v''\cos\theta_x\right)\delta\theta_x dx + \\
& \int_L M_z\left(\delta v''\cos\theta_x + \delta w'' sen\theta_x\right)dx + \int_L M_z\left(w''\cos\theta_x - v'' sen\theta_x\right)\delta\theta_x dx + \\
& \int_L B_\omega\delta\theta_x^{''} dx + \int_L M_R\theta_x^{'}\delta\theta_x^{'} dx + \int_L M_{sv}\delta\theta_x^{'} dx
\end{aligned} \tag{2.31}$$

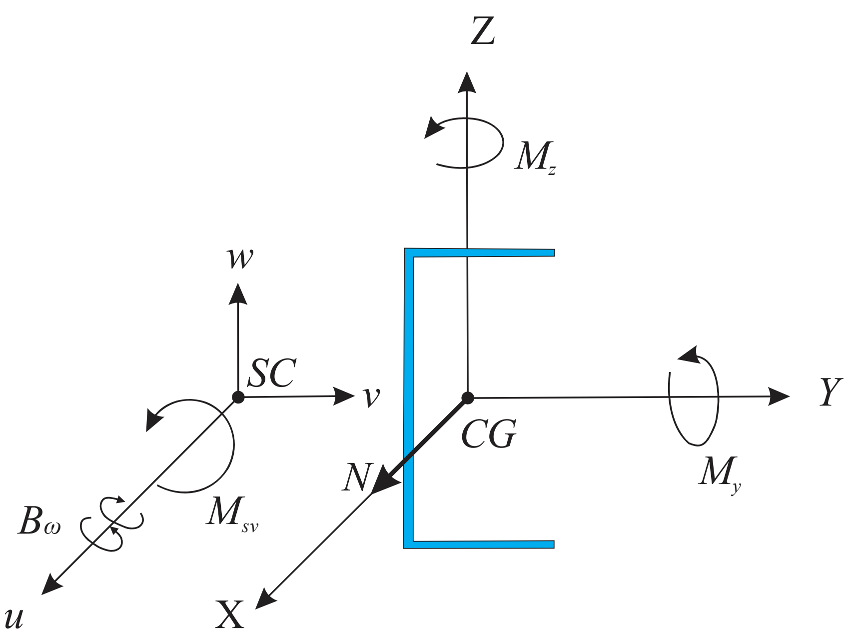


Figura 2.4: Forças resultantes na seção.

2.4.2 Variação do trabalho das cargas externas.

As cargas aplicadas ao elemento podem ser reduzidas às componentes q_x , q_y , q_z e a um momento torsor m_x , resultante das excentricidades e_z e e_y das cargas q_y e q_z com relação ao centro de cisalhamento, respectivamente, como ilustra a Figura 2.5.

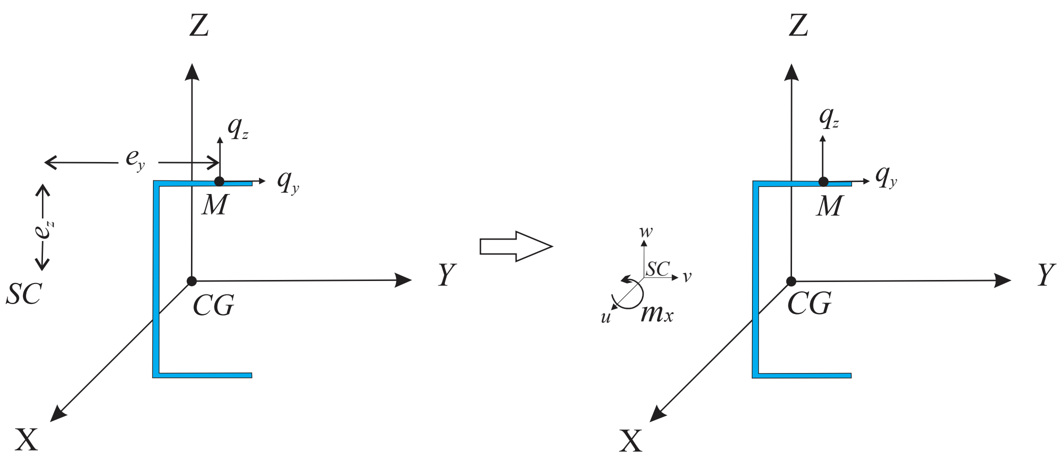


Figura 2.5: Componentes de carga aplicada à barra.

A variação do trabalho das cargas externas é dada por:

$$\delta W = \int_L \left(q_x \delta u + q_y \delta v + q_z \delta w + m_x \delta \theta_x \right) dx \tag{2.32}$$

onde m_x é função das componentes da carga transversal q_y e q_z e das excentricidades com relação ao centro de cisalhamento e_y e e_z .

Da Figura 2.6 tem-se que:

$$
\begin{aligned}
w_M &= w + e_y sen\theta_x - e_z(1-\cos\theta_x) \\
v_M &= v - e_y(1-\cos\theta_x) - e_z sen\theta_x
\end{aligned}
\tag{2.33}
$$

onde w_M , como enunciado anteriormente, é o deslocamento na direção do eixo z do ponto M.

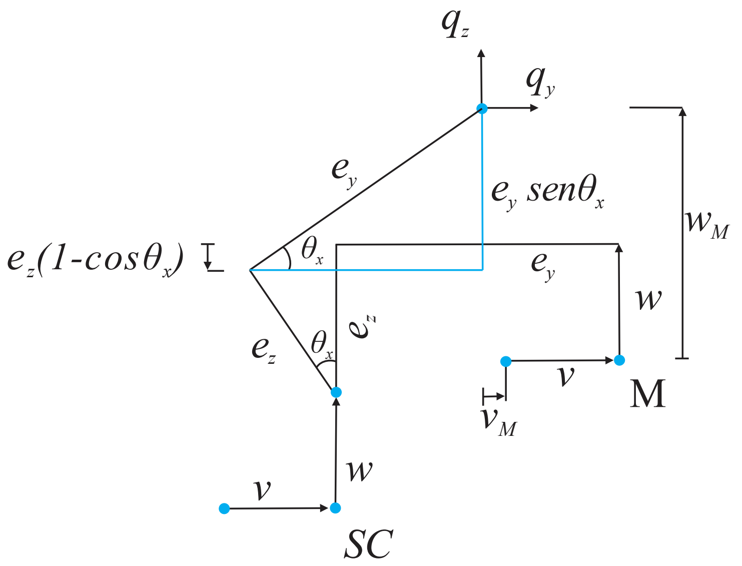


Figura 2.6: Deslocamentos de um ponto M gerado por uma rotação θ_x .

Fazendo a variação da Equação (2.33), encontra-se que:

$$
\begin{aligned}
\delta w_M &= \delta w + (e_y \cos\theta_x - e_z sen\theta_x)\delta\theta_x \\
\delta v_M &= \delta v - (e_y sen\theta_x + e_z \cos\theta_x)\delta\theta_x
\end{aligned}
\tag{2.34}
$$

Tem-se assim que a Equação (2.32) toma a seguinte forma:

$$
\begin{aligned}
\delta W &= \int_L [q_x\delta u + q_y\delta v + q_z\delta w + q_z(e_y\cos\theta_x - e_z sen\theta_x)\delta\theta_x - q_y(e_y sen\theta_x + e_z\cos\theta_x)\delta\theta_x]dx = \\
&\int_L [q_x\delta u + q_y\delta v + q_z\delta w + m_x\delta\theta_x]dx
\end{aligned}
\tag{2.35}
$$

Fazendo a integração por partes da equação (2.31), usando a equação (2.35), e coletando os termos referentes aos deslocamentos virtuais δu , δv , δw , e $\delta\theta_x$ chega-se às seguintes equações de equilíbrio estático:

$$-N' = q_x \tag{2.36}$$

$$(M_z\cos\theta_x)'' + (M_y sen\theta_x)'' - P\left(v' + (y_c sen\theta_x + z_c\cos\theta_x)\theta_x'\right)' = q_y \tag{2.37}$$

$$-(M_y\cos\theta_x)'' + (M_z sen\theta_x)'' - P\left(w' - (y_c\cos\theta_x - z_c sen\theta_x)\theta_x'\right)' = q_z \tag{2.38}$$

$$B_{\omega}'' - (M_{sv})' - (M_R\theta_x')' + M_y(w''sen\theta_x + v''\cos\theta_x) + \\ M_z(w''\cos\theta_x - v''sen\theta_x) + \\ P[y_c\theta_x'(w'sen\theta_x + v'\cos\theta_x) + z_c\theta_x'(w'\cos\theta_x - v'sen\theta_x)] - \\ N\,y_c(-w'\cos\theta_x + v'sen\theta_x)' - P\,z_c(v'\cos\theta_x + w'sen\theta_x)' = m_x \quad (2.39)$$

2.4.3.
Variação da energia cinética.

Utilizando as equações (2.1), (2.2) e (2.11), a energia cinética de um elemento de paredes delgadas, com massa específica constante ρ, é dada por:

$$T = \frac{1}{2}\int_L\int_A \rho\left(\left(\frac{\partial u_M}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_M}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial w_M}{\partial t}\right)^2\right) dA\,dx \quad (2.40)$$

Fazendo-se a integração da Equação (2.40) ao longo da área e desprezando os termos de inércia a rotação, chega-se à seguinte equação:

$$T = \frac{1}{2}\int_L m\left(\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2 + I_o\left(\frac{\partial \theta_x}{\partial t}\right)^2 + z_c\frac{\partial v}{\partial t}\frac{\partial \theta_x}{\partial t} - y_c\frac{\partial w}{\partial t}\frac{\partial \theta_x}{\partial t}\right) dx \quad (2.41)$$

onde m é a massa do elemento por unidade de comprimento e I_o é o momento polar de inércia.

A variação da energia cinética é dada por:

$$\delta T = \int_L m\left(\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial}{\partial t}\partial u + \left(\frac{\partial v}{\partial t} + z_c\frac{\partial \theta_x}{\partial t}\right)\frac{\partial}{\partial t}\partial v + \left(\frac{\partial w}{\partial t} - y_c\frac{\partial \theta_x}{\partial t}\right)\frac{\partial}{\partial t}\partial w + \left(I_o\frac{\partial \theta_x}{\partial t} + z_c\frac{\partial v}{\partial t} - y_c\frac{\partial w}{\partial t}\right)\frac{\partial}{\partial t}\partial \theta_x\right) dx \quad (2.42)$$

Fazendo a integração por partes da equação (2.42) e coletando os termos em função dos deslocamentos virtuais δu, δv, δw, e $\delta\theta_x$ chega se às seguintes expressões:

$$\int_L -m\left(\frac{d^2u}{dt^2}\right)\partial u\,dx \quad (2.43)$$

$$\int_L -m\left(\frac{d^2v}{dt^2} + z_c\frac{d^2\theta_x}{dt^2}\right)\partial v\,dx \quad (2.44)$$

$$\int_L -m\left(\frac{d^2w}{dt^2} - y_c\frac{d^2\theta_x}{dt^2}\right)\partial w\,dx \quad (2.45)$$

$$\int_L -m\left(I_o\frac{d^2\theta_x}{dt^2} + z_c\frac{d^2v}{dt^2} - y_c\frac{d^2w}{dt^2}\right)\partial \theta_x\,dx \quad (2.46)$$

2.5 Relações constitutivas.

Todas as equações anteriores não fizeram referência ao comportamento do material do elemento e à sua relação tensão-deformação. Neste trabalho, considera-se um material com comportamento elástico linear com módulo de Young E, e módulo de elasticidade transversal G, com $G = E/2(1+\nu)$, sendo ν o coeficiente de Poisson do material. Assim sendo, as resultantes das tensões são dadas por:

$$N = EA\left(u' + \frac{1}{2}\left(v'^2 + w'^2 + I_o\theta_x'^2\right) + z_c v'\theta_x' - y_c w'\theta_x'\right) \tag{2.47}$$

$$M_y = -EI_y\left(k_y \cos\theta_x - k_z sen\,\theta_x - \beta_z sen\,\theta_x'^2\right) \tag{2.48}$$

$$M_z = EI_z\left(k_z \cos\theta_x + k_y sen\,\theta_x - \beta_y sen\,\theta_x'^2\right) \tag{2.49}$$

$$B_\omega = EI_\omega\left(\theta_x'' - \beta_\omega\theta_x'^2\right) \tag{2.50}$$

$$M_{sv} = GJ\theta_x' \tag{2.51}$$

$$\begin{aligned} M_R = NI_o - 2EI_z\beta_y\left(v''\cos\theta_x + w''sen\theta_x\right) - 2EI_y\beta_z\left(w''\cos\theta_x + v''sen\theta_x\right) - \\ 2EI_\omega\beta_\omega\theta_x'' + \frac{1}{2}E\left(I_R - AI_o^2\right)\theta_x'^2 \end{aligned} \tag{2.52}$$

onde k_y e k_z são as curvaturas do elemento, I_y e I_z são os momentos de inércia com relação aos eixos Y e Z, respectivamente, J é a constante de torção de Saint Venant, I_ω é a constante de empenamento e β_y, β_z e β_ω são os coeficientes de Wagner (Mohri, Brouki e Roth, 2003).

Estes parâmetros geométricos são obtidos através das seguintes integrais:

$$I_y = \int_A z^2\, dA \tag{2.53}$$

$$I_z = \int_A y^2\, dA \tag{2.54}$$

$$I_\omega = \int_A \omega^2\, dA \tag{2.55}$$

$$\beta_y = \frac{1}{2I_z}\int_A y\left(y^2 + z^2\right)dA - y_c \tag{2.56}$$

$$\beta_z = \frac{1}{2I_y}\int_A z\left(y^2 + z^2\right)dA - z_c \tag{2.57}$$

$$\beta_\omega = \frac{1}{2I_\omega}\int_A \omega\left(y^2 + z^2\right)dA \qquad (2.58)$$

Adicionalmente, tem-se que I_o é o momento polar de inércia em torno do centro de cisalhamento e I_R é o quarto momento de inércia em torno do centro de cisalhamento. Suas expressões são:

$$I_o = \frac{I_y + I_z}{A} + y_c^2 + z_c^2 \qquad (2.59)$$

$$I_R = \int_A \left[(y - y_c)^2 + (z - z_c)^2\right]^2 dA \qquad (2.60)$$

Partindo da teoria clássica de flexão, as seguintes aproximações de segunda ordem são adotadas para as curvaturas:

$$k_y = \frac{w''}{\sqrt{1 - w'^2}} \approx w''\left(1 + \frac{w'^2}{2}\right) \qquad (2.61)$$

$$k_z = \frac{v''}{\sqrt{1 - v'^2}} \approx v''\left(1 + \frac{v'^2}{2}\right) \qquad (2.62)$$

Finalmente, as funções $\cos\theta_x$ e $\sin\theta_x$ são aproximadas pelos dois primeiros termos de sua expansão em séries de Taylor, ou seja:

$$\cos\theta_x = 1 - \frac{\theta_x^2}{2} \qquad (2.63)$$

$$sen\,\theta_x = \theta_x - \frac{\theta_x^3}{6} \qquad (2.64)$$

2.6.
Equações de movimento.

Após determinar as parcelas do funcional de energia nas seções anteriores, para a obtenção das equações de movimento, tem-se que:

$$\delta(U - T + W) = 0 \qquad (2.65)$$

A partir da Equação (2.65) e considerando os termos não lineares até a terceira ordem, chega-se às seguintes equações de movimento:

$$-\frac{dN}{dx} = q_x \qquad (2.66)$$

$$
\begin{aligned}
&m\left(\frac{d^2v}{dt^2}+z_c\frac{d^2\theta_x}{dt^2}\right)+EI_z\left(v^{(4)}+3v'v''v'''+v''^3+\frac{v^{(4)}v'^2}{2}\right)-\\
&N\left[v''+z_c\theta_x''+y_c\left(\theta_x\theta_x''+\theta_x'^2\right)\right]+\\
&\left(EI_z-EI_y\right)\left(w^{(4)}\theta_x+2w'''\theta_x'+w''\theta_x''-v^{(4)}\theta_x^2-4v'''\theta_x\theta_x'-2v''\theta_x\theta_x''-2v''\theta_x'^2\right)=q_y
\end{aligned}
\tag{2.67}
$$

$$
\begin{aligned}
&m\left(\frac{d^2w}{dt^2}-y_c\frac{d^2\theta_x}{dt^2}\right)+EI_y\left(w^{(4)}+3w'w''w'''+w''^3+\frac{w^{(4)}w'^2}{2}\right)-\\
&N\left[w''-y_c\theta_x''+z_c\left(\theta_x\theta_x''+\theta_x'^2\right)\right]+\\
&\left(EI_z-EI_y\right)\left(v^{(4)}\theta_x+2v'''\theta_x'+v''\theta_x''+w^{(4)}\theta_x^2+4w'''\theta_x\theta_x'+2w''\theta_x\theta_x''+2w''\theta_x'^2\right)=q_z
\end{aligned}
\tag{2.68}
$$

$$
\begin{aligned}
&m\left(I_o\frac{d^2\theta_x}{dt^2}+z_c\frac{d^2v}{dt^2}-y_c\frac{d^2w}{dt^2}\right)+EI_\omega\theta_x^{(4)}-GJ\theta_x''-\frac{3}{2}EI_t\theta_x'^2\theta_x''-\\
&\qquad N\left[I_o\theta_x''-y_c\left(w''-v''\theta_x\right)+z_c\left(v''+w''\theta_x\right)\right]+\\
&\qquad \left(EI_z-EI_y\right)\left(v''w''-v''^2\theta_x+w''^2\theta_x\right)=m_x
\end{aligned}
\tag{2.69}
$$

onde $m_x=(q_ze_y-q_ye_z)(1-\theta_x^2/2)-(q_ze_z+q_ye_y)(\theta_x-\theta_x^3/6)$ é o momento torsor, $(.)^{(4)}$ é a derivada de quarta ordem em função de X e o termo I_t é um parâmetro geométrico que denota uma constante de torção de ordem mais elevada, dada pela seguinte equação:

$$I_t=I_R-AI_o^2 \tag{2.70}$$

2.7 Aplicação do método de Galerkin

Aplicando o método de Galerkin às equações diferencias parciais de movimento, dadas nas Equações (2.68) a (2.69), elas são reduzidas a um sistema de equações diferencias ordinárias no domínio do tempo. As equações discretizadas de movimento são obtidas, para cada uma das condições de contorno, usando apenas o primeiro modo de flexão e de torção, a saber:

$$v(x,t)=v_o(t)f(x) \tag{2.71}$$

$$w(x,t)=w_o(t)g(x) \tag{2.72}$$

$$\theta(x,t)=\theta_o(t)h(x) \tag{2.73}$$

onde $v_o(t)$, $w_o(t)$ e $\theta_o(t)$ são as amplitudes modais dependentes do tempo, associadas aos três graus de liberdade, $f(x)=g(x)$ é o primeiro modo de vibração a flexão da viga e $h(x)$ é o primeiro modo de torção. As expressões analíticas para as funções $f(x)\ e\ g(x)$ são apresentadas por Blevins (1980) para todas as combinações de contorno clássicas de vigas esbeltas.

2.7.1 Funções de interpolação de flexão para quatro conjuntos de condições de contorno

Os modos de vibração transversal de vigas de comprimento L e seção uniforme são apresentados a seguir considerando quatro casos clássicos de condições de contorno: viga engastada e livre (item 2.7.1.1), viga engastada e apoiada (item 2.7.1.2), viga bi-engastada (item 2.7.1.3) e viga simplesmente apoiada (item 2.7.1.4).

2.7.1.1 Viga engastada e livre

Os modos de vibração transversal de uma viga engastada e livre são dados por (Blevins, 1980):

$$y_i\left(\frac{x}{L}\right)=\cosh\left(\frac{\lambda_i x}{L}\right)-\cos\left(\frac{\lambda_i x}{L}\right)-\sigma_i\left[senh\left(\frac{\lambda_i x}{L}\right)-sen\left(\frac{\lambda_i x}{L}\right)\right] \tag{2.74}$$

onde

$$\sigma_i=\frac{senh\lambda_i-sen\lambda_i}{\cosh\lambda_i+\cos\lambda_i} \tag{2.75}$$

sendo λ_i (i=1,2,3,..), parâmetros adimensionais de frequência, as raízes da equação

$$\cos\lambda_i\cosh\lambda_i+1=0 \tag{2.76}$$

Para o primeiro modo de vibração tem-se $\lambda_1=1,8751040$ e $\sigma_1=0,734095514$. Este modo é ilustrado na Figura 2.7.a.

2.7.1.2 Viga engastada e apoiada

Os modos de vibração transversal de uma viga engastada e apoiada são dados por (Blevins, 1980):

$$y_i\left(\frac{x}{L}\right)=\cosh\left(\frac{\lambda_i x}{L}\right)-\cos\left(\frac{\lambda_i x}{L}\right)-\sigma_i\left[senh\left(\frac{\lambda_i x}{L}\right)-sen\left(\frac{\lambda_i x}{L}\right)\right] \tag{2.77}$$

onde

$$\sigma_i = \frac{\cosh\lambda_i - \cos\lambda_i}{senh\lambda_i - sen\lambda_i} \tag{2.78}$$

sendo λ_i as raízes da equação

$$\tan\lambda_i = \tanh\lambda_i \tag{2.79}$$

Para o primeiro modo de vibração tem-se $\lambda_1 = 3{,}92660231$ e $\sigma_1 = 1{,}000777304$. Este modo é ilustrado na Figura 2.7.b.

2.7.1.3
Viga bi-engastada

Os modos de vibração transversal de uma viga bi-engastada são dados por (Blevins, 1980):

$$y_i\left(\frac{x}{L}\right) = \cosh\left(\frac{\lambda_i x}{L}\right) - \cos\left(\frac{\lambda_i x}{L}\right) - \sigma_i\left[senh\left(\frac{\lambda_i x}{L}\right) - sen\left(\frac{\lambda_i x}{L}\right)\right] \tag{2.80}$$

onde

$$\sigma_i = \frac{\cosh\lambda_i - \cos\lambda_i}{senh\lambda_i - sen\lambda_i} \tag{2.81}$$

sendo λ_i as raízes da equação

$$\cos\lambda_i \, \cosh\lambda_i = 1 \tag{2.82}$$

Para o primeiro modo de vibração tem-se $\lambda_1 = 4{,}73004074$ e $\sigma_1 = 0{,}982502215$. Este modo é ilustrado na Figura 2.7.c.

2.7.1.4
Viga simplesmente apoiada

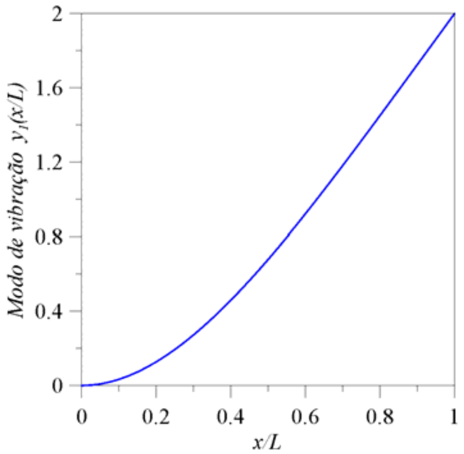
Os modos de vibração transversal de uma viga simplesmente apoiada são dados por (Blevins, 1980):

$$y_i\left(\frac{x}{L}\right) = sen\left(\frac{\lambda_i \, x}{L}\right); \quad \lambda_i = i\,\pi \tag{2.83}$$

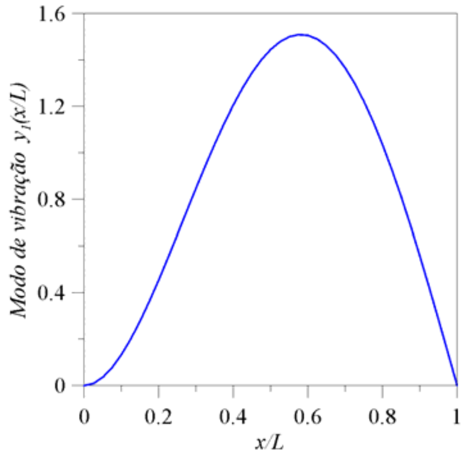
onde $\lambda_1 = \pi$

Por fim, as freqüências naturais de flexão f_i (em hertz) são obtidas a partir das raízes λ_i através da expressão:

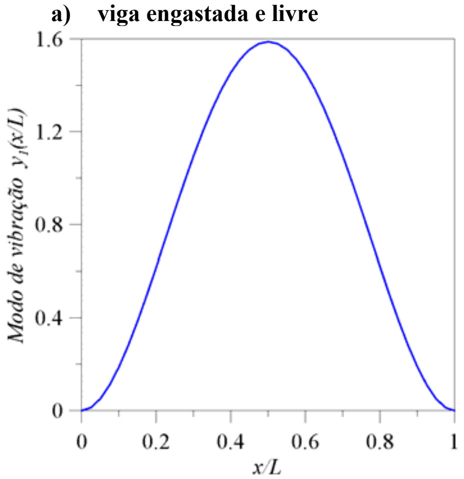
$$f_i = \frac{\lambda_i^2}{2\pi L^2}\left(\frac{EI}{m}\right)^{1/2}, \quad i = 1, 2, 3, ... \tag{2.84}$$



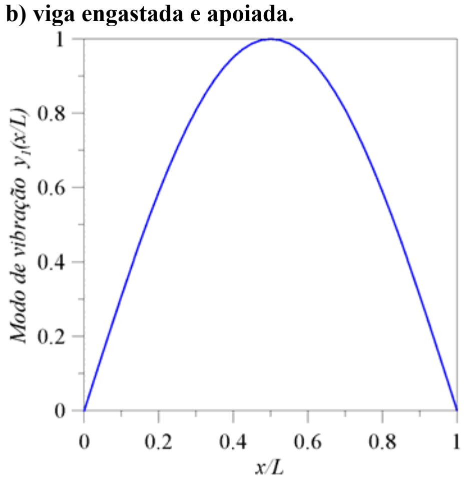
a) viga engastada e livre



b) viga engastada e apoiada.



c) Viga bi-engastada



d) viga simplesmente apoiada

Figura 2.7: Modos de flexão para as diferentes condições de contorno.

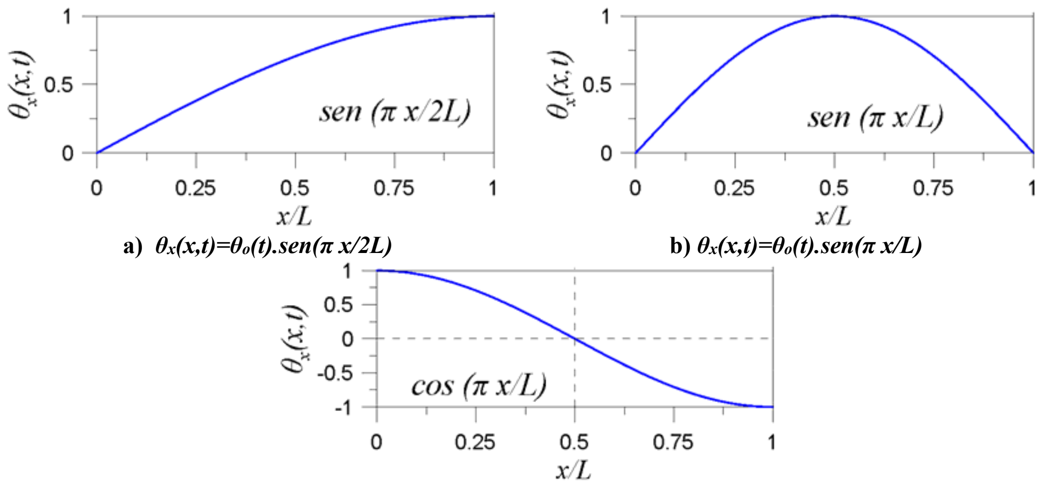
Para estudar o efeito da torção nas vibrações de perfis esbeltos consideram-se três possibilidades:

$$\theta_x(x,t) = \theta_o(t) sen\left(\frac{\pi x}{2L}\right) \tag{2.85}$$

$$\theta_x(x,t) = \theta_o(t) sen\left(\frac{\pi x}{L}\right) \tag{2.86}$$

$$\theta_x(x,t) = \theta_o(t) \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) \tag{2.87}$$

que correspondem ao primeiro modo de vibração de torção de um eixo com diferente condições de contorno (Blevins, 1980). Estes modos são ilustrados na Figura 2.8.



a) $\theta_x(x,t)=\theta_o(t).sen(\pi\ x/2L)$ b) $\theta_x(x,t)=\theta_o(t).sen(\pi\ x/L)$

c) $\theta_x(x,t)=\theta_o(t).cos\ (\pi\ x/L)$

Figura 2.8: Modos de Torção

Para cada uma das três funções de flexão, Equações (2.74) a (2.83), e para cada conjunto de condições de contorno a torção, Equações (2.85) a (2.87), obtém-se, aplicando o método de Galerkin, um sistema de três equações de movimento não lineares acopladas que deve ser resolvido através de métodos numéricos. As equações de movimento não lineares discretizadas para cada conjunto de funções de interpolação são apresentadas no Apêndice A.

3
Análise Linear

3.1
Introdução

O presente capítulo apresenta o cálculo das frequências naturais, das cargas críticas axiais e da relação entre carga axial e frequência para diversas condições de contorno com o intuito de mostrar o efeito da assimetria da seção e do acoplamento entre flexão e torção nas vibrações e estabilidades da estrutura. Para isto consideram-se os quatro conjuntos de condições de contorno de flexão (Figura 2.7) e os três diferentes modos de torção (Figura 2.8) especificados no Capítulo 2.

3.2
Equações diferenciais de movimento linearizadas

Linearizando o sistema de equações de movimento (2.67) a (2.69), obtêm-se as seguintes equações diferencias parciais:

$$m\left(\frac{d^2v}{dt^2}+z_c\frac{d^2\theta_x}{dt^2}\right)+EI_zv^{(4)}-P\left(v^{''}+z_c\theta_x^{''}\right)=q_y \tag{3.1}$$

$$m\left(\frac{d^2w}{dt^2}-y_c\frac{d^2\theta_x}{dt^2}\right)+EI_yw^{(4)}-P\left(w^{''}-y_c\theta_x^{''}\right)=q_z \tag{3.2}$$

$$\begin{aligned}&m\left(I_o\frac{d^2\theta_x}{dt^2}+z_c\frac{d^2v}{dt^2}-y_c\frac{d^2w}{dt^2}\right)+EI_\omega\theta_x^{(4)}-GJ\theta_x^{''}-\\&\qquad P\left(I_o\theta_x^{''}-y_cw^{''}+z_cv^{''}\right)=m_x\end{aligned} \tag{3.3}$$

Verifica-se que o acoplamento no sistema linearizado aparece nos termos de inércia, I_y, I_z, I_ω e I_o, e nos termos relativos ao carregamento axial, P, sendo função dos parâmetros geométricos y_c e z_c, que definem a posição do centro de cisalhamento, SC. Isto significa que em seções monosimétricas ou assimétricas onde o centro de gravidade (CG) não coincide com o centro de cisalhamento da seção, há sempre modos de vibração e flambagem com acoplamento entre flexão e torção.

Para calcular as frequências naturais e cargas críticas, é preciso linearizar, para cada conjunto de condições de contorno, as equações diferenciais ordinárias de movimento obtidas a partir do método de Galerkin e apresentadas no Apêndice A (Equações A.1.1 a A.1.36).

3.3 Problema de Autovalor

Para avaliar a possibilidade de ocorrência da ressonância, faz-se necessário conhecer as frequências naturais da estrutura. Estas são obtidas a partir do problema de vibração livre não amortecida, descrito pelas equações diferenciais lineares com coeficientes constantes e que podem ser expressas matricialmente como:

$$[M]\{\ddot{U}\}+\{[K_e]-P[K_G]\}\{U\}=0 \tag{3.4}$$

onde $\{U\}$ é o vetor dos deslocamentos, $\{\ddot{U}\}$ é o vetor das acelerações, $[M]$ é a matriz de massa, $[K_e]$ matriz de rigidez elástica, $[K_G]$ é matriz de rigidez geométrica e P a força axial.

Para o cálculo das frequências naturais da estrutura descarregada, tem-se o seguinte problema de autovalor:

$$[M]\{\ddot{U}\}+[K_e]\{U\}=0 \tag{3.5}$$

cuja solução é da forma:

$$v_o(t)=\bar{v}\,e^{i\omega_o t} \tag{3.6}$$

$$w_o(t)=\bar{w}\,e^{i\omega_o t} \tag{3.7}$$

$$\theta_o(t)=\bar{\theta}\,e^{i\omega_o t} \tag{3.8}$$

onde ω_o é a frequência natural e $\bar{v}$, $\bar{w}$ e $\bar{\theta}$ são as amplitudes modais.

Da substituição das Equações (3.6) a (3.8) na Equação (3.5), chega-se à seguinte equação característica do problema de autovalor:

$$\left|[K_e-\lambda M]\right|=0 \tag{3.9}$$

onde:

$$\lambda=\omega_o^2 \tag{3.10}$$

ou seja, os autovalores representam o quadrado das frequências naturais e os autovetores, os modos de vibração.

Em um problema de instabilidade linearizado, o cálculo da carga crítica e do modo crítico também resulta em um problema de autovalor generalizado da forma:

$$\left|\left[K_e - P\,K_G\right]\right| = 0 \tag{3.11}$$

onde a carga crítica corresponde ao menor autovalor.

As frequências naturais da estrutura carregada axialmente e a relação entre carga axial e frequência natural de vibração podem ser obtidas através da solução do sistema dado pela Equação (3.4).

Da substituição das Equações (3.6) a (3.8) na Equação (3.4), chega-se à seguinte equação característica do problema de autovalor:

$$\left|\left[\left(K_e - P\,K_G\right) - \lambda\,M\right]\right| = 0 \tag{3.12}$$

3.4 Frequências naturais.

Para cada conjunto de condições de contorno e funções de torção, as matrizes de massa [*M*] e as matrizes de rigidez elástica [K_e] são mostradas, respectivamente, na Tabela 3.2 e Tabela 3.3. Estas matrizes são obtidas a partir das equações de movimento linearizadas, conforme consta no Apêndice A (A.2). Verifica-se que a matriz de rigidez elástica é diagonal e que, portanto, o acoplamento ocorre através da matriz de massa.

Tabela 3.1: Matrizes de Massa

Condição de Contorno	Função de torção		
	$\theta_x(x,t)=\theta_o(t)sen(\pi x/2L)$	$\theta_x(x,t)=\theta_o(t)sen(\pi x/L)$	$\theta_x(x,t)=\theta_o(t)\cos(\pi x/L)$
Simplesmente apoiada	$M = m\,L\begin{bmatrix} 0{,}5 & 0 & \frac{4}{3\pi}z_c \\ 0 & 0{,}5 & -\frac{4}{3\pi}y_c \\ \frac{4}{3\pi}z_c & -\frac{4}{3\pi}y_c & \frac{I_o}{2} \end{bmatrix}$	$M = m\,L\begin{bmatrix} 0{,}5 & 0 & 0{,}5\,z_c \\ 0 & 0{,}5 & -0{,}5\,y_c \\ 0{,}5\,z_c & -0{,}5\,y_c & \frac{I_o}{2} \end{bmatrix}$	$M = m\,L\begin{bmatrix} 0{,}5 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}5 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{I_o}{2} \end{bmatrix}$
Engastada e livre	$M = m\,L\begin{bmatrix} 0{,}25 & 0 & 0{,}3389\,z_c \\ 0 & 0{,}25 & -0{,}3389\,y_c \\ 0{,}3389\,z_c & -0{,}3389\,y_c & \frac{I_o}{2} \end{bmatrix}$	$M = m\,L\begin{bmatrix} 0{,}25 & 0 & 0{,}2346\,z_c \\ 0 & 0{,}25 & -0{,}2346\,y_c \\ 0{,}2346\,z_c & -0{,}2346\,y_c & \frac{I_o}{2} \end{bmatrix}$	$M = m\,L\begin{bmatrix} 0{,}25 & 0 & -0{,}2166\,z_c \\ 0 & 0{,}25 & 0{,}2166\,y_c \\ -0{,}2166\,z_c & 0{,}2166\,y_c & \frac{I_o}{2} \end{bmatrix}$
Engastada e apoiada	$M = m\,L\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0{,}6294\,z_c \\ 0 & 1 & -0{,}6294\,y_c \\ 0{,}6294\,z_c & -0{,}6294\,y_c & \frac{I_o}{2} \end{bmatrix}$	$M = m\,L\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0{,}6904\,z_c \\ 0 & 1 & -0{,}6904\,y_c \\ 0{,}6904\,z_c & -0{,}6904\,y_c & \frac{I_o}{2} \end{bmatrix}$	$M = m\,L\begin{bmatrix} 1 & 0 & -0{,}1314\,z_c \\ 0 & 1 & 0{,}1314\,y_c \\ -0{,}1314\,z_c & 0{,}1314\,y_c & \frac{I_o}{2} \end{bmatrix}$
Bi-engastada	$M = m\,L\begin{bmatrix} 0{,}3964 & 0 & 0{,}3543\,z_c \\ 0 & 0{,}3964 & -0{,}3543\,y_c \\ 0{,}3543\,z_c & -0{,}3543\,y_c & \frac{I_o}{2} \end{bmatrix}$	$M = m\,L\begin{bmatrix} 0{,}3964 & 0 & 0{,}4391\,z_c \\ 0 & 0{,}3964 & -0{,}4391\,y_c \\ 0{,}4391\,z_c & -0{,}4391\,y_c & \frac{I_o}{2} \end{bmatrix}$	$M = m\,L\begin{bmatrix} 0{,}3964 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}3964 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{I_o}{2} \end{bmatrix}$

Tabela 3.2: Matrizes de Rigidez Elástica

Condição de Contorno	Função de torção		
	$\theta_x(x,t)=\theta_o(t)sen(\pi x/2L)$	$\theta_x(x,t)=\theta_o(t)sen(\pi x/L)$	$\theta_x(x,t)=\theta_o(t)\cos(\pi x/L)$
Simplesmente apoiada	$K_e=\begin{bmatrix}\frac{\pi^4 EI_z}{2L^3} & 0 & 0\\ 0 & \frac{\pi^4 EI_y}{2L^3} & 0\\ 0 & 0 & \frac{\pi^2}{8L}\left(\frac{\pi^2 E I_\omega}{4L^2}+GJ\right)\end{bmatrix}$	$K_e=\begin{bmatrix}\frac{\pi^4 EI_z}{2L^3} & 0 & 0\\ 0 & \frac{\pi^4 EI_y}{2L^3} & 0\\ 0 & 0 & \frac{\pi^2}{2L}\left(\frac{\pi^2 E I_\omega}{L^2}+GJ\right)\end{bmatrix}$	$K_e=\begin{bmatrix}\frac{\pi^4 EI_z}{2L^3} & 0 & 0\\ 0 & \frac{\pi^4 EI_y}{2L^3} & 0\\ 0 & 0 & \frac{\pi^2}{2L}\left(\frac{\pi^2 E I_\omega}{L^2}+GJ\right)\end{bmatrix}$
Engastada e livre	$K_e=\begin{bmatrix}\frac{3{,}0905\,EI_z}{L^3} & 0 & 0\\ 0 & \frac{3{,}0905\,EI_y}{L^3} & 0\\ 0 & 0 & \frac{\pi^2}{8L}\left(\frac{\pi^2 E I_\omega}{4L^2}+GJ\right)\end{bmatrix}$	$K_e=\begin{bmatrix}\frac{3{,}0905\,EI_z}{L^3} & 0 & 0\\ 0 & \frac{3{,}0905\,EI_y}{L^3} & 0\\ 0 & 0 & \frac{\pi^2}{2L}\left(\frac{\pi^2 EI_\omega}{L^2}+GJ\right)\end{bmatrix}$	$K_e=\begin{bmatrix}\frac{3{,}0905\,EI_z}{L^3} & 0 & 0\\ 0 & \frac{3{,}0905\,EI_y}{L^3} & 0\\ 0 & 0 & \frac{\pi^2}{2L}\left(\frac{\pi^2 E I_\omega}{L^2}+GJ\right)\end{bmatrix}$
Engastada e apoiada	$K_e=\begin{bmatrix}\frac{237{,}721\,EI_z}{L^3} & 0 & 0\\ 0 & \frac{237{,}721\,EI_y}{L^3} & 0\\ 0 & 0 & \frac{\pi^2}{8L}\left(\frac{\pi^2 E I_\omega}{4L^2}+GJ\right)\end{bmatrix}$	$K_e=\begin{bmatrix}\frac{237{,}721\,EI_z}{L^3} & 0 & 0\\ 0 & \frac{237{,}721\,EI_y}{L^3} & 0\\ 0 & 0 & \frac{\pi^2}{2L}\left(\frac{\pi^2 E I_\omega}{L^2}+GJ\right)\end{bmatrix}$	$K_e=\begin{bmatrix}\frac{237{,}721\,EI_z}{L^3} & 0 & 0\\ 0 & \frac{237{,}721\,EI_y}{L^3} & 0\\ 0 & 0 & \frac{\pi^2}{2L}\left(\frac{\pi^2 E I_\omega}{L^2}+GJ\right)\end{bmatrix}$
Bi-engastada	$K_e=\begin{bmatrix}\frac{198{,}462\,EI_z}{L^3} & 0 & 0\\ 0 & \frac{198{,}462\,EI_y}{L^3} & 0\\ 0 & 0 & \frac{\pi^2}{8L}\left(\frac{\pi^2 E I_\omega}{4L^2}+GJ\right)\end{bmatrix}$	$K_e=\begin{bmatrix}\frac{198{,}462\,EI_z}{L^3} & 0 & 0\\ 0 & \frac{198{,}462\,EI_y}{L^3} & 0\\ 0 & 0 & \frac{\pi^2}{2L}\left(\frac{\pi^2 E I_\omega}{L^2}+GJ\right)\end{bmatrix}$	$K_e=\begin{bmatrix}\frac{198{,}462\,EI_z}{L^3} & 0 & 0\\ 0 & \frac{198{,}462\,EI_y}{L^3} & 0\\ 0 & 0 & \frac{\pi^2}{2L}\left(\frac{\pi^2 E I_\omega}{L^2}+GJ\right)\end{bmatrix}$

Resolvendo o problema de autovalor, Equação (3.9), obtêm-se as três primeiras frequências naturais e os respectivos modos de vibração. Neste capítulo é apresentada a análise linear de uma viga de aço com seção "*C*", módulo de Young E = 210 GPa, módulo de cisalhamento G = 80,77 GPa e densidade ρ = 7800 kg/m^3. A Figura 3.1 apresenta os eixos principais de inércia, campo de deslocamentos e características geométricas do perfil (seção monosimétrica - eixo Y é o eixo de simetria). As dimensões do perfil e suas principais propriedades geométricas são mostradas na Tabela 3.3.

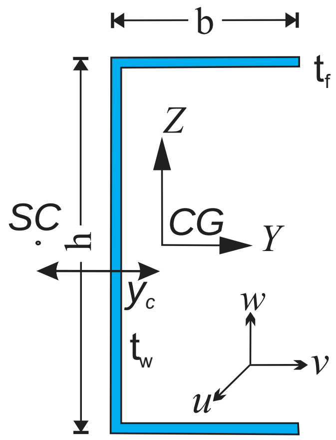


Figura 3.1: Perfil monosimétrico "C" e suas dimensões características.

Tabela 3.3: Dimensões e propriedades geométricas da seção "*C*".

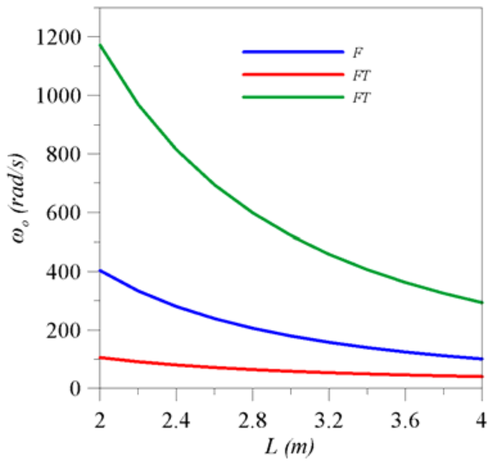
b	=	10,00	cm	A	=	19,500	cm^2
h	=	20,00	cm	J	=	1,692	cm^4
t_f	=	0,50	cm	I_w	=	$1{,}289E+04$	cm^6
t_w	=	0,50	cm	I_y	=	1236,600	cm^4
y_c	=	$-6{,}08$	cm	I_z	=	193,450	cm^4
z_c	=	0,00	cm	I_R	=	$3{,}51E-07$	m^6

Na Tabela 3.4 são mostrados os resultados para a função de torção $\theta_x(x,t)=\theta_o(t).sen(\pi x/2L)$. Verifica-se que, para as quatro condições de contorno, há um modo de flexão desacoplado, associado com o eixo de menor inércia, I_z (z_c=0), cujos valores coincidem com aqueles obtidos analiticamente por Blevins (1980), e dois modos acoplados de flexo-torção. Para a viga engastada e livre a frequência fundamental corresponde ao modo de flexão (35,913 rad/s). Em todos os outros casos a frequência fundamental corresponde a um modo de flexo-torção, sendo que o seu valor pouco varia com as restrições de contorno. Este comportamento não é usual em vigas com seção duplamente simétricas onde, quanto maior número de restrições, maior é a frequência natural. Da Tabela 3.4, observa-se que a frequência natural associada como o modo puramente de flexão cresce à medida que o número de restrições relativas aos deslocamentos aumenta. Assim, verifica-se que o acoplamento de flexo-torção tem uma grande influência nas frequências naturais de vigas esbeltas monosimétricas ou assimétricas.

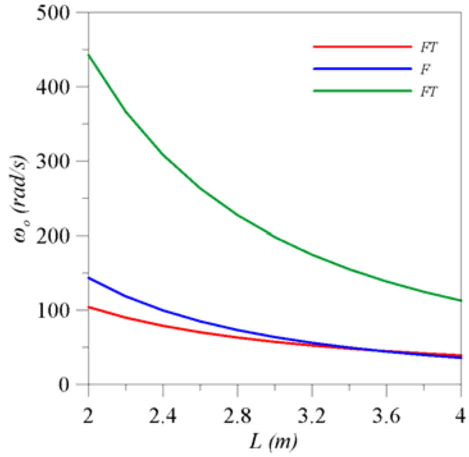
Tabela 3.4: Frequências naturais, ω_o, e modos de vibração, *L=4m*. Função de torção: $\theta_x(x,t)=\theta_o(t).sen(\pi\, x/2L)$.

Condições de Contorno	Modo	$\omega_o\ (rad/s)$	Componentes		
			Direção v_o	**Direção w_o**	**Direção θ_o**
Bi-apoiada	FT	40,370	0,000	-0,978	-0,205
	F	100,811	1,000	0,000	0,000
	FT	293,560	0,000	-0,999	0,001
Engastada-livre	F	35,913	1,000	0,000	0,000
	FT	39,143	0,000	-0,973	-0,227
	FT	112,924	0,000	-0,999	0,018
Engastada-apoiada	FT	40,439	0,000	-0,989	-0,141
	F	157,486	1,000	0,000	0,000
	FT	465,249	0,000	-0,999	0,0003
Bi-engastada	FT	40,474	0,000	-0,968	-0,247
	F	228,527	1,000	0,000	0,000
	FT	651,320	0,000	-0,999	0,0002

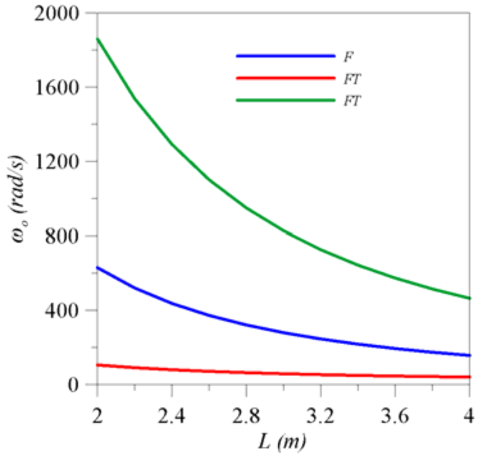
A Figura 3.2 mostra a variação das três menores frequências naturais com o comprimento da viga *L,* para as quatro condições de contorno aqui consideradas. As frequências naturais variam de forma não linear com o comprimento da viga. Como esperado, as frequências naturais decrescem à medida que *L* cresce. Observa-se que, para a viga engastada e livre e para valores de comprimento entre 3,4 e 4 m, as duas menores frequências naturais são aproximadamente iguais, o que pode levar a uma ressonância interna 1:1 ($\omega_{02}/\omega_{01}=1,\ L=3{,}53m$). Para valores pequenos de *L*, a menor frequência natural está associada a um modo de flexo-torção para as quatro condições de contorno. No caso da viga engastada e livre, a menor frequência natural passa a ser associada ao modo de flexão a partir de *L*=3,53 m. Ressonância interna 1:3 pode também ocorrer para a viga engastada e livre, $\omega_{03}/\omega_{02}=3$ para $L=3{,}76m$, e para a viga simplesmente apoiada, $\omega_{03}/\omega_{02}=3$ para $L=3{,}08m$.



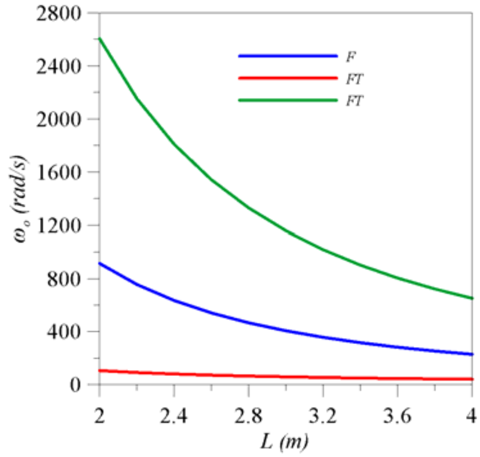
a) Viga simplesmente apoiada



b) Viga engastada e livre



c) Viga engastada e apoiada



d) Viga bi-engastada

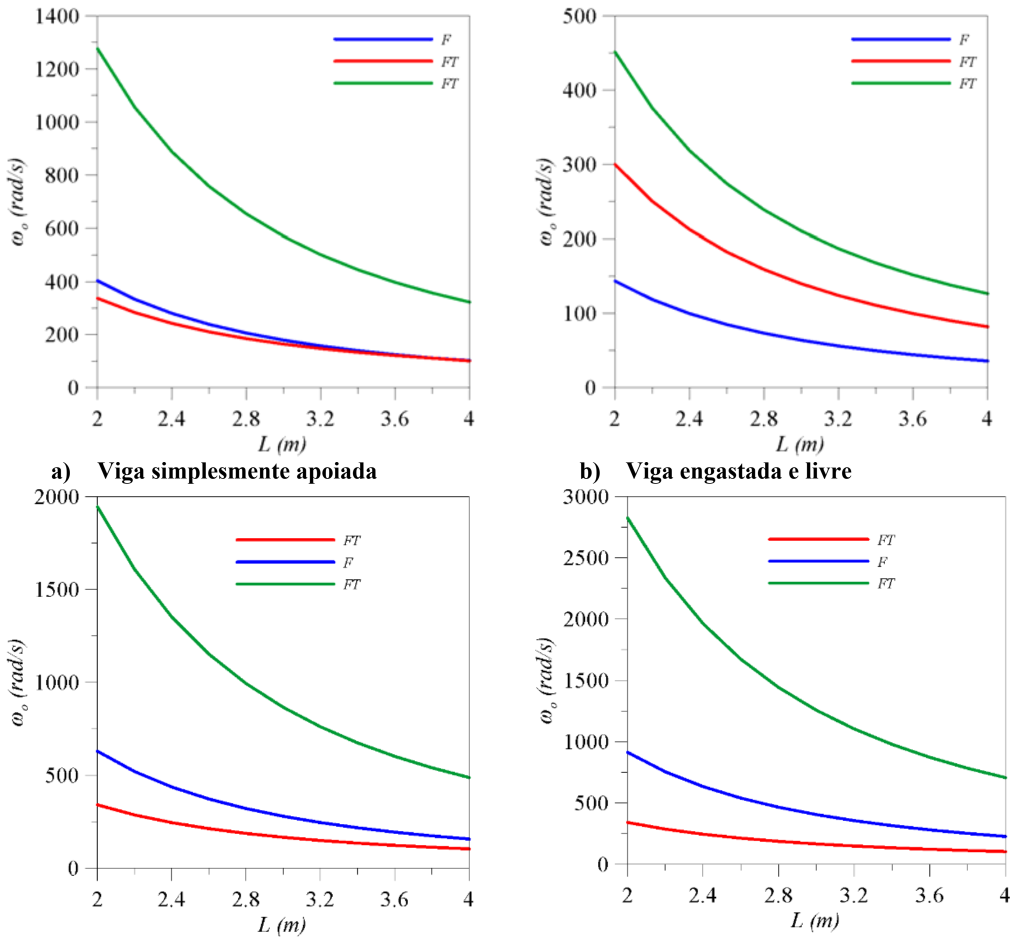
Figura 3.2: Variação da frequência natural com o comprimento da viga, $\theta_x(x,t)=\theta_o(t).sen(\pi x/2L)$.

Analisa-se a seguir a viga considerando a função de torção $\theta_x(x,t)=\theta_o(t).sen(\pi x/L)$. Os resultados são apresentados na Tabela 3.5 para L=4m. Neste caso, a menor frequência natural está associada ao modo de flexo-torção para as vigas engastada-apoiada e bi-engastada. Nos outros dois casos a menor frequência natural está associada com o modo de flexão em torno do eixo de menor inércia. Da Tabela 3.5, observa-se que a frequência natural associada com o modo puramente de flexão cresce com o número de restrições, mas a frequência mínima é aproximadamente a mesma ($\omega_{01} \approx 100 rad/s$), exceto para a viga engastada e livre, cuja frequência fundamental é bem menor que nos outros casos ($\omega_{01} = 35{,}913 rad/s$, tal como verificado na Tabela 3.4). Novamente, verifica-se que o acoplamento de flexo-torção tem uma grande influência nas frequências naturais de vigas esbeltas monosimétricas ou assimétricas.

Tabela 3.5: Frequências de vibração, ω_o, e modos de vibração, *L*=4m. Função de torção: $\theta_x(x,t)=\theta_o(t).sen(\pi\, x/L)$.

Condições de Contorno	Modo	$\omega_o\ (rad/s)$	Componentes		
			Direção v_o	**Direção w_o**	**Direção θ_o**
Bi-apoiada	F	100,811	1,000	0,000	0,000
	FT	102,408	0,000	-0,987	-0,1598
	FT	322,515	0,000	-0,999	0,0117
Engastada-livre	F	35,913	1,000	0,000	0,000
	FT	82,057	0,000	0,993	0,116
	FT	126,642	0,000	-0,969	0,246
Engastada-apoiada	FT	104,434	0,000	-0,992	-0,124
	F	157,486	1,000	0,000	0,000
	FT	488,349	0,000	-0,999	0,003
Bi-engastada	FT	105,076	0,000	-0,980	-0,198
	F	228,528	1,000	0,000	0,000
	FT	707,685	0,000	-0,999	0,002

A Figura 3.3 mostra a variação das três menores frequências naturais com o comprimento da viga, *L*. Na viga simplesmente apoiada, para valores de comprimento entre 3,3 e 4 m, observa-se que as duas frequências naturais são aproximadamente iguais, levando à ressonância interna 1:1 em regime não linear ($\omega_{02}/\omega_{01}=1,\ L=3{,}85\,m$).



a) **Viga simplesmente apoiada** b) **Viga engastada e livre**

c) **Viga engastada apoiada** d) **Viga bi engastada**

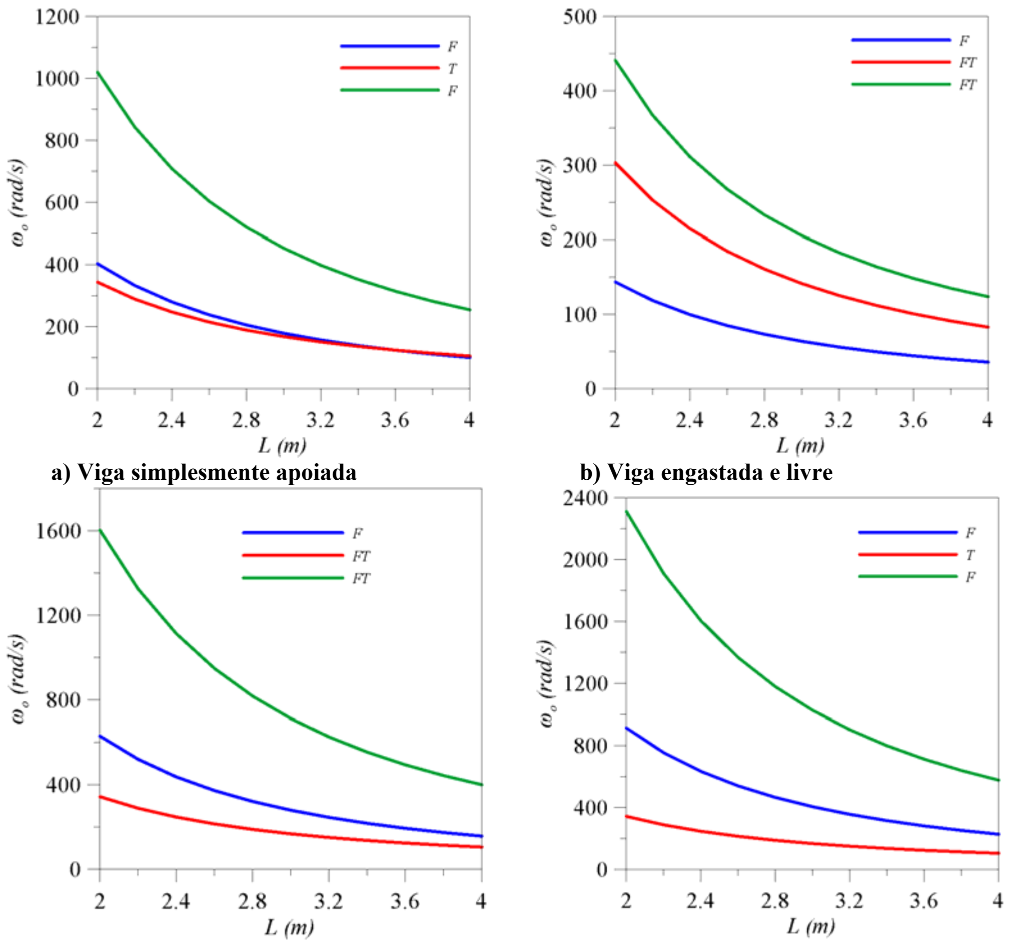
Figura 3.3: Variação da frequência natural com o comprimento da viga, $\theta_x(x,t)=\theta_o(t).sen(\pi\, x/L)$.

Finalmente, estuda-se a influência da função de torção $\theta_x(x,t)=\theta_o(t).cos(\pi x/L)$, nas frequências naturais da viga para as quatro condições de contorno consideradas. Os resultados são apresentados na Tabela 3.6 para L=4m. Verifica-se que os resultados para as duas menores frequências são praticamente iguais aos obtidos para a função $\theta_x(x,t)=\theta_o(t).sen(\pi x/L)$. Em ambos os casos a rotação está impedida em apenas uma seção. Entretanto, neste caso, para a viga simplesmente apoiada e bi-engastada temos três modos desacoplados. Isto se deve à simetria dos campos de deslocamento de flexão e à assimetria do campo de deslocamento de torção (ver Figura 2.7 e Figura 2.8), levando a matrizes de massa diagonais, como se observa na Tabela 3.1.

Tabela 3.6: Frequências de vibração, ω_o, e modos de vibração, L=4m. Função de torção: $\theta_x(x,t)=\theta_o(t).cos(\pi x/L)$.

Condições de Contorno	Modo	$\omega_o\ (rad/s)$	Componentes		
			Direção v_o	Direção w_o	Direção θ_o
Bi-apoiada	F	100,811	1,000	0,000	0,000
	T	105,660	0,000	0,000	1,000
	F	254,882	0,000	1,000	0,000
Engastada-livre	F	35,913	1,000	0,000	0,000
	FT	82,856	0,000	0,993	-0,113
	FT	123,845	0,000	0,967	0,253
Engastada-apoiada	FT	105,613	0,000	0,841	-0,540
	F	157,486	1,000	0,000	0,000
	FT	400,675	0,000	-0,999	-0,0006
Bi-engastada	T	105,660	0,000	0,000	1,000
	F	228,528	1,000	0,000	0,000
	F	577,789	0,000	1,000	0,000

A Figura 3.4 mostra a variação das três frequências naturais com o comprimento da viga L. Nota-se que, para a função de torção $\theta_x(x,t)=\theta_o(t).cos(\pi x/L)$, a menor frequência natural está associada a um modo de flexo-torção para a viga engastada-apoiada e com o modo de torção, para a viga bi-engastada. A menor frequência natural para a viga engastada e livre está associada com o modo de flexão, enquanto que para a viga simplesmente apoiada, o modo de torção associada à menor frequência natural muda para flexão a partir de $L=3,58$ m. Observe-se que, para a viga simplesmente apoiada, para valores de comprimento entre 3.1m e 4 m, as duas frequências naturais são aproximadamente iguais.



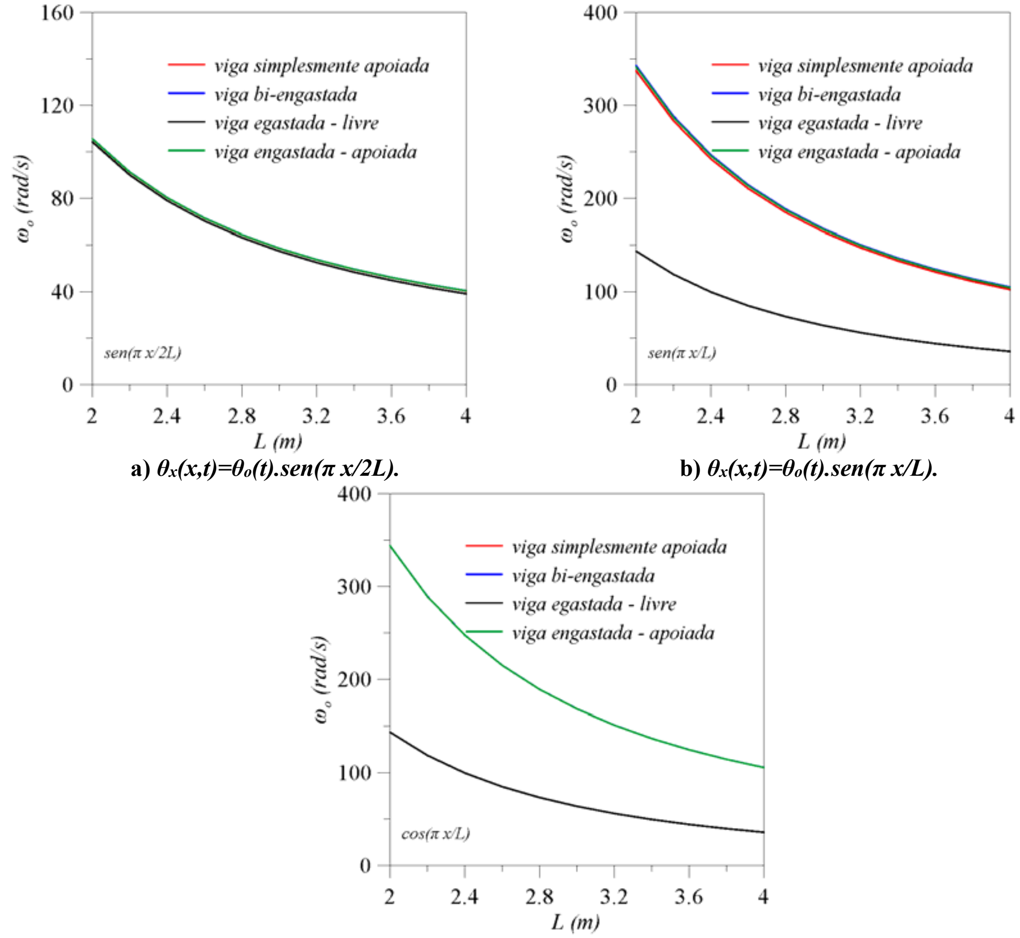
a) Viga simplesmente apoiada **b) Viga engastada e livre**

c) Viga engastada e apoiada **d) Viga bi-engastada**

Figura 3.4: Variação da frequência natural com o comprimento da viga, $\theta_x(x,t)=\theta_o(t).cos(\pi\, x/L)$.

3.5 Influência das condições de contorno na frequência fundamental

A Figura 3.5 mostra uma comparação da frequência fundamental da viga para as doze combinações de condições de contorno analisadas no presente capítulo. Observa-se que, para a função de torção $\theta_x(x,t)=\theta_o(t).sen(\pi x/2L)$, a menor frequência natural é praticamente a mesma, para as quatro condições de contorno. Usando as funções de torção $\theta_x(x,t)=\theta_o(t).sen(\pi x/L)$ e $\theta_x(x,t)=\theta_o(t).cos(\pi x/L)$, a menor frequência natural é praticamente a mesma para todas as condições de contorno, exceto para a viga engastada-livre cuja frequência fundamental é muito menor que as outras.



a) $\theta_x(x,t)=\theta_o(t).sen(\pi\, x/2L)$. b) $\theta_x(x,t)=\theta_o(t).sen(\pi\, x/L)$.

c) $\theta_x(x,t)=\theta_o(t).cos(\pi\, x/L)$.

Figura 3.5: Influência das condições de contorno na variação da frequência fundamental da viga com o comprimento *L*.

3.6
Carga crítica axial

A partir das equações linearizadas mostradas no apêndice A, as cargas e modos críticos são calculados resolvendo-se o problema de autovalor generalizado descrito na Equação 3.11 para dois casos: viga simplesmente apoiada e viga bi-engastada. Para cada condição de contorno e função de torção, apresenta-se na Tabela 3.7 a matriz de rigidez geométrica K_G. Observa-se que os termos fora da diagonal são função das coordenadas do centro de cisalhamento, sendo estes responsáveis pelo acoplamento modal.

Tabela 3.7: Matrizes de Rigidez Geométrica

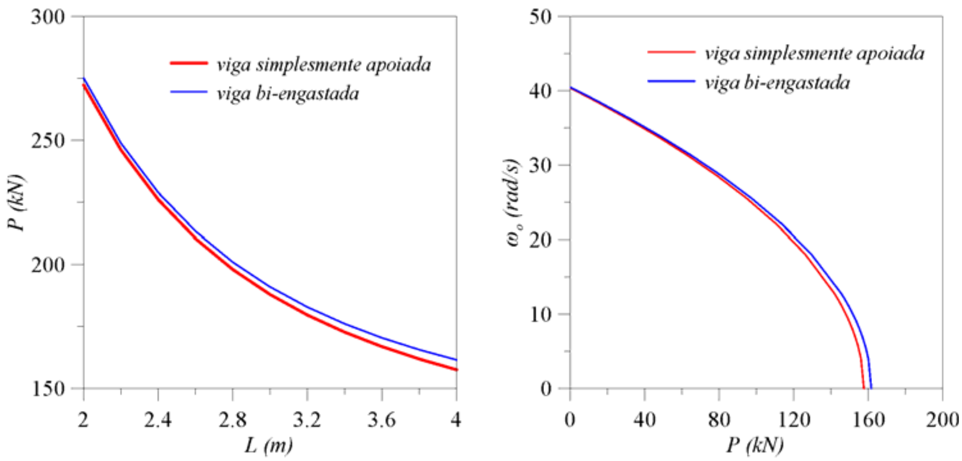
Condição de Contorno	**Função de torção**		
	$\theta_x(x,t)=\theta_o(t)sen(\pi x/2L)$	$\theta_x(x,t)=\theta_o(t)sen(\pi x/L)$	$\theta_x(x,t)=\theta_o(t)\cos(\pi x/L)$
Simplesmente apoiada	$K_G=-P\begin{bmatrix} -\frac{\pi^2}{2L} & 0 & -\frac{\pi z_c}{3L} \\ 0 & -\frac{\pi^2}{2L} & \frac{\pi y_c}{3L} \\ -\frac{4\pi z_c}{3L} & \frac{4\pi y_c}{3L} & -\frac{\pi^2 I_o}{8L} \end{bmatrix}$	$K_G=-P\begin{bmatrix} -\frac{\pi^2}{2L} & 0 & -\frac{\pi^2 z_c}{2L} \\ 0 & -\frac{\pi^2}{2L} & \frac{\pi^2 y_c}{2L} \\ -\frac{\pi^2 z_c}{2L} & \frac{\pi^2 y_c}{2L} & -\frac{\pi^2 I_o}{2L} \end{bmatrix}$	$K_G=-P\begin{bmatrix} -\frac{\pi^2}{2L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\pi^2}{2L} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\pi^2 I_o}{2L} \end{bmatrix}$
Bi-engastada	$K_G=-P\begin{bmatrix} -\frac{4{,}8777}{L} & 0 & -\frac{0{,}8742 z_c}{L} \\ 0 & -\frac{4{,}8777}{L} & \frac{0{,}8742\ y_c}{L} \\ -\frac{0{,}8742\ z_c}{L} & \frac{0{,}8742\ y_c}{L} & -\frac{\pi^2 I_o}{8L} \end{bmatrix}$	$K_G=-P\begin{bmatrix} -\frac{4{,}8777}{L} & 0 & -\frac{4{,}3338 z_c}{L} \\ 0 & -\frac{4{,}8777}{L} & \frac{4{,}3338\ y_c}{L} \\ -\frac{4{,}3338\ z_c}{L} & \frac{4{,}3338\ y_c}{L} & -\frac{\pi^2 I_o}{2L} \end{bmatrix}$	$K_G=-P\begin{bmatrix} -\frac{4{,}8777}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{4{,}8777}{L} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\pi^2 I_o}{2L} \end{bmatrix}$

As cargas de bifurcação e os respectivos autovetores são apresentados na Tabela 3.8 para uma viga com $L=4m$ e $\theta_x(x,t)=\theta_o(t).sen(\pi x/2L)$. Observa-se que a menor carga crítica, para as duas condições de contorno, são próximas, sendo ambas associadas com o modo de flexo-torção.

Tabela 3.8: Cargas e modos de bifurcação para a viga simplesmente apoiada e bi-engastada, $L=4m$, $\theta_x(x,t)=\theta_o(t).sen(\pi\, x/2L)$.

Condições de Contorno	Modo	$P_{cr}\ (kN/m)$	Componentes		
			Direção v_o	**Direção w_o**	**Direção θ_o**
Bi-apoiada	FT	157,591	0,000	-0,978	-0,205
	F	250,592	1,000	0,000	0,000
	FT	2167,449	0,000	-0,999	0,001
Bi-engastada	FT	161,570	0,000	-0,968	-0,247
	F	1033,071	1,000	0,000	0,000
	FT	6904,684	0,000	-0,999	0,0002

Para as vigas simplesmente apoiada e bi-engastada, a Figura 3.6 (a) mostra a variação da carga crítica do perfil com o comprimento da viga L. A carga crítica varia de forma não linear com o comprimento da viga. Para estudar a variação das frequências naturais em função da carga axial aplicada utiliza-se a Equação (3.12). A Figura 3.6 (b) mostra a variação da menor frequência com a carga axial compressiva, P, para as duas vigas estudadas nesta seção. À medida que o valor da carga de compressão aumenta, o valor da frequência diminui, tendendo a zero à medida que se aproxima do valor da carga crítica. Nota-se que há uma grande influência do carregamento nas frequências de vibração. Para efeito prático, quando se atinge a primeira carga crítica, um dos autovalores se torna negativo e ocorre a flambagem, passando a estrutura a vibrar em torno de uma configuração de equilíbrio pós-crítica. Precisa-se, portanto, de uma formulação não linear para a análise deste problema.



a) ***P vs L*** b) ***ω_o vs P***

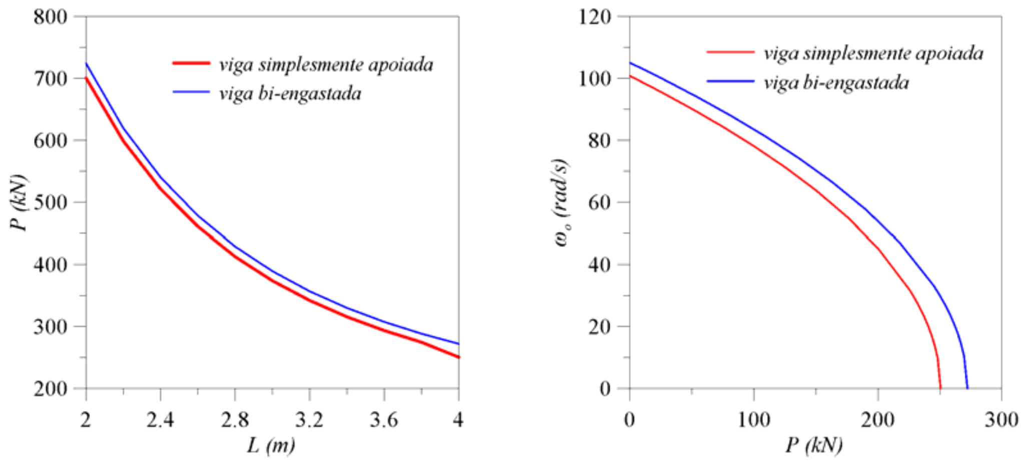
Figura 3.6: (a) Variação da carga crítica com *L*; (b) relação entre a carga axial e a frequência fundamental de vibração para as vigas simplesmente apoiada e bi-engastada, *$\theta_x(x,t)=\theta_o(t).sen(\pi\, x/2L)$*.

As cargas de bifurcação e os respectivos autovetores são apresentados na Tabela 3.9 para uma viga com $L=4m$ e $\theta_x(x,t)=\theta_o(t).sen(\pi\ x/L)$. Observando os resultados mostrados na Tabela 3.9, verifica-se a influência do acoplamento entre flexão e torção no valor da carga crítica da estrutura. Enquanto a carga crítica da viga bi-apoiada é associada com o modo de flexão, para a viga bi-engastada tem-se um modo de flexo-torção. Entretanto os valores são relativamente próximos. Neste caso a carga crítica é superior àquela associada com o modo de torção, obtido fazendo $\theta_x(x,t)=\theta_o(t).sen(\pi x/2L)$. Isto se justifica pelo aumento da rigidez efetiva à torção (rotação impedida nas duas extremidades).

Tabela 3.9: Cargas e modos de bifurcação para a viga simplesmente apoiada e bi-engastada, *L=4m*, *$\theta_x(x,t)=\theta_o(t).sen(\pi\, x/L)$*.

Condições de Contorno	Modo	$P_{cr}\ (kN/m)$	Componentes		
			Direção v_o	**Direção w_o**	**Direção θ_o**
Bi-apoiada	F	250,592	1,000	0,000	0,000
	FT	258,594	0,000	-0,987	-0,1598
	FT	2564,773	0,000	-0,999	0,0117
Bi-engastada	FT	272,217	0,000	-0,980	-0,198
	F	1033,071	1,000	0,000	0,000
	FT	9042,787	0,000	-0,999	0,002

A influência do comprimento da viga na carga crítica é mostrada na Figura 3.7 (a). A Figura 3.7 (b) apresenta a variação da frequência fundamental com a carga axial.



a) *P vs L*　　　　b) ω_o *vs P*

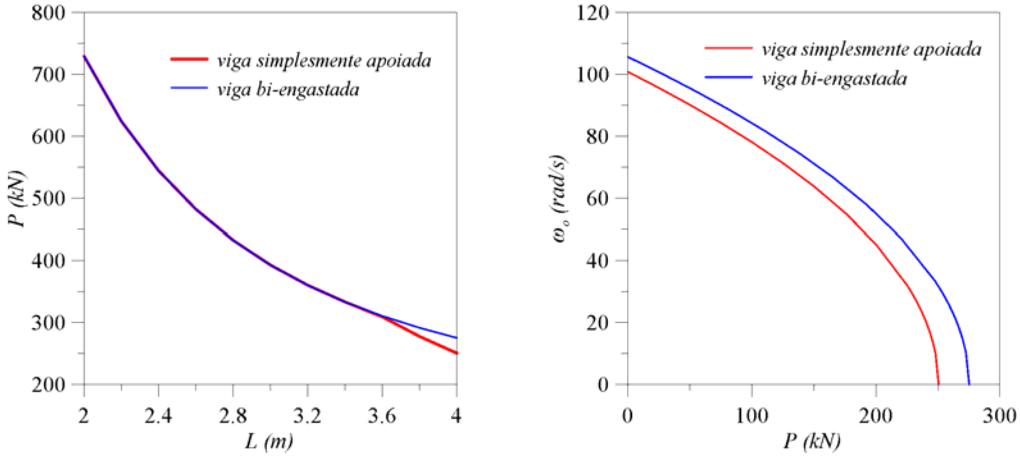
Figura 3.7: (a) Variação da carga crítica com *L*; (b) Relação entre a carga axial e a frequência fundamental de vibração para as vigas simplesmente apoiada e bi-engastada, $\theta_x(x,t)=\theta_o(t).sen(\pi\, x/L)$.

Na Tabela 3.10 têm-se as cargas e modos de bifurcação para a viga com função de torção $\theta_x(x,t)=\theta_o(t).cos(\pi x/L)$. Neste caso, como já observado para as frequências naturais, não há acoplamento entre flexão e torção. Observa-se que a menor carga crítica, para a viga simplesmente apoiada e bi-engastada, está associada com o modo de flexão e torção, respectivamente. Seus valores são aproximadamente iguais.

Tabela 3.10: Cargas e modos de bifurcação para a viga simplesmente apoiada e bi-engastada, *L*=4m, $\theta_x(x,t)=\theta_o(t).cos(\pi\, x/L)$.

Condições de Contorno	Modo	$P_{cr}\ (kN/m)$	Componentes		
			Direção v_o	**Direção w_o**	**Direção θ_o**
Bi-apoiada	F	250,592	1,000	0,000	0,000
	T	1601,873	0,000	0,000	1,000
	F	275,278	0,000	1,000	0,000
Bi-engastada	T	275,278	0,000	0,000	1,000
	F	1033,071	1,000	0,000	0,000
	F	6603,748	0,000	1,000	0,000

Finalmente, a Figura 3.8 (a) mostra a variação da carga com o comprimento *L* da viga e a Figura 3.8 (b) a variação da menor frequência natural com a carga compressiva axial.



a) **P vs L** b) **ω_o vs P**

Figura 3.8: (a) Variação da carga crítica com *L;* (b) Relação entre a carga axial e a frequência fundamental de vibração para as vigas simplesmente apoiada e bi-engastada, $\theta_x(x,t)=\theta_o(t).\cos(\pi\, x/L)$.

4
Análise Não Linear

Após a análise linear, apresentada no capítulo anterior, este capítulo investiga a influência da não linearidade geométrica da estrutura no seu comportamento dinâmico sob cargas harmônicas laterais e os possíveis fenômenos de instabilidade dinâmica. Mais especificamente, estuda-se a dinâmica e instabilidade de uma viga engastada e livre com seção transversal "*C*", dado que este exemplo permite um estudo detalhado da influência da direção e posição do carregamento no comportamento não linear e, em particular, no acoplamento entre flexão e torção. Adota-se para a função de torção $\theta_x(x,t)=\theta_o(t).sen(\pi x/2L),$ que corresponde ao caso mais usual para este tipo de estrutura, isto é, torção impedida no engaste e não impedida na extremidade livre. As equações não lineares de movimento para este caso são dadas no Apêndice A, Equações (A.10) a (A.12).

Para a resolução numérica do sistema de equações não lineares, o método de Runge-Kutta de quarta ordem é utilizado. Adicionalmente, para uma mais completa compreensão do comportamento da estrutura, diversas ferramentas para análise dinâmica não linear são empregadas, entre elas, diagramas de bifurcações, planos de fase e seções de Poincaré.

Assim, no item 4.1, as equações que governam o movimento dinâmico não linear da viga são apresentadas. A seguir, a relação frequência-amplitude é obtida (item 4.2), servindo de base para o estudo das vibrações forçadas, onde excitações laterais uniformemente distribuídas são aplicadas nas direções dos dois eixos principais de inércia do perfil (item 4.3 e item 4.4).

4.1
Equações de movimento

Com o fim de entender o comportamento dinâmico não linear da viga engastada e livre com seção monosimétrica "*C*", empregam-se as propriedades geométricas listadas na Tabela 3.3 e considera-se um comprimento $L = 4m$. Substituindo estes valores nas equações (A.10) a (A.12), obtém-se o seguinte sistema de equações não lineares que governam o movimento forçado da estrutura, a saber:

$$\frac{d^2}{dt^2}v_o + 1289.7940\,v_o + 16.4815\,v_o^3 - 2004.6371\,w_o\theta_o + \\ 903.9349\,v_o\theta_o^2 - 0.10295\,Q_y\,sen(\Omega_y t) + 0.8746\left(\frac{d}{dt}v_o\right) = 0 \tag{4.1}$$

$$\left(\frac{d^2}{dt^2}w_o\right) + 0.08245\left(\frac{d^2}{dt^2}\theta_o\right) + 8244.814\,w_o + 105.35561\,w_o^3 - 2004.63713\,v_o\theta_o - \\ 903.93489\,\theta_o^2 w_o - 0{,}10295\,Q_z\,sen(\Omega_z t) + 0.87463\left(\frac{d}{dt}w_o\right) = 0 \tag{4.2}$$

$$\left(\frac{d^2}{dt^2}\theta_o\right) + 3.736823\left(\frac{d^2}{dt^2}w_o\right) + 1639.2910\,\theta_o + 1263.27477\,\theta_o^3 - \\ 90852.11279\,v_o w_o + 40967.21249\,v_o^2\theta_o - 40967.21249\,w_o^2\theta_o + \\ 5.9593\,Q_z sen(\Omega_z t)\theta_o e_z - 7.587\,Q_z sen(\Omega_z t)e_y + 39.6391\left(\frac{d}{dt}\theta_o\right) = 0 \tag{4.3}$$

onde v_o, w_o e θ_o são as amplitudes dos deslocamentos dependentes do tempo, associados aos graus de liberdade de flexão em torno dos eixos principais de inércia e ângulo de torção, respectivamente; Q_y e Ω_y são a magnitude da carga lateral e a frequência da excitação na direção *Y*, Q_z e Ω_z são a magnitude da carga lateral e a frequência da excitação na direção *Z*, enquanto e_y e e_z são as excentricidades das cargas Q_y e Q_z, respectivamente, com relação ao centro de cisalhamento e ξ é o coeficiente de amortecimento viscoso. Cabe ressaltar, como mostra a Equação (4.3), que as excentricidades podem gerar efeitos de torção de primeira e segunda ordem (termo dependente de θ_o).

4.2 Relação não linear frequência-amplitude

A relação não linear frequência-amplitude é apresentada na Figura 4.1 onde se apresenta a variação da frequência de vibração livre da estrutura, ω_{nly}, com a amplitude do deslocamento transversal v_o. Verifica-se que a curva, com início na frequência natural de vibração ω_o, em virtude da não linearidade geométrica, inclina para a direita, ou seja, apresenta um comportamento com ganho de rigidez ou "*hardening*". Este comportamento é esperado para estruturas unidimensionais altamente flexíveis (Carvalho *et al.*, 2013).

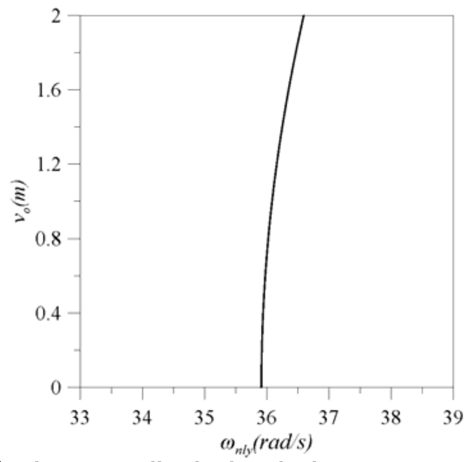


Figura 4.1: Relação frequência vs. amplitude dos deslocamentos.

4.3
Vibração forçada amortecida - Carregamento transversal Q_z

Para efeitos de comparação, calcula-se, inicialmente, a carga crítica de flambagem por flexo-torção (item 4.3.1), bem como a carga de início da plastificação nas direções Y e Z (item 4.3.2). A seguir, no item 4.3.3, apresentam-se os diagramas de bifurcação para a carga Q_z aplicada no centro de cisalhamento do perfil. No item 4.3.4 e 4.3.6 a influência da posição do carregamento é estudada. A amplificação dinâmica é apresentada no item 4.3.5. Os efeitos da função de torção são apresentados no item 4.3.7. Por fim, a influência da frequência da excitação é investigada no item 4.3.8.

4.3.1
Cálculo da carga crítica de flambagem para Q_z aplicada no centro de cisalhamento.

Para a carga distribuída aplicada no centro de cisalhamento tem-se que o momento crítico é dado por (Allen e Bulson, 1980; Trahair, 1993):

$$M_{CR} = 2{,}05\frac{\pi}{L}\left[\frac{EI_1\,GJ}{\gamma}\right]^{1/2}\left[1+\frac{EC_w}{GJ}\frac{\pi^2}{L^2}\right]^{1/2} \qquad \gamma=\left(1-I_1/I_2\right);\ I_1<I_2 \tag{4.4}$$

Assim, para o perfil aqui estudado, isto corresponde a um momento crítico $M_{CR}=61{,}56kNm$ ($\gamma=0{,}8435$), o que leva a uma carga distribuída crítica igual a $q_{CR}=7{,}696\ kN/m$. Para um perfil simétrico com rigidez equivalente, a carga crítica considerando a carga aplicada no centro de gravidade (coincidente com o centroide da seção transversal) seria $q_{CR}=5{,}16\ kN/m$ (Allen e Bulson, 1980)**.**

4.3.2
Carga de início da plastificação.

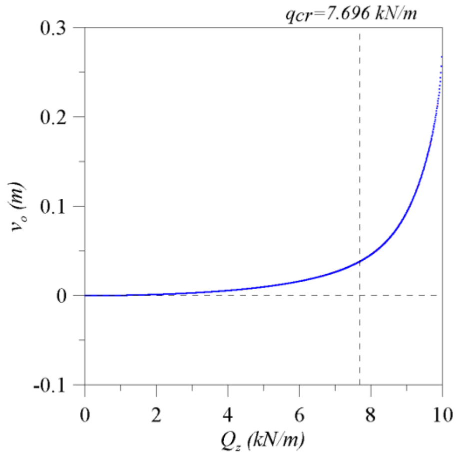
A tensão de início do escoamento do aço, $\sigma_{y\,aço}$, é função da composição e do processo de fabricação. Tomando-se como referência $\sigma_{yaço} = 450MPa$, tem-se que a carga distribuída na direção de *Z* que provoca o início da plastificação no engaste é igual a $q_{zmax}=9,7kN/m$, enquanto na direção *Y* tem-se $q_{ymax}=1,5kN/m$.

4.3.3
Diagramas de bifurcação, carga Q_z aplicada no centro de cisalhamento.

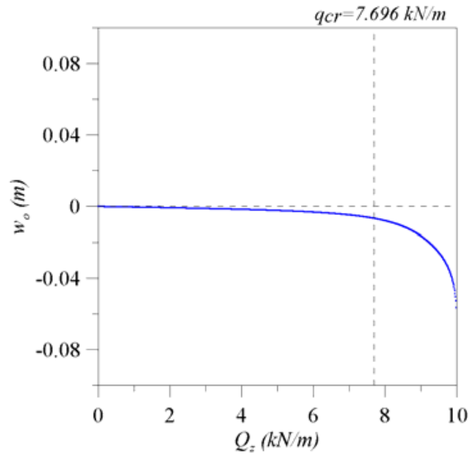
Considera-se agora uma solicitação harmônica aplicada na direção *Z* atuando no centro de cisalhamento do perfil. Para esta condição, faz-se necessário considerar nas equações de movimento (4.1) a (4.3), $Q_y = \Omega_y = e_y = e_z = 0$. Na Figura 4.2 apresentam-se os diagramas de bifurcações da estrutura para uma frequência de excitação $\Omega_z = 30 rad/s$, um pouco menor que a frequência fundamental da estrutura, $\omega_o = 35{,}913 rad/s$, considerando a magnitude da excitação Q_z como parâmetro de controle, e amortecimento viscoso $\xi = 1.22\%$.

Os diagramas de bifurcação são obtidos variando-se o parâmetro de controle e obtendo-se, para cada valor deste, a cada período de excitação, ao longo da resposta permanente, os valores dos deslocamentos e velocidades relativos às três incógnitas, a cada período de excitação (mapa de Poincaré). Uma descrição dos algoritmos para obtenção de diagramas de bifurcação pode ser encontrada em Del Prado (2001). As bifurcações são mudanças qualitativas na resposta de um sistema dinâmico as quais podem ocorrer devido a variações dos parâmetros de controle. Os diagramas de bifurcação relacionam as variáveis de estado com os parâmetros de controle e ilustram as possíveis mudanças no número, estabilidade e tipo de bifurcação.

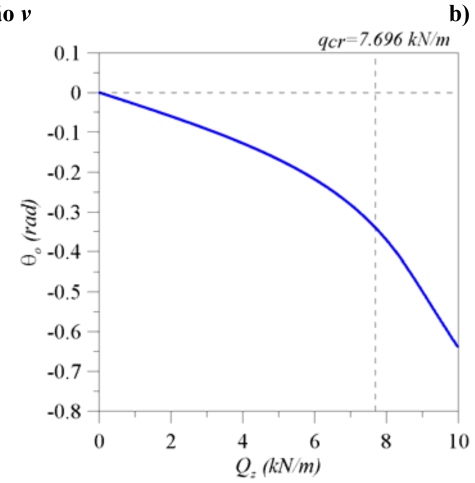
Cabe lembrar que, para uma carga estática Q_z aplicada no centro de cisalhamento, os deslocamentos v_o e θ_o seriam nulos em uma análise linear, o que não acontece em uma análise dinâmica não linear, em virtude dos termos de acoplamento na matriz de massa, já discutidos no capítulo anterior, e em virtude dos acoplamentos devido a não linearidade geométrica (ver item 4.3.5). Observa-se que, à medida que a magnitude da carga cresce, os deslocamentos aumentam. A rotação θ_o, em torno do eixo X, cresce a uma razão muito maior que os demais graus de liberdade. Isto indica que a seção tem uma baixa resistência à torção. Também se observa que o deslocamento w_o (direção do carregamento) é bem menor que o deslocamento v_o, em virtude da diferença da rigidez à flexão associada aos dois eixos principais de inércia. Nota-se que, inicialmente, os três deslocamentos crescem de forma praticamente linear e depois passam a crescer com taxas cada vez maiores à medida que a carga se aproxima e ultrapassa o valor da carga crítica estática ($q_{CR} = 7{,}696\ kN/m$).



a) Direção *v*



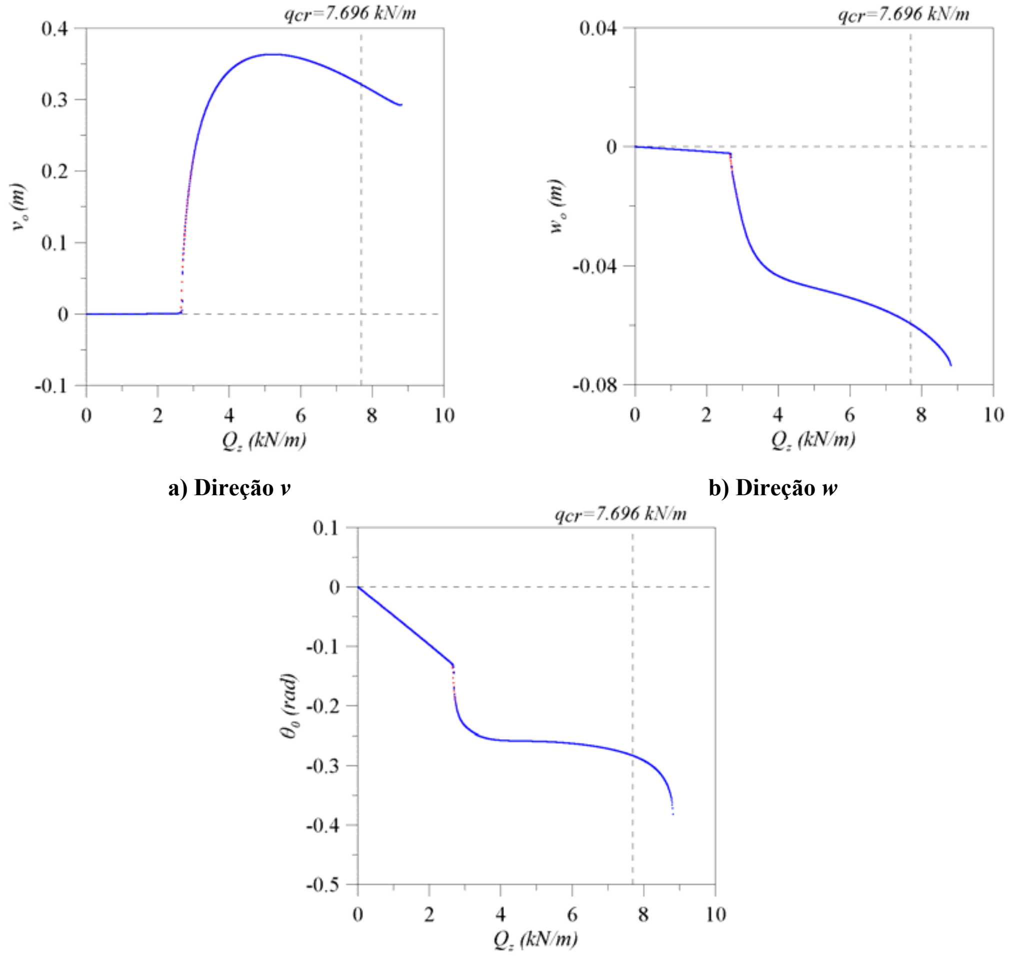
b) Direção *w*



c) Direção *θ*

Figura 4.2: Diagrama de bifurcação nas direções v_o, w_o e θ_o para Ω_z=30 rad/s, ξ=1,22%, e_y=0,0 cm e magnitude da excitação Q_z variando de 0 a 10kN/m.

Considera-se agora uma frequência de excitação na vizinhança da frequência fundamental da estrutura, $\Omega_z = 35{,}846\,rad/s$. A Figura 4.3 mostra os diagramas de bifurcações da estrutura considerando a magnitude da excitação Q_z como parâmetro de controle. Neste caso observa-se claramente a mudança brusca entre o comportamento linear inicial e, após o parâmetro de controle atingir o valor crítico, $Q_{zcr} = 2,71 kN/m$, um comportamento marcadamente não linear. Nota-se que na região principal de ressonância a carga crítica dinâmica é bem inferior à carga crítica estática ($q_{CR} = 7,696\, kN/m$). Como no caso anterior, o deslocamento w_o é bem menor que v_o. Verifica-se que a perda de estabilidade gera grandes flechas na direção de Y e rotações em torno de X.



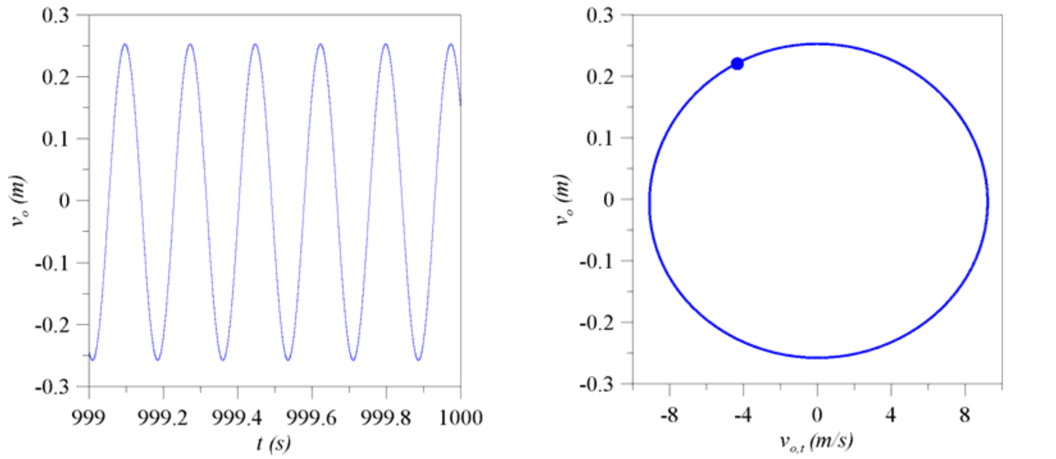
a) Direção *v* **b) Direção *w***

c) Direção θ

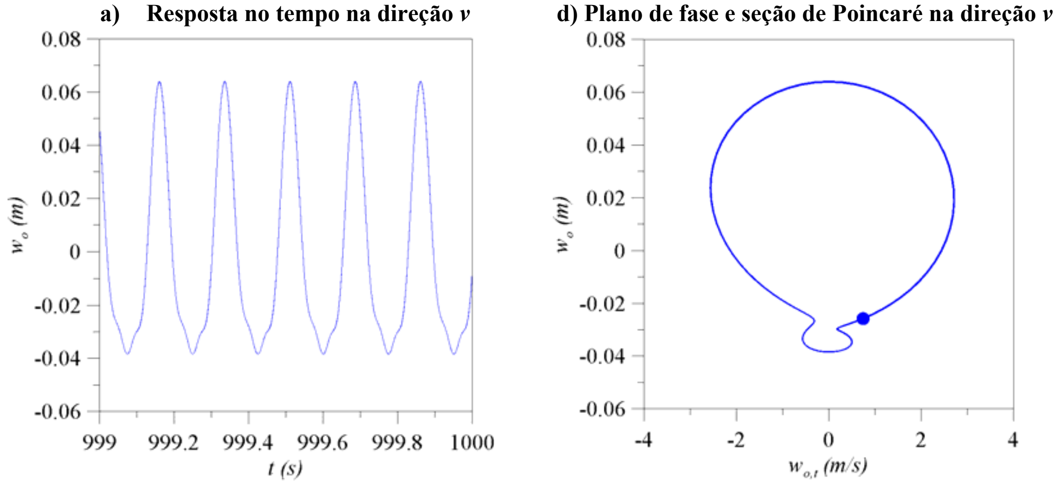
Figura 4.3: Diagrama de bifurcação nas direções v_o, w_o e θ_o para Ω_z=35,846 rad/s, ξ=1,22%, e_y=0,0 cm e magnitude da excitação Q_z variando de 0 a 10kN/m.

Com base nos diagramas de bifurcações mostradas na Figura 4.3, apresenta-se na Figura 4.4 as projeções da reposta no tempo (regime permanente), plano de fase e mapa de Poincaré (pontos em destaque ao longo da órbita no plano de fase), considerando a frequência de excitação $\Omega_z = 35,846\, rad/s$ e magnitude da excitação $Q_z = 3\, kN/m$ (um pouco superior à carga crítica dinâmica), na qual se verifica uma solução de período *1T* (soluções de período *nT* significam respostas com o período *n* vezes o período da força, fenômeno eminentemente não linear). Verifica-se, para este nível de carregamento, que o valor da flecha máxima

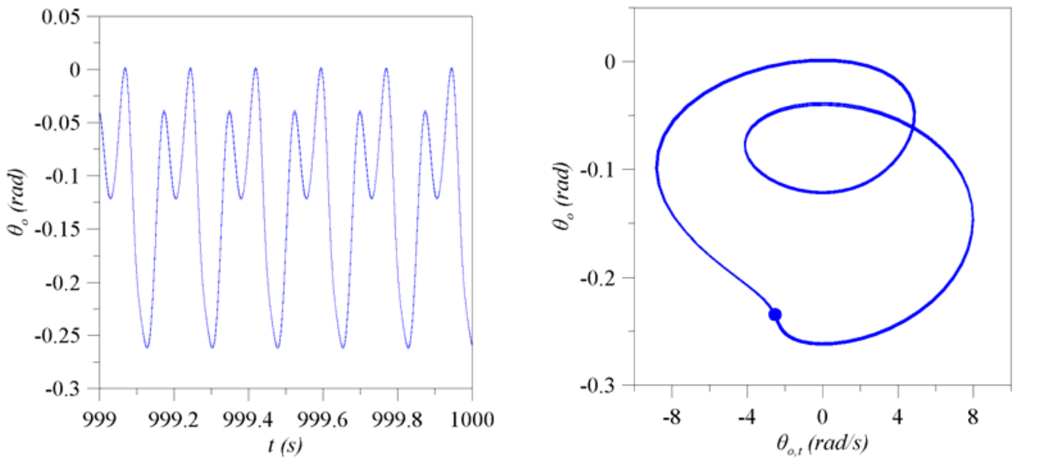
$v_{o\max}$ é de 0,25m, enquanto na direção do carregamento tem-se que w_{omax}=0,062m. A rotação θ_o é de -0,25 rad ($\approx -14{,}3^o$). Nota-se também que a velocidade máxima na direção Y chega a 9,07 m/s, enquanto que na direção Z é de 2,5 m/s. A resposta no tempo das componentes w_o e θ_o são mais complexas que a de v_o, e há uma assimetria nessas componentes, o que caracteriza uma bifurcação supercrítica com perda de simetria (*supercritical pitchfork bifurcation*), isto é, a viga passa a vibrar em torno de uma configuração pós-flambagem. As mudanças na resposta no tempo das componentes w_o e θ_o se devem à presença de super-harmônicos na resposta da estrutura (Mancilla, 2014). Estes super-harmônicos são devidos à não linearidade geométrica.



a) Resposta no tempo na direção *v* **d) Plano de fase e seção de Poincaré na direção *v***



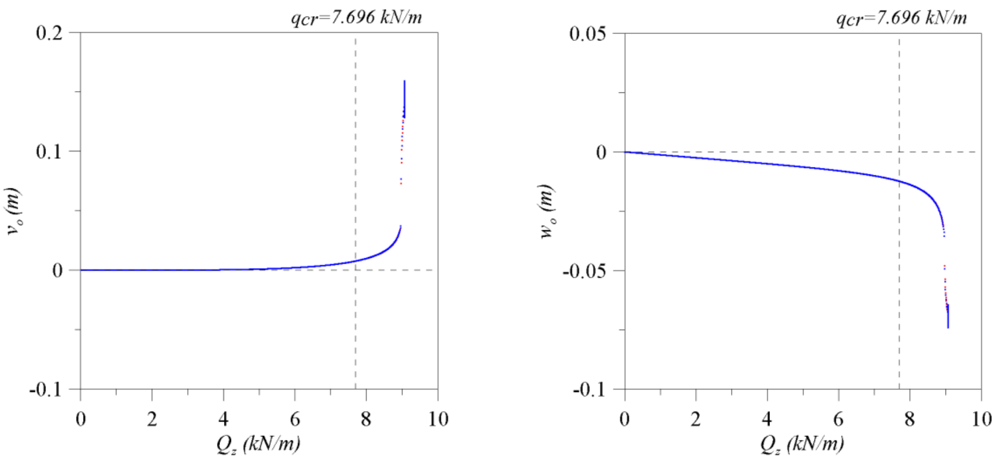
b) Resposta no tempo na direção *w* **e) Plano de fase e seção de Poincaré na direção *w***



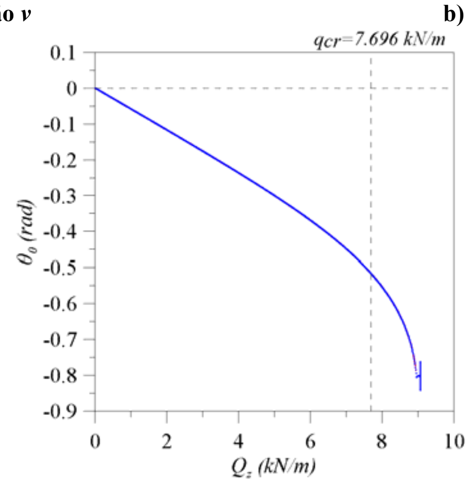
c) Resposta no tempo na direção θ f) Plano de fase e seção de Poincaré na direção θ

Figura 4.4: Resposta no tempo e plano de fase para Ω_z*=35,846 rad/s*, ξ*=1,22%*, e_y*=0,0 cm* **e magnitude da excitação** Q_z*=3,0 kN/m*.

Na Figura 4.5 são mostrados os diagramas de bifurcações da estrutura para $\Omega_z = 40\, rad/s$, valor um pouco superior à segunda frequência natural da estrutura ($39{,}143\, rad/s$). Nota-se novamente um crescimento acentuado dos deslocamentos quando Q_z se aproxima do valor da carga crítica estática.



a) Direção *v* b) Direção *w*



c) Direção θ

Figura 4.5: Diagrama de bifurcação para as direções v_o, w_o **e** θ_o, **com** Ω_z*=40 rad/s*, ξ*=1,22%*, e_y*=0,0 cm* **e magnitude da excitação** Q_z **variando de 0 a 10kN/m.**

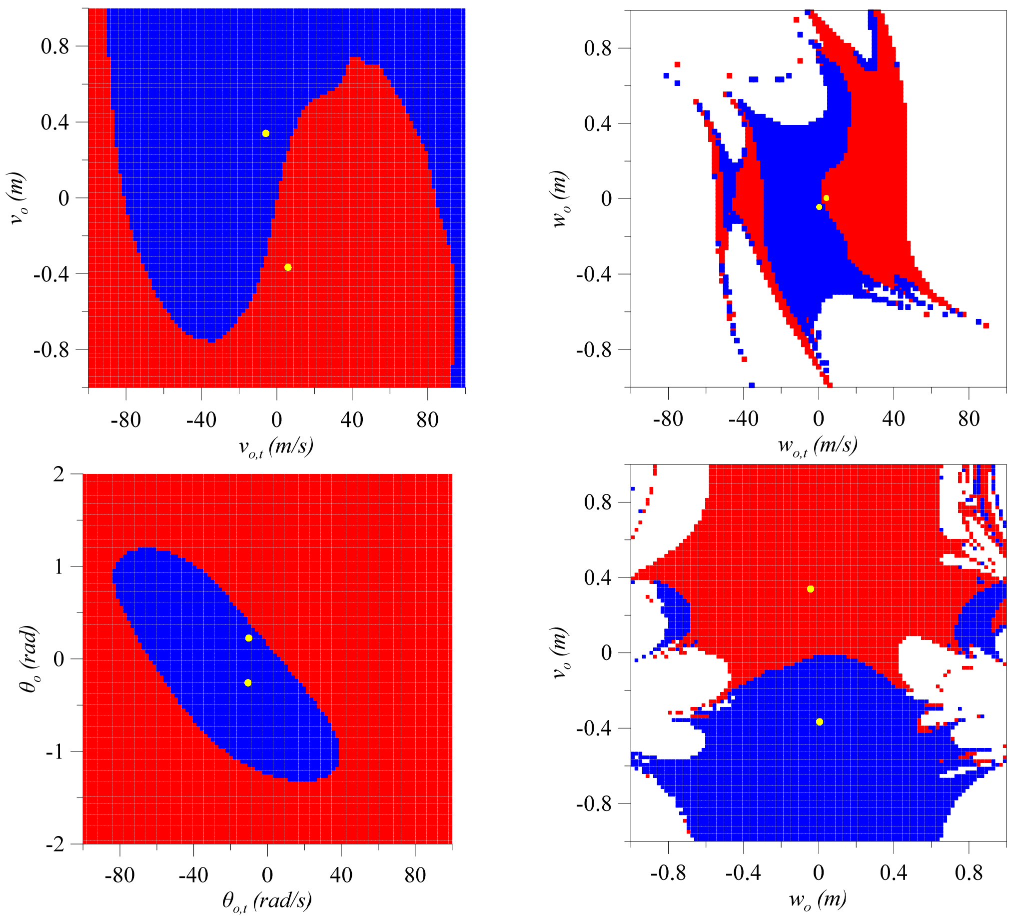


Figura 4.6: Seções da bacia de atração com *Ω_z=35,846 rad/s, ξ=1,22%, e_y=0,0 cm,* magnitude da excitação *Q_z=4.0 kN/m* (para cada seção as demais condições iniciais são nulas).

Observou-se na Figura 4.3 uma bifurcação por quebra de simetria para $\Omega_z = 35{,}846\, rad/s$. Na Figura 4.6, apresentam-se as seções da bacia de atração para uma magnitude da excitação $Q_z = 4\, kN/m$. Observa-se a presença de duas regiões distintas (vermelha e azul), onde as condições iniciais de cada região levam a uma das soluções coexistentes. Para cada seção todas as outras condições iniciais são nulas. Vale lembrar que a bacia tem seis dimensões. Com base nestas bacias identifica-se o segundo ramo de soluções mostrado na Figura 4.7. Projeções das duas soluções em diferentes planos de fase são apresentadas na Figura 4.8.

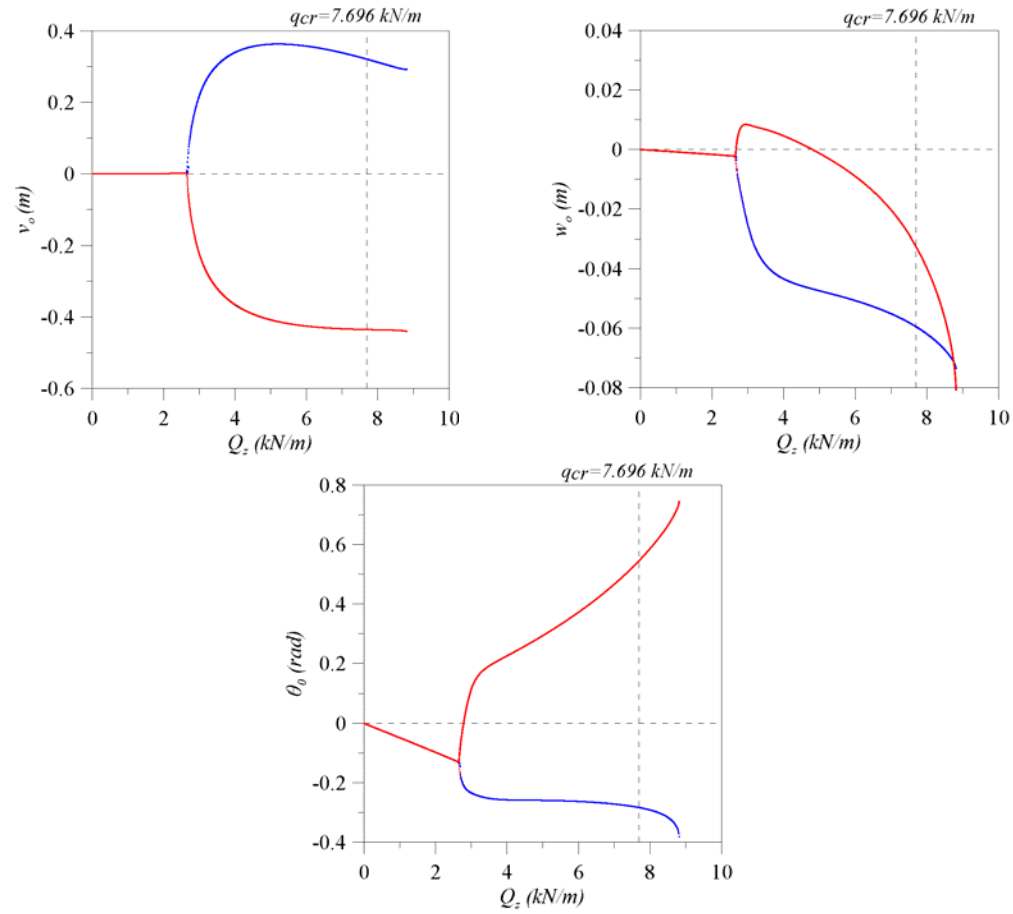
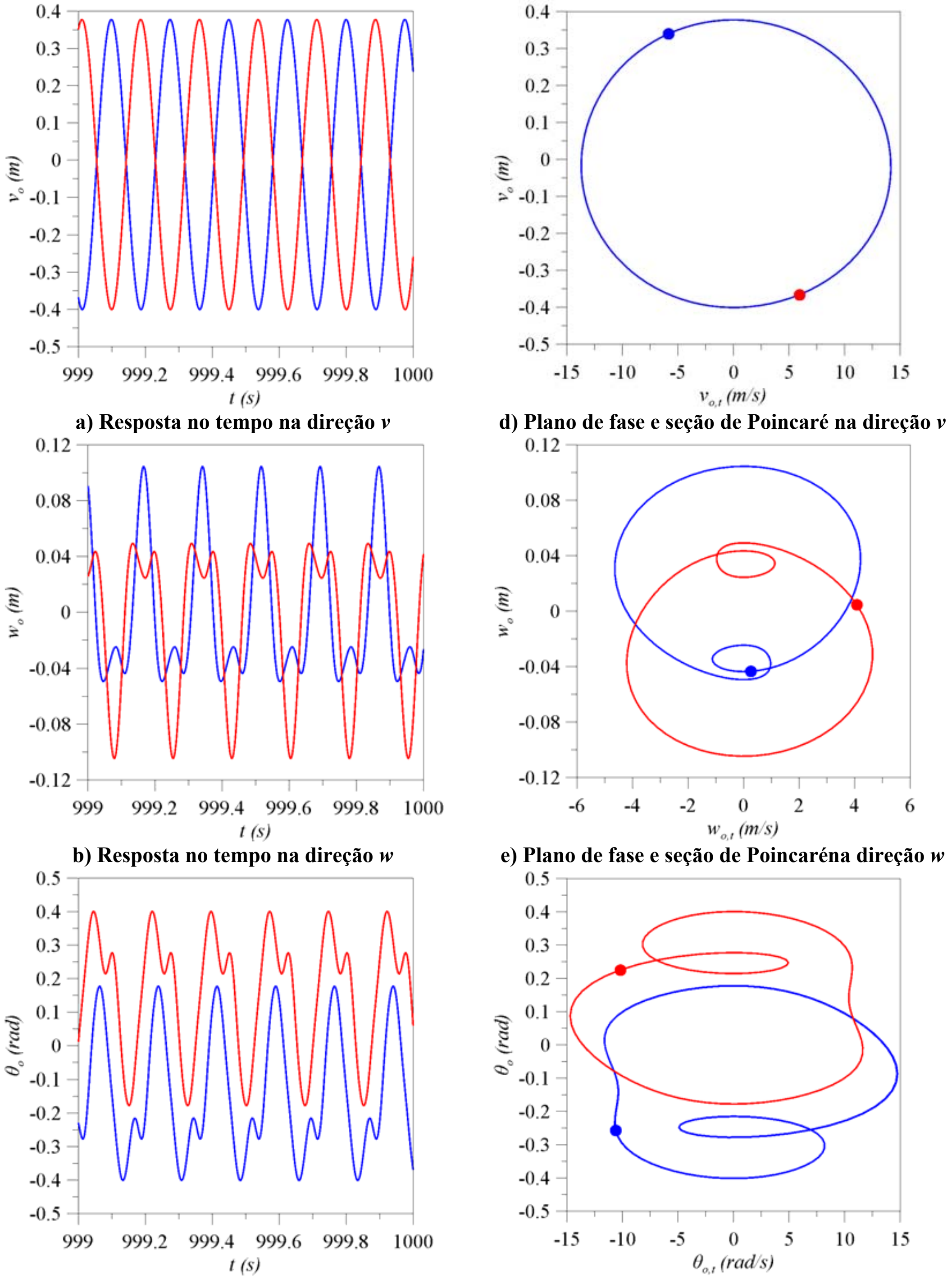


Figura 4.7: Diagrama de bifurcação mostrando as duas soluções estáveis identificadas para Q_z*=4,0kN/m;* **solução 01 (em azul) e solução 02 (em vermelho) para as direções** v_o, w_o **e** θ_o**, com** Ω_z*=35,846 rad/s,* ξ*=1,22%,* e_y*=0,0 cm.* **Magnitude da excitação** Q_z **variando de 0 a 8,8 kN/m.**



a) Resposta no tempo na direção *v*

d) Plano de fase e seção de Poincaré na direção *v*

b) Resposta no tempo na direção *w*

e) Plano de fase e seção de Poincaréna direção *w*

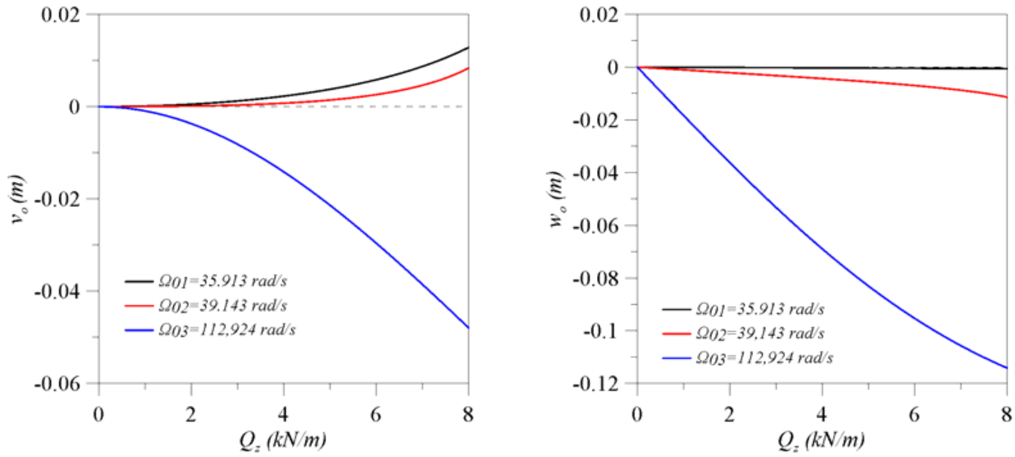
c) Resposta no tempo na direção *θ*

f) Plano de fase e seção de Poincaré na direção *θ*

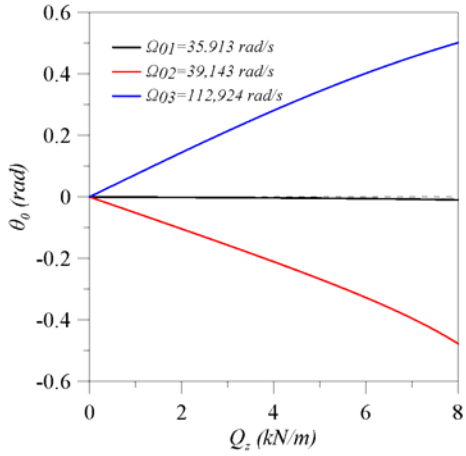
Figura 4.8: Soluções estáveis coexistentes identificadas para Q_z=4,0kN/m. Resposta no tempo e plano de fase para Ω_z=35,846 rad/s e ξ=1,22%.

4.3.3.1 Comparação dos diagramas de bifurcações nas três primeiras regiões de ressonância, carga Q_z aplicada no centro de cisalhamento.

Na Figura 4.9 comparam-se os diagramas de bifurcação nas direções v_o, w_o e θ_o para frequências de excitação iguais às três menores frequências naturais de vibração da viga ($\Omega_{z01} = 35{,}913\,rad/s$, $\Omega_{z02} = 39{,}143\,rad/s$ e $\Omega_{z03} = 112{,}924\,rad/s$) tendo como parâmetro de controle a magnitude de excitação Q_z. Na Figura 4.10 comparam-se as respostas no tempo e plano de fase para $Q_z = 5{,}0\,kN/m$. Os resultados mostram comportamentos distintos em cada região de ressonância. A excitação relativa à primeira frequência ($\Omega_{z01} = 35{,}846\,rad/s$) leva a grandes deslocamentos na direção transversal ao carregamento (v_o) e rotações (θ_o). A excitação relativa à segunda frequência ($\Omega_{z02} = 39{,}143\,rad/s$) induz os menores deslocamentos e velocidades. A excitação relativa à terceira frequência ($\Omega_{z03} = 112{,}924\,rad/s$) gera os maiores deslocamentos na direção do carregamento (w_o) e também rotações elevadas. Cabe destacar que nos diagramas de bifurcação não estão apresentados os deslocamentos máximos, mas sim as coordenadas do mapa de Poincaré (ver os pontos destacados nos planos de fase).

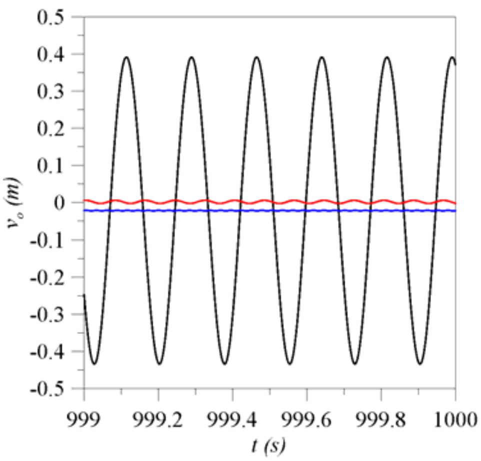


a) Direção *v* **b) Direção *w***

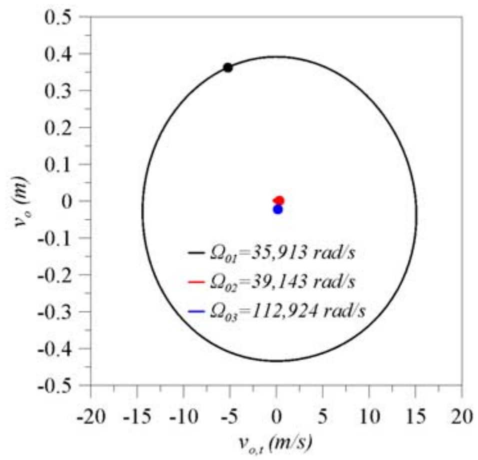


c) Direção θ

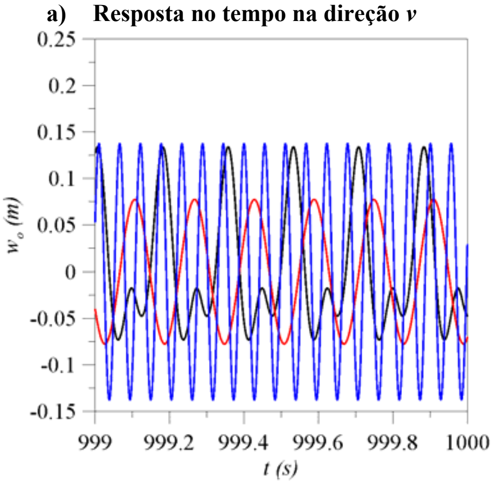
Figura 4.9: Comparação dos diagramas de bifurcação para as direções v_o, w_o e θ_o, com e_y=0,0 cm e Ω_{z01}=35,846 rad/s, Ω_{z02}=39,143 rad/s, Ω_{z03}=112,924 rad/s e ξ=1,22%. Magnitude da excitação Q_z variando de 0 a 8kN/m.



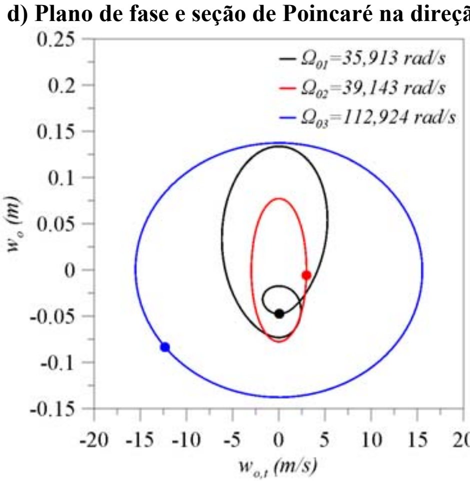
a) Resposta no tempo na direção v



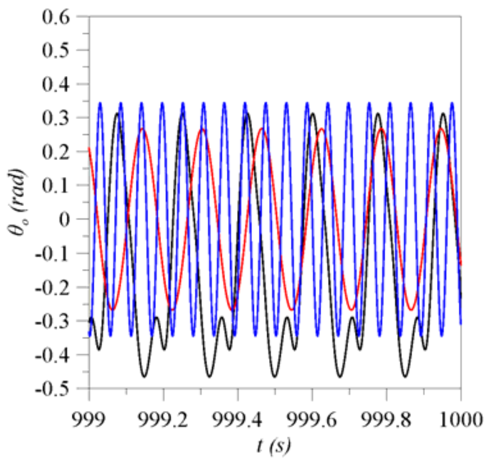
d) Plano de fase e seção de Poincaré na direção v



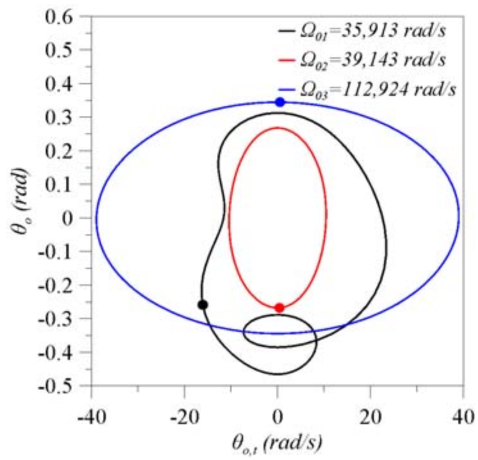
b) Resposta no tempo na direção w



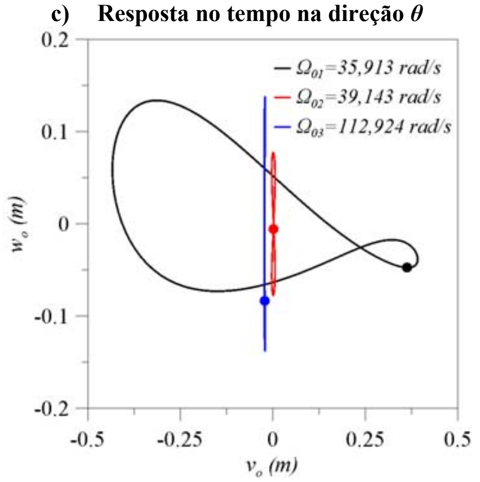
e) Plano de fase e seção de Poincaré na direção w



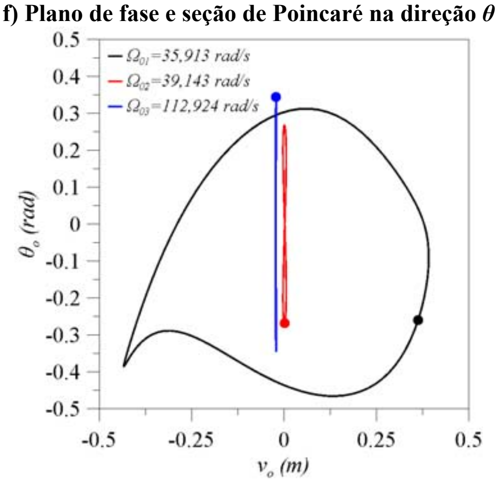
c) **Resposta no tempo na direção θ**



f) Plano de fase e seção de Poincaré na direção θ



d) Plano de fase v_o vs w_o



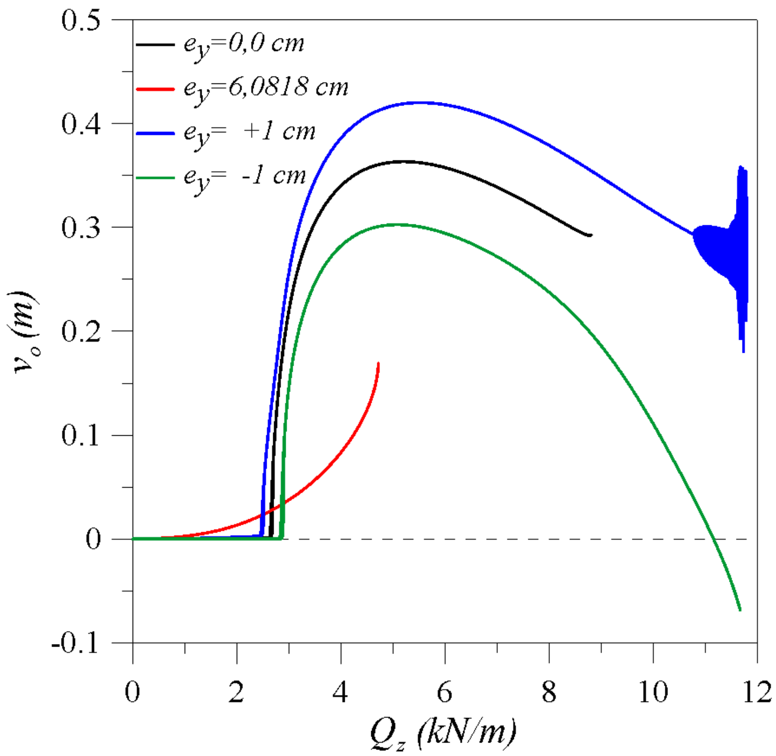
g) Plano de fase v_o vs θ_o

Figura 4.10: Resposta no tempo e plano de fase para a carga Q_z=5,0 kN/m aplicada em e_y=0,0 cm (centro de cisalhamento).

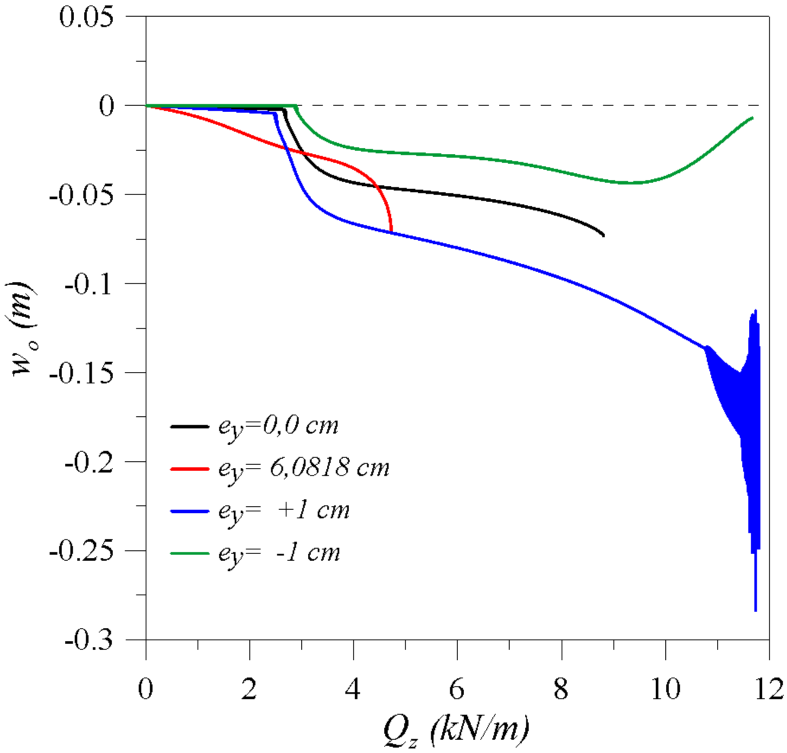
4.3.4
Influência da posição do carregamento.

A Figura 4.11 apresenta os diagramas de bifurcações para as componentes v_o, w_o e θ_o, considerando a frequência de excitação $\Omega_z = 35{,}846\ rad/s$, para quatro diferentes posições da carga Q_z, a saber: no centro de cisalhamento, $e_y = 0{,}0\,cm$, no centro de gravidade ($e_y = 6{,}0818\ cm$), e a uma distância $e_y = \pm 1{,}0\,cm$ medida a partir do centro de cisalhamento (em todos os casos, $e_z = 0$).

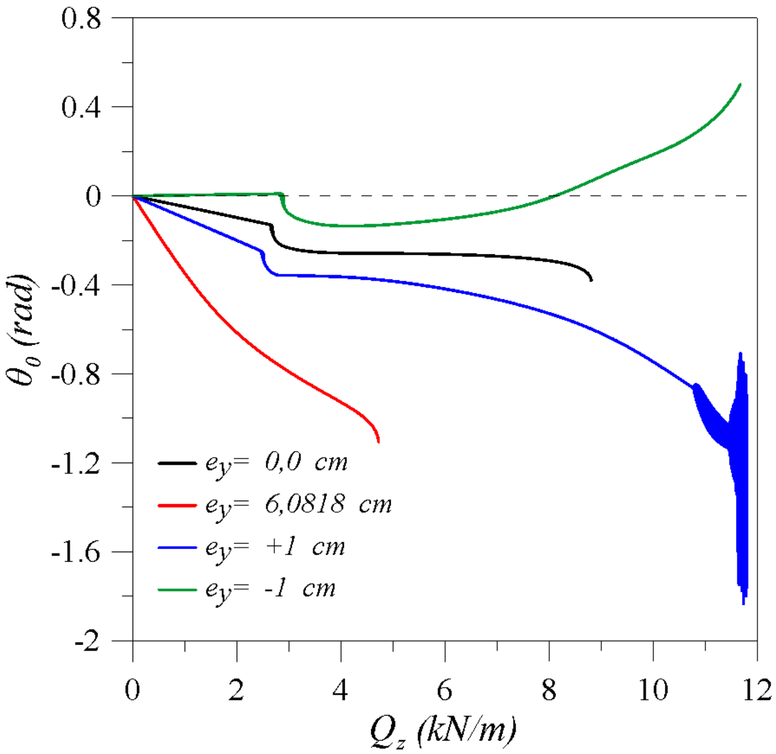
Para $e_y = 0{,}0\,cm$ e $e_y = \pm 1{,}0\,cm$ tem-se uma variação praticamente linear dos deslocamentos até se chegar à carga crítica dinâmica, seguida de uma variação marcadamente não linear. Para a carga aplicada no centro de gravidade, tem-se um comportamento distinto com crescimento gradual dos deslocamentos. As excentricidades $e_y = \pm 1{,}0\,cm$ funcionam como imperfeições moderadas do carregamento, enquanto a excentricidade $e_y = 6.0818\ cm$ funciona com uma imperfeição de grande magnitude. Para e_y = +1,00 cm, verifica-se na Figura 4.11, a partir de $Q_z \approx$ 10,3 kN/m, a presença de soluções quase-periódicas ou caóticas (nuvem de pontos), as quais serão exploradas mais adiante (item 4.3.8). Ainda na Figura 4.11, não se obtêm soluções estáveis a partir de certo nível de carregamento para $e_y = 0{,}0\,cm$ e $e_y = 6{,}0818\ cm$, em virtude da existência de um ponto limite (tangente vertical).



a) Direção *v*



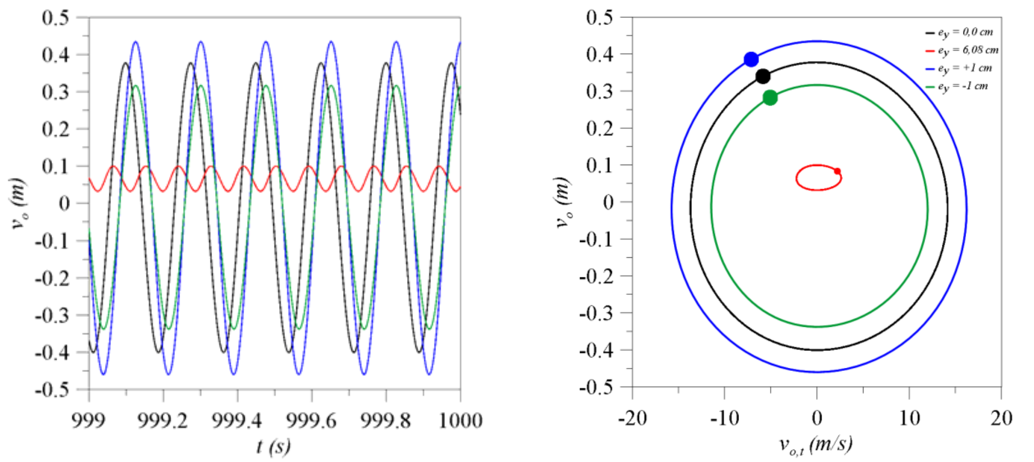
b) Direção *w*



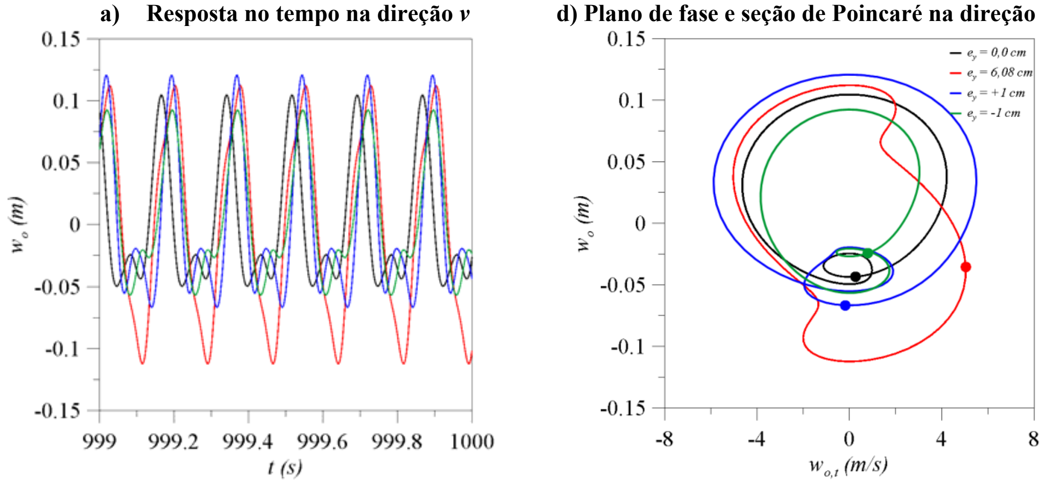
c) Direção θ

Figura 4.11: Influência da posição do carregamento Q_z ao longo do eixo *Y* nos diagramas de bifurcação. Comparação dos diagramas de bifurcações para as direções v_o, w_o e θ_o, com Ω_z=35,846 rad/s, ξ=1,22%, e_y=0,0 cm (centro de cisalhamento), e_y=6,0818 cm (centro de gravidade), e_y=±1,0 cm a partir do centro de cisalhamento. Magnitude da excitação Q_z variando de 0 a 11,8 kN/m.

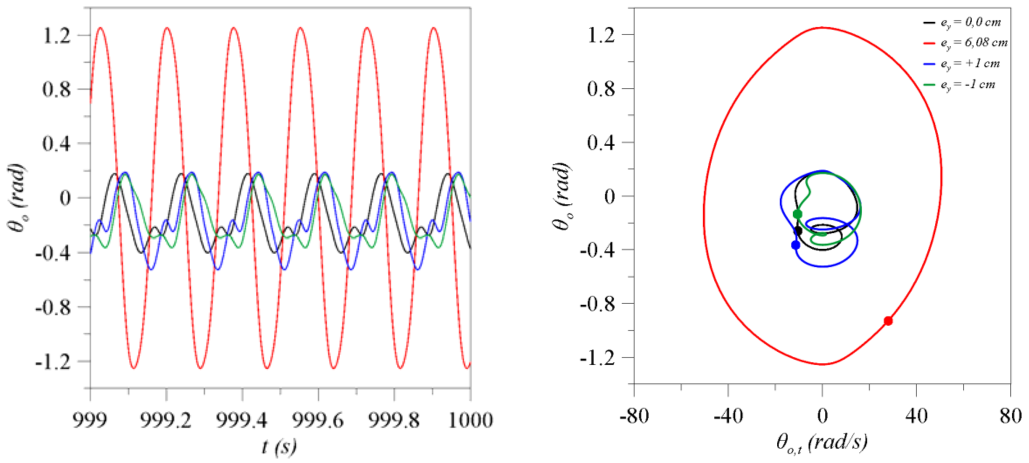
Para entender melhor a influência da posição do carregamento, na Figura 4.12 são apresentadas as projeções da reposta no tempo, plano de fase e mapa de Poincaré para uma magnitude de excitação $Q_z = 4kN/m$. É possível observar a existência de pelo menos uma solução estável em $Q_z = 4{,}0\,kN/m$ para cada uma das posições de carga estudadas. Verifica-se que todas as soluções são de período 1T. Observando o comportamento de cada uma das variáveis de estado, conclui-se que a posição da carga tem grande influência na magnitude dos deslocamentos e velocidades máximas. A componente v_o é bem menor quando a carga é aplicada no centro de gravidade. Por outro lado, tem-se um aumento acentuado da rotação θ_o. Finalmente, verifica-se que a posição do carregamento tem decisiva influência nas assimetrias das soluções nos planos de fase e na variação da resposta no tempo.



a) Resposta no tempo na direção *v* **d) Plano de fase e seção de Poincaré na direção *v***



b) Resposta no tempo na direção *w* **e) Plano de fase e seção de Poincaré na direção *w***



c) **Resposta no tempo na direção θ** f) **Plano de fase e seção de Poincaré na direção θ**

Figura 4.12: Comparação da resposta no tempo e plano de fase para o sistema de 3GDL, com Ω_z=35,846 rad/s, ξ=1,22%, e magnitude da excitação Q_z=4,0 kN/m, aplicada a e_y=0,0 cm (centro de cisalhamento), e_y=6,0818 cm (centro de gravidade), e_y=±1,0 cm (do centro de cisalhamento).

4.3.4.1
Comparação com a carga crítica estática

Na Figura 4.13 comparam-se os diagramas de bifurcação em v_o para $\Omega_z = 35{,}846 rad/s$, com a carga crítica estática ($q_{CR} = 7{,}696 kN/m$) e a carga crítica para um perfil simétrico com rigidez equivalente ($q_{CR} = 5{,}16 kN/m$). Observa-se que, na maioria dos casos, a instabilidade ocorre de forma abrupta, quando se atinge a carga crítica dinâmica, que é muito menor que a carga crítica estática. Também se observa que, quando a carga está no centro de gravidade, os deslocamentos crescem de forma não linear desde o início, aproximando-se assintoticamente da carga crítica do perfil simétrico com rigidez equivalente.

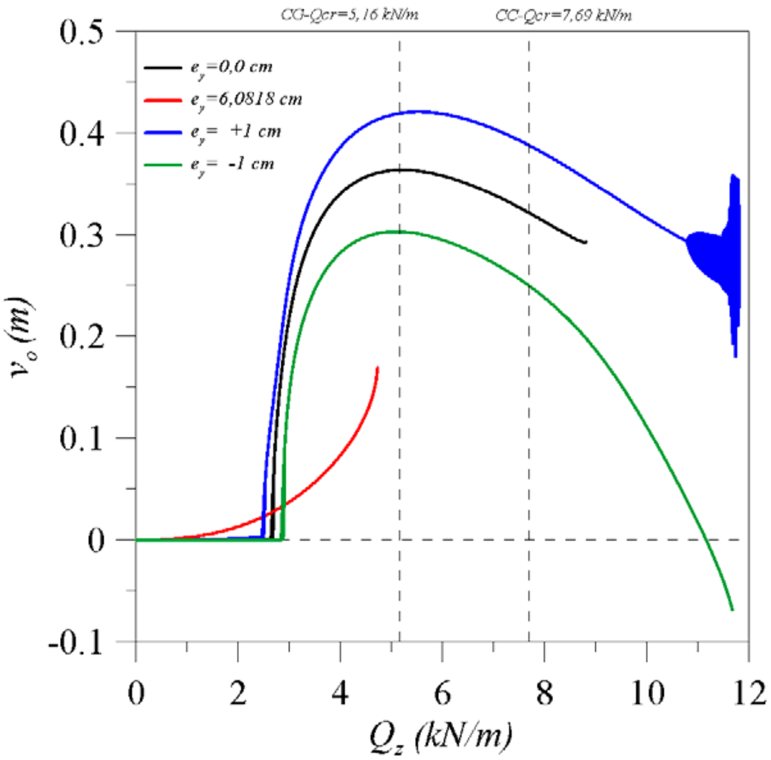
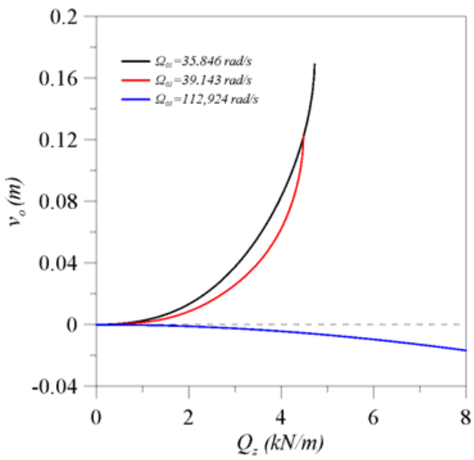


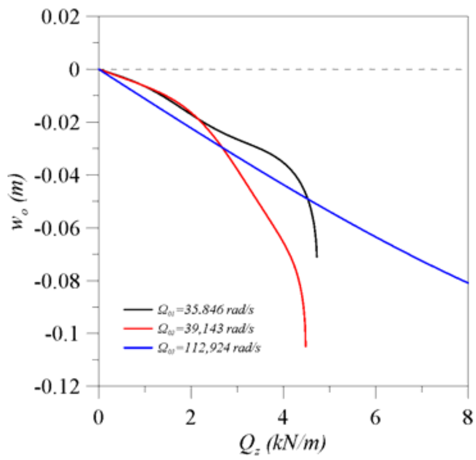
Figura 4.13: Influência da posição do carregamento Q_z ao longo do eixo *Y* nos diagramas de bifurcação. Ω_z=35,846 rad/s, e magnitude da excitação Q_z variando de 0 a 11,8 kN/m.

4.3.4.2
Comparação dos diagramas de bifurcações nas três primeiras regiões de ressonância, carga Q_z aplicada no centro de gravidade

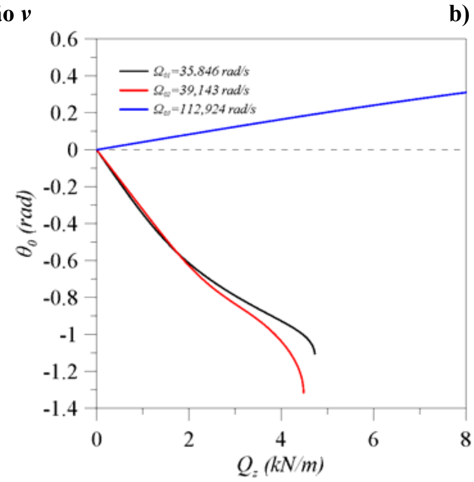
A Figura 4.14 mostra os diagramas de bifurcação para a frequência de excitação igual a cada uma das três menores frequências naturais ($\Omega_{z01} = 35{,}846\, rad/s$, $\Omega_{z02} = 39{,}143\, rad/s$ e $\Omega_{z03} = 112{,}924\, rad/s$) considerando a carga Q_z aplicada no centro de gravidade e $e_y = 6{,}0818\, cm$. Na Figura 4.15 comparam-se as respostas no tempo e plano de fase para $Q_z = 4{,}0\, kN/m$. Novamente, tal como na Figura 4.12, observam-se comportamentos distintos nas três primeiras regiões de ressonância. Diferente do caso anterior (carga Q_z aplicada no centro de cisalhamento) a solução vermelha, associada à segunda frequência natural, tornou-se não planar.



a) Direção *v*

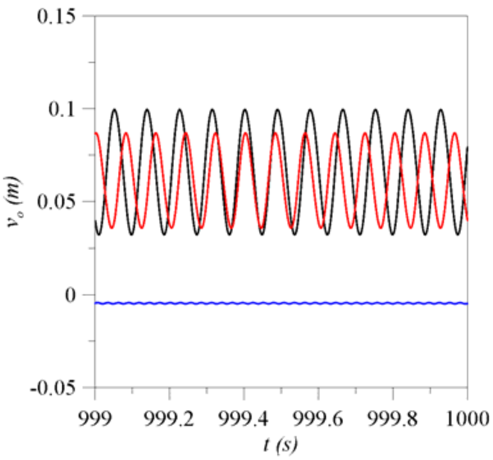


b) Direção *w*

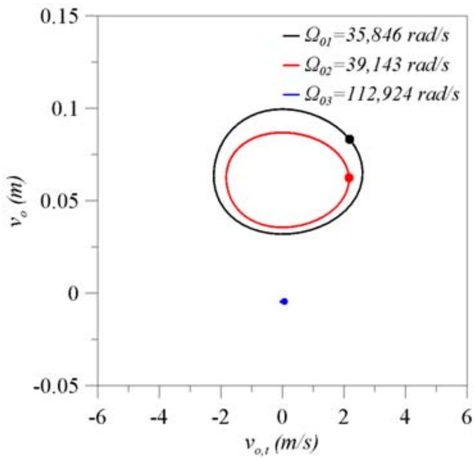


c) Direção θ

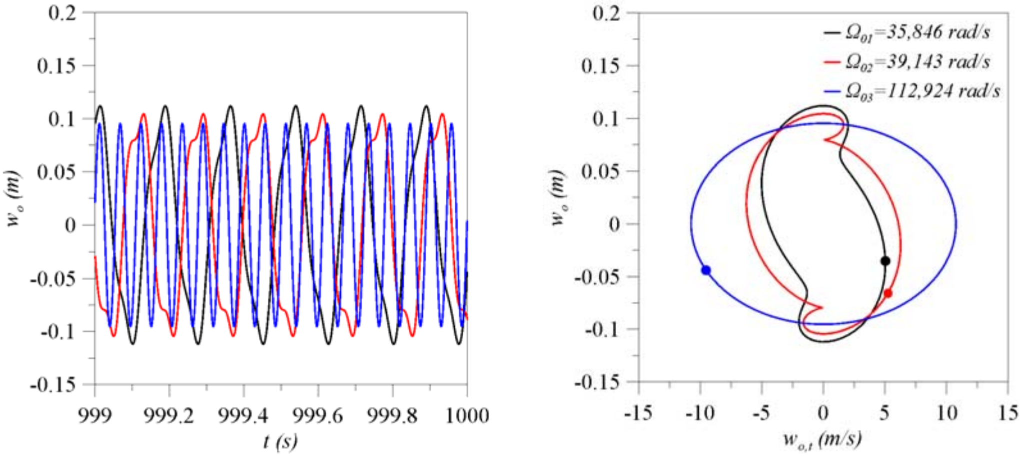
Figura 4.14: Comparação dos diagramas de bifurcação para as direções v_o, w_o e θ_o, com e_y=6,0818 cm e Ω_{z01}=35,846 rad/s, Ω_{z02}=39,143 rad/s, Ω_{z03}=112,924 rad/s, ξ=1,22% e magnitude da excitação Q_z variando de 0 a 8kN/m.



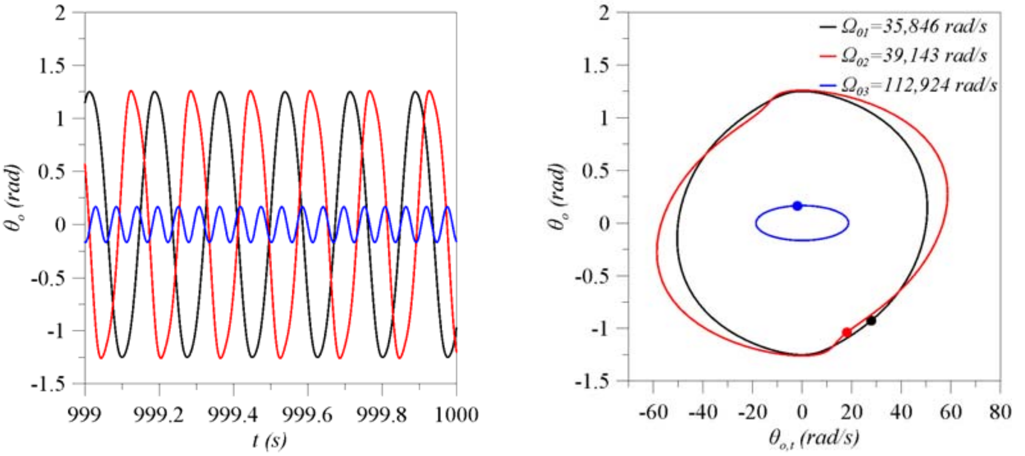
a) Resposta no tempo na direção *v*



d) Plano de fase e seção de Poincaré na direção *v*



b) Resposta no tempo na direção w e) Plano de fase e seção de Poincaré na direção w

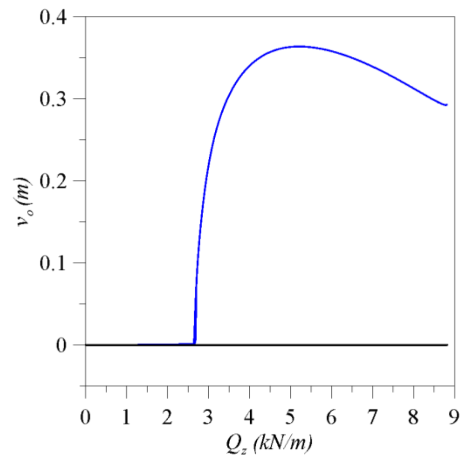


c) Resposta no tempo na direção θ f) Plano de fase e seção de Poincaré na direção θ

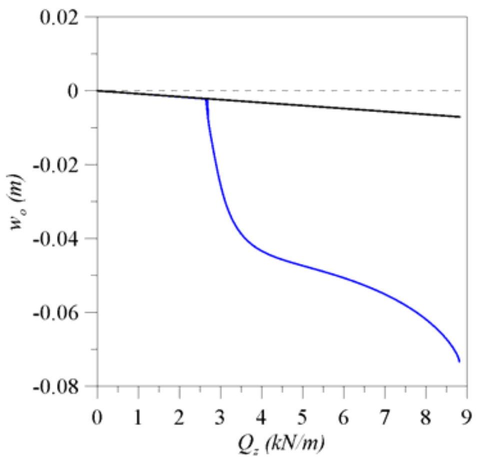
Figura 4.15: Resposta no tempo e plano de fase, com ***Ω_{z01}=35,846 rad/s, Ω_{z02}=39,143 rad/s, Ω_{z03}=112,924 rad/s, ξ=1,22%*** **magnitude da excitação** ***Q_z=4,0 kN/m*****, aplicada a** ***e_y=6,0818 cm*** **(centro de gravidade).**

4.3.5 Influência da não linearidade na amplificação dinâmica

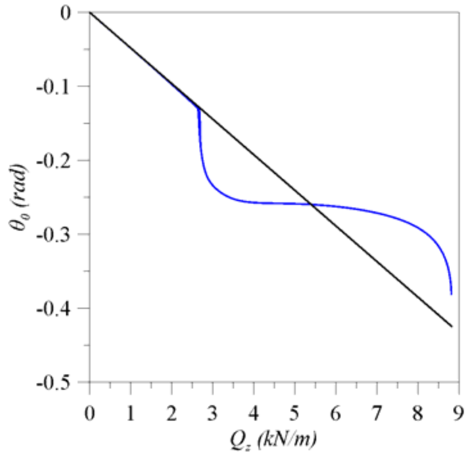
Na Figura 4.16 comparam-se os diagramas de bifurcações para os componentes v_o, w_o e θ_o do sistema linearizado e do sistema não linear, considerando $\Omega_z = 35{,}846\, rad/s$ e a carga Q_z aplicada no centro de cisalhamento. No início, ambas as respostas têm um comportamento similar. Uma vez que se atinge a carga critica dinâmica, $Q_z = 2{,}71\, kN/m$, observa-se uma sensível diferença entre o comportamento do problema linearizado e do problema não linear. Como esperado, para o sistema linearizado o deslocamento v_o é nulo.



a) Direção *v*



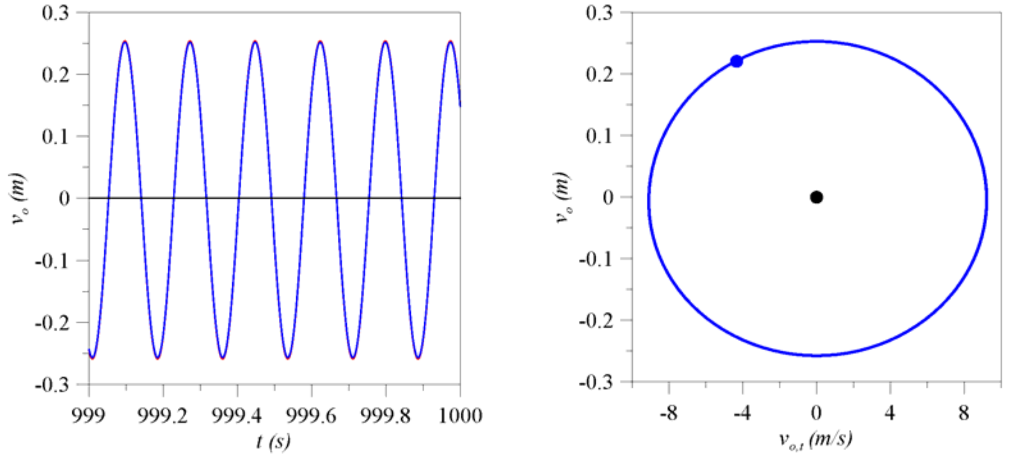
b) Direção *w*



c) Direção θ

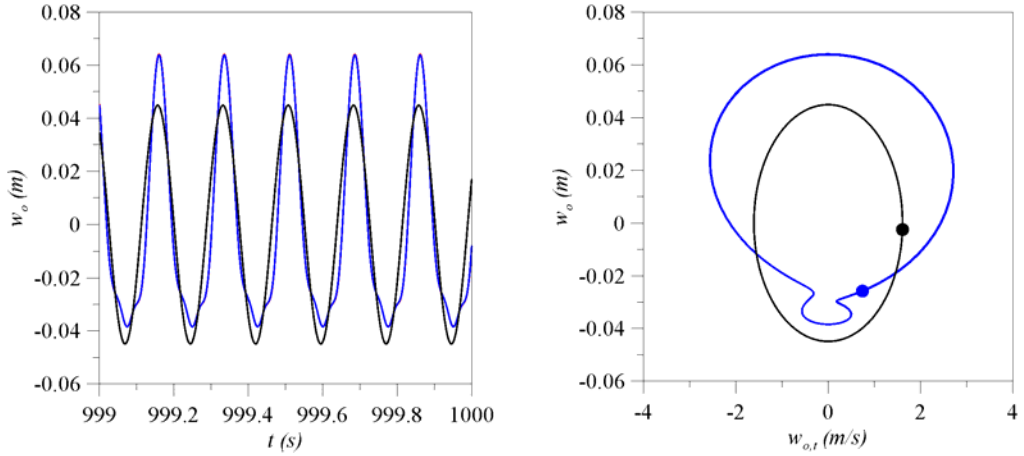
Figura 4.16: Diagrama de bifurcação da solução linear (preto) e não linear (azul) para as direções v_o, w_o e θ_o, com Ω_z=35,846 rad/s, ξ=1,22%, e_y=0,0 cm e magnitude da excitação Q_z variando de 0 a 8,8 kN/m. Função de torção $\theta_x(x,t)=\theta_o(t).sen(\pi\, x/2L)$.

Para ilustrar a diferença de comportamento após a bifurcação, mostram-se nas Figuras 4.17 e 4.18 as projeções da reposta no tempo, plano de fase e mapa de Poincaré para $Q_z = 3kN/m$ e $Q_z = 4kN/m$, respectivamente. Nota-se a maior complexidade da resposta não linear comparada com a resposta linear. Enquanto os planos de fase da resposta linear apresentam simetria com respeito aos eixos de deslocamento e velocidade (órbita elíptica), os planos de fase da resposta não linear apresentam órbitas não elípticas e uma grande assimetria, em particular para w_o e θ_o. Nos três graus de liberdade a velocidade máxima corresponde sempre ao caso não linear.



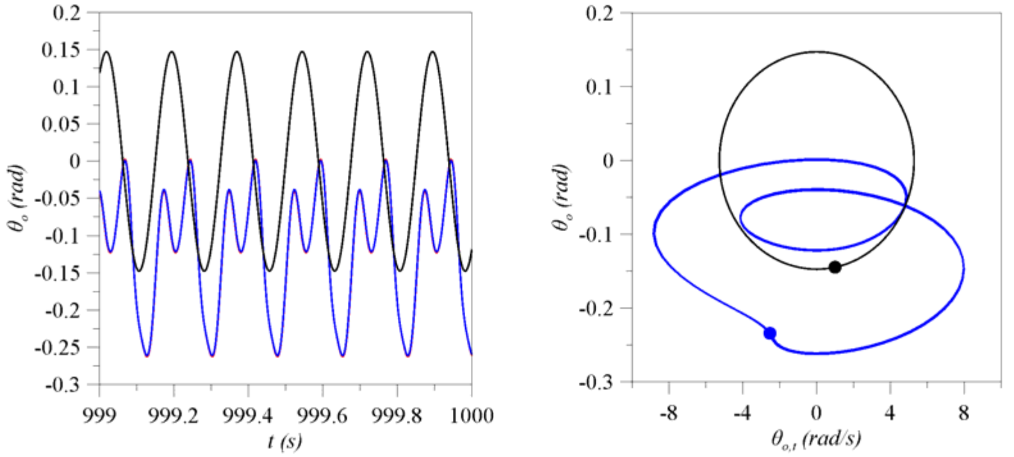
d) Resposta no tempo na direção *v*

d) Plano de fase e seção de Poincaré na direção *v*



e) Resposta no tempo na direção *w*

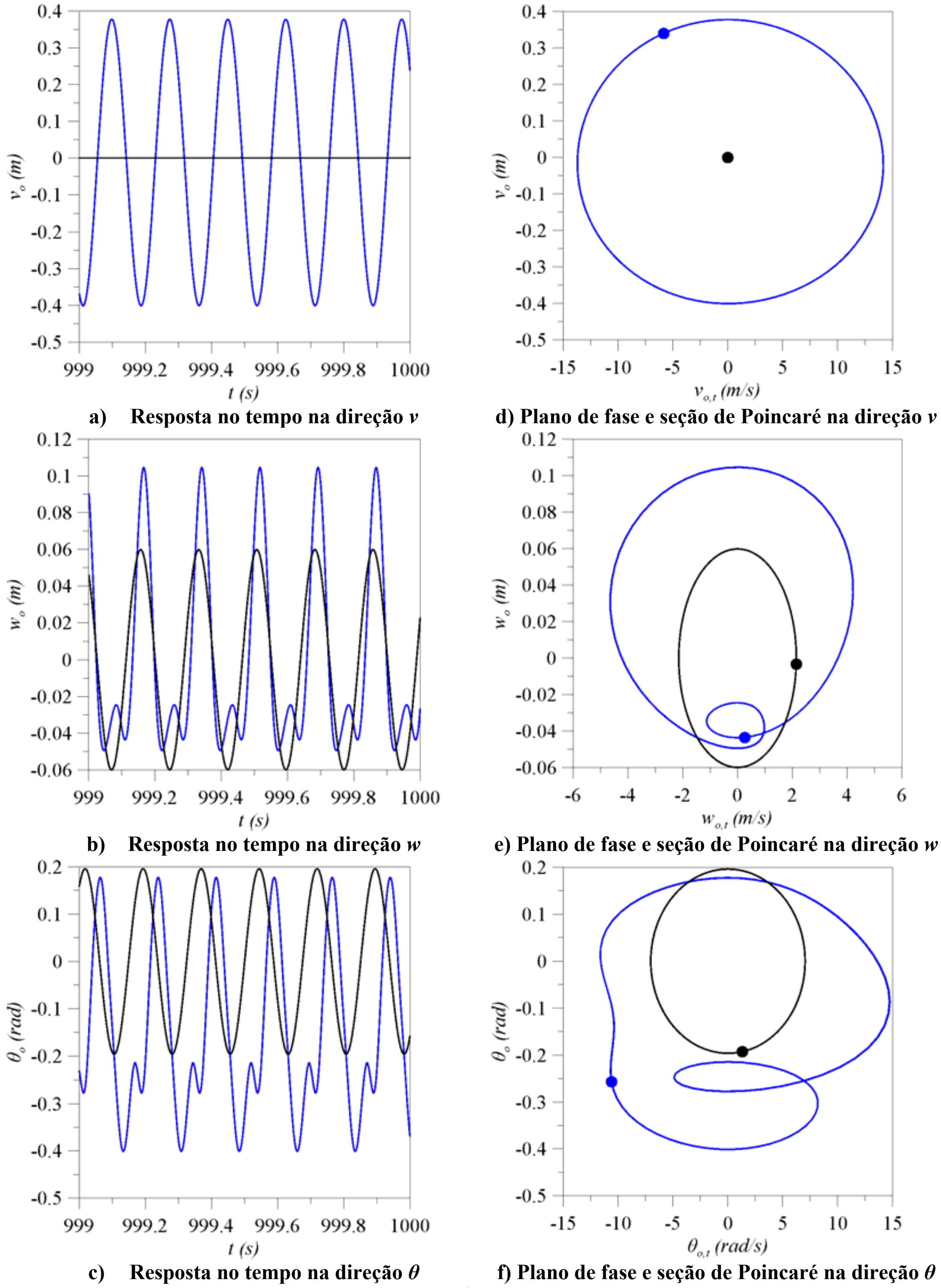
e) Plano de fase e seção de Poincaré na direção *w*



f) Resposta no tempo na direção θ

f) Plano de fase e seção de Poincaré na direção θ

Figura 4.17: Resposta no tempo e plano de fase para o sistema linearizado (em preto) e o sistema não linear (em azul). Ω_z*=35,846 rad/s,* ξ*=1,22%,* Q_z*=3,0 kN/m,* **e** e_y*=0,0 cm.*



a) Resposta no tempo na direção *v* d) Plano de fase e seção de Poincaré na direção *v*

b) Resposta no tempo na direção *w* e) Plano de fase e seção de Poincaré na direção *w*

c) Resposta no tempo na direção *θ* f) Plano de fase e seção de Poincaré na direção *θ*

Figura 4.18: Resposta no tempo e plano de fase para o sistema linearizado (em preto) e o sistema não linear (em azul). Ω_z*=35,846 rad/s,* ξ*=1,22%,* Q_z*=4,0 kN/m* **e** e_y*=0,0 cm.*

O conceito de Fator de Amplificação Dinâmica (FAD) é bastante difundido na análise e projeto de estruturas sob cargas dinâmicas, sendo usado como um parâmetro adimensional de referência em normas de projeto. O FAD é definido como a razão entre o deslocamento dinâmico máximo na resposta permanente e o deslocamento estático sob uma carga de mesma magnitude. Como observado nas Figuras 4.17 e 4.18, a não linearidade leva a um aumento significativo nos deslocamentos máximos e, consequentemente, a um aumento no FAD. Para uma viga engastada e livre sob carga uniformemente distribuída a flecha máxima é dada por $q_i L^4/(8EI_i)$. Para, por exemplo, $Q_z = 4kN/m$ tem-se $v_{\max} = 0{,}315m$ e $w_{\max} = 0{,}049m$. Na Tabela 4.1 são apresentados os deslocamentos e velocidades máximas para a carga Q_z aplicada em quatro diferentes posições ao longo do eixo *Y*. Na Tabela 4.2 são mostrados os fatores de amplificação dinâmica relativos aos deslocamentos v_o e w_0 (respectivamente, β_v e β_w). Observa-se que o fator de amplificação dinâmica pode atingir valores bastante elevados e que a posição do carregamento tem grande influência no seu valor.

Tabela 4.1: Deslocamentos e velocidades máximas do sistema não linear.

Posição da carga Q_z	Deslocamentos e velocidades máximas da resposta não linear					
	$v_o\ (m)$	$\dot{v}\ (m/s)$	$w_o\ (m)$	$\dot{w}\ (m/s)$	$\theta_o\ (rad)$	$\dot{\theta}\ (rad/s)$
+1cm	0,4596	16,2059	0,1208	5,8855	0,5257	17,8183
-1cm	0,3370	11,9761	0,0923	3,8412	0,3626	16,2031
e_y=0 cm	0,4001	14,1469	0,1045	4,6371	0,4007	14,7119
e_y=6,0818 cm	0,0998	2,6091	0,1121	5,0335	1,2519	50,4924

Tabela 4.2: Fator de amplificação dinâmica nas direções v_o e w_o com Ω_z=35,846 rad/s, ξ=1,22% e magnitude da excitação Q_z=4,0 kN/m.

Posição da carga Q_z	Fator de Amplificação Dinâmica	
	β_v	β_w
e_y=+1cm	1,46	2,45
e_y=-1cm	1,07	1,87
e_y=0 cm	1,27	2,12
e_y=6,0818 cm	0,32	2,28

4.3.6 Carregamento aplicado na mesa superior e inferior – efeitos de segunda ordem

A Equação (4.3) apresenta os termos $Q_z\,\mathrm{sen}(\Omega_z t)(5.9593\theta_o e_z - 7.587 e_y)$ relativos ao momento torsor causado pelas excentricidades da carga Q_z. Verifica-se que o momento depende não só da excentricidade e_y como também da excentricidade e_z. O termo em e_z depende da rotação θ_o, sendo este um efeito de segunda ordem. No presente item estuda-se o efeito da excentricidade e_z na resposta não linear. Considera-se a carga Q_z

aplicada no centro de gravidade, $e_y = 6{,}0818\,cm$ e $e_z = 0$, e a carga Q_z aplicada na mesa superior e inferior do perfil ($e_y = 6{,}0818\,cm$ e $e_z = \pm 10\,cm$). As três posições da carga são ilustradas na Figura 4.19. Na Figura 4.20 apresentam-se os diagramas de bifurcações da estrutura para estas três posições da carga Q_z com $\Omega_z = 35{,}846\ rad/s$. Observa-se que há diferenças marcantes nos diagramas, demostrando que a excentricidade e_z influencia de forma sensível a resposta dinâmica não linear. Estas diferenças são ilustradas na Figura 4.21 onde são mostradas as projeções da reposta no tempo, plano de fase e mapa de Poincaré para $Q_z = 4\,kN/m$. Os resultados da carga na mesa superior e inferior são simétricos com respeito aos resultados para a carga no centro de gravidade, que apresenta deslocamentos e velocidades máximas bem menores. Mostra-se que a posição ao longo da linha de ação da própria carga é relevante em uma análise não linear. Cabe lembrar que a posição da carga Q_z também é relevante na carga crítica estática de flambagem lateral de perfis esbeltos (Allen e Bulson, 1980).

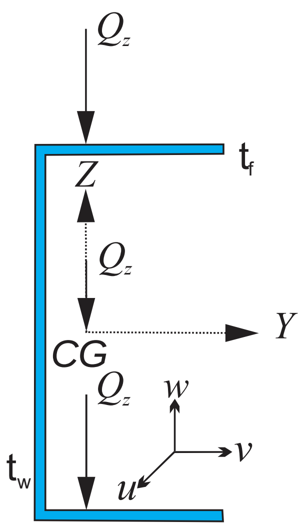
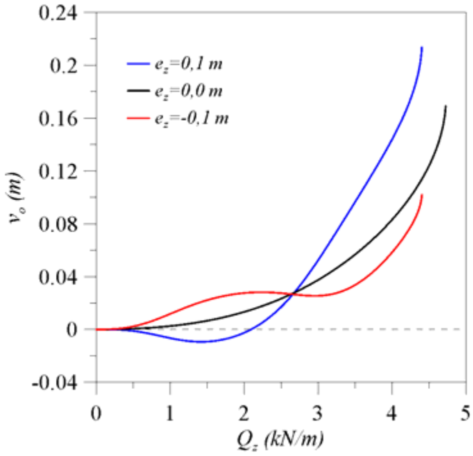
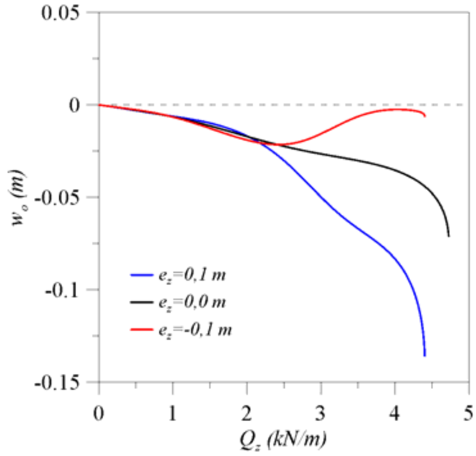


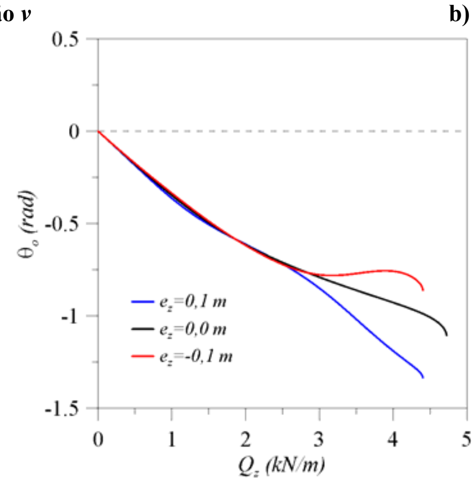
Figura 4.19: Posições da força excitadora no centro de gravidade, mesa superior e inferior do perfil monosimétrico C.



a) Direção v

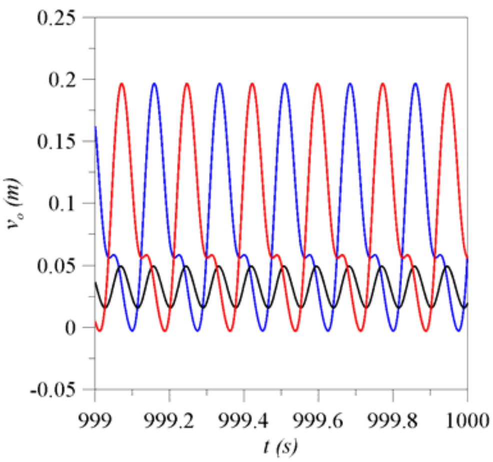


b) Direção w

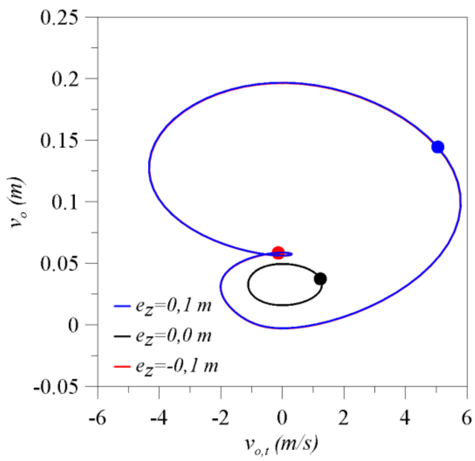


c) Direção θ

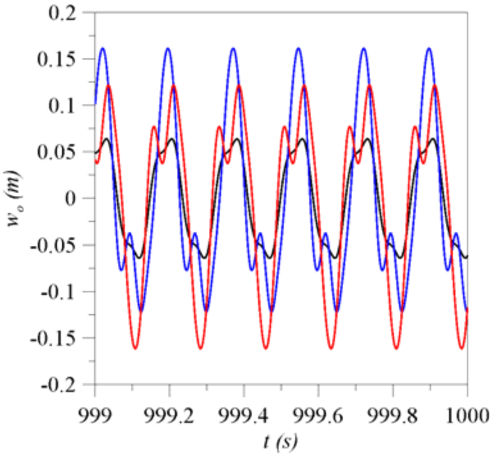
Figura 4.20: Comparação diagrama de bifurcação para as direções v_o, w_o e θ_o, com a carga Ω_z=35,846 rad/s aplicada na mesa superior (e_y=6,0818 cm, e_z=10 cm) – em azul, centro de gravidade (e_y=6,0818 cm, e_z=0 cm), - em preto, e mesa inferior (e_y=6,0818 cm, e_z=-10 cm) – em vermelho. Magnitude da excitação Q_z variando de 0 a 4,8kN/m. , ξ=1,22%,

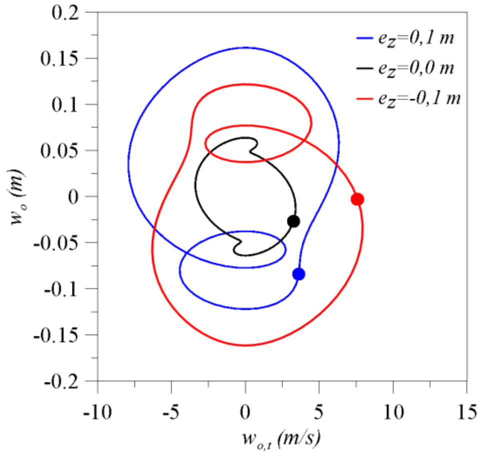


a) Resposta no tempo na direção v

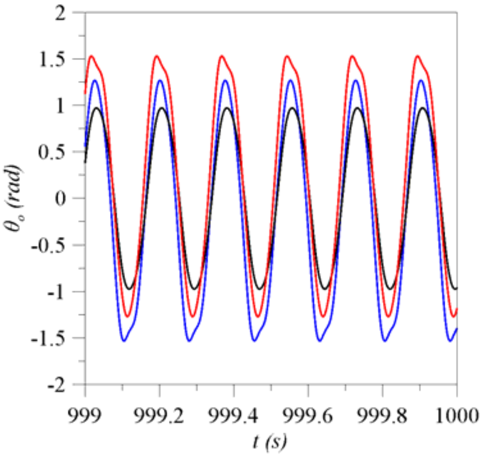


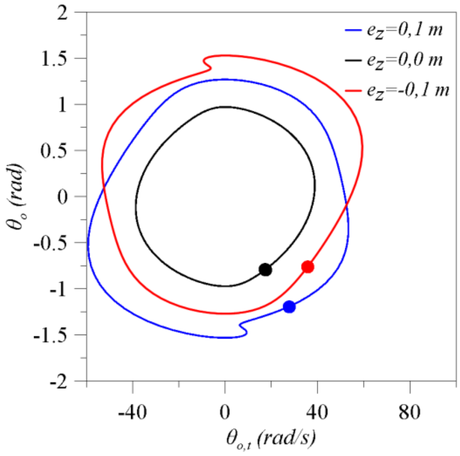
e) Plano de fase e seção de Poincaré na direção v



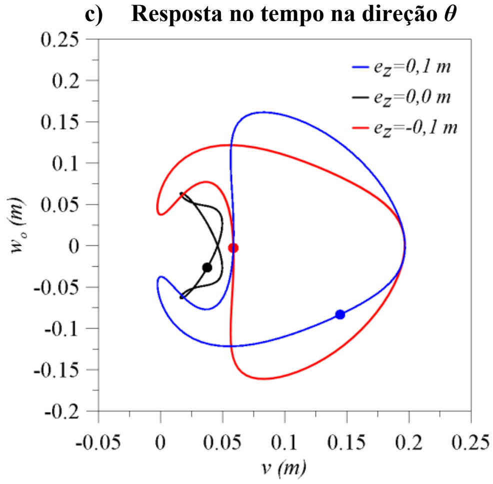


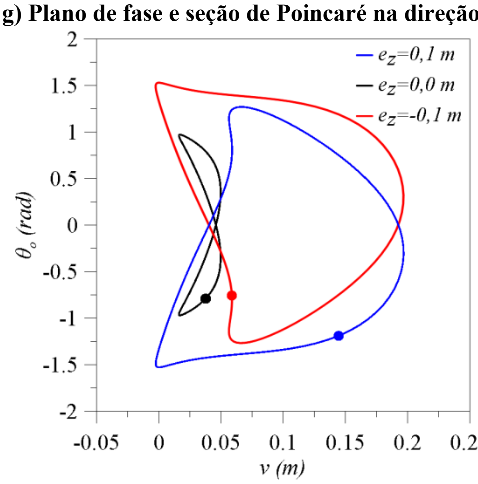
b) Resposta no tempo na direção *w* **f) Plano de fase e seção de Poincaré na direção *w***





c) Resposta no tempo na direção θ **g) Plano de fase e seção de Poincaré na direção θ**





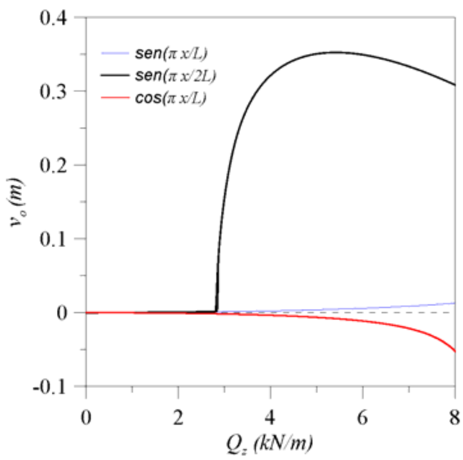
d) Plano de fase v_o vs w_o **h) Plano de fase v_o vs θ_o**

Figura 4.21: Comparação da resposta no tempo e plano de fase com *Ω_z=35,846 rad/s, ξ=1,22%*, e magnitude da excitação *Q_z=4,0 kN/m*, aplicada na mesa superior *(e_y=6,0818 cm, e_z=10 cm)* – em azul, centro de gravidade *(e_y=6,0818 cm, e_z=0 cm)*, - em preto, e mesa inferior *(e_y=6,0818 cm, e_z=-10 cm)* – em vermelho.

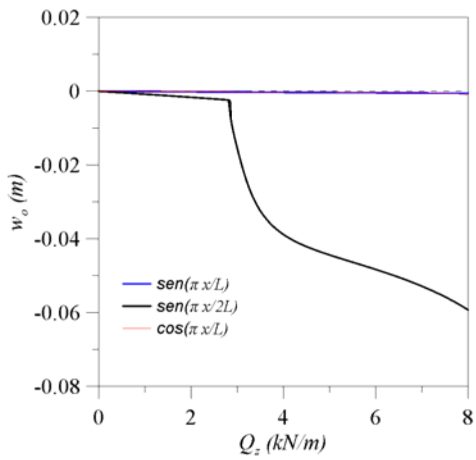
4.3.7
Influência da função de torção

No Capítulo 3 estudou-se a influência de três diferentes modos de torção nas frequências naturais da viga– Tabelas (3.4) a (3.6). Para a viga engastada e livre a frequência mínima nos três casos corresponde ao modo de flexão desacoplado, sendo $\omega_o = 35.913 rad/s$, não tendo, pois, a função de torção influência no valor da frequência mínima. Neste item estuda-se sua influência no comportamento dinâmico não linear.

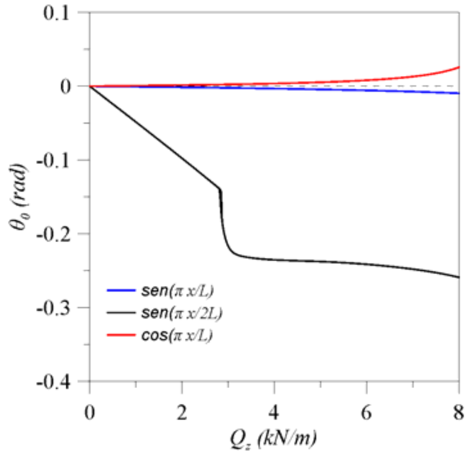
A Figura 4.22 apresenta os diagramas de bifurcação para as três funções de torção, considerando Q_z aplicada no centro de cisalhamento e $\Omega_z = 35{,}913\ rad/s$. Os resultados mostram claramente que, apesar de se ter a mesma frequência natural, os diagramas de bifurcação apresentam grandes diferenças, o que reflete a influência das restrições à torção da seção transversal ao longo da viga no regime não linear. Na Figura 4.23 são mostradas as projeções da reposta no tempo, plano de fase e mapa de Poincaré para $Q_z = 6{,}0\,kN/m$. Verifica-se que o sistema com a função $\theta_x(x,t)=\theta_o(t).sen(\pi x/2L)$ apresenta os maiores deslocamentos e velocidades, pois a rotação não está impedida na extremidade livre da viga, conforme mostra Figura 2.8. Cabe ressaltar que as outras duas funções de torção são de difícil realização em aplicações práticas de uma viga engastada e livre, o que não acontece para outras condições de contorno, por exemplo, para a viga bi-engastada.



a) Direção *v*

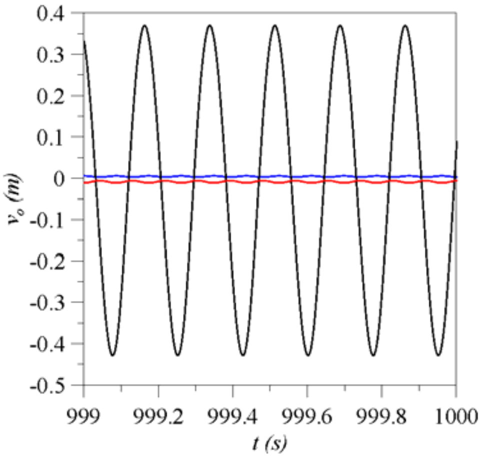


b) Direção *w*

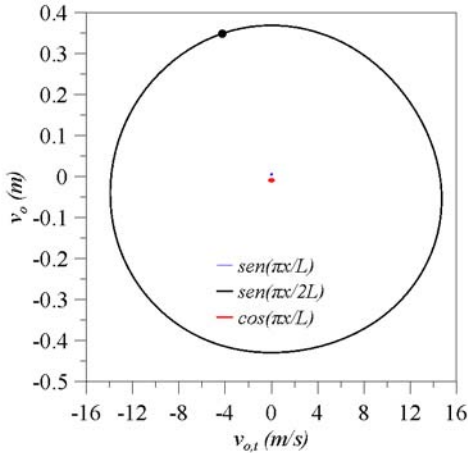


c) Direção θ

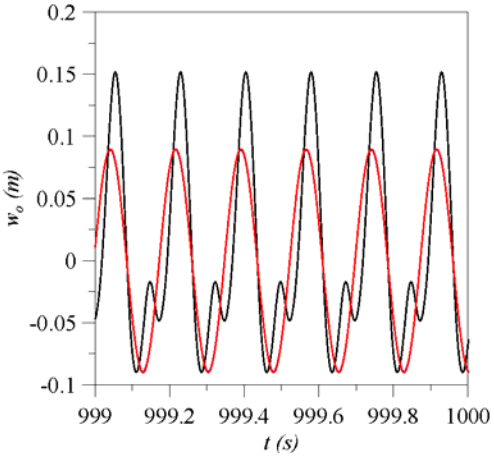
Figura 4.22: Comparação dos diagramas de bifurcação para as direções v_o, w_o e θ_o, com Ω_z=35,913 rad/s, ξ=1,22%, e_y=0,0 cm para as três funções de torção, e magnitude da excitação Q_z variando de 0 a 8kN/m.



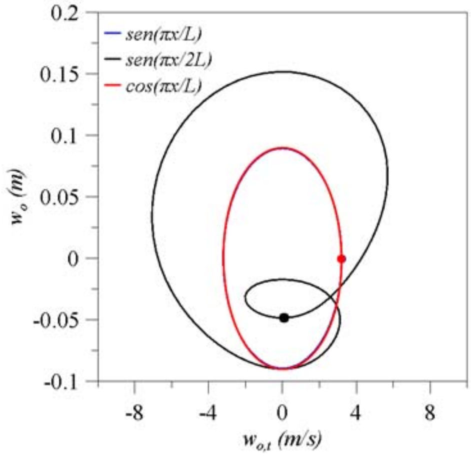
a) Resposta no tempo na direção v



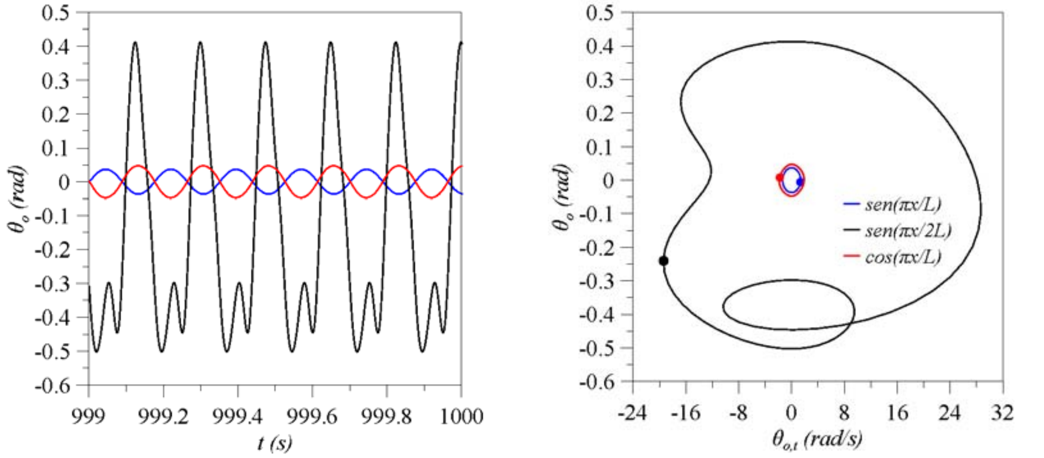
d) Plano de fase e seção de Poincaré na direção v



b) Resposta no tempo na direção w



e) Plano de fase e seção de Poincaré na direção w



c) Resposta no tempo na direção θ f) Plano de fase e seção de Poincaré na direção θ

Figura 4.23: Comparação da resposta no tempo e plano de fase, com Ω_z=35,913 rad/s, ξ=1,22%, e magnitude da excitação Q_z=6,0 kN/m, aplicada a e_y=0,0 cm, para as três funções de torção.

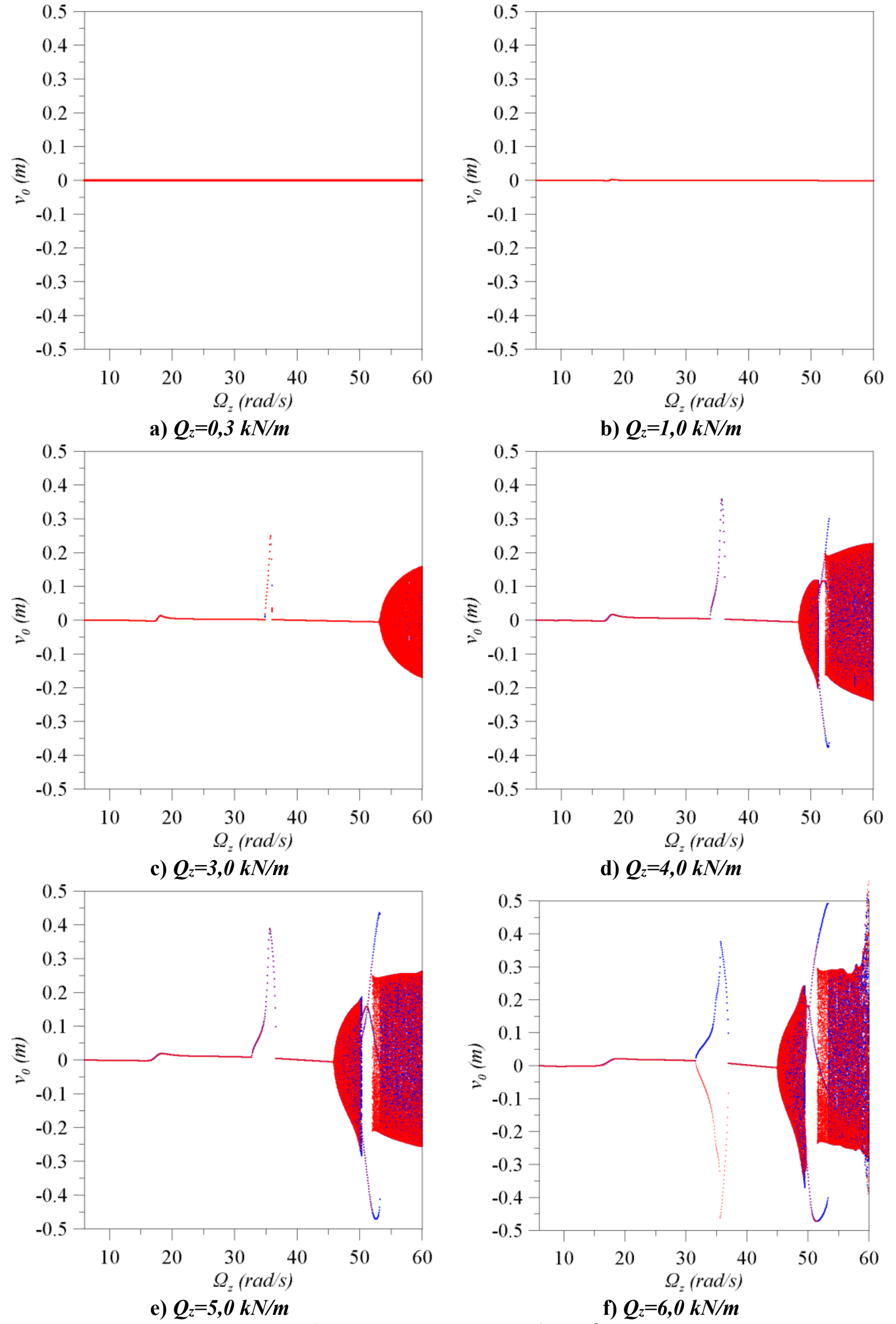
4.3.8 Análise paramétrica considerando a frequência da excitação como parâmetro de controle

O sistema dinâmico que governa o movimento não linear da viga é função de um conjunto de variáveis de estado e de parâmetros de controle. Até este ponto adotou-se como parâmetro de controle a magnitude de excitação Q_z, fixando-se a frequência de excitação, Ω_z. Agora, adota-se como parâmetro de controle a frequência de excitação e fixa-se a magnitude de excitação. Apresenta-se no item 4.3.8.1 os diagramas de bifurcações para Q_z aplicado no centro de cisalhamento do perfil. Soluções entre Ω_z = 60 rad.s^{-1} e Ω_z = 100 rad.s^{-1} são apresentadas no item 4.3.8.2. Por fim, no item 4.3.8.3, considera-se a carga Q_z aplicada no centro de gravidade do perfil.

4.3.8.1 Diagrama de bifurcação para Q_z aplicado no centro de cisalhamento.

Nas Figuras 4.24 a 4.26 são apresentados os diagramas de bifurcações tomando a frequência de excitação, Ω_z, como parâmetro de controle. São considerados os seguintes valores de magnitude da excitação: $Q_z = 0{,}3\ kN/m$, $Q_z = 1\ kN/m$, $Q_z = 3{,}0\ kN/m$, $Q_z = 4{,}0\ kN/m$, $Q_z = 5{,}0\ kN/m$ e $Q_z = 6{,}0\ kN/m$. Estes diagramas foram obtidos aumentando (em vermelho) e diminuindo (em azul) a frequência da excitação. Em todos os casos a carga está aplicada no centro de cisalhamento, ou seja, $e_y = 0{,}0\,cm$. A frequência varia no intervalo

$5rad/s \leq \Omega_z \leq 60rad/s$, incluindo assim as duas primeiras regiões de ressonância da viga. Verifica-se que a componente v_o é nula para pequenas magnitudes de carregamento, mas, à medida que Q_z cresce, observam-se várias bifurcações no intervalo $30rad/s \leq \Omega_z \leq 60rad/s$, com soluções periódicas e não periódicas, passando a ser esta componente diferente de zero (Figura 4.24). Estas bifurcações também induzem grandes modificações nas componentes w_o e θ_o (Figura 4.25 e Figura 4.26, respectivamente).



a) Q_z=0,3 kN/m
b) Q_z=1,0 kN/m
c) Q_z=3,0 kN/m
d) Q_z=4,0 kN/m
e) Q_z=5,0 kN/m
f) Q_z=6,0 kN/m

Figura 4.24: Diagrama de bifurcação variando a frequência de excitação Ω_z, para valores crescentes da magnitude de excitação: Q_z=0,3 kN/m, Q_z=1,0 kN/m, Q_z=3,0 kN/m, Q_z=4,0 kN/m, Q_z=5,0 kN/m, Q_z=6,0 kN/m, aplicada no centro de cisalhamento, e_y=0,0 cm, componente v_o. ξ=1,22% .

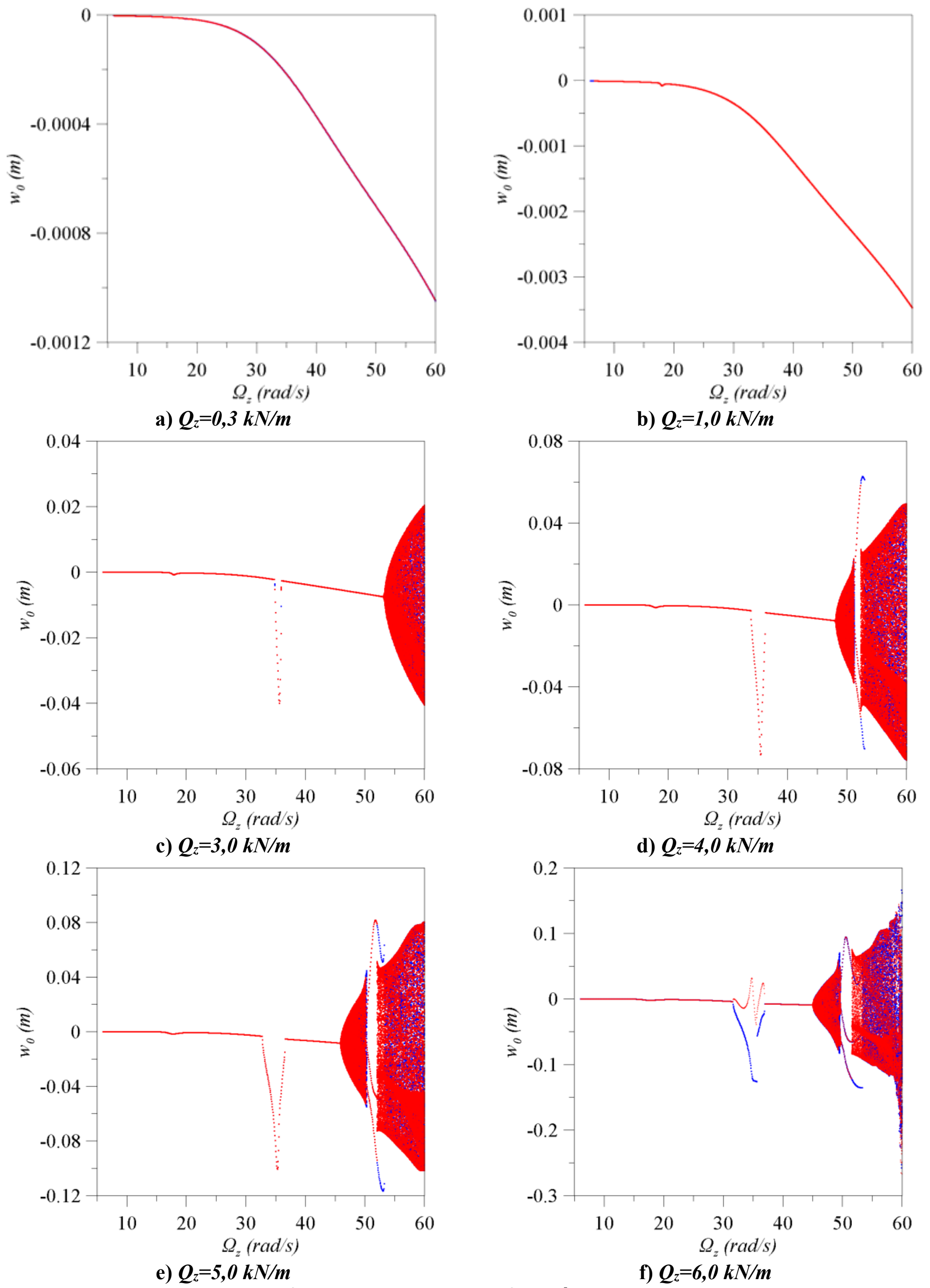


Figura 4.25: Diagrama de bifurcação variando a frequência de excitação Ω_z, para valores crescentes da magnitude de excitação: Q_z=0,3 kN/m, Q_z=1,0 kN/m, Q_z=3,0 kN/m, Q_z=4,0 kN/m, Q_z=5,0 kN/m, Q_z=6,0 kN/m, aplicada no centro de cisalhamento, e_y=0,0 cm, componente w_o. ξ=1,22% .

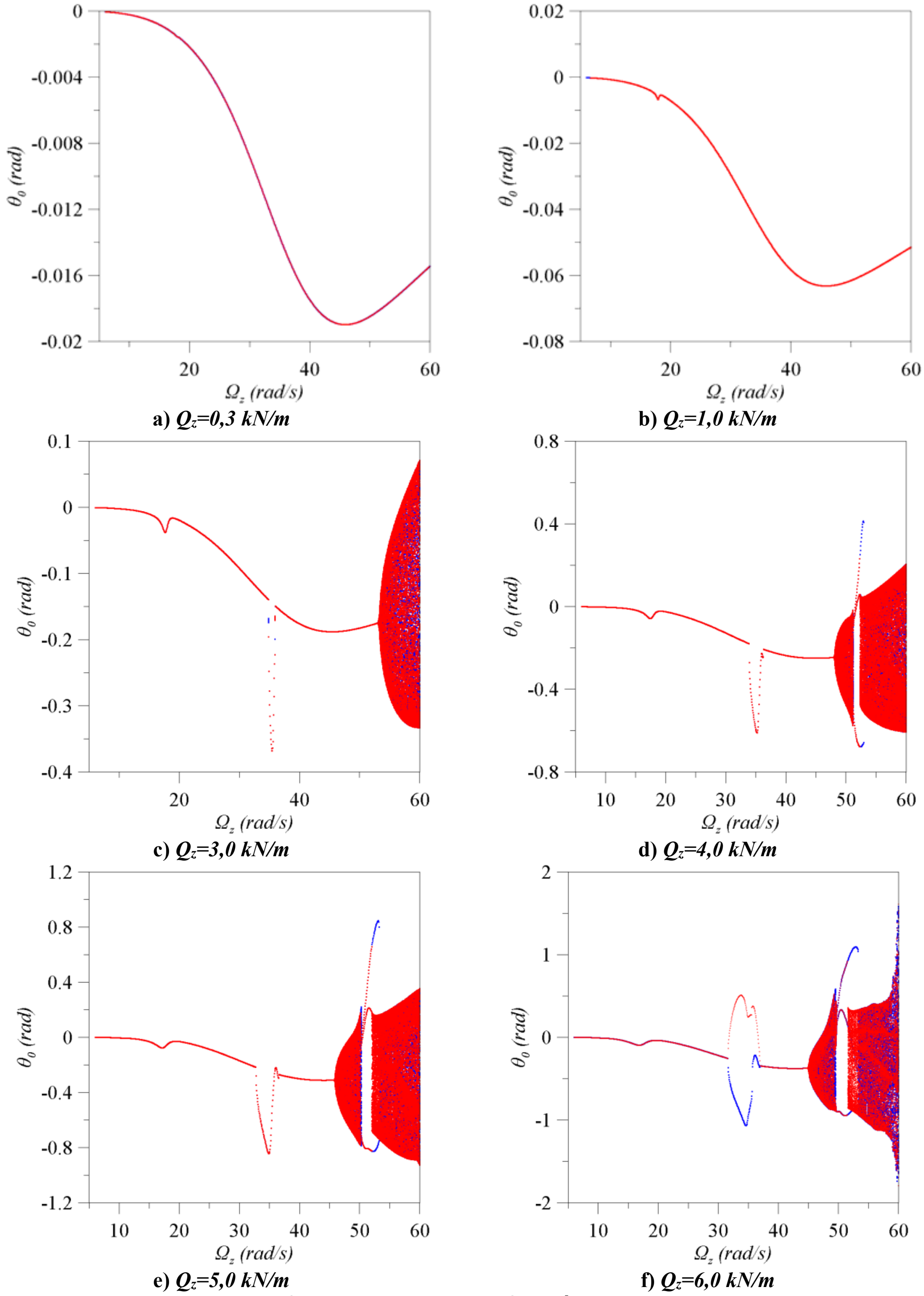
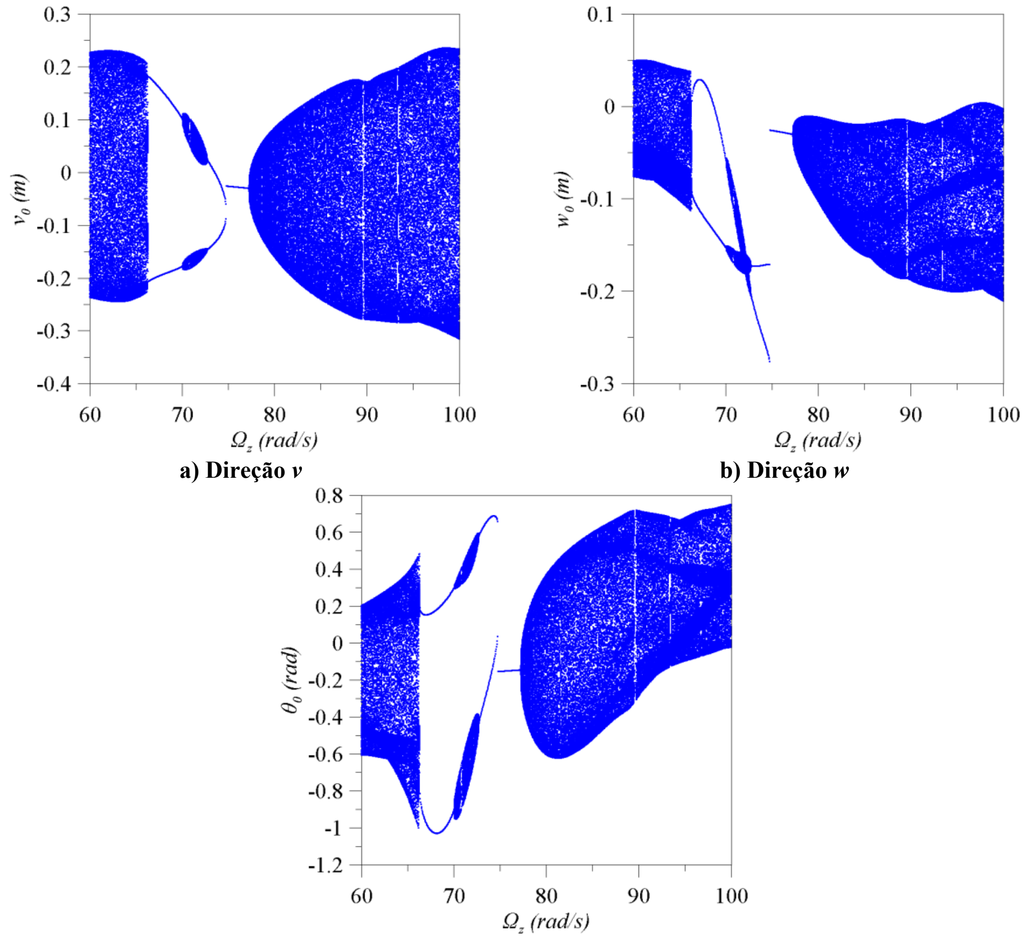


Figura 4.26: Diagrama de bifurcação variando a frequência de excitação Ω_z, para valores crescentes da magnitude de excitação: Q_z=0,3 kN/m, Q_z=1,0 kN/m, Q_z=3,0 kN/m, Q_z=4,0 kN/m, Q_z=5,0 kN/m, Q_z=6,0 kN/m, aplicada no centro de cisalhamento, e_y=0,0 cm, componente θ_o. ξ=1,22% .

4.3.8.2
Região intermediária de excitação (60-100Hz)

A Figura (4.27) mostra os diagramas de bifurcações para valores de $60 \leq \Omega_z \leq 100\, rad/s$ e $Q_z = 4{,}0\, kN/m$. Verifica-se nesta faixa entre a segunda e terceira frequência natural uma série de bifurcações, mostrando que, mesmo fora das regiões de ressonância, a reposta do sistema estrutural pode ser complexa, inclusive com descontinuidades (saltos dinâmicos), com certas combinações de magnitude e frequência de excitação que podem levar ao colapso estrutural.



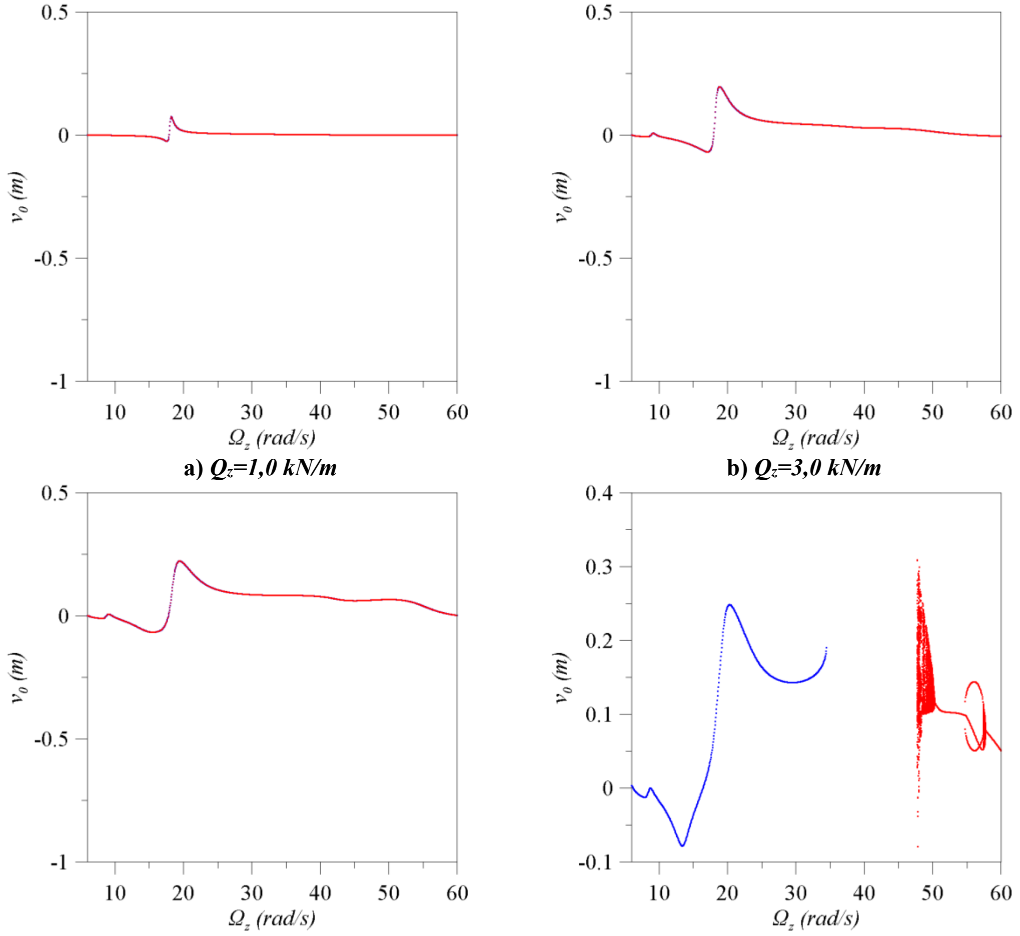
a) Direção *v* b) Direção *w*

c) Direção θ

Figura 4.27: Diagrama de bifurcação variando a frequência de excitação Ω_z de 60 a 100 rad./s, para a magnitude de excitação Q_z=4,0 kN/m, aplicado no centro de cisalhamento, e_y=0,0 cm, nas direções v_o, w_o e θ_o, com ξ=1,22%.

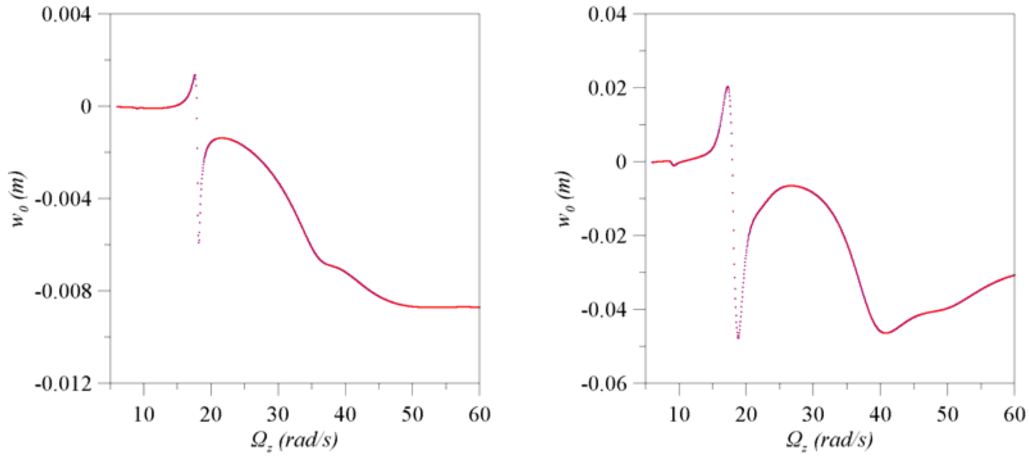
4.3.8.3
Diagrama de bifurcação para a carga Q_z aplicada no centro de gravidade.

Nesta parte do trabalho, considera-se a carga Q_z aplicada no centro de gravidade, $e_y = 6{,}0818\, cm$. Nas Figuras 4.28 a 4.30 são exibidos os diagramas de bifurcações tomando a frequência de excitação, $0 \le \Omega_z \le 60\, rad/s$, como parâmetro de controle para valores selecionados da magnitude da excitação, a saber: $Q_z = 1\, kN/m$, $Q_z = 3{,}0\, kN/m$, $Q_z = 4{,}0\, kN/m$, e $Q_z = 5{,}0\, kN/m$, respectivamente.

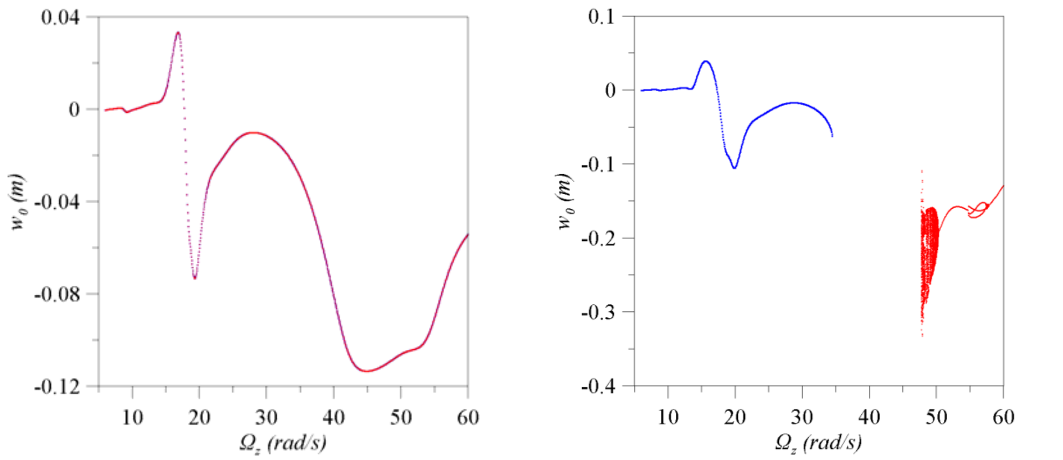


c) Q_z=4,0 kN/m   d) Q_z=5,0 kN/m

Figura 4.28: Diagrama de bifurcação variando a frequência de excitação Ω_z, para valores crescentes da magnitude de excitação: Q_z=1,0 kN/m, Q_z=3,0 kN/m, Q_z=4,0 kN/m, Q_z=5,0 kN/m. Carga aplicada no centro de gravidade, e_y=6,0818 cm, componente v_o. ξ=1,22% .

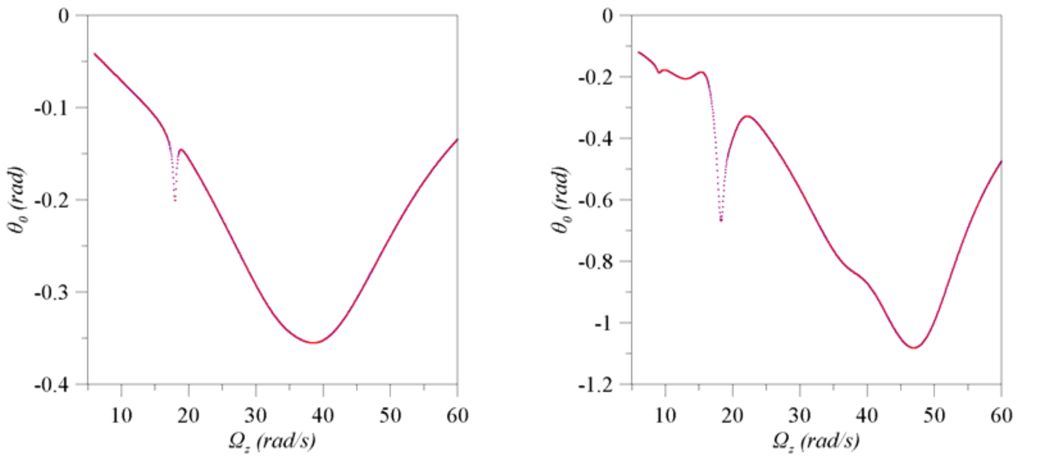


a) Q_z=1,0 kN/m   b) Q_z=3,0 kN/m

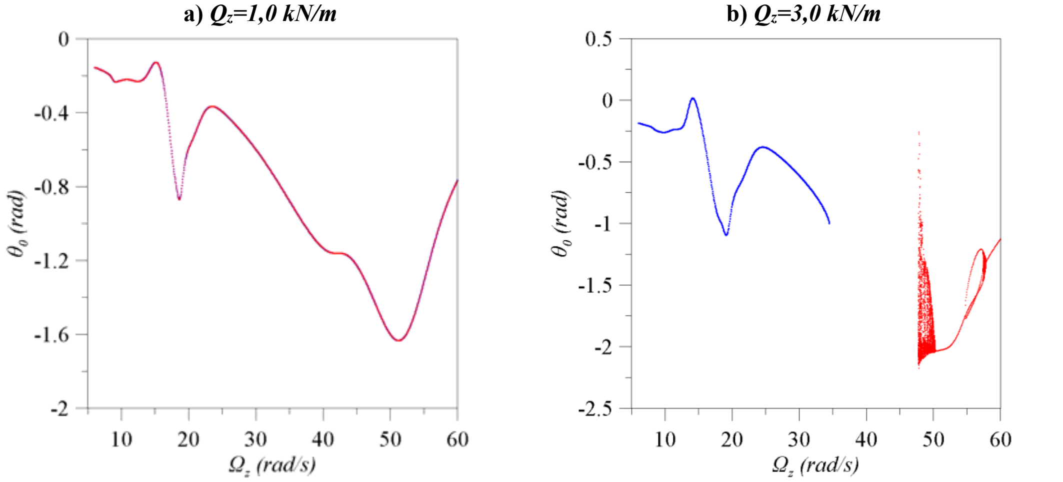


c) Q_z=4,0 kN/m   d) Q_z=5,0 kN/m

Figura 4.29: Diagrama de bifurcação variando a frequência de excitação *Ω_z*, para valores crescentes da magnitude de excitação: *Q_z=1,0 kN/m*, *Q_z=3,0 kN/m*, *Q_z=4,0 kN/m*, *Q_z=5,0 kN/m*. Carga aplicada no centro de gravidade, *e_y=6,0818 cm*, componente *w_o*, *ξ=1,22%* .



a) Q_z=1,0 kN/m   b) Q_z=3,0 kN/m



c) Q_z=4,0 kN/m   d) Q_z=5,0 kN/m

Figura 4.30: Diagrama de bifurcação variando a frequência de excitação *Ω_z*, para valores crescentes da magnitude de excitação - *Q_z=1,0 kN/m*, *Q_z=3,0 kN/m*, *Q_z=4,0 kN/m*, *Q_z=5,0 kN/m* - com carga aplicada no centro de gravidade *e_y=6,0818 cm*, componente *θ_o*, *ξ=1,22%* .

Nota-se um comportamento semelhante ao caso da carga aplicada no centro de cisalhamento. Para a magnitude de excitação $Q_z = 1{,}0 kN/m$, regiões instáveis começam a aparecer, tornando-se maiores à medida que a magnitude de excitação aumenta. Para $Q_z = 5{,}0\ kN/m$, por exemplo, esta região estende-se de $\Omega_z \approx 35$ Hz até $\Omega_z \approx 47$ Hz. Este comportamento mostra que a posição da carga no centro de gravidade é mais crítica que a carga no centro de cisalhamento.

4.4 Vibração forçada amortecida - Carregamento transversal Q_y

4.4.1 Magnitude da excitação como parâmetro de controle

Estuda-se, neste item, a vibração forçada da estrutura com carregamento aplicado no centro de cisalhamento do perfil e na direção *Y* (eixo de simetria da seção) causando flexão em torno do eixo com menor inércia. A Figura 4.31 mostra a localização da força excitadora. Para esta condição, faz-se necessário considerar nas Equações (4.1) a (4.3) $Q_z = \Omega_z = e_z = e_y = 0$.

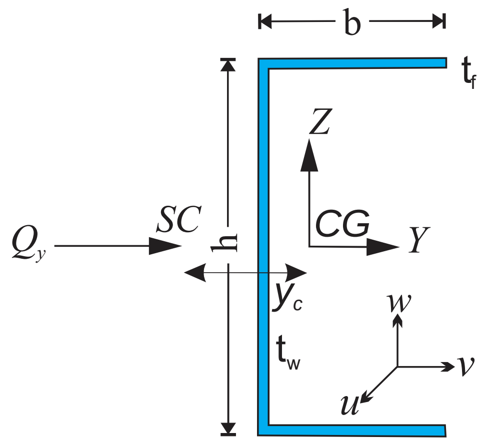
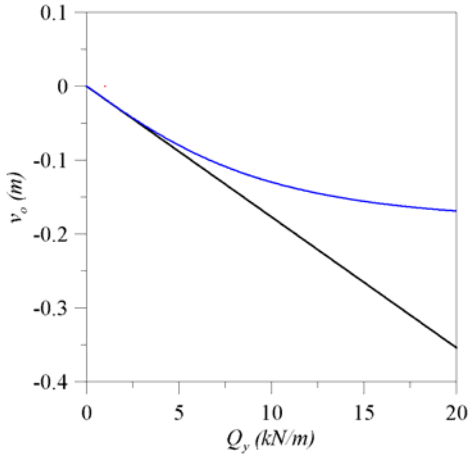
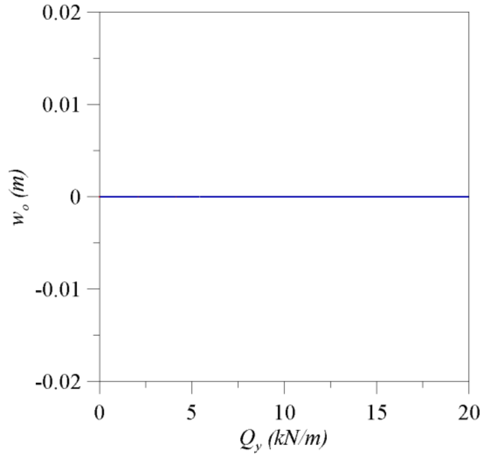


Figura 4.31: Perfil monosimétrico "C". Força excitadora Q_y no centro de cisalhamento.

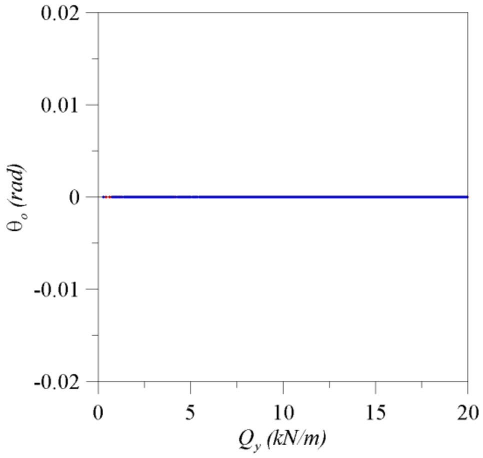
Na Figura 4.32 comparam-se os diagramas de bifurcações do sistema linear (em preto) e não linear (em azul) para as direções v_o, w_o e θ_o, com uma frequência de excitação $\Omega_y = 30\ rad/s$. Pode-se observar que, apesar do sistema possuir 3 GDL, os deslocamentos na direção *Z*, assim como o ângulo de torção θ_o, são nulos. Observa-se também que, para valores de Q_y superiores a 2,5kN/m, a não linearidade passa a ser importante.



a) Direção *v*



b) Direção *w*



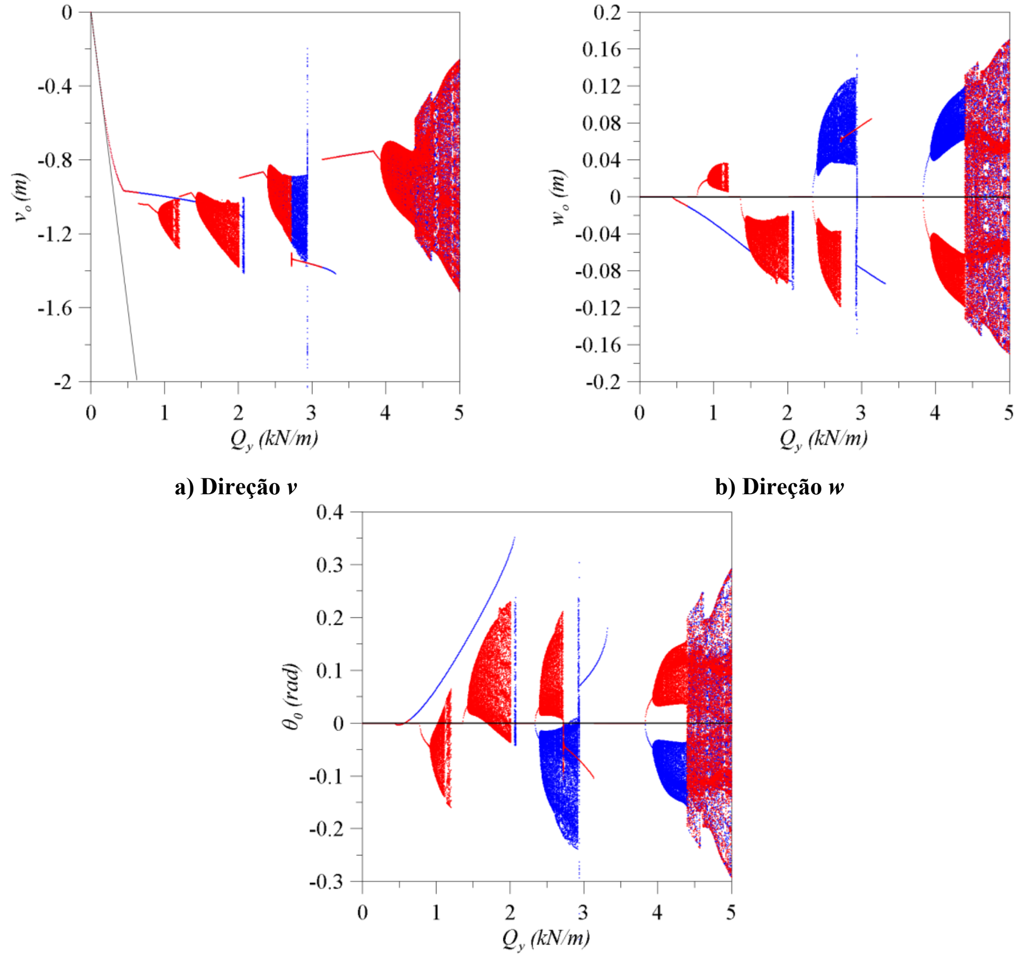
c) Direção θ

Figura 4.32: Diagrama de bifurcação da solução linear (em preto) e não linear (em azul) para as direções v_o, w_o e θ_o, com Ω_z=30 rad/s, ξ=1,22%, e_y=0,0 cm, e magnitude da excitação Q_y variando de 0 a 20 kN/m, para a função de torção $\theta_x(x,t)=\theta_o(t).sen(\pi x/2L)$.

Na Figura 4.33 são comparados os diagramas de bifurcações do sistema linear (em preto) e não linear (crescente em azul e decrescente em vermelho) para a frequência de excitação na vizinhança da frequência fundamental de vibração da estrutura ($\Omega_y = 35{,}846\ rad/s$).

A Figura 4.33 mostra que inicialmente (0 ≤ Q_y ≤ 0,30 kN/m) a resposta linear e não linear são coincidentes, com deslocamento apenas na direção v_o ($w_o = \theta_o$=0). A partit de 0,3kN/m a resposta não linear apresenta uma série de bifurcações, observando-se uma grande diferença entre a resposta linear (trivial) e não linear. Com o incremento da magnitude Q_y, é possível verificar diversas instabilidades ao longo do diagrama, marcadas por descontinuidades no mapa de Poincaré.

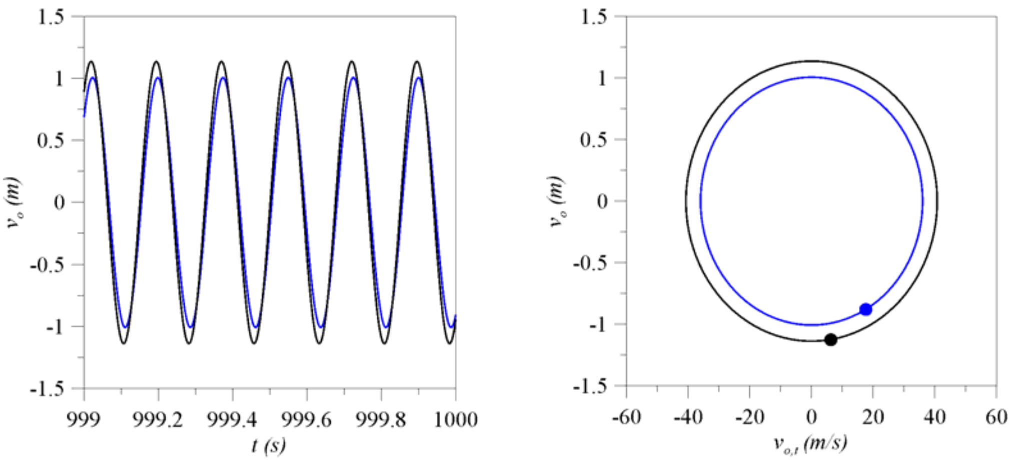
A Figura 4.34 mostra as projeções das duas respostas (linear e não linear) no tempo e os respectivos planos de fase da componente v_o, considerando magnitude de excitação $Q_y = 0{,}35\,kN/m$. Nela é possível verificar já uma pequena diferença entre a solução linear e a não linear.



a) Direção *v* b) Direção *w*

c) Direção *θ*

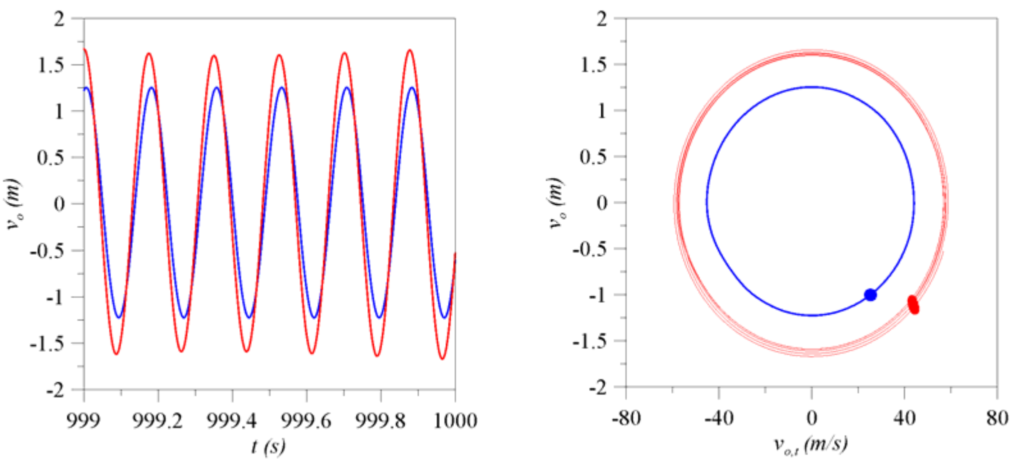
Figura 4.33: Diagrama de bifurcação da solução linear (em preto) e não linear (em azul e vermelho) para as direções v_o, w_o e θ_o, com Ω_y=35,846 rad/s, ξ=1,22%, e_y=0,0 cm, e magnitude da excitação Q_y variando de 0 a 5 kN/m.



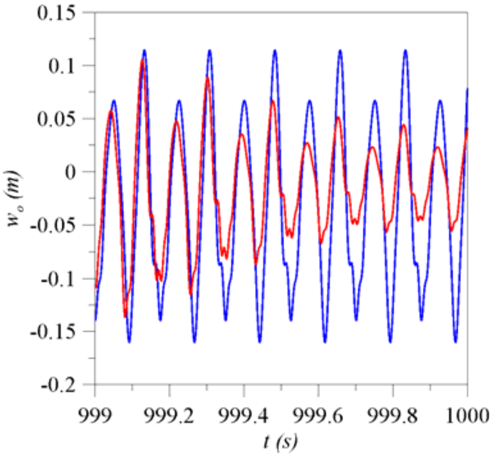
a) Resposta no tempo na direção *v* **b) Plano de fase e seção de Poincaré na direção *v***

Figura 4.34: Resposta no tempo e plano de fase para *Ω_y=35,846 rad/s, ξ=1,22%,* e magnitude da excitação *Q_y=0,35 kN/m, w(t)=θ(t)=0.*

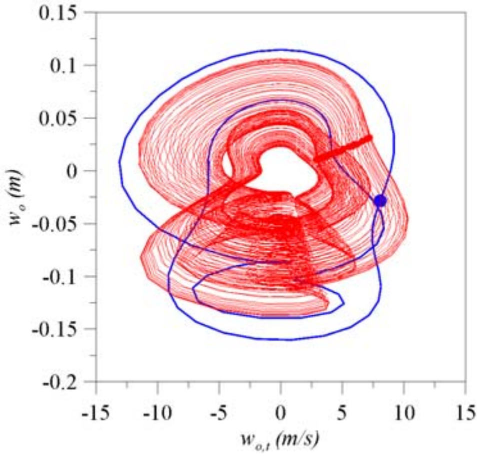
Em adição, na Figura 4.35, são apresentadas as projeções da resposta no tempo e plano de fase para as componentes v_o, w_o e θ_o, assumindo magnitude de excitação $Q_y = 1 kN/m$. De forma análoga, na Figura 4.36 são apresentados os resultados para $Q_y = 2{,}6\ kN/m$, onde se mostram soluções não periódicas e não planares de grande complexidade. Na Figura 4.33, para Q_y = 1 kN/m, o diagrama de bifurcações indica a presença de duas soluções coexistentes: uma de período um e uma quase-periódica. A Figura 4.35 mostra estas duas soluções.



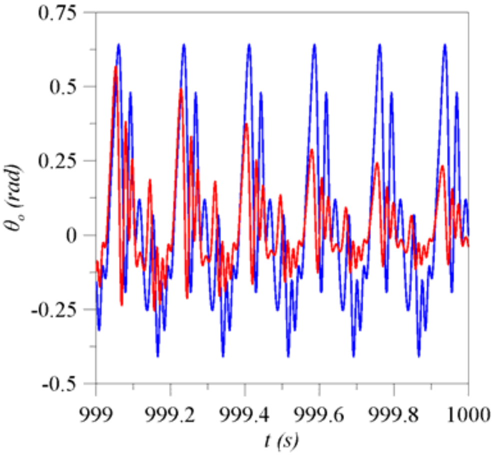
a) Resposta no tempo na direção *v* **d) Plano de fase e seção de Poincaré na direção *v***



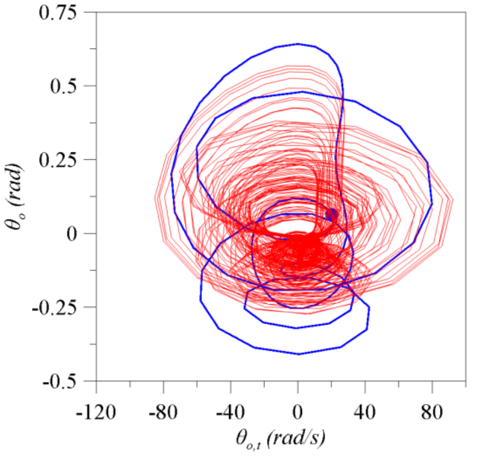
b) Resposta no tempo na direção *w*



e) Plano de fase e seção de Poincaréna direção *w*

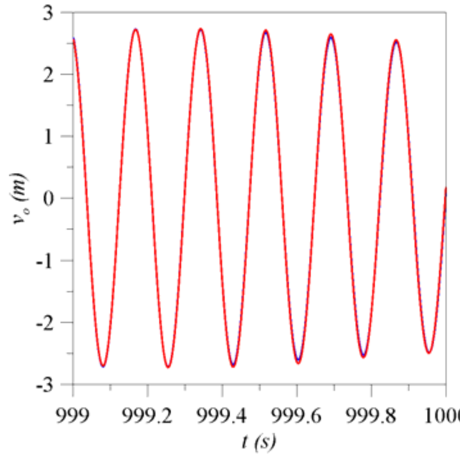


c) Resposta no tempo na direção *θ*

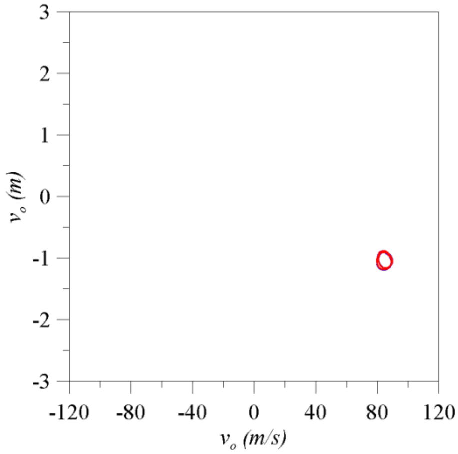


f) Plano de fase e seção de Poincaré na direção *θ*

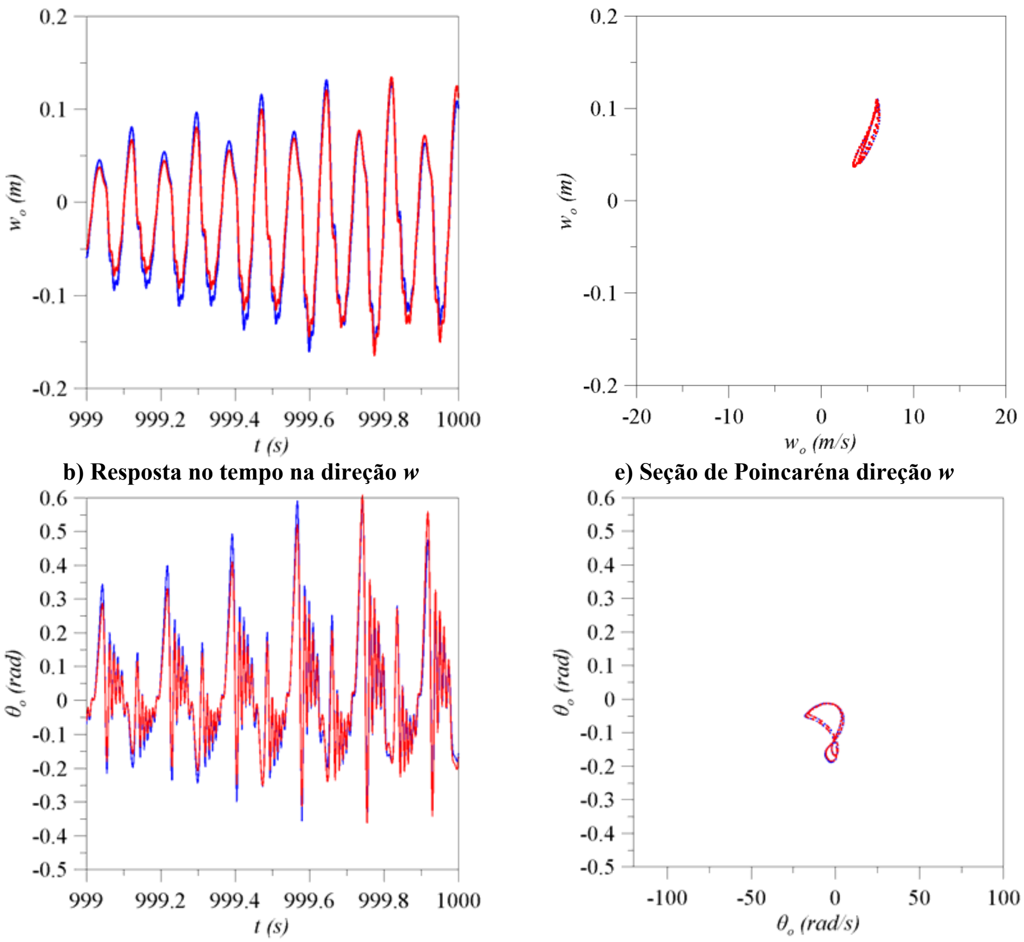
Figura 4.35: Resposta no tempo e plano de faze para Ω_y*=35,846 rad/s*, *ξ=1,22%*, **e magnitude da excitação** Q_y*=1,0kN/m*.



a) Resposta no tempo na direção *v*



d) Seção de Poincaréna direção *v*



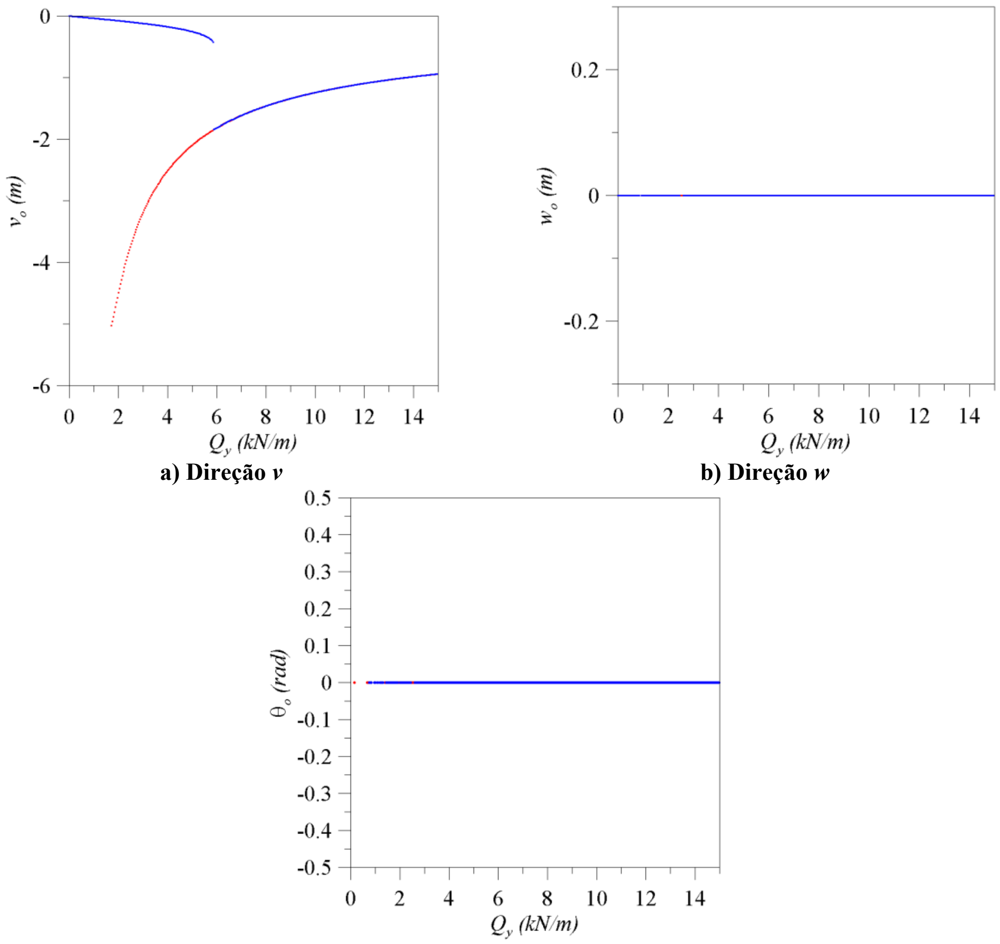
b) Resposta no tempo na direção *w* **e) Seção de Poincaréna direção *w***

c) Resposta no tempo na direção *θ* **f) Seção de Poincaré na direção *θ***

Figura 4.36: Resposta no tempo e plano de fase para Ω_y=35,846 *rad/s*, ξ=1,22%, e magnitude da excitação Q_y=2,6 *kN/m*.

Continuando com a carga Q_y aplicada no centro de cisalhamento, na Figura 4.37 mostram-se os diagramas de bifurcações nas direções v_o, w_o e θ_o. Seguindo a metodologia empregada nos diagramas anteriores, a cor azul representa o incremento da carga e a cor vermelha o decremento da carga. Estes diagramas consideram a frequência de excitação $\Omega_z = 40\ rad/s$.

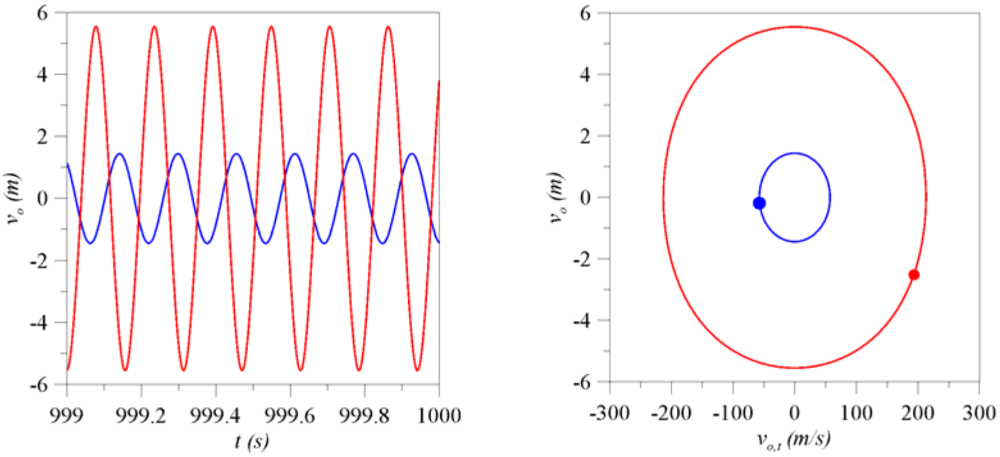
Na Figura 4.37 pode-se observar que, apesar do sistema possuir 3 GDL, os deslocamentos na direção *Z*, assim como o ângulo de torção θ_o, são nulos. O diagrama com o parametro de controle crescente apresenta um salto de -0.42 para -1.84 m na direção v_o, para as cargas de excitação de 5,84 e 5,88 kN/m, respectivamente. O diagrama com o parametro de controle decrescente apresenta um salto de -5,024 a -0,063 m na direção v_o, para as cargas de excitação de 1,72 e 1,68 kN/m, respectivamente.



a) Direção v b) Direção w c) Direção θ

Figura 4.37: Diagrama de bifurcações para as direções v_o, w_o e θ_o, com Ω_y=40 rad/s, ξ=1,22%, e magnitude da excitação Q_y variando de 0 a 15kN/m.

A seguir, na Figura 4.38, apresentam-se as projeções das respostas no tempo e plano de fase para a direção v_o, considerando a magnitude de excitação $Q_y = 4\,kN/m$. Observa-se que existem duas soluções planares coexistentes, ambas de período 1T. O deslocamento e a velocidade máxima para a solução de pequena amplitude (solução não ressonante) são de 1,4387 m e 56,978 m/s, e o deslocamento e a velocidade máxima para a solução de grande amplitude (solução ressonante) são de 5,546 m e 193,359 m/s, respectivamente. Em ambos os casos as amplitudes de vibração são bastante superiores aos limites aceitáveis em um projeto estrutural, chegando a, para solução ressonante, ser superior ao comprimento da viga (L = 4 m), uma solução, portanto, fisicamente impossível.

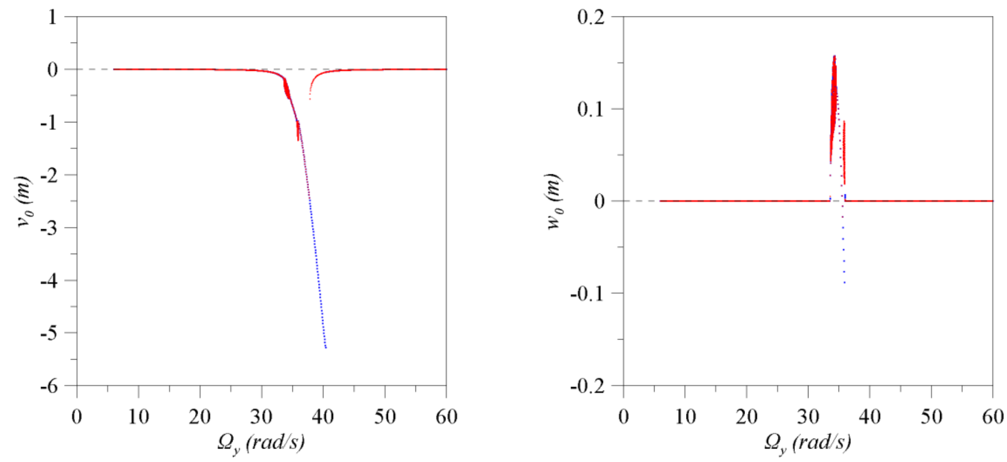


a) Resposta no tempo na direçao *v* b) Plano de fase e seção de Poincaré na direção *v*

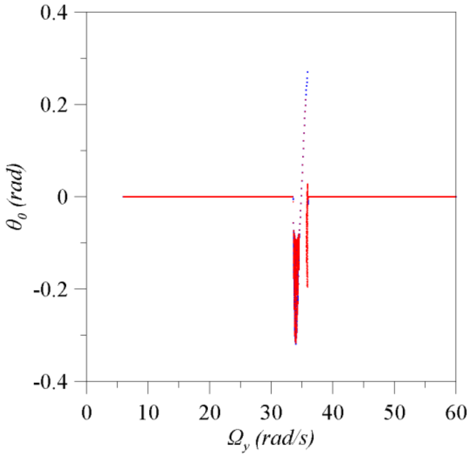
Figura 4.38: Resposta no tempo e plano de fase para Ω_y=40 rad/s, ξ=1,22%, e magnitude da excitação Q_y=4,0 kN/m; w(t)=θ(t)=0.

4.4.2 Frequência da excitação como parâmetro de controle

Finalmente, na Figura 4.39 é mostrado o diagrama de bifurcação variando a frequência de excitação Ω_y, para a magnitude de excitação $Q_y = 1{,}8 kN/m$ com $\xi = 1{,}22\%$. Nota-se que a curva de ressonância apresenta uma não linearidade com ganho de rigidez compatível, portanto, com a relação não linear frequência-amplitude apresentada na Figura 4.1. Os resultados aqui apresentados destacam a importância da não linearidade na resposta dinâmica de perfis esbeltos e a necessidade de se investigar teoricamente e experimentalmente este tipo de problema.



a) Direção *v* b) Direção *w*



c) Direção θ

Figura 4.39: Diagrama de bifurcação variando a frequência de excitação Ω_y, para a magnitude de excitação Q_y=1,8 kN/m, nas direções v_o, w_o e θ_o, com ξ=1,22%.

5
Conclusões e Sugestões

5.1
Conclusões.

Neste trabalho, uma formulação dinâmica não linear considerando grandes deslocamentos, os efeitos de encurtamento e acoplamentos entre flexão e torção é empregada para estudar as vibrações não lineares e possíveis instabilidades de vigas com seção aberta e paredes finas. Os modos de vibração a flexão e torção de vigas esbeltas são empregados para discretizar as equações diferenciais parciais no espaço, levando a um conjunto de equações diferenciais ordinárias de movimento no domínio do tempo, as quais são resolvidas por integração numérica usando-se o algoritmo de Runge-Kutta de quarta ordem.

Na análise linear, são estudados os efeitos do acoplamento flexão-torção, das condições de contorno relativas a flexão e das restrições a torção nas frequências naturais, cargas críticas axiais e na relação entre carga axial e frequência. Quatro conjuntos de condições de contorno clássicas de vigas são analisados: viga bi-apoiada, bi-engastada, engastada e livre e engastada e apoiada; e três diferentes modos de restrição à rotação da seção transversal.

Verifica-se que o acoplamento entre flexão e torção tem uma grande influência no comportamento de vigas com seções monosimétricas. Neste caso, existe um modo de flexão desacoplado, associado com o eixo de simetria e dois modos acoplados de flexo-torção. Exceto para o modo de torção antissimétrico que gera três modos de vibração desacoplados, dois de flexão e um de torção, como no caso das vigas com seções duplamente simétricas.

Para a viga engastada e livre e modo de torção $\theta_x(x,t) = \theta_o(t).sen(\pi x / 2L)$, a frequência fundamental corresponde ao modo de flexão, enquanto, para as demais condições de contorno, a frequência fundamental está associada a um modo de flexo-torção. A frequência fundamental de flexo-torção é praticamente a mesma, independente das condições de contorno, mostrando que a influência do acoplamento entre flexão e torção tem mais influência que as restrições de contorno no valor da frequência mínima. A mesma influência é observada no valor da carga e modo crítico.

Nota-se que, para as três funções de torção aqui consideradas, a frequência natural associada como o modo puramente de flexão cresce à medida que o número de restrições relativas aos deslocamentos aumenta (número de condições de contorno forçadas).

Para determinadas geometrias, existe a possibilidade de ressonâncias internas e interação modal. Este fenômeno é devido à coincidência ou proporcionalidade de frequências naturais e cargas críticas.

Verifica-se que o modo de torção antissimétrico gera três modos de vibração desacoplados, dois de flexão e um de torção, como no caso das vigas com seções duplamente simétricas.

Por fim, observa-se que as restrições a rotação da seção têm grande influência no valor da carga crítica e da frequência fundamental.

Na análise não linear, considera-se uma viga engastada e livre excitada lateralmente por uma carga harmônica uniformemente distribuída. São estudadas as oscilações não lineares, bifurcações e instabilidades da estrutura nas três primeiras regiões de ressonância. Em particular se analisa o efeito da posição da carga, da frequência e magnitude da excitação e das restrições a torção na dinâmica da estrutura.

O sistema apresenta, como mostra a relação não linear frequência-amplitude, um comportamento com ganho de rigidez.

Dos diagramas de bifurcação para diferentes posições da carga com relação ao centro de cisalhamento, conclui-se que a posição tem grande influência na magnitude dos deslocamentos e velocidades máximas, como ilustram as respostas no tempo e planos de fase. As excentricidades da carga com relação ao centro de cisalhamento atuam como imperfeições iniciais e mostram que há grande sensibilidade do sistema dinâmico a qualquer imperfeição de carregamento. Observa-se também que, na medida em que a carga se distancia do centro de cisalhamento, aumentam consideravelmente as amplitudes de vibração. Também se verifica que a maioria das soluções são de período 1T (corresponde a um movimento periódico cujo período é o período da excitação), mas diversas soluções quase-periódicas são observadas.

Os diagramas de bifurcações também mostram que, quanto à flambagem lateral, a carga critica dinâmica pode ser muito menor que a carga critica estática sendo caracterizada por vibrações de flexão-flexão-torção de grande magnitude. Em particular observa-se um crescimento repentino das rotações devidas à torção, função da baixa rigidez do perfil.

A comparação da resposta linear e não linear evidencia a importância da não linearidade geométrica no comportamento da estrutura e nos valores do fator de amplificação dinâmica.

Observa-se que os efeitos de segunda ordem relativos ao momento torsor (posição da carga na vertical ao longo de sua linha de ação) também gera diferenças marcantes na resposta dinâmica não linear.

Os diagramas de bifurcação para diferentes funções de torção refletem a influência das restrições à torção da seção transversal ao longo da viga no regime não linear. A restrição a torção apenas no engaste leva a amplitudes de vibração bem superiores às observadas para as outras restrições aqui consideradas. Este efeito poderá ser melhor analisado em vigas com outras condições de contorno.

Os diagramas de bifurcação, tendo a frequência da excitação como parâmetro de controle, mostram que em toda a faixa de frequências que compreende às três primeiras regiões de ressonância ocorrem diversas bifurcações e saltos dinâmicos, o que pode levar a soluções coexistentes, fenômeno eminentemente não linear. Para valores elevados da magnitude de excitação observam-se regiões onde nenhuma solução estável é encontrada, o que leva necessariamente ao colapso da estrutura. Os saltos dinâmicos também provocam um transiente com picos de tensão e deformação que podem levar a danos e até mesmo ao colapso.

Mesmo para a carga aplicada no centro de cisalhamento e na direção do eixo de simetria da seção monosimétrica, instabilidade lateral é observada para pequenos níveis de carregamento, ainda no regime elástico-linear, levando a um acoplamento flexão-flexão-torção com as componentes de rotação e deslocamento transversal à direção da carga apresentando oscilações de grande complexidade, como ilustram as respostas no tempo e planos de fase, além de diversas regiões com soluções coexistentes.

Este trabalho mostra como as ferramentas da dinâmica não linear podem ajudar na segurança e integridade do modelo estrutural, conduzindo assim a um projeto estrutural mais seguro.

5.2 Sugestões

Como continuação do presente trabalho, são sugeridos os seguintes tópicos de pesquisa:

- Analisar o comportamento dinâmico não linear de outros perfis com seção monosimétrica e assimétrica, incluindo a análise de perfis fabricados com novos materiais.
- Desenvolver uma investigação experimental da instabilidade de perfis monosimétricos e assimétricos sob carregamentos estáticos e dinâmicos.
- Estudar a interação entre flexão e torção em barras submetidas simultaneamente a cargas axiais e laterais. Em particular, estudar a influência do carregamento combinado na instabilidade estática e dinâmica de vigas-coluna.
- Pesquisar a importância de ressonâncias internas nas vibrações não lineares de vigas esbeltas de seção aberta.
- Desenvolver modelos mais refinados para o estudo de interação e acoplamento modal em elementos de vigas esbeltas de seção aberta, incluindo modos locais e globais, comparação dos resultados com o método de elementos finitos, e dedução de modelos de ordem reduzida para análise de bifurcações e bacias de atração.

6
Referencias bibliográficas

ALLEN, H. G., and BULSON, P. S. (1980). *Background to buckling*, McGraw Hill, London.

ARPACI, A., and BOZDAG, E. (2002). On free vibration analysis of thin-walled beams with non symmetrical open cross-sections. *Computers and Structures*,*80*(7), 691-695.

ATTARD, M. M. (1986). Non linear theory of non-uniform torsion of thin-walled open beams. *Thin-Walled Structures*, *4*(2), 101-134.

BARSOUM, R. S., and GALLAGHER, R. H. (1970). Finite element analysis of torsional and torsional–flexural stability problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, *2*(3), 335-352.

BLACK, M. M. (1967). Non-linear behaviour of thin-walled unsymmetric beam sections subject to bending and torsion. *Thin-Walled Structures*, 87- 102.

BLEVINS, R. D., and PLUNKETT, R. (1980). *Formulas for natural frequency and mode shape.* Van Nostrand Reinhold Company, New York.

CARVALHO, E. C., GONÇALVES, P. B. REGA, G., and DEL PRADO, Z. J. G. N. (2013). Influence of Axial Loads on the Nonplanar Vibrations of Cantilever Beams, *Shock and Vibration*, 20(6), 1073-1092

CARVALHO, E. C. Vibrações Não Lineares e Não Planares e Instabilidade Dinâmica de Barras Esbeltas. Tese de Doutorado, Departamento de Engenharia Civil, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.

CRESPO DA SILVA, M. (1988). Non-linear flexural-flexural-torsional-extensional dynamics of beams—I. Formulation. *International Journal of Solids and Structures*, *24*(12), 1225-1234.

CRESPO DA SILVA, M.(1991). Equations for nonlinear analysis of 3D motions of beams. *Applied Mechanics Reviews*, *44*(11S), S51- S59.

CRESPO DA SILVA, M. R. M., and GLYNN, C. C. (1978). Nonlinear flexural-flexural-torsional dynamics of inextensional beams. I. Equations of motion. *Journal of Structural Mechanics*, *6*(4), 437-448.

ZARETZKY, C. L., and CRESPO DA SILVA, M. (1994). Experimental investigation of non-linear modal coupling in the response of cantilever beams. *Journal of Sound and Vibration*, *174*(2), 145- 167.

DEL PRADO, Z. J. G. N., (2001). Acoplamento e interação modal na instabilidade dinâmica de cascas cilíndricas. Tese de Doutorado, Departamento de Engenharia Civil, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.

DI EGIDIO, A., and VESTRONI, F. (2011). Static behavior and bifurcation of a monosymmetric open cross-section thin-walled beam: Numerical and experimental analysis. *International Journal of Solids and Structures*, *48*(13), 1894-1905.

DI EGIDIO, A., LUONGO, A., and VESTRONI, F. (2003a). A non-linear model for the dynamics of open cross-section thin-walled beams—Part I: formulation. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, *38*(7),1067-1081.

DI EGIDIO, A., LUONGO, A., and VESTRONI, F. (2003b). A non-linear model for the dynamics of open cross-section thin-walled beams—Part II: forced motion. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, *38*(7), 1083-1094.

GERE, J. M., and LIN, Y. K. (1958). Coupled vibrations of thin-walled beams of open cross section. *Journal of Applied Mechanics*, *25*(3), 373- 378.

GHOBARAH, A. A., and TSO, W. K. (1971). A non-linear thin-walled beam theory. *International Journal of Mechanical Sciences*, *13*(12), 1025-1038.

GREGORY, M. (1961). Elastic torsion of members of thin open cross section.*Australian Journal of Applied Science*, *12*(2), 174-93.

JUN, L., WANYOU, L., RONGYING, S., and HONGXING, H. (2004). Coupled bending and torsional vibration of nonsymmetrical axially loaded thin-walled Bernoulli–Euler beams. *Mechanics Research Communications*, *31*(6), 697-711.

KOLLÁR, L. P. (2001). Flexural–torsional vibration of open section composite beams with shear deformation. *International Journal of Solids and Structures*, *38*(42), 7543-7558.

LAUDIERO, F., and ZACCARIA, D. (1988). A consistent approach to linear stability of thin-walled beams of open section. *International Journal of Mechanical Sciences*, *30*(7), 503-515.

LI, J.,SHEN, R., HUA, H., andJIN, X. (2004). Coupled bending and torsional vibration of axially loaded thin-walled Timoshenko beams. *International Journal of Mechanical Sciences*, *46*(2), 299- 320.

MANCILLA, C. R. (2014). Vibrações Não Lineares e Estabilidade de Barras Esbeltas de Seção Aberta. Dissertação de Mestrado, Departamento de Engenharia Civil, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.

MANCILLA, R.C., GONÇALVES, P.B. and CARVALHO, E.C., (2015). "Non-linear dynamics analysis and stability of thin-walled beams with monosymetric channel-section". In: Proceedings of *Eighth International*

Conference on Advanced in Steel Structures - ICASS 2015, Lisbon ,Portugal.

MANCILLA, R.C., GONÇALVES, P.B., e CARVALHO, E.C., (2014). “Vibrações não lineares de perfis esbeltos com seção aberta”. In: Proceedings of *XXXV Ibero-Latin American Congress on Computational Methods in Engineering - CILAMCE 2014*, 2014, Fortaleza - CE - Brasil.

MOHRI, F., AZRAR, L., and POTIER-FERRY, M. (2001). Flexural–torsional post-buckling analysis of thin-walled elements with open sections. *Thin-Walled Structures*, *39*(11), 907-938.

MOHRI, F., BROUKI, A., and ROTH, J. C. (2003). Theoretical and numerical stability analyses of unrestrained, mono-symmetric thin-walled beams. *Journal of Constructional Steel Research*, *59*(1), 63-90.

MOHRI, F., AZRAR, L., and POTIER-FERRY, M. (2004). Vibration analysis of buckled thin-walled beams with open sections. *Journal of Sound and Vibration*, *275*(1), 434-446.

MOHRI, F., BOUZERIRA, C., and POTIER-FERRY, M. (2008). Lateral buckling of thin-walled beam-column elements under combined axial and bending loads. Thin-Walled Structures, 46(3), 290-302.

MOHRI, F., DAMIL, N., and POTIER-FERRY, M. (2010). Linear and non-linear stability analyses of thin-walled beams with monosymmetric I sections. *Thin-Walled Structures*, *48*(4), 299- 315.

MOHRI, F., DAMIL, N., and POTIER-FERRY, M. (2013). Buckling and lateral buckling interaction in thin-walled beam-column elements with mono-symmetric cross sections. *Applied Mathematical Modelling*, *37*(5), 3526-3540.

MOORE, D.B., (1986). A non-linear theory for the behaviour of thin-walled sections subjected to combined bending and torsion. *Thin-Walled Structures*, vol. 4, pp. 449-466.

MORI, D.D. e MUNAIAR, N.J., (2009). *Flexo torção: barras de seção delgada aberta*, EESC-USP.

MURRAY, N.W., (1986). *Introduction to the theory of thin-walled structures*.Oxford: Clarendon Press.

RONAGH, H. R., BRADFORD, M. A., and ATTARD, M. M. (2000). Nonlinear analysis of thin-walled members of variable cross-section. Part II: Application. *Computers and Structures*, *77*(3), 301-313.

ROSEN, A., and FRIEDMANN, P. (1979). The nonlinear behavior of elastic slender straight beams undergoing small strains and moderate rotations. *Journal of Applied Mechanics*, *46*(1), 161-168.

SCHULZ, M., and FILIPPOU, F. C. (1998). Generalized warping torsion formulation. *Journal of Engineering Mechanics*, *124*(3), 339-347.

STOYKOV, S., and RIBEIRO, P. (2013). Non-linear vibrations of beams with non-symmetrical cross sections. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, *55*, 153-169.

TANAKA, M., and BERCIN, A. N. (1999). Free vibration solution for uniform beams of non symmetrical cross section using Mathematica. *Computers and Structures*,*71*(1), 1-8.

TIMOSHENKO S. and YOUNG D.H. (1955). Vibration Problems in Engineering. (3rd edition) Van Nostrand. New York.

TRAHAIR, N. S. (1993). *Flexural-torsional buckling of structures* (Vol. 6). CRC Press.

VLASOV, V. Z. (1961). *Thin-walled elastic beams.* Israel Program for Scientific Translations, *Jerusalem, Israel*.

VÖRÖS, G. M. (2009). On coupled bending–torsional vibrations of beams with initial loads. *Mechanics Research Communications*, *36*(5), 603-611.

WANG, C.M. and KITIPORNCHAI, S., (1986). On stability of monosymmetric cantilevers. *Engineering Structures*, vol. 8, pp. 169-180.

Apêndice A

A.1. Introdução

Substituindo as Equações (2.71) à (2.73), para cada uma das condições de contorno (item 2.7.1) e uma das três funções de torção, dadas nas Equações (2.85) a (2.87), em (2.67) a (2.69), e aplicando o método de Galerkin, obtém-se o sistema de equações diferencias ordinárias de movimento, mostradas a seguir.

Cada conjunto de equações forma um sistema de três equações de movimento não lineares acopladas que deve ser resolvido através de métodos numéricos.

A.2. Sistema de equações diferenciais ordinárias de movimento

A.2.1 Viga simplesmente apoiada

A.2.1.1 Viga simplesmente apoiada: Função de torção $\theta_x(x,t)=\theta_o(t).sen(\pi\, x/2L)$.

$$m\left[0.5L\left(\frac{d^2}{dt^2}v_o\right)+\frac{4}{3\pi}z_cL\left(\frac{d^2}{dt^2}\theta_o\right)\right]+EI_z\left(\frac{\pi^4 v_o}{2L^3}+\frac{\pi^6 v_o^3}{16\,L^5}\right)-P\left(-\frac{\pi^2 v_o}{2L}-\frac{\pi\, z_c\,\theta_o}{3L}\right)+ \\ \left(EI_z-EI_y\right)\left(\frac{16\,\pi^3\,w_o\theta_o}{15L^3}-\frac{\pi^4 v_o\theta_o^2}{4L^3}\right)-\frac{2}{\pi}q_yL+74.8275*\left(\frac{d}{dt}v_o\right)=0 \tag{A.1}$$

$$m\left[0.5*L*\left(\frac{d^2}{dt^2}w_o\right)-\frac{4}{3\pi}y_cL\left(\frac{d^2}{dt^2}\theta_o\right)\right]+EI_y\left(\frac{\pi^4 w_o}{2L^3}+\frac{\pi^6 w_o^3}{16L^5}\right)-P\left(-\frac{\pi^2 * w_o}{2L}+\frac{\pi\, y_c\theta_o}{3L}\right)+ \\ \left(EI_z-EI_y\right)\left(\frac{16\pi^3 v_o\theta_o}{15L^3}+\frac{\pi^4 w_o\theta_o^2}{4L^3}\right)-\frac{2}{\pi}q_zL+74.8275*\left(\frac{d}{dt}w_o\right)=0 \tag{A.2}$$

$$
\begin{aligned}
& m\left[\frac{L}{2} I_o\left(\frac{d^2}{dt^2}\theta_o\right)+\frac{4}{3\pi} z_c L\left(\frac{d^2}{dt^2} v_o\right)-\frac{4}{3\pi} y_c L\left(\frac{d^2}{dt^2} w_o\right)\right]+\frac{\pi^4 EI_w\theta_o}{32L^3}+\frac{\pi^2 GJ\,\theta_o}{8L}+ \\
& \quad \frac{3\pi^4 EI_t\,\theta_o^3}{256L^3}-P\left[-\frac{\pi^2 I_o\theta_o}{8L}+y_c\left(\frac{4\pi w_o}{3L}-\frac{\pi v_o\theta_o}{L}\right)+z_c\left(-\frac{4\pi v_o}{3L}-\frac{\pi w_o\theta_o}{L}\right)\right]+ \\
& \quad \left(EI_z-EI_y\right)\left(\frac{16\pi^3 v_o w_o}{15L^3}-\frac{\pi^4\theta_o v_o^2}{4L^3}+\frac{\pi^4\theta_o w_o^2}{4L^3}\right)+ \\
& \quad \frac{q_z}{2\pi} L\left(\pi e_z\,\theta_o-4e_y\right)+74.8260\left(\frac{d}{dt}\theta_o\right)=0
\end{aligned}
\tag{A.3}
$$

A.2.1.2
Viga simplesmente apoiada: Função de torção *$\theta_x(x,t)=\theta_o(t).sen(\pi\, x/L)$.*

$$
\begin{aligned}
& m\left[0.5L\left(\frac{d^2}{dt^2} v_o\right)+0.5z_c L\left(\frac{d^2}{dt^2}\theta_o\right)\right]+EI_z\left(\frac{\pi^4 v_o}{2L^3}+\frac{\pi^6 v_o^3}{16\,L^5}\right)- \\
& \quad P\left(-\frac{\pi^2 v_o}{2L}-\frac{\pi^2 z_c\theta_o}{2L}-\frac{2\pi y_c\theta_o^2}{3L}\right)+\left(EI_z-EI_y\right)\left(\frac{4\pi^3 w_o\theta_o}{3L^3}-\frac{3\pi^4 v_o\theta_o^2}{8L^3}\right)- \\
& \quad \frac{2}{\pi} q_y L+74.8275\left(\frac{d}{dt} v_o\right)=0
\end{aligned}
\tag{A.4}
$$

$$
\begin{aligned}
& m\left[0.5L\left(\frac{d^2}{dt^2} w_o\right)-0.5y_c L\left(\frac{d^2}{dt^2}\theta_o\right)\right]+EI_y\left(\frac{\pi^4 w_o}{2L^3}+\frac{\pi^6 w_o^3}{16L^5}\right)- \\
& \quad P\left(-\frac{\pi^2 w_o}{2L}+\frac{\pi^2 y_c\theta_o}{2L}-\frac{2\pi z_c\theta_o^2}{3L}\right)+\left(EI_z-EI_y\right)\left(\frac{4\pi^3 v_o\theta_o}{3L^3}+\frac{3\pi^4 w_o\theta_o^2}{8L^3}\right)- \\
& \quad \frac{2}{\pi} q_z L+74.8275\left(\frac{d}{dt} w_o\right)=0
\end{aligned}
\tag{A.5}
$$

$$
\begin{aligned}
& m\left[\frac{L}{2} I_o\left(\frac{d^2}{dt^2}\theta_o\right)+\frac{1}{2} z_c L\left(\frac{d^2}{dt^2} v_o\right)-\frac{1}{2} y_c L\left(\frac{d^2}{dt^2} w_o\right)\right]+\frac{\pi^4 EI_w\theta_o}{2L^3}+\frac{\pi^2 GJ\,\theta_o}{2L}+\frac{3\pi^4 EI_t\,\theta_o^3}{16\,L^3}- \\
& \quad P\left[-\frac{\pi^2 I_o\theta_o}{2L}+y_c\left(\frac{\pi^2 w_o}{2L}-\frac{4\pi v_o\theta_o}{3L}\right)+z_c\left(-\frac{\pi^2 v_o}{2L}-\frac{4\pi w_o\theta_o}{3L}\right)\right]+ \\
& \quad \left(EI_z-EI_y\right)\left(\frac{4\pi^3 v_o w_o}{3L^3}-\frac{3\pi^4\theta_o v_o^2}{8L^3}+\frac{3\pi^4\theta_o w_o^2}{8L^3}\right)+ \\
& \quad \frac{1}{2\pi} q_z L\left(\pi e_z\,\theta_o-4e_y\right)+13.364976\left(\frac{d}{dt}\theta_o\right)=0
\end{aligned}
\tag{A.6}
$$

A.2.1.3
Viga simplesmente apoiada: Função de torção $\theta_x(x,t)=\theta_o(t).cos(\pi\, x/L)$.

$$\frac{mL}{2}\left(\frac{d^2}{dt^2}v_o\right)+EI_z\left(\frac{\pi^4\, v_o}{2\,L^3}+\frac{\pi^6\, v_o^3}{16\, L^5}\right)-P\left(-\frac{\pi^2\, v_o}{2\,L}+\frac{2\,\pi\, y_c\, \theta_o^2}{3\,L}\right)+$$
$$\left(EI_z-EI_y\right)\left(-\frac{\pi^4 v_o * \theta_o^2}{8\,L^3}\right)-\frac{2}{\pi}q_y L+74.8275\left(\frac{d}{dt}v_o\right)=0 \tag{A.7}$$

$$\frac{m\,L}{2}\left(\frac{d^2}{dt^2}w_o\right)+EI_y\left(\frac{\pi^4 w_o}{2\,L^3}+\frac{\pi^6 w_o^3}{16\,L^5}\right)-P\left(-\frac{\pi^2\, w_o}{2\,L}+\frac{2\,\pi\, z_c \theta_o^2}{3\,L}\right)+$$
$$\left(EI_z-EI_y\right)\left(\frac{\pi^4 w_o \theta_o^2}{8\,L^3}\right)-\frac{2}{\pi}q_z L+74.8275\left(\frac{d}{dt}w_o\right)=0 \tag{A.8}$$

$$\frac{m\,L\,I_o}{2}\left(\frac{d^2}{dt^2}\theta_o\right)+\frac{\pi^4\, EI_w \theta_o}{2\,L^3}+\frac{\pi^2\, GJ\,\theta_o}{2\,L}+\frac{3\,\pi^4\, EI_t\, \theta_o^3}{16\,L^3}-$$
$$P\left[-\frac{\pi^2\, I_o \theta_o}{2\,L}+y_c\left(-\frac{2\,\pi\, v_o \theta_o}{3\,L}\right)+z_c\left(-\frac{2\,\pi\, w_o\, \theta_o}{3\,L}\right)\right]+$$
$$\left(EI_z-EI_y\right)\left(-\frac{\pi^4 \theta_o v_o^2}{8L^3}+\frac{\pi^4 \theta_o w_o^2}{8L^3}\right)+\frac{q_z}{2}\,L\, e_z\, \theta_o+74.8275\left(\frac{d}{dt}\theta_o\right)=0 \tag{A.9}$$

A.2.2
Viga Engastada e Livre.

A.2.2.1
Viga engastada e livre: Função de torção $\theta_x(x,t)=\theta_o(t).sen(\pi\, x/2L)$.

$$m\left[0.25L\left(\frac{d^2}{dt^2}v_o\right)+0.338930 z_c L\left(\frac{d^2}{dt^2}\theta_o\right)\right]+EI_z\left(\frac{3.09059 v_o}{L^3}+\frac{0.631885 v_o^3}{L^5}\right)-$$
$$P\left(\frac{0.2145609 v_o}{L}-\frac{0.836278 z_c \theta_o}{L}-\frac{0.534562 y_c \theta_o^2}{L}\right)+$$
$$\left(EI_z-EI_y\right)\left(\frac{0.890797 w_o \theta_o}{L^3}-\frac{0.40168 v_o \theta_o^2}{L^3}\right)-0.3915 q_y L=0 \tag{A.10}$$

$$m\left[0.25L\left(\frac{d^2}{dt^2}w_o\right)-0.338930 y_c L\left(\frac{d^2}{dt^2}\theta_o\right)\right]+EI_y\left(\frac{3.09059 w_o}{L^3}+\frac{0.631885 w_o^3}{L^5}\right)-$$
$$P\left(\frac{0.2145609 w_o}{L}+\frac{0.836278 y_c \theta_o}{L}-\frac{0.534562 z_c \theta_o^2}{L}\right)+$$
$$\left(EI_z-EI_y\right)\left(\frac{0.890797 v_o \theta_o}{L^3}+\frac{0.40168 w_o \theta_o^2}{L^3}\right)-0.3915 q_z L=0 \tag{A.11}$$

$$
\begin{aligned}
& m\left[\frac{L}{2} I_o\left(\frac{d^2}{dt^2}\theta_o\right)+0.338930 z_c L\left(\frac{d^2}{dt^2}v_o\right)-0.338930 y_c L\left(\frac{d^2}{dt^2}w_o\right)\right]+ \\
& \quad \frac{\pi^4 EI_w\theta_o}{32L^3}+\frac{\pi^2 GJ\,\theta_o}{8L}+\frac{3\pi^4 EI_t\,\theta_o^3}{256L^3}- \\
& \quad P\left[-\frac{\pi^2 I_o\,\theta_o}{8L}+y_c\left(-\frac{0.54022w_o}{L}+\frac{0.30738v_o\theta_o}{L}\right)+z_c\left(\frac{0.54022v_o}{L}+\frac{0.30738w_o\,\theta_o}{L}\right)\right]+ \\
& \quad \left(EI_z-EI_y\right)\left(\frac{0.89079v_o w_o}{L^3}-\frac{0.40168\theta_o v_o^2}{L^3}+\frac{0.40168\theta_o w_o^2}{L^3}\right)+\frac{q_z L\left(\theta_o\pi e_z-4e_y\right)}{2\pi}=0
\end{aligned}
\tag{A.12}
$$

A.2.2.2
Viga engastada e livre: Função de torção $\theta_x(x,t)=\theta_o(t).sen(\pi\, x/L)$.

$$
\begin{aligned}
& mL\left[0.25\left(\frac{d^2}{dt^2}v_o\right)+0.2346990824\,z_c\left(\frac{d^2}{dt^2}\theta_o\right)\right]+EI_z\left(\frac{3.09059v_o}{L^3}+\frac{0.631885v_o^3}{L^5}\right)- \\
& \quad P\left(\frac{0.2145609v_o}{L}-\frac{2.316387z_c\theta_o}{L}+\frac{0.315984y_c\theta_o^2}{L}\right)+ \\
& \quad \left(EI_z-EI_y\right)\left(\frac{1.524460w_o\theta_o}{L^3}-\frac{1.051597v_o\theta_o^2}{L^3}\right)-0.391495q_y L=0
\end{aligned}
\tag{A.13}
$$

$$
\begin{aligned}
& mL\left[0.25\left(\frac{d^2}{dt^2}w_o\right)-0.234699\,y_c\left(\frac{d^2}{dt^2}\theta_o\right)\right]+EI_y\left(\frac{3.09059w_o}{L^3}+\frac{0.631885w_o^3}{L^5}\right)- \\
& \quad P\left(\frac{0.2145609\,w_o}{L}+\frac{2.316387y_c\theta_o}{L}+\frac{0.315984z_c\theta_o^2}{L}\right)+ \\
& \quad \left(EI_z-EI_y\right)\left(\frac{1.524460v_o\theta_o}{L^3}+\frac{1.051597w_o\theta_o^2}{L^3}\right)-0.391495\,q_z L=0
\end{aligned}
\tag{A.14}
$$

$$
\begin{aligned}
& mL\left[\frac{1}{2}I_o\left(\frac{d^2}{dt^2}\theta_o\right)+0.234699z_c\left(\frac{d^2}{dt^2}v_o\right)-0.234699y_c\left(\frac{d^2}{dt^2}w_o\right)\right]+ \\
& \quad \frac{48.704545EI_w\theta_o}{L^3}+\frac{4.934802GJ\,\theta_o}{L}+\frac{18.264204*EI_t\,\theta_o^3}{L^3}- \\
& \quad P\left[\frac{4.934802I_o\theta_o}{L}-y_c\left(-\frac{0.825206w_o}{L}+\frac{0.631968v_o\theta_o}{L}\right)-z_c\left(\frac{0.825206v_o}{L}+\frac{0.631968w_o\theta_o}{L}\right)\right]+ \\
& \quad \left(EI_z-EI_y\right)\left(\frac{1.52446v_o w_o}{L^3}-\frac{1.051597\theta_o v_o^2}{L^3}+\frac{1.051597\theta_o w_o^2}{L^3}\right)+ \\
& \quad 0.159154q_z L\left(\pi e_z\,\theta_o-4e_y\right)=0
\end{aligned}
\tag{A.15}
$$

A.2.2.3
Viga engastada e livre: Função de torção $\theta_x(x,t)=\theta_o(t).cos(\pi\, x/L)$.

$$m\,L\left[0.25\left(\frac{d^2}{dt^2}v_o\right)+0.2346990824\,z_c\left(\frac{d^2}{dt^2}\theta_o\right)\right]+EI_z\left(\frac{3.09059\,v_o}{L^3}\right)-$$
$$P\left(\frac{0.2145609v_o}{L}-\frac{2.316387z_c\theta_o}{L}\right)-0.391495q_yL=0 \tag{A.16}$$

$$m\,L\left[0.25\left(\frac{d^2}{dt^2}w_o\right)-0.234699\,y_c\left(\frac{d^2}{dt^2}\theta_o\right)\right]+EI_y\left(\frac{3.09059w_o}{L^3}\right)-$$
$$P\left(\frac{0.2145609w_o}{L}+\frac{2.316387y_c\theta_o}{L}\right)-0.391495q_zL+=0 \tag{A.17}$$

$$m\,L\left[\frac{1}{2}I_o\left(\frac{d^2}{dt^2}\theta_o\right)+0.234699z_c\left(\frac{d^2}{dt^2}v_o\right)-0.234699\,y_c\left(\frac{d^2}{dt^2}w_o\right)\right]+$$
$$\frac{48.704545EI_w\theta_o}{L^3}+\frac{4.934802GJ\,\theta_o}{L}-$$
$$P\left[\frac{4.934802I_o\theta_o}{L}-y_c\left(-\frac{0.825206w_o}{L}\right)-z_c\left(\frac{0.825206v_o}{L}\right)\right]+$$
$$0.159154q_zL\left(\pi\,e_z\,\theta_o-4e_y\right)=0 \tag{A.18}$$

A.2.3
Viga engastada e apoiada.

A.2.3.1
Viga engastada e apoiada: Função de torção $\theta_x(x,t)=\theta_o(t).sen(\pi\, x/2L)$.

$$m\left[L\left(\frac{d^2}{dt^2}v_o\right)+0.62940z_cL\left(\frac{d^2}{dt^2}\theta_o\right)\right]+EI_z\left(\frac{237.72107v_o}{L^3}+\frac{660.83869v_o^3}{L^5}\right)-$$
$$P\left(-\frac{11.51253v_o}{L}-\frac{1.55299z_c\theta_o}{L}-\frac{0.32433y_c\theta_o^2}{L}\right)+$$
$$\left(EI_z-EI_y\right)\left(\frac{134.99251w_o\theta_o}{L^3}-\frac{106.24584v_o\theta_o^2}{L^3}\right)-0.86q_yL+149.65\left(\frac{d}{dt}v_o\right)=0 \tag{A.19}$$

$$m\left[L\left(\frac{d^2}{dt^2}w_o\right)-0.62940y_cL\left(\frac{d^2}{dt^2}\theta_o\right)\right]+EI_y\left(\frac{237.72107w_o}{L^3}+\frac{660.83869w_o^3}{L^5}\right)-$$
$$P\left(-\frac{11.51253w_o}{L}+\frac{1.55299y_c\theta_o}{L}-\frac{0.32433z_c\theta_o^2}{L}\right)+$$
$$\left(EI_z-EI_y\right)\left(\frac{134.99251v_o\theta_o}{L^3}+\frac{106.24584w_o\theta_o^2}{L^3}\right)-0.86q_zL+149.65204\left(\frac{d}{dt}w_o\right)=0 \tag{A.20}$$

$$m\left[\frac{L}{2}I_o\left(\frac{d^2}{dt^2}\theta_o\right)+0.62940z_cL\left(\frac{d^2}{dt^2}v_o\right)-0.62940*y_cL\left(\frac{d^2}{dt^2}w_o\right)\right]+$$
$$\frac{\pi^4EI_w\theta_o}{32L^3}+\frac{\pi^2GJ\,\theta_o}{8L}+\frac{3\pi^4EI_t\,\theta_o^3}{256\,L^3}-$$
$$P\left[-\frac{\pi^2I_o\theta_o}{8L}+y_c\left(\frac{7.26305\,w_o}{L}-\frac{6.358726v_o\theta_o}{L}\right)+z_c\left(-\frac{7.26305v_o}{L}-\frac{6.35872\,w_o\theta_o}{L}\right)\right]+ \quad \text{(A.21)}$$
$$\left(EI_z-EI_y\right)\left(\frac{134.9925v_ow_o}{L^3}-\frac{106.245846\theta_ov_o^2}{L^3}+\frac{106.245846\theta_ow_o^2}{L^3}\right)+$$
$$\frac{q_zL\left(\theta_o\pi\,e_z-4e_y\right)}{2\pi}+149.65204\left(\frac{d}{dt}\theta_o\right)=0$$

A.2.3.2
Viga engastada e apoiada: Função de torção $\theta_x(x,t)=\theta_o(t).sen(\pi\, x/L)$.

$$m\left[L\left(\frac{d^2}{dt^2}v_o\right)+0.69043z_cL\left(\frac{d^2}{dt^2}\theta_o\right)\right]+EI_z\left(\frac{237.721067v_o}{L^3}+\frac{660.83869v_o^3}{L^5}\right)-$$
$$P\left(-\frac{11.51253v_o}{L}-\frac{6.81426z_c\theta_o}{L}-\frac{3.21208y_c\theta_o^2}{L}\right)+ \quad \text{(A.22)}$$
$$\left(EI_z-EI_y\right)\left(\frac{148.74079w_o\theta_o}{L^3}-\frac{122.32268v_o\theta_o^2}{L^3}\right)-0.86q_yL+234.8988\left(\frac{d}{dt}v_o\right)=0$$

$$m\left[L\left(\frac{d^2}{dt^2}w_o\right)-0.69043y_cL\left(\frac{d^2}{dt^2}\theta_o\right)\right]+EI_y\left(\frac{237.72106w_o}{L^3}+\frac{660.83869w_o^3}{L^5}\right)-$$
$$P\left(-\frac{11.51253w_o}{L}+\frac{6.81426y_c\theta_o}{L}-\frac{3.21208z_c\theta_o^2}{L}\right)+ \quad \text{(A.23)}$$
$$\left(EI_z-EI_y\right)\left(\frac{148.74079v_o\theta_o}{L^3}+\frac{122.322685w_o\theta_o^2}{L^3}\right)-0.86q_zL+234.89885\left(\frac{d}{dt}w_o\right)=0$$

$$m\left[\frac{L}{2}I_o\left(\frac{d^2}{dt^2}\theta_o\right)+0.69042z_cL\left(\frac{d^2}{dt^2}v_o\right)-0.69042y_cL\left(\frac{d^2}{dt^2}w_o\right)\right]+$$
$$\frac{\pi^4EI_w\theta_o}{2L^3}+\frac{\pi^2GJ\,\theta_o}{2L}+\frac{3\pi^4EI_t\,\theta_o^3}{16L^3}-$$
$$P\left[-\frac{\pi^2I_o\theta_o}{2L}+y_c\left(\frac{6.81426w_o}{L}-\frac{6.42416v_o\theta_o}{L}\right)+z_c\left(-\frac{6.81426v_o}{L}-\frac{6.42416w_o\theta_o}{L}\right)\right]+ \quad \text{(A.24)}$$
$$\left(EI_z-EI_y\right)\left(\frac{148.74079v_ow_o}{L^3}-\frac{122.32268\theta_ov_o^2}{L^3}+\frac{122.32268\theta_ow_o^2}{L^3}\right)+$$
$$\frac{q_z\,L\left(\theta_o\,\pi\,e_z-4e_y\right)}{2\pi}+234.89885\left(\frac{d}{dt}\theta_o\right)=0$$

A.2.3.3
Viga engastada e apoiada: Função de torção $\theta_x(x,t)=\theta_o(t).cos(\pi\ x/L)$.

$$m\left[L\left(\frac{d^2}{dt^2}v_o\right)-0.131446z_cL\left(\frac{d^2}{dt^2}\theta_o\right)\right]+EI_z\left(\frac{237.721067v_o}{L^3}+\frac{660.83869v_o^3}{L^5}\right)-$$
$$P\left(-\frac{11.51253v_o}{L}+\frac{1.297325z_c\theta_o}{L}+\frac{3.21208y_c\theta_o^2}{L}\right)+ \tag{A.25}$$
$$\left(EI_z-EI_y\right)\left(\frac{25.229374w_o\theta_o}{L^3}-\frac{115.398382v_o\theta_o^2}{L^3}\right)-0.86q_yL+149.65204\left(\frac{d}{dt}v_o\right)=0$$

$$m\left[L\left(\frac{d^2}{dt^2}w_o\right)+0.131446y_cL\left(\frac{d^2}{dt^2}\theta_o\right)\right]+EI_y\left(\frac{237.72106w_o}{L^3}+\frac{660.83869w_o^3}{L^5}\right)-$$
$$P\left(-\frac{11.51253w_o}{L}-\frac{1.297325y_c\theta_o}{L}+\frac{3.21208z_c\theta_o^2}{L}\right)+ \tag{A.26}$$
$$\left(EI_z-EI_y\right)\left(\frac{25.229375v_o\theta_o}{L^3}+\frac{115.398325w_o\theta_o^2}{L^3}\right)-0.86q_zL+149.65204\left(\frac{d}{dt}w_o\right)=0$$

$$m\left[\frac{L}{2}I_o\left(\frac{d^2}{dt^2}\theta_o\right)-0.131446z_cL\left(\frac{d^2}{dt^2}v_o\right)+0.131446y_cL\left(\frac{d^2}{dt^2}w_o\right)\right]+$$
$$\frac{\pi^4EI_w\theta_o}{2L^3}+\frac{\pi^2GJ\,\theta_o}{2L}+\frac{3\pi^4EI_t\,\theta_o^3}{16\,L^3}-$$
$$P\left[-\frac{\pi^2I_o\theta_o}{2L}+y_c\left(-\frac{7.007389w_o}{L}+\frac{0.714096v_o\theta_o}{L}\right)+z_c\left(\frac{7.00739v_o}{L}+\frac{0.714096w_o\theta_o}{L}\right)\right]+ \tag{A.27}$$
$$\left(EI_z-EI_y\right)\left(\frac{25.2293v_ow_o}{L^3}-\frac{115.39838\theta_ov_o^2}{L^3}+\frac{115.39838\theta_ow_o^2}{L^3}\right)+$$
$$\frac{q_zLe_z\theta_o}{2}+149.65204\left(\frac{d}{dt}\theta_o\right)=0$$

A.2.4
Viga bi-engastada.

A.2.4.1
Viga bi-engastada: Função de torção $\theta_x(x,t)=\theta_o(t).sen(\pi\ x/2L)$.

$$m\left[0.39648L\left(\frac{d^2}{dt^2}v_o\right)+0.35431z_cL\left(\frac{d^2}{dt^2}\theta_o\right)\right]+EI_z\left(\frac{198.46253v_o}{L^3}+\frac{223.72722v_o^3}{L^5}\right)-$$
$$P\left(-\frac{4.877716v_o}{L}-\frac{0.87421z_c\theta_o}{L}+\frac{1.1*10^{-29}y_c\theta_o^2}{L}\right)+ \tag{A.28}$$
$$\left(EI_z-EI_y\right)\left(\frac{120.36565w_o\theta_o}{L^3}-\frac{99.23127v_o\theta_o^2}{L^3}\right)-0.52316q_yL+133.91613\left(\frac{d}{dt}v_o\right)=0$$

$$m\left[0.39648L\left(\frac{d^2}{dt^2}w_o\right)-0.35431y_c L\left(\frac{d^2}{dt^2}\theta_o\right)\right]+EI_y\left(\frac{198.46253w_o}{L^3}+\frac{223.72722w_o^3}{L^5}\right)-$$
$$P\left(\frac{4.87772w_o}{L}+\frac{0.87422y_c\theta_o}{L}-\frac{1.1*10^{-29}z_c\theta_o^2}{L}\right)+ \tag{A.29}$$
$$\left(EI_z-EI_y\right)\left(\frac{120.36565v_o\theta_o}{L^3}+\frac{99.23127w_o\theta_o^2}{L^3}\right)-0.52316q_z L+133.9161\left(\frac{d}{dt}w_o\right)=0$$

$$m\left[\frac{L}{2}I_o\left(\frac{d^2}{dt^2}\theta_o\right)+0.354307z_c L\left(\frac{d^2}{dt^2}v_o\right)-0.354307y_c L\left(\frac{d^2}{dt^2}w_o\right)\right]+$$
$$\frac{\pi^4 EI_w\theta_o}{32L^3}+\frac{\pi^2 GJ\,\theta_o}{L}+\frac{3\pi^4 EI_t\,\theta_o^3}{256\,L^3}-$$
$$P\left[-\frac{\pi^2 I_o\theta_o}{8L}+y_c\left(\frac{0.87422w_o}{L}-\frac{6.966*10^{-28}v_o\theta_o}{L}\right)+z_c\left(-\frac{0.87422v_o}{L}-\frac{6.9658*10^{-28}w_o\theta_o}{L}\right)\right]+ \tag{A.30}$$
$$\left(EI_z-EI_y\right)\left(\frac{120.36565v_o w_o}{L^3}-\frac{99.23126\theta_o v_o^2}{L^3}+\frac{99.23126\theta_o w_o^2}{L^3}\right)+\frac{q_z\,L\left(\theta_o\pi e_z-4e_y\right)}{2\pi}=0$$

A.2.4.2
Viga bi-engastada: Função de torção *$\theta_x(x,t)=\theta_o(t).sen(\pi\, x/L)$*.

$$m\left[0.3964\,L\left(\frac{d^2}{dt^2}v_o\right)+0.43911z_c\,L\left(\frac{d^2}{dt^2}\theta_o\right)\right]+EI_z\left(\frac{198.4625v_o}{L^3}+\frac{223.7272v_o^3}{L^5}\right)-$$
$$P\left(-\frac{4.8777v_o}{L}-\frac{4.3338z_c\theta_o}{L}-\frac{2.4429y_c\theta_o^2}{L}\right)+ \tag{A.31}$$
$$\left(EI_z-EI_y\right)\left(\frac{98.8229\,w_o\,\theta_o}{L^3}-\frac{80.9078\,v_o\,\theta_o^2}{L^3}\right)-0.5231\,q_y\,L+133.9112\left(\frac{d}{dt}v_o\right)=0$$

$$m\left[0.3964L\left(\frac{d^2}{dt^2}w_o\right)-0.4391y_c L\left(\frac{d^2}{dt^2}\theta_o\right)\right]+EI_y\left(\frac{198.4625w_o}{L^3}+\frac{223.7272w_o^3}{L^5}\right)-$$
$$P\left(-\frac{4.8777w_o}{L}+\frac{4.33388y_c\theta_o}{L}-\frac{2.4429z_c\theta_o^2}{L}\right)+ \tag{A.32}$$
$$\left(EI_z-EI_y\right)\left(\frac{98.8229v_o\theta_o}{L^3}+\frac{80.9078w_o\theta_o^2}{L^3}\right)-0.5231q_z L+133.9112\left(\frac{d}{dt}w_o\right)=0$$

$$m\left[\frac{L}{2}I_o\left(\frac{d^2}{dt^2}\theta_o\right)+0.43911z_cL\left(\frac{d^2}{dt^2}v_o\right)-0.43911y_cL\left(\frac{d^2}{dt^2}w_o\right)\right]+$$
$$\frac{48.704545EI_w\theta_o}{L^3}+\frac{4.934802GJ\,\theta_o}{L}+\frac{18.264204EI_t\,\theta_o^3}{L^3}-$$
$$P\left[\frac{4.934802I_o\theta_o}{L}-y_c\left(\frac{4.3338w_o}{L}-\frac{4.8859v_o\theta_o}{L}\right)+z_c\left(-\frac{4.3338v_o}{L}-\frac{4.8859w_o\theta_o}{L}\right)\right]+ \qquad (A.33)$$
$$\left(EI_z-EI_y\right)\left(\frac{98.8229v_ow_o}{L^3}-\frac{80.9078\theta_ov_o^2}{L^3}+\frac{80.9078\theta_ow_o^2}{L^3}\right)+$$
$$0.50q_zL\theta_oe_z-0.6366q_zLe_y+133.9112\left(\frac{d}{dt}\theta_o\right)=0$$

A.2.4.3
Viga bi-engastada: Função de torção $\theta_x(x,t)=\theta_o(t).cos(\pi\, x/L)$.

$$m\left[0.39648L\left(\frac{d^2}{dt^2}v_o\right)+4.41682*10^{-30}z_cL\left(\frac{d^2}{dt^2}\theta_o\right)\right]+$$
$$EI_z\left(\frac{198.462534v_o}{L^3}+\frac{223.72722v_o^3}{L^5}\right)-$$
$$P\left(-\frac{4.87772v_o}{L}-\frac{4.35923*10^{-29}z_c\theta_o}{L}-\frac{2.44298y_c\theta_o^2}{L}\right)+ \qquad (A.34)$$
$$\left(EI_z-EI_y\right)\left(\frac{6.09887*10^{-27}w_o\theta_o}{L^3}-\frac{117.554676v_o\theta_o^2}{L^3}\right)-$$
$$0.52316q_yL+136.59235\left(\frac{d}{dt}v_o\right)=0$$

$$m\left[0.39648L\left(\frac{d^2}{dt^2}w_o\right)-4.41682*10^{-30}y_cL\left(\frac{d^2}{dt^2}\theta_o\right)\right]+$$
$$EI_y\left(\frac{198.46253w_o}{L^3}+\frac{223.72722w_o^3}{L^5}\right)-$$
$$P\left(-\frac{4.87772w_o}{L}+\frac{4.3592*10^{-29}y_c\theta_o}{L}+\frac{2.44298z_c\theta_o^2}{L}\right)+ \qquad (A.35)$$
$$\left(EI_z-EI_y\right)\left(\frac{6.09899*10^{-27}v_o\theta_o}{L^3}+\frac{117.55467w_o\theta_o^2}{L^3}\right)-$$
$$0.52316q_zL+136.59235\left(\frac{d}{dt}w_o\right)=0$$

$$m\left[\frac{L}{2}I_o\left(\frac{d^2}{dt^2}\theta_o\right)-3.60699*10^{-30}z_cL\left(\frac{d^2}{dt^2}v_o\right)-3.60699.10^{-30}y_cL\left(\frac{d^2}{dt^2}w_o\right)\right]+$$
$$+\frac{\pi^4EI_w\theta_o}{2L^3}+\frac{\pi^2GJ\,\theta_o}{2L}+\frac{3*\pi^4EI_t\,\theta_o^3}{16\,L^3}-$$
$$P\left[-\frac{\pi^2I_o\theta_o}{2L}+y_c\left(-\frac{5.6889.10^{-28}w_o}{L}+\frac{4.88595v_o\theta_o}{L}\right)+z_c\left(\frac{5.688906.10^{-28}v_o}{L}+\frac{4.88595w_o\theta_o}{L}\right)\right]+ \tag{A.36}$$
$$\left(EI_z-EI_y\right)\left(\frac{1.58*10^{-26}v_ow_o}{L^3}-\frac{117.554676\theta_ov_o^2}{L^3}+\frac{117.554468\theta_ow_o^2}{L^3}\right)+$$
$$\frac{q_zLe_z\,\theta_o}{2}+135.2433\left(\frac{d}{dt}\theta_o\right)=0$$

A.3
Linearização do sistema de equações diferenciais ordinárias de movimento

A.3.1
Viga simplesmente apoiada.

A.3.1.1
Viga simplesmente apoiada: Função de torção $\theta_x(x,t)=\theta_o(t).sen(\pi\, x/2L)$.

$$m\left[0.5L\left(\frac{d^2}{dt^2}v_o\right)+\frac{4}{3\pi}z_cL\left(\frac{d^2}{dt^2}\theta_o\right)\right]+EI_z\left(\frac{\pi^4v_o}{2L^3}\right)-P\left(-\frac{\pi^2v_o}{2L}-\frac{\pi\,z_c\,\theta_o}{3L}\right)=0 \tag{A.37}$$

$$m\left[0.5*L*\left(\frac{d^2}{dt^2}w_o\right)-\frac{4}{3\pi}y_cL\left(\frac{d^2}{dt^2}\theta_o\right)\right]+EI_y\left(\frac{\pi^4w_o}{2L^3}\right)-P\left(-\frac{\pi^2*w_o}{2L}+\frac{\pi\,y_c\theta_o}{3L}\right)=0 \tag{A.38}$$

$$m\left[\frac{L}{2}I_o\left(\frac{d^2}{dt^2}\theta_o\right)+\frac{4}{3\pi}z_cL\left(\frac{d^2}{dt^2}v_o\right)-\frac{4}{3\pi}y_cL\left(\frac{d^2}{dt^2}w_o\right)\right]+$$
$$\frac{\pi^4\,EI_w\theta_o}{32L^3}+\frac{\pi^2\,GJ\,\theta_o}{8L}-P\left[-\frac{\pi^2\,I_o\theta_o}{8L}+y_c\left(\frac{4\pi\,w_o}{3L}\right)+z_c\left(-\frac{4\pi\,v_o}{3L}\right)\right]=0 \tag{A.39}$$

A.3.1.2
Viga simplesmente apoiada: Função de torção $\theta_x(x,t)=\theta_o(t).sen(\pi\, x/L)$.

$$m\left[0.5L\left(\frac{d^2}{dt^2}v_o\right)+0.5z_cL\left(\frac{d^2}{dt^2}\theta_o\right)\right]+EI_z\left(\frac{\pi^4v_o}{2L^3}\right)-P\left(-\frac{\pi^2v_o}{2L}-\frac{\pi^2\,z_c\,\theta_o}{2L}\right)=0 \tag{A.40}$$

$$m\left[0.5L\left(\frac{d^2}{dt^2}w_o\right)-0.5y_cL\left(\frac{d^2}{dt^2}\theta_o\right)\right]+EI_y\left(\frac{\pi^4w_o}{2L^3}\right)-P\left(-\frac{\pi^2w_o}{2L}+\frac{\pi^2y_c\theta_o}{2L}\right)=0 \tag{A.41}$$

$$m\left[\frac{L}{2}I_o\left(\frac{d^2}{dt^2}\theta_o\right)+\frac{1}{2}z_cL\left(\frac{d^2}{dt^2}v_o\right)-\frac{1}{2}y_cL\left(\frac{d^2}{dt^2}w_o\right)\right]+$$
$$\frac{\pi^4EI_w\theta_o}{2L^3}+\frac{\pi^2\,GJ\,\theta_o}{2L}-P\left[-\frac{\pi^2I_o\theta_o}{2L}+y_c\left(\frac{\pi^2w_o}{2L}\right)+z_c\left(-\frac{\pi^2\,v_o}{2L}\right)\right]=0 \qquad \text{(A.42)}$$

A.3.1.3
Viga simplesmente apoiada: Função de torção $\theta_x(x,t)=\theta_o(t).cos(\pi\ x/L)$.

$$\frac{mL}{2}\left(\frac{d^2}{dt^2}v_o\right)+EI_z\left(\frac{\pi^4\,v_o}{2L^3}+\frac{\pi^6\,v_o^3}{16\;L^5}\right)-P\left(-\frac{\pi^2\,v_o}{2L}\right)=0 \qquad \text{(A.43)}$$

$$\frac{m\,L}{2}\left(\frac{d^2}{dt^2}w_o\right)+EI_y\left(\frac{\pi^4w_o}{2L^3}+\frac{\pi^6w_o^3}{16L^5}\right)-P\left(-\frac{\pi^2*w_o}{2L}\right)=0 \qquad \text{(A.44)}$$

$$\frac{m\,L\,I_o}{2}\left(\frac{d^2}{dt^2}\theta_o\right)+\frac{\pi^4\,EI_w\theta_o}{2L^3}+\frac{\pi^2\,GJ\,\theta_o}{2L}-$$
$$P\left[-\frac{\pi^2\,I_o\theta_o}{2L}+y_c\left(-\frac{2\pi\,v_o\theta_o}{3L}\right)+z_c\left(-\frac{2\pi\,w_o\,\theta_o}{3L}\right)\right]=0 \qquad \text{(A.45)}$$

A.3.2
Viga Engastada e Livre.

A.3.2.1
Viga engastada e livre: Função de torção $\theta_x(x,t)=\theta_o(t).sen(\pi\ x/2L)$.

$$m\left[0.25\,L\left(\frac{d^2}{dt^2}v_o\right)+0.338930\,z_c\;L\left(\frac{d^2}{dt^2}\theta_o\right)\right]+EI_z\left(\frac{3.09059v_o}{L^3}\right)-$$
$$P\left(\frac{0.2145609v_o}{L}-\frac{0.836278\,z_c\theta_o}{L}\right)=0 \qquad \text{(A.46)}$$

$$m\left[0.25\,L\left(\frac{d^2}{dt^2}w_o\right)-0.338930y_cL\left(\frac{d^2}{dt^2}\theta_o\right)\right]+EI_y\left(\frac{3.09059\;w_o}{L^3}\right)-$$
$$P\left(\frac{0.2145609\;w_o}{L}+\frac{0.836278y_c\theta_o}{L}\right)=0 \qquad \text{(A.47)}$$

$$m\left[\frac{L}{2}I_o\left(\frac{d^2}{dt^2}\theta_o\right)+0.338930\,z_c L\left(\frac{d^2}{dt^2}v_o\right)-0.338930 y_c L\left(\frac{d^2}{dt^2}w_o\right)\right]+$$
$$\frac{\pi^4 EI_w\theta_o}{32\,L^3}+\frac{\pi^2 GJ\,\theta_o}{8L}+P\left[-\frac{\pi^2 I_o\theta_o}{8L}+y_c\left(-\frac{0.54022\,w_o}{L}\right)+z_c\left(\frac{0.54022\,v_o}{L}\right)\right]=0 \qquad (A.48)$$

A.3.2.2
Viga engastada e livre: Função de torção $\theta_x(x,t)=\theta_o(t).sen(\pi\, x/L)$.

$$m\,L\left[0.25\left(\frac{d^2}{dt^2}v_o\right)+0.2346990824 z_c\left(\frac{d^2}{dt^2}\theta_o\right)\right]+EI_z\left(\frac{3.09059 v_o}{L^3}\right)-$$
$$P\left(\frac{0.2145609 v_o}{L}-\frac{2.316387 z_c\theta_o}{L}\right)-0.391495 q_y L=0 \qquad (A.49)$$

$$m\,L\left[0.25\left(\frac{d^2}{dt^2}w_o\right)-0.234699\,y_c\left(\frac{d^2}{dt^2}\theta_o\right)\right]+EI_y\left(\frac{3.09059 w_o}{L^3}\right)-$$
$$P\left(\frac{0.2145609 w_o}{L}+\frac{2.316387 y_c\theta_o}{L}\right)-0.391495 q_z L+=0 \qquad (A.50)$$

$$m\,L\left[\frac{1}{2}I_o\left(\frac{d^2}{dt^2}\theta_o\right)+0.234699\,z_c\left(\frac{d^2}{dt^2}v_o\right)-0.234699\,y_c\left(\frac{d^2}{dt^2}w_o\right)\right]+$$
$$\frac{48.704545\,EI_w\theta_o}{L^3}+\frac{4.934802\,GJ\,\theta_o}{L}-$$
$$P\left[\frac{4.934802 I_o\theta_o}{L}-y_c\left(-\frac{0.825206 w_o}{L}\right)-z_c\left(\frac{0.825206 v_o}{L}\right)\right]+$$
$$0.159154 q_z L\left(\pi\, e_z\ \ \theta_o-4\,e_y\right)=0 \qquad (A.51)$$

A.3.2.3
Viga engastada e livre: Função de torção $\theta_x(x,t)=\theta_o(t).cos(\pi\, x/L)$.

$$m\left[0.25L\left(\frac{d^2}{dt^2}v_o\right)-0.21665 z_c L\left(\frac{d^2}{dt^2}\theta_o\right)\right]+EI_z\left(\frac{3.09059 v_o}{L^3}\right)-$$
$$P\left(\frac{0.2145609\,v_o}{L}+\frac{2.13825\,z_c\,\theta_o}{L}\right)=0 \qquad (A.52)$$

$$m\left[0.25L\left(\frac{d^2}{dt^2}w_o\right)+0.21665 y_c L\left(\frac{d^2}{dt^2}\theta_o\right)\right]+EI_y\left(\frac{3.09059 w_o}{L^3}\right)-$$
$$P\left(\frac{0.2145609 w_o}{L}-\frac{2.13825 y_c\theta_o}{L}\right)=0 \qquad (A.53)$$

$$m\left[\frac{L}{2}I_o\left(\frac{d^2}{dt^2}\theta_o\right)-0.21665z_cL\left(\frac{d^2}{dt^2}v_o\right)+0.21665y_cL\left(\frac{d^2}{dt^2}w_o\right)\right]+$$
$$\frac{\pi^4EI_w\theta_o}{2L^3}+\frac{\pi^2GJ\,\theta_o}{2L}-P\left[\frac{\pi^2I_o\theta_o}{2L}-y_c\left(-\frac{0.76174\,w_o}{L}\right)+z_c\left(\frac{0.76174\,v_o}{L}\right)\right]=0 \quad \text{(A.54)}$$

A.3.3
Viga engastada e apoiada.

A.3.3.1
Viga engastada e apoiada: Função de torção $\theta_x(x,t)=\theta_o(t).sen(\pi\,x/2L)$.

$$m\left[L\left(\frac{d^2}{dt^2}v_o\right)+0.62940z_cL\left(\frac{d^2}{dt^2}\theta_o\right)\right]+EI_z\left(\frac{237.72107v_o}{L^3}\right)-$$
$$P\left(-\frac{11.51253v_o}{L}-\frac{1.55299z_c\theta_o}{L}\right)=0 \quad \text{(A.55)}$$

$$m\left[L\left(\frac{d^2}{dt^2}w_o\right)-0.62940y_cL\left(\frac{d^2}{dt^2}\theta_o\right)\right]+EI_y\left(\frac{237.72107w_o}{L^3}\right)-$$
$$P\left(-\frac{11.51253w_o}{L}+\frac{1.55299y_c\theta_o}{L}\right)=0 \quad \text{(A.56)}$$

$$m\left[\frac{L}{2}I_o\left(\frac{d^2}{dt^2}\theta_o\right)+0.62940z_cL\left(\frac{d^2}{dt^2}v_o\right)-0.62940\,y_cL\left(\frac{d^2}{dt^2}w_o\right)\right]+$$
$$\frac{\pi^4EI_w\theta_o}{32L^3}+\frac{\pi^2GJ\,\theta_o}{8L}-P\left[-\frac{\pi^2I_o\theta_o}{8L}+y_c\left(\frac{7.26305w_o}{L}\right)+z_c\left(-\frac{7.26305v_o}{L}\right)\right]=0 \quad \text{(A.57)}$$

A.3.3.2
Viga engastada e apoiada: Função de torção $\theta_x(x,t)=\theta_o(t).sen(\pi\,x/L)$.

$$m\left[L\left(\frac{d^2}{dt^2}v_o\right)+0.69043z_cL\left(\frac{d^2}{dt^2}\theta_o\right)\right]+EI_z\left(\frac{237.721067v_o}{L^3}\right)-$$
$$P\left(-\frac{11.51253v_o}{L}-\frac{6.81426z_c\theta_o}{L}\right)=0 \quad \text{(A.58)}$$

$$m\left[L\left(\frac{d^2}{dt^2}w_o\right)-0.69043y_cL\left(\frac{d^2}{dt^2}\theta_o\right)\right]+EI_y\left(\frac{237.72106w_o}{L^3}\right)-$$
$$P\left(-\frac{11.51253w_o}{L}+\frac{6.81426y_c\theta_o}{L}\right)=0 \quad \text{(A.59)}$$

$$m\left[\frac{L}{2}I_o\left(\frac{d^2}{dt^2}\theta_o\right)+0.69042z_cL\left(\frac{d^2}{dt^2}v_o\right)-0.69042y_cL\left(\frac{d^2}{dt^2}w_o\right)\right]+$$
$$\frac{\pi^4EI_w\theta_o}{2L^3}+\frac{\pi^2GJ\,\theta_o}{2L}-P\left[-\frac{\pi^2I_o\theta_o}{2L}+y_c\left(\frac{6.81426w_o}{L}\right)+z_c\left(-\frac{6.81426v_o}{L}\right)\right]=0 \quad \text{(A.60)}$$

A.3.3.3
Viga engastada e apoiada: Função de torção $\theta_x(x,t)=\theta_o(t).cos(\pi\ x/L)$.

$$m\left[L\left(\frac{d^2}{dt^2}v_o\right)-0.131446z_cL\left(\frac{d^2}{dt^2}\theta_o\right)\right]+EI_z\left(\frac{237.721067v_o}{L^3}\right)-$$
$$P\left(-\frac{11.51253v_o}{L}+\frac{1.297325z_c\theta_o}{L}\right)=0 \quad \text{(A.61)}$$

$$m\left[L\left(\frac{d^2}{dt^2}w_o\right)+0.131446y_cL\left(\frac{d^2}{dt^2}\theta_o\right)\right]+EI_y\left(\frac{237.72106w_o}{L^3}\right)-$$
$$P\left(-\frac{11.51253w_o}{L}-\frac{1.297325y_c\theta_o}{L}\right)=0 \quad \text{(A.62)}$$

$$m\left[\frac{L}{2}I_o\left(\frac{d^2}{dt^2}\theta_o\right)-0.131446z_cL\left(\frac{d^2}{dt^2}v_o\right)+0.131446y_cL\left(\frac{d^2}{dt^2}w_o\right)\right]+$$
$$\frac{\pi^4EI_w\theta_o}{2L^3}+\frac{\pi^2GJ\,\theta_o}{2L}-P\left[-\frac{\pi^2I_o\theta_o}{2L}+y_c\left(-\frac{7.007389w_o}{L}\right)+z_c\left(\frac{7.00739v_o}{L}\right)\right]=0 \quad \text{(A.63)}$$

A.3.4
Viga bi-engastada.

A.3.4.1
Viga bi-engastada: Função de torção $\theta_x(x,t)=\theta_o(t).sen(\pi\ x/2L)$.

$$m\left[0.39648L\left(\frac{d^2}{dt^2}v_o\right)+0.35431z_cL\left(\frac{d^2}{dt^2}\theta_o\right)\right]+EI_z\left(\frac{198.46253v_o}{L^3}\right)-$$
$$P\left(-\frac{4.877716v_o}{L}-\frac{0.87421z_c\theta_o}{L}\right)=0 \quad \text{(A.64)}$$

$$m\left[0.39648L\left(\frac{d^2}{dt^2}w_o\right)-0.35431y_cL\left(\frac{d^2}{dt^2}\theta_o\right)\right]+EI_y\left(\frac{198.46253w_o}{L^3}\right)-$$
$$P\left(-\frac{4.87772w_o}{L}+\frac{0.87422y_c\theta_o}{L}\right)=0 \quad \text{(A.65)}$$

$$m\left[\frac{L}{2}I_o\left(\frac{d^2}{dt^2}\theta_o\right)+0.354307z_cL\left(\frac{d^2}{dt^2}v_o\right)-0.354307y_c\,L\left(\frac{d^2}{dt^2}w_o\right)\right]+$$
$$\frac{\pi^4 EI_w\theta_o}{32\,L^3}+\frac{\pi^2 GJ\,\theta_o}{8L}-P\left[-\frac{\pi^2 I_o\theta_o}{8L}+y_c\left(\frac{0.87422\,w_o}{L}\right)+z_c\left(-\frac{0.87422v_o}{L}\right)\right]=0 \quad (A.66)$$

A.3.4.2
Viga bi-engastada: Função de torção *θx(x,t)=θo(t).sen(π x/L)*.

$$m\left[0.3964L\left(\frac{d^2}{dt^2}v_o\right)+0.43911\,z_cL\left(\frac{d^2}{dt^2}\theta_o\right)\right]+$$
$$EI_z\left(\frac{198.4625v_o}{L^3}\right)-P\left(-\frac{4.8777v_o}{L}-\frac{4.3338z_c\,\theta_o}{L}\right)=0 \quad (A.67)$$

$$m\left[0.3964L\left(\frac{d^2}{dt^2}w_o\right)-0.4391y_c\,L\left(\frac{d^2}{dt^2}\theta_o\right)\right]+$$
$$EI_y\left(\frac{198.4625w_o}{L^3}\right)-P\left(-\frac{4.8777w_o}{L}+\frac{4.33388y_c\,\theta_o}{L}\right)=0 \quad (A.68)$$

$$m\left[\frac{L}{2}I_o\left(\frac{d^2}{dt^2}\theta_o\right)+0.43911z_c\,L\left(\frac{d^2}{dt^2}v_o\right)-0.43911y_c\,L\left(\frac{d^2}{dt^2}w_o\right)\right]+$$
$$\frac{48.704545EI_w\theta_o}{L^3}+\frac{4.934802GJ\,\theta_o}{L}-$$
$$P\left[-\frac{4.934802I_o\theta_o}{L}-y_c\left(\frac{4.3338w_o}{L}\right)+z_c\left(-\frac{4.3338v_o}{L}\right)\right]=0 \quad (A.69)$$

A.3.4.3
Viga bi-engastada: Função de torção *θx(x,t)=θo(t).cos(π x/L)*.

$$m\left[0.39648L\left(\frac{d^2}{dt^2}v_o\right)+4.41682*10^{-30}z_cL\left(\frac{d^2}{dt^2}\theta_o\right)\right]+$$
$$EI_z\left(\frac{198.462534v_o}{L^3}\right)-P\left(-\frac{4.87772v_o}{L}-\frac{4.35923*10^{-29}z_c\theta_o}{L}\right)=0 \quad (A.70)$$

$$m\left[0.39648L\left(\frac{d^2}{dt^2}w_o\right)-4.41682*10^{-30}y_cL\left(\frac{d^2}{dt^2}\theta_o\right)\right]+$$
$$EI_y\left(\frac{198.46253w_o}{L^3}\right)-P\left(-\frac{4.87772w_o}{L}+\frac{4.3592*10^{-29}y_c\theta_o}{L}\right)=0 \quad (A.71)$$

$$m\left[\frac{L}{2}I_o\left(\frac{d^2}{dt^2}\theta_o\right)+3.60699*10^{-30}\,z_c\,L\left(\frac{d^2}{dt^2}v_o\right)-3.60699*10^{-30}\,y_c\,L\left(\frac{d^2}{dt^2}w_o\right)\right]+$$
$$\frac{\pi^4 EI_w\theta_o}{2L^3}+\frac{\pi^2 GJ\,\theta_o}{2L}- \tag{A.72}$$
$$P\left[-\frac{\pi^2 I_o\theta_o}{2L}+y_c\left(-\frac{5.6889*10^{-28}\,w_o}{L}\right)+z_c\left(\frac{5.688906*10^{-28}\,v_o}{L}\right)\right]=0$$

Apêndice B

B.1
Seção monosimétrica - perfil "C".

Neste apêndice são apresentadas as matrizes que geram as equações características necessárias à determinação das frequências naturais e das cargas críticas da estrutura, para diferentes condições de contorno, como se segue.

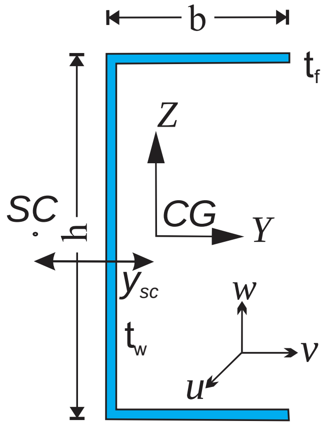


Figura B.1: Perfil monosimétrico "C" e suas dimensões características.

B.2
Viga simplesmente apoiada

B.2.1
Viga simplesmente apoiada - função de torção $\theta_x(x,t)=\theta_o(t).sen(\pi\, x/2L)$.

As equações lineares de movimento para este perfil são:

$$30{,}42\frac{d^2}{dt^2}v_o + 3{,}0915 * 10^5 v_o = 0 \tag{B.1}$$

$$30{,}42\frac{d^2}{dt^2}w_o + 1{,}5699\frac{d^2}{dt^2}\theta_o + 0{,}1976 * 10^7 w_o = 0 \tag{B.2}$$

$$1{,}5699\frac{d^2}{dt^2}w_o + 0{,}3355\frac{d^2}{dt^2}\theta_o + 550{,}2509\theta_o = 0 \tag{B.3}$$

As freqüências naturais são obtidas a partir do determinante:

$$\left\|\left[K_e-\lambda M\right]\right\|=\left\|\begin{bmatrix}3{,}09155*10^5-30{,}42\lambda & 0 & 0\\ 0 & 0{,}19762*10^7-30{,}42\lambda & -1{,}5699\lambda\\ 0 & -1{,}5699\lambda & 550{,}2509-0{,}3355\lambda\end{bmatrix}\right\|=0 \qquad \text{(B.4)}$$

As cargas de bifurcação são obtidas a partir do determinante:

$$\left\|\left[K_e-P\,K_G\right]\right\|=\left\|\begin{bmatrix}3{,}09155*10^5-P & 0 & 0\\ 0 & 0{,}1976*10^7-P & -0{,}0608P\\ 0 & -0{,}0608P & 550{,}2509-0{,}0110P\end{bmatrix}\right\|=0 \qquad \text{(B.5)}$$

B.2.2
Viga simplesmente apoiada - função de torção $\theta_x(x,t)=\theta_o(t).sen(\pi\, x/L)$.

As equações lineares de movimento para este perfil são:

$$24{,}6575\frac{d^2}{dt^2}v_o+2{,}50*10^5v_o=0 \qquad \text{(B.6)}$$

$$24{,}6575\frac{d^2}{dt^2}w_o+1{,}50\frac{d^2}{dt^2}\theta_o+1{,}602*10^5w_o=0 \qquad \text{(B.7)}$$

$$1{,}50\frac{d^2}{dt^2}w_o+0{,}272\frac{d^2}{dt^2}\theta_o+3036{,}38\theta_o=0 \qquad \text{(B.8)}$$

As freqüências naturais são obtidas a partir do determinante:

$$\left\|\left[K_e-\lambda M\right]\right\|=\left\|\begin{bmatrix}0{,}25*10^6-24{,}657\lambda & 0 & 0\\ 0 & 0{,}1601*10^7-24{,}657\lambda & -1{,}50\lambda\\ 0 & -1{,}50\lambda & 3036{,}38-0{,}2719\lambda\end{bmatrix}\right\|=0 \qquad \text{(B.9)}$$

As cargas de bifurcação são obtidas a partir do determinante:

$$\left\|\left[K_e-P\,K_G\right]\right\|=\left\|\begin{bmatrix}0{,}25*10^6-P & 0 & 0\\ 0 & 0{,}16*10^7-P & -0{,}0608P\\ 0 & -0{,}0608P & 3036{,}38-0{,}011P\end{bmatrix}\right\|=0 \qquad \text{(B.10)}$$

B.2.3
Viga simplesmente apoiada - função de torção $\theta_x(x,t)=\theta_o(t).cos(\pi\ x/L)$.

As equações lineares de movimento para este perfil são:

$$30{,}42\frac{d^2}{dt^2}v_o + 3{,}0915*10^5 v_o = 0 \tag{B.11}$$

$$30{,}42\frac{d^2}{dt^2}w_o + 0{,}1976*10^7 w_o = 0 \tag{B.12}$$

$$0{,}3355\frac{d^2}{dt^2}\theta_o + 3745{,}9841\theta_o = 0 \tag{B.13}$$

As freqüências naturais são obtidas a partir do determinante:

$$\left|\left[K_e - \lambda M\right]\right| = \left\|\begin{matrix} 3{,}09155*10^5 - 30{,}42\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}19762*10^7 - 30{,}42\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 3745{,}9841 - 0{,}3355\lambda \end{matrix}\right\| = 0 \tag{B.14}$$

As cargas de bifurcação são obtidas a partir do determinante:

$$\left|\left[K_e - P\,K_G\right]\right| = \left\|\begin{matrix} 3{,}09155*10^5 - 1{,}2337P & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}1976*10^7 - 1{,}2337P & 0 \\ 0 & 0 & 3745{,}9841 - 0{,}0136P \end{matrix}\right\| = 0 \tag{B.15}$$

B.3
Viga engastada e livre

B.3.1
Viga engastada e livre - função de torção $\theta_x(x,t)=\theta_o(t).sen(\pi\ x/2L)$.

As equações lineares de movimento para este perfil são:

$$15{,}21\frac{d^2}{dt^2}v_o + 19{,}617*10^3 v_o = 0 \tag{B.16}$$

$$15{,}21\frac{d^2}{dt^2}w_o + 1{,}253\frac{d^2}{dt^2}\theta_o + 125{,}403*10^3 w_o = 0 \tag{B.17}$$

$$1{,}253\frac{d^2}{dt^2}w_o + 0{,}3355\frac{d^2}{dt^2}\theta_o + 550{,}2509\ \theta_o = 0 \tag{B.18}$$

As freqüências naturais são obtidas a partir do determinante:

$$\left\|\left[K_e - \lambda M\right]\right\| = \left\|\begin{bmatrix} 19{,}617*10^3 - 15{,}21\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 125{,}403*10^3 - 15{,}21\lambda & -1{,}253\lambda \\ 0 & -1{,}253\lambda & 550{,}2509 - 0{,}3355\lambda \end{bmatrix}\right\| = 0 \tag{B.19}$$

As cargas de bifurcação são obtidas a partir do determinante:

$$\left\|\left[K_e - P\,K_G\right]\right\| = \left\|\begin{bmatrix} 19{,}617*10^3 - 0{,}053\ P & 0 & 0 \\ 0 & 125{,}403*10^3 + 0{,}053\ P & -0{,}0127P \\ 0 & 0{,}0082P & 550{,}2509 - 0{,}0034P \end{bmatrix}\right\| = 0 \tag{B.20}$$

B.3.2
Viga engastada e livre - função de torção $\theta_x(x,t)=\theta_o(t).sen(\pi\ x/L)$.

As equações lineares de movimento para este perfil são:

$$15{,}21\frac{d^2}{dt^2}v_o + 19{,}617*10^3 v_o = 0 \tag{B.21}$$

$$15{,}21\frac{d^2}{dt^2}w_o + 0{,}8681\frac{d^2}{dt^2}\theta_o + 125{,}403*10^3 w_o = 0 \tag{B.22}$$

$$0{,}8681\frac{d^2}{dt^2}w_o + 0{,}3355\frac{d^2}{dt^2}\theta_o + 3745{,}984\ \theta_o = 0 \tag{B.23}$$

As freqüências naturais são obtidas a partir do determinante:

$$\left\|\left[K_e - \lambda M\right]\right\| = \left\|\begin{bmatrix} 19{,}617*10^3 - 15{,}21\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 125{,}403*10^3 - 15{,}21\lambda & -0{,}8681\lambda \\ 0 & -0{,}8681\lambda & 3745{,}984 - 0{,}3355\lambda \end{bmatrix}\right\| = 0 \tag{B.24}$$

As cargas de bifurcação são obtidas a partir do determinante:

$$\left|[K_e - P\,K_G]\right| = \left|\begin{bmatrix} 19{,}617*10^3 + 0{,}053\ P & 0 & 0 \\ 0 & 125{,}403*10^3 + 0{,}053\ P & -0{,}0352\,P \\ 0 & 0{,}0125\,P & 3745{,}984 - 0{,}0136\,P \end{bmatrix}\right| = 0 \qquad \text{(B.25)}$$

B.3.3
Viga engastada e livre - função de torção $\theta_x(x,t)=\theta_o(t).cos(\pi\,x/L)$.

As equações lineares de movimento para este perfil são:

$$15{,}21\frac{d^2}{dt^2}v_o + 19{,}617*10^3 v_o = 0 \qquad \text{(B.26)}$$

$$15{,}21\frac{d^2}{dt^2}w_o - 0{,}8014\frac{d^2}{dt^2}\theta_o + 125{,}403*10^3 w_o = 0 \qquad \text{(B.27)}$$

$$-0{,}8014\frac{d^2}{dt^2}w_o + 0{,}3355\frac{d^2}{dt^2}\theta_o + 3745{,}984\ \theta_o = 0 \qquad \text{(B.28)}$$

As freqüências naturais são obtidas a partir do determinante:

$$\left|[K_e - \lambda M]\right| = \left|\begin{bmatrix} 19{,}617*10^3 - 15{,}21\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 125{,}403*10^3 - 15{,}21\lambda & -0{,}8014\,\lambda \\ 0 & -0{,}8014\,\lambda & 3745{,}984 - 0{,}3355\,\lambda \end{bmatrix}\right| = 0 \qquad \text{(B.29)}$$

As cargas de bifurcação são obtidas a partir do determinante:

$$\left|[K_e - P\,K_G]\right| = \left|\begin{bmatrix} 19{,}617*10^3 + 0{,}053\ P & 0 & 0 \\ 0 & 125{,}403*10^3 + 0{,}053\ P & 0{,}0325\,P \\ 0 & 0{,}0115\,P & 3745{,}984 - 0{,}0136\,P \end{bmatrix}\right| = 0 \qquad \text{(B.30)}$$

B.4
Viga engastada e apoiada

B.4.1
Viga engastada e apoiada - função de torção $\theta_x(x,t)=\theta_o(t).sen(\pi\,x/2L)$.

As equações lineares de movimento para este perfil são:

$$60{,}84\frac{d^2}{dt^2}v_o + 0{,}1508*10^7 v_o = 0 \qquad \text{(B.31)}$$

$$60{,}84\frac{d^2}{dt^2}w_o + 2{,}3282\frac{d^2}{dt^2}\theta_o + 0{,}9645*10^7 w_o = 0 \qquad \text{(B.32)}$$

$$2{,}3282\frac{d^2}{dt^2}w_o + 0{,}3355\frac{d^2}{dt^2}\theta_o + 550{,}2509\theta_o = 0 \qquad \text{(B.33)}$$

As freqüências naturais são obtidas a partir do determinante:

$$\left|[K_e - \lambda M]\right| = \left\|\begin{matrix} 0{,}15089*10^7 - 60{,}84\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}9645*10^7 - 60{,}84\lambda & -2{,}3282\lambda \\ 0 & -2{,}3282\lambda & 550{,}2509 - 0{,}3355\lambda \end{matrix}\right\| = 0 \qquad \text{(B.34)}$$

As cargas de bifurcação são obtidas a partir do determinante:

$$\left|[K_e - P\,K_G]\right| = \left\|\begin{matrix} 0{,}15089*10^7 - 2{,}8781\,P & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}9645*10^7 - 2{,}8781\,P & -0{,}0236P \\ 0 & -0{,}11039P & 550{,}2509 - 0{,}0034P \end{matrix}\right\| = 0 \qquad \text{(B.35)}$$

B.4.2
Viga engastada e apoiada - função de torção $\theta_x(x,t)=\theta_o(t).sen(\pi\, x/L)$.

As equações lineares de movimento para este perfil são:

$$60{,}84\frac{d^2}{dt^2}v_o + 0{,}1509*10^7 v_o = 0 \qquad \text{(B.36)}$$

$$60{,}84\frac{d^2}{dt^2}w_o + 2{,}5539\frac{d^2}{dt^2}\theta_o + 0{,}9646*10^7 w_o = 0 \qquad \text{(B.37)}$$

$$2{,}5539\frac{d^2}{dt^2}w_o + 0{,}3355\frac{d^2}{dt^2}\theta_o + 3745{,}9841\theta_o = 0 \qquad \text{(B.38)}$$

As freqüências naturais são obtidas a partir do determinante:

$$\left|[K_e - \lambda M]\right| = \left\|\begin{matrix} 0{,}1508*10^7 - 60{,}84\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}9646*10^7 - 60{,}84\lambda & -2{,}5539\lambda \\ 0 & -2{,}5539\lambda & 3745{,}9841 - 0{,}3355\lambda \end{matrix}\right\| = 0 \qquad \text{(B.39)}$$

As cargas de bifurcação são obtidas a partir do determinante:

$$\left|\left[K_e - P\,K_G\right]\right| = \left|\begin{bmatrix} 0{,}1508*10^7 - 2{,}8781P & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}9646*10^7 - 2{,}8781P & -0{,}1035P \\ 0 & -0{,}1035P & 3745{,}9841 - 0{,}0136P \end{bmatrix}\right| = 0 \qquad \text{(B.40)}$$

B.4.3
Viga engastada e apoiada - função de torção $\theta_x(x,t)=\theta_o(t).cos(\pi\ x/L)$.

As equações lineares de movimento para este perfil são:

$$60{,}84\frac{d^2}{dt^2}v_o + 0{,}1508*10^7 v_o = 0 \qquad \text{(B.41)}$$

$$60{,}84\frac{d^2}{dt^2}w_o - 0{,}4862\frac{d^2}{dt^2}\theta_o + 0{,}9645*10^7 w_o = 0 \qquad \text{(B.42)}$$

$$-0{,}4862\frac{d^2}{dt^2}w_o + 0{,}3355\frac{d^2}{dt^2}\theta_o + 3745{,}9841\theta_o = 0 \qquad \text{(B.43)}$$

As freqüências naturais são obtidas a partir do determinante:

$$\left|\left[K_e - \lambda M\right]\right| = \left|\begin{bmatrix} 0{,}15089*10^7 - 60{,}84\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}9645*10^7 - 60{,}84\lambda & 0{,}4862\lambda \\ 0 & 0{,}4862\lambda & 3745{,}9841 - 0{,}3355\lambda \end{bmatrix}\right| = 0 \qquad \text{(B.44)}$$

As cargas de bifurcação são obtidas a partir do determinante:

$$\left|\left[K_e - P\,K_G\right]\right| = \left|\begin{bmatrix} 0{,}15089*10^7 - 2{,}8781\,P & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}9645*10^7 - 2{,}8781\,P & 0{,}01971P \\ 0 & 0{,}10651P & 3745{,}9841 - 0{,}0136\,P \end{bmatrix}\right| = 0 \qquad \text{(B.45)}$$

B.5
Viga bi-engastada

B.5.1
Viga bi-engastada - função de torção $\theta_x(x,t)=\theta_o(t).sen(\pi\ x/2L)$.

As equações lineares de movimento para este perfil são:

$$24{,}1217\frac{d^2}{dt^2}v_o + 0{,}1259*10^7 v_o = 0 \qquad \text{(B.46)}$$

$$24{,}1217\frac{d^2}{dt^2}w_o + 1{,}3106\frac{d^2}{dt^2}\theta_o + 0{,}8052*10^7 w_o = 0 \tag{B.47}$$

$$1{,}3106\frac{d^2}{dt^2}w_o + 0{,}3355\frac{d^2}{dt^2}\theta_o + 550{,}2509\theta_o = 0 \tag{B.48}$$

As freqüências naturais são obtidas a partir do determinante:

$$\left|\left[K_e - \lambda M\right]\right| = \left|\begin{bmatrix} 0{,}1259*10^7 - 24{,}1217\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}8052*10^7 - 24{,}1217\lambda & -1{,}3106\lambda \\ 0 & -1{,}3106\lambda & 550{,}2509 - 0{,}3355\lambda \end{bmatrix}\right| = 0 \tag{B.49}$$

As cargas de bifurcação são obtidas a partir do determinante:

$$\left|\left[K_e - P\,K_G\right]\right| = \left|\begin{bmatrix} 0{,}1259*10^7 - 1{,}2194P & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}8052*10^7 - 1{,}2194P & -0{,}01328P \\ 0 & -0{,}01328P & 550{,}2509 - 0{,}0034P \end{bmatrix}\right| = 0 \tag{B.50}$$

B.5.2
Viga bi-engastada - função de torção $\theta_x(x,t)=\theta_o(t).sen(\pi\, x/L)$.

As equações lineares de movimento para este perfil são:

$$24{,}1217\frac{d^2}{dt^2}v_o + 0{,}1259*10^7 v_o = 0 \tag{B.51}$$

$$24{,}1217\frac{d^2}{dt^2}w_o + 1{,}6243\frac{d^2}{dt^2}\theta_o + 0{,}8052*10^7 w_o = 0 \tag{B.52}$$

$$1{,}6243\frac{d^2}{dt^2}w_o + 0{,}3355\frac{d^2}{dt^2}\theta_o + 3745{,}9841\theta_o = 0 \tag{B.53}$$

As freqüências naturais são obtidas a partir do determinante:

$$\left|\left[K_e - \lambda M\right]\right| = \left|\begin{bmatrix} 0{,}1259*10^7 - 24{,}1217\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}8052*10^7 - 24{,}1217\lambda & -1{,}6243\lambda \\ 0 & -1{,}6243\lambda & 3745{,}9841 - 0{,}3355\lambda \end{bmatrix}\right| = 0 \tag{B.54}$$

As cargas de bifurcação são obtidas a partir do determinante:

$$\left|\left[K_e - P\,K_G\right]\right| = \left|\begin{bmatrix} 0{,}1259*10^7 - 1{,}2194\,P & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}8052*10^7 - 1{,}2194\,P & -0{,}0658\,P \\ 0 & -0{,}0658\,P & 3745{,}9841 - 0{,}0136\,P \end{bmatrix}\right| = 0 \qquad \text{(B.55)}$$

B.5.3
Viga bi-engastada - função de torção $\theta_x(x,t)=\theta_o(t).cos(\pi\, x/L)$.

As equações lineares de movimento para este perfil são:

$$24{,}1217\frac{d^2}{dt^2}v_o + 0{,}1259*10^7 v_o = 0 \qquad \text{(B.56)}$$

$$24{,}1217\frac{d^2}{dt^2}w_o + 0{,}8052*10^7 w_o = 0 \qquad \text{(B.57)}$$

$$0{,}3355\frac{d^2}{dt^2}\theta_o + 3745{,}9841\theta_o = 0 \qquad \text{(B.58)}$$

As freqüências naturais são obtidas a partir do determinante:

$$\left|\left[K_e - \lambda M\right]\right| = \left|\begin{bmatrix} 0{,}1259*10^7 - 24{,}1217\,\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}8052*10^7 - 24{,}1217\,\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 3745{,}9841 - 0{,}3355\,\lambda \end{bmatrix}\right| = 0 \qquad \text{(B.59)}$$

As cargas de bifurcação são obtidas a partir do determinante:

$$\left|\left[K_e - P\,K_G\right]\right| = \left|\begin{bmatrix} 0{,}1259*10^7 - 1{,}2194\,P & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}8052*10^7 - 1{,}2194\,P & 0 \\ 0 & 0 & 3745{,}9841 - 0{,}0136\,P \end{bmatrix}\right| = 0 \qquad \text{(B.60)}$$