



Lucas Ludeña Gutierrez

Formulação e algumas aplicações do MPM (*Material Point Method*) em problemas de geotecnia em condições estáticas e dinâmicas

Dissertação de Mestrado

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da PUC-Rio como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Engenharia Civil.

Orientador: Prof. Euripedes do Amaral Vargas Junior
Co-Orientador: Dr. André Luis Muller

Rio de Janeiro
Outubro de 2016



Lucas Ludeña Gutierrez

Formulação e algumas aplicações do MPM (*Material Point Method*) em problemas de geotecnia em condições estáticas e dinâmicas

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da PUC-Rio. Aprovada pela Comissão Examinadora abaixo assinada.

Prof. Euripedes do Amaral Vargas Junior

Orientador
Departamento de Engenharia Civil – PUC-Rio

Dr. André Luis Muller

Co-Orientador
Instituto Tecgraf / PUC-Rio

Prof. Raquel Quadros Velloso

Departamento de Engenharia Civil – PUC-Rio

Prof. Anderson Pereira

Departamento de Engenharia Mecânica – PUC-Rio

Prof. Marcio da Silveira Carvalho

Cordenador setorial do
Centro Técnico Científico – PUC-Rio

Rio de Janeiro, 24 Outubro de 2016

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, do autor e do orientador.

Lucas Ludeña Gutierrez

Graduou-se em Engenharia Civil pela Universidade Nacional de Engenharia – UNI (Lima-Peru) em 2010. Principais áreas de interesse: geomecânica computacional, dinâmica de solos, obras de terra.

Ficha Catalográfica

Ludeña Gutierrez, Lucas

Formulação e algumas aplicações do MPM (*Material Point Method*) em problemas de geotecnia em condições estáticas e dinâmicas / Lucas Ludeña Gutierrez; orientador: Euripedes do Amaral Vargas Junior – 2016.
102 f.: il.(color.); 30 cm

Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil)– Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, Departamento de Engenharia civil, 2016
Inclui bibliografia

1. Engenharia civil – Teses. 2. Modelagem numérica. 3. Análise sísmica. 4. Barragem de terra. 5. Comportamento não linear de geoestruturas. I. Vargas, Euripedes. II. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Engenharia Civil. III. Título.

CDD 624

Para todos

Agradecimentos

Aos meus pais e à minha família, pelo amor e apoio incondicional em tudo o que me aventurei durante toda a minha vida.

À Pontifícia Universidade Católica de Rio de Janeiro (PUC-Rio) por terem me concedido a oportunidade de realizar o programa de mestrado e a agência de fomento CAPES que propiciaram condições financeiras, sem as quais não seria possível esta dissertação.

Ao professor Eurípedes Vargas, orientador da presente dissertação, que protagonizou seu papel direcionando e guiando minhas ideias, assim como auxiliando em momentos de necessidade intelectual durante todo o programa do mestrado. Muito obrigado professor.

Ao André Muller, co-orientador desta dissertação que teve um papel importantíssimo no conteúdo inteiro da dissertação.

Aos meus colegas da PUC-Rio que durante toda a convivência desta época foram mais que colegas, se tornaram amigos também.

Aos Professores e funcionários do Departamento de Engenharia Civil da PUC-Rio.

Resumo

Ludeña Gutierrez, Lucas; Vargas Junior, Euripedes do Amaral (Orientador) **Formulação e algumas aplicações do MPM (*Material Point Method*) em problemas de geotecnia em condições estáticas e dinâmicas**. Rio de Janeiro, 2016. 102p. Dissertação de Mestrado - Departamento de Engenharia Civil, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Em problemas geotécnicos podem ocorrer grandes deformações devido a chuvas prolongadas, sismos, deslizamentos de encostas, etc. *Material point method* (MPM) é um método de solução baseado no Método dos Elementos Finitos (MEF) que oferece vantagens para o cálculo estático e dinâmico que envolve deformações desse tipo. O objetivo desta dissertação é utilizar o MPM em problemas geotécnicos em condições estáticas e dinâmicas. Esta pesquisa mostra o procedimento de análises do MPM para a condição não acoplada (só sólido sem presença de água) e depois acoplada. Para a revisão matemática de MPM se faz antes um resumo da teoria do MEF na metodologia de conservação de quantidade de movimento. Nestas duas formas de resolver os problemas geotécnicos foram expostos três exemplos simples. O primeiro é uma coluna de solo simulado sob os fundamentos da elasticidade, com o objetivo de verificar o deslocamento vertical pelo peso próprio. Isto foi resolvido mediante quatro diferentes métodos: analítica, MEF por resíduos ponderados, MEF por conservação de quantidade de movimento, e MPM. Todos eles consideram somente a fase sólida. No segundo exemplo, tem-se solo na geometria de quadrado de lado 1 metro, onde busca-se obter as poropressões quando atingir a condição permanente enquanto os deslocamentos ocorrem ao longo do tempo; ou seja, a análise é acoplada e é resolvida pelo método MPM. Para uma aplicação mais realista, foi feita a análise (não acoplada) da barragem Palo Redondo, pertencente ao projeto Chavimochic, localizada na região de La Libertad, Perú. Nesta análise dinâmica considerou-se dois modelos constitutivos: Elástico e Mohr Coulomb, além de um sismo.

Palavras – chave

MEF conservação da quantidade de movimento; elasticidade e modelos constitutivos; análises acoplado e não acoplado; análises dinâmico; MPM.

Abstract

Ludeña Gutierrez, Lucas; Vargas Junior, Euripedes do Amaral (Advisor)
Formulation and some applications of material point method in geotechnical problems in static and dynamic conditions. Rio de Janeiro, 2016. 102p. M.Sc. Dissertation - Departamento de Engenharia Civil, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

In geotechnical problems can happen large strains because of prolonged rains, earthquake, slide slope, etc. Material point method is a solution method based on the finite element method (FEM) which offers advantages for static and dynamic calculation that involve that kind of strains. The objective in this dissertation is to use the MPM in geotechnical problems in statics and dynamics conditions. This research shows the analysis procedure of MPM for uncoupled condition (only solids, without water) and then coupled. Before the mathematical theory of MPM, a review of the theory of FEM in the conservation of quantidade de movimento is done. In this two methodology were raised three examples. The first one is a soil column that was modeled elastically, in which the main objective in to analyze the vertical displacement because of own weight. This was solved by four different methods: analytically, FEM weighted residual, FEM conservation of momentum, and MPM. All of them consider only the solid phase. The second example is a square of soil with side 1 meter, where the objective is to know the pore-pressure in the permanent condition and at the same time the vertical displacement were generated, it means that the analysis is coupled and were solved by MPM. In order to make a more realistic application, Palo Redondo dam is analyzed (uncoupled condition), which belongs to the Chavimochic project located in La Libertad, region of Perú. This dynamic analysis was done considering two constitutive models: Elastic and Mohr Coulomb, additionally seismic forces.

Keywords

FEM conservation of momentum; elasticity and constitutive model; coupled and uncoupled analysis; dynamic analysis; MPM.

Sumário

1	Introdução	17
1.1.	Objetivo	17
1.2.	Estrutura da dissertação	18
2	Material point Method – Não acoplado	19
2.1.	Método dos elementos finitos - Conservação de quantidade de movimento	20
2.1.1.	Equação da quantidade de movimento e forças de superfície	21
2.1.2.	Discretização no espaço	22
2.1.3.	Discretização no tempo – método dos elementos finitos	25
2.2.	Conceitos básicos do MPM	28
2.2.1.	Discretização	29
2.2.2.	Inicialização das partículas	29
2.3.	Procedimento de solução	31
2.3.1.	Inicialização da equação de movimento	31
2.4.	Solução da equação de movimento	32
2.4.1.	Algoritmo lagrangiano modificado	33
2.4.2.	Solução geral	34
2.5.	Exemplo de aplicação	36
2.5.1.	Solução analítica	37
2.5.2.	Solução com MEF – Método dos resíduos ponderados	38
2.5.3.	Solução com MEF - Conservação de quantidade de movimento	42
2.5.4.	Solução com MPM	50
3	Material point Method - Acoplado	68
3.1.	Conceitos preliminares	68
3.1.1.	Esforço efetivo	68
3.2.	Modelo hidromecânico para solos saturados	68
3.2.1.	Conservação de massa	68
3.2.2.	Conservação de quantidade de movimento	69
3.2.3.	Relação constitutiva	70
3.3.	Revisão numérica de problemas em duas fases	70
3.4.	Elementos finitos para a formulação v - w	71
3.4.1.	Condições de contorno e condições iniciais	71
3.4.2.	Formulação geral	72

3.4.3. Discretização no espaço	73
3.4.4. Discretização no tempo	75
3.5. MPM para problemas de duas fases	76
3.5.1. MPM – discretização e inicialização das partículas	76
3.5.2. Solução para um intervalo do tempo	77
3.6. Exemplo de aplicação	80
 4 Modelagem numérica com MPM - aplicação na geotecnia	 83
4.1. Hipóteses simplificadoras	84
4.2. Análise mediante o MEF	86
4.3. Análise mediante o MPM	87
4.4. Análise mediante o procedimento simplificado de Makdisi-Seed	89
4.5. Análises e resultados antes do sismo	89
4.6. Análises e resultados durante e depois do sismo	90
 5 Conclusões e sugestões	 99
 Referências bibliográficas	 101

Lista de figuras

Figura 2.1 – Elementos finitos discretizados no domínio. (Al-Kafaji, 2013).	23
Figura 2.2 – Fluxograma do processo dentro de um incremento do tempo.	26
Figura 2.3 – Conceito básico do MPM, partículas movimentando-se entre as malhas. (Al-Kafaji, 2013).	29
Figura 2.4 – Gráfico da coluna de solo.	37
Figura 2.5 – Esquema da coluna de solo e diferencial de solo.	38
Figura 2.6 – Deslocamento final dos nós da malha para análise 1.	42
Figura 2.7 – Deslocamento ao longo do tempo do nó superior para análise 1.	49
Figura 2.8 – Deslocamento ao longo do tempo do nó superior para análise 2.	49
Figura 2.9 – (a) Configuração inicial com 20 Partículas. (b) Configuração inicial com 200 partículas (c) Vista detalhada das primeiras 20 partículas do elemento entre os nodos 1 e 2 quando se faz a análise com 200 partículas no tempo zero.	50
Figura 2.10 – Esquema de distribuição das análises para a coluna de solo feito com MPM.	51
Figura 2.11 – Posições iniciais das partículas P_n e P_m em coordenadas locais e coordenadas globais.	52
Figura 2.12 – Análises com 20 partículas (análise 1) para diferentes intervalos de tempo na solução.	63
Figura 2.13 – Análises com 20 partículas (análise 2) para diferentes intervalos de tempo na solução.	64

Figura 2.14 – Análises com 200 partículas (análise 1) para diferentes intervalos de tempo na solução.	65
Figura 2.15 – Análises com 200 partículas (análise 2) para diferentes intervalos de tempo na solução.	65
Figura 2.16 – Comparação de MEF com MPM (análise 1).	66
Figura 2.17 – Comparação de MEF com MPM (análise 2).	66
Figura 2.18 – Resultado dos deslocamentos verticais em metros para (a) análise 1 e (b) análise 2.	67
Figura 3.1 – Gráfico do modelo.	81
Figura 3.2 – Esquema simplificado e representativo das partículas de controle no modelo, os pontos vermelhos representam as partículas de controle na base, no meio e no topo.	81
Figura 3.3 – Situação final da poropressão.	82
Figura 3.4 – Desenvolvimento das poropressões no tempo.	82
Figura 4.1 – Secção transversal da barragem.	83
Figura 4.2 – dimensões do modelo.	84
Figura 4.3 – Detalhe das dimensões do corpo da barragem.	84
Figura 4.4 – Histórico das acelerações.	86
Figura 4.5 – Histórico das velocidades.	86
Figura 4.6 – Discretização da malha e pontos de controle.	87
Figura 4.7 – Distribuição das partículas na malha fixa no tempo zero.	87

Figura 4.8 – (a) Vista geral da discretização da malha de elementos finitos (b) Discretização do corpo da barragem e partículas de controle.	88
Figura 4.9 – Distribuição das partículas no modelo.	88
Figura 4.10 – Deslocamentos horizontais e verticais do talude jusante com o modelo constitutivo elástico para MEF e MPM.	90
Figura 4.11 – Deslocamentos horizontais e verticais do talude jusante com o modelo constitutivo elástico-plástico para MEF e MPM.	90
Figura 4.12 – Desenvolvimento dos deslocamentos horizontais para o equilíbrio estático, durante o sismo, e depois do sismo. (Modelo elástico).	91
Figura 4.13 – Desenvolvimento dos deslocamentos horizontais do ponto de controle 1 devido ao sismo. (Modelo elástico).	91
Figura 4.14 – Desenvolvimento dos deslocamentos horizontais do ponto de controle 2 devido ao sismo. (Modelo elástico).	91
Figura 4.15 – Desenvolvimento dos deslocamentos horizontais do ponto de controle 3 devido ao sismo. (Modelo elástico).	92
Figura 4.16 – Desenvolvimento dos deslocamentos horizontais do ponto de controle 4 devido ao sismo. (Modelo elástico).	92
Figura 4.17 – Desenvolvimento dos deslocamentos horizontais do ponto de controle 5 devido ao sismo. (Modelo elástico).	92
Figura 4.18 – Desenvolvimento dos deslocamentos horizontais para o equilíbrio estático, durante o sismo, e depois do sismo. (Modelo elástico plástico de Mohr Coulomb).	93
Figura 4.19 – Desenvolvimento dos deslocamentos horizontais do ponto de controle 1 devido ao sismo. (Modelo elástico plástico de Mohr Coulomb).	93

Figura 4.20 – Desenvolvimento dos deslocamentos horizontais do ponto de controle 2 devido ao sismo. (Modelo elástico plástico de Mohr Coulomb).	93
Figura 4.21 – Desenvolvimento dos deslocamentos horizontais do ponto de controle 3 devido ao sismo. (Modelo elástico plástico de Mohr Coulomb).	94
Figura 4.22 – Desenvolvimento dos deslocamentos horizontais do ponto de controle 4 devido ao sismo. (Modelo elástico plástico de Mohr Coulomb).	94
Figura 4.23 – Desenvolvimento dos deslocamentos horizontais do ponto de controle 5 devido ao sismo. (Modelo elástico plástico de Mohr Coulomb).	94
Figura 4.24 – Deslocamentos permanentes na jusante calculados por Alva e Infantes da barragem Palo Redondo, 1999 e modificados para este análise.	95
Figura 4.25 – Deslocamentos horizontais permanentes devido unicamente ao sismo.	96
Figura 4.26 – Deslocamentos totais permanentes devido unicamente ao sismo.	96
Figura 4.27 – Deslocamentos horizontais.	97
Figura 4.28 – Deslocamentos horizontais.	97
Figura 4.29 – Deslocamentos verticais.	97
Figura 4.30 – Deslocamentos verticais.	98

Lista de símbolos

a	Aceleração
a_i^t	Aceleração nodal no tempo t
$\hat{\alpha}$	Parâmetro alpha de amortecimento de Rayleigh
A	Área de secção
$A_{e=1}^{n_{elm}}$	Símbolo de montagem das matrizes para o domínio inteiro
$B(x)$	Derivada das funções de forma no domínio de espaço
$\hat{\beta}$	Parâmetro beta de amortecimento de Rayleigh
c	Parâmetro de modelo constitutivo de Mohr Coulomb chamado coesão.
γ	Peso específico
e	Índice de vazios
E	Módulo de Young
ε_{vol}	Deformação volumétrica
ε_{ij}	Tensor de deformações
ξ	Coordenadas locais
ξ_p^t	Posição em coordenadas locais da partícula no tempo t
λ	Parâmetro lambda que define tipo de integração
\tilde{F}^{trac}	Vetor das forças de superfície
F^{ext}	Vetor das forças externas
F^{int}	Vetor das forças internas
F^{amort}	Vetor das forças amortecedoras
ϕ	Parâmetro de modelo constitutivo de Mohr Coulomb chamado angulo de atrito.
g	Gravidade
J	Jacobiano
K	Permeabilidade hidráulica
K	Matriz de rigidez
M^C	Matriz consistente de massa
M^L	Matriz <i>Lumped-mass matrix</i>
M	Matriz de massa
$\bar{N}(x)$	Funções de forma

m_p	Massa da partícula
n_{elm}	Número total de elementos na malha
n_T	Número total de nós na malha
n	Porosidade
n_{ep}	Número de partículas num elemento
n_{en}	Número de nós por elemento
n_{eq}	Número de pontos de Gauss num elemento
ϱ	Densidade
ϱ_p^t	Densidade da partícula no tempo t
σ_{ij}	Tensor de esforços
σ_p^t	Esforço na partícula no tempo t
P^t	Função de mapeamento
p	Poropressão
dS	Diferencial de superfície
t	Tempo
Δt	Incremento do tempo
u	Deslocamento
v	Velocidade
\hat{v}_i	Velocidade virtual
\hat{v}_p^t	Velocidade na partícula no tempo t
ν	Coeficiente de Poisson
$\partial\Omega_u$	Região do contorno onde o valor de u é prescrito
$\hat{\partial}\Omega_\tau$	Região do contorno onde o valor das forças são prescritas
Ω	Domínio
Ω_e	Domínio do elemento
Ω_p	Domínio de cada partícula
Ω_p^t	Domínio da partícula no tempo t
W_q	Peso de integração
x	Coordenadas globais

Lista de abreviaturas

CISMID	Centro Peruano Japonés de Investigaciones Sísmicas y Mitigación de Desastres
MEF	Método dos elementos finitos
MPM	<i>Material point method</i>
PIC	<i>Particle in Cell Method</i>

1

Introdução

1.1. Objetivo

O método dos elementos finitos pode ser formulado de diversas formas, por exemplo, fazendo considerações de energia, minimizações de equações, etc; sendo elas resolvidas geralmente independentes do tempo. Uma dificuldade na solução com o MEF é a distorção da malha quando o problema envolve grandes deformações, como no caso de sismos, grandes movimentos de solo devido à chuvas prolongadas, etc. Dessa forma, foram implementados procedimentos para mitigar esse problema, como o método chamado *Material Point Method* (MPM) que foi desenvolvido por Sulsky, Chen and Schreyer no ano 1993. MPM é uma extensão do método *Particle in Cell Method* (PIC) que é usado principalmente para análises de movimento em fluidos.

Muitas análises com MPM foram feitas desde o desenvolvimento desta metodologia até a atualidade. Nelas se faz comparações com métodos analíticos, com o MEF, e similares, além de análises para grandes deformações em problemas geotécnicos reais. Neste contexto, Sulsky e Schreyer (1996) fizeram análise axissimétrica em um cilindro submetido a cargas dinâmicas, chamado de problema de impacto de Taylor. Mais recentemente Ribeiro et, (2016) usaram o MPM para a análise de encostas na china considerando grandes movimentos de massa do solo induzidas pelo sismo de Wenchuan.

O objetivo desta dissertação é realizar aplicações do MPM na geotecnia em condições estáticas e dinâmicas. Ressalta-se que muitos conceitos da geotecnia e conceitos de análise numérica são envolvidos para as análises desta dissertação, como por exemplo, teoria da sismicidade, propagação de ondas, modelos constitutivos nos solos, amortecimento nos solos, critérios de convergência no MEF e no MPM, erros nos métodos numéricos, processos de otimização, etc. Todos eles estão embutidos no texto, mas não são aprofundados tecnicamente, pois não são objetivos da dissertação.

1.2. Estrutura da dissertação

Este trabalho é formalmente dividido em cinco capítulos, os quais contêm os seguintes temas. O capítulo 2 aborda a formulação de MPM para a condição não acoplada. Neste capítulo mostra-se uma revisão bibliográfica sobre os conceitos mais relevantes de elementos finitos na formulação de conservação de quantidade de movimento. Ao final deste capítulo apresenta-se um exemplo de aplicação que é resolvido mediante quatro métodos diferentes. No capítulo 3 o MPM é analisado em condição acoplada e nele também se apresenta um exemplo. No capítulo 4 tem-se a aplicação de um estudo de caso geotécnico. Considerou-se uma situação simplificada partindo do projeto real da barragem Palo Redondo do projeto Chavimochic localizado no Perú na região de La Libertad. Esta análise foi feita considerando o sismo numa situação não acoplada. Por fim, o capítulo 5 é reservado para as conclusões da presente pesquisa e sugestões para outras futuras.

2

Material point Method – Não acoplado

Em problemas geotécnicos são comuns eventos onde ocorrem grandes deformações devido a diferentes causas naturais como sismos ou induzida pelo homem como deslizamentos de solo por explosões. Para a revisão matemática de MPM se faz antes um resumo da teoria do MEF na metodologia de conservação de quantidade de movimento. A vantagem mais importante do MPM é que ele permite realizar as análises para grandes deformações sem perturbar a malha, porque ela é fixa. MPM permite o desenvolvimento dinâmico ao longo do tempo das variáveis desconhecidas nas partículas no interior da malha: aceleração, velocidade, deslocamentos, etc.

Sulsky, Chen and Schreyer no ano 1993, modificaram as formulações de PIC para desenvolver o MPM, e a partir de então fizeram-se muitos estudos de validação e comparação com os resultados analíticos ou outros métodos de aproximação já validados anos anteriores como o MEF, etc.

Sulsky e Schreyer (1996) descrevem o MPM como um método que resulta como consequência do PIC. Nesta metodologia têm-se duas malhas: a malha lagrangiana e a malha euleriana. A malha lagrangiana é a que carrega todas as propriedades dos materiais, e a malha euleriana é a malha fixa e espacial que define o domínio computacional. A dissipação numérica ocorre principalmente na malha euleriana que é fixa, e no caso da malha lagrangiana isto não ocorre porque ela é atualizada em cada acréscimo do tempo, permitindo que possam acontecer grandes deformações ao longo do tempo, fazendo esta metodologia muito útil em problemas geotécnicos.

Atualmente muitos autores concordam com a principal vantagem do MPM. Yerro, Alonso e Pinyol (2013) mostram que o MPM na atualidade foi aplicado para muitas situações na geotecnia e foi estendido para situações de problemas acoplados, por exemplo, liquefação de solos, falha de encostas com o solo saturado causado por chuvas prolongadas, etc. As malhas lagrangiana e euleriana são capazes de lidar com problemas que envolvem grandes deformações.

Além de MPM ser muito utilizado para as análises geotécnicas, também é usado para outras aplicações artísticas. Stomakhin, Schroeder, Chai, Teran e Selle (2013) fizeram estudos sobre simulação em neve para a companhia *Walt*

Disney Animation. Os autores usaram o MPM, onde eles chamam de método híbrido euleriano/lagrangiano MPM, para a implementação do modelo constitutivo elasto-plástico que simula a neve. Isto mostra outras das principais vantagens desta metodologia. Devido à sua simplicidade, além de ser versátil para grandes deformações, o MPM fornece facilidade para a implementação de novos modelos constitutivos como neste caso a neve elasto-plástica com considerações especiais para a colisão e fratura.

E assim MPM oferece versatilidade na simulação geotécnica, numérica, implementação de modelos constitutivos, aplicações artísticas, etc. Descreve-se a seguir as formulações do MPM baseadas nas formulações do MEF do capítulo anterior.

2.1.

Método dos elementos finitos - Conservação de quantidade de movimento

O MEF é usado para resolver aproximadamente equações diferenciais. A solução pode ocorrer através de diferentes formas: formulação variacional, por resíduos ponderados, conservação da quantidade de movimento, etc. Nesta seção resume-se o método de elementos finitos mediante a solução de conservação de quantidade de movimento, devido a que ela será utilizada para as formulações do MPM.

É importante mencionar as leis da termodinâmica que devem ser satisfeitas para um meio contínuo.

Conservação da massa: Não existe fluxo de massa, ou seja, massa nenhuma ingressa nem sai do domínio. Essa condição é demonstrada pela equação 2.1.

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \frac{\partial \hat{v}_i}{\partial x_i} = 0 \quad 2.1$$

Conservação da quantidade de movimento: A conservação da quantidade de movimento corresponde à somatória das forças atuantes no domínio (equação 2.2). A conservação do momentum angular implica a simetria do tensor de esforços (equação 2.4).

$$\rho \frac{d\hat{v}_i}{dt} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho g_i \quad 2.2$$

Onde,

$$g_i = [g_1 \quad g_2 \quad g_3]^T \quad . \quad 2.3$$

Ademais,

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \quad 2.4$$

Conservação de energia: Considerou-se que não existem ingressos nem egressos de nenhum tipo de energia.

$$\rho \frac{dr}{dt} = \dot{\epsilon}_{ij} \sigma_{ij} \quad 2.5$$

Onde r é a energia interna por unidade de massa.

2.1.1.

Equação da quantidade de movimento e forças de superfície

A equação de conservação de quantidade de movimento corresponde a relação fundamental que descreve o comportamento mecânico de um contínuo. A equação de quantidade de movimento foi multiplicada por uma velocidade virtual e integrada no domínio da seguinte maneira:

$$\int_{\Omega} \delta \hat{v}_i \rho \frac{d\hat{v}_i}{dt} d\Omega = \int_{\Omega} \delta \hat{v}_i \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} d\Omega + \int_{\Omega} \delta \hat{v}_i \rho g_i d\Omega \quad 2.6$$

$$\delta \hat{v}_i = 0 \quad \text{no } \partial\Omega_u. \quad 2.7$$

O primeiro termo da direita pode ser expresso da seguinte forma:

$$\int_{\Omega} \delta \hat{v}_i \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} d\Omega = \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_j} (\delta \hat{v}_i \sigma_{ij}) d\Omega - \int_{\Omega} \frac{\partial (\delta \hat{v}_i)}{\partial x_j} \sigma_{ij} d\Omega \quad 2.8$$

Substituindo a equação 2.8 na equação 2.6, tem-se:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \delta \hat{v}_i \rho \frac{d\hat{v}_i}{dt} d\Omega \\ = \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_j} (\delta \hat{v}_i \sigma_{ij}) d\Omega - \int_{\Omega} \frac{\partial (\delta \hat{v}_i)}{\partial x_j} \sigma_{ij} d\Omega + \int_{\Omega} \delta \hat{v}_i \rho g_i d\Omega \end{aligned} \quad 2.9$$

Usando o teorema de Gauss, também chamado de teorema da divergência no primeiro termo da direita tem-se:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_j} (\delta \hat{v}_i \sigma_{ij}) d\Omega = \int_{\partial\Omega} \delta \hat{v}_i n_j \sigma_{ij} dS \quad 2.10$$

Os esforços na superfície são unicamente originados pelas forças externas, então:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_j} (\delta \hat{v}_i \sigma_{ij}) d\Omega = \int_{\partial\Omega_{\tau}} \delta \hat{v}_i \tau_i dS \quad 2.11$$

Assim, tem-se a equação de quantidade de movimento:

$$\int_{\Omega} \delta \hat{v}_i \rho \frac{d\hat{v}_i}{dt} d\Omega = \int_{\partial\Omega_{\tau}} \delta \hat{v}_i \tau_i dS + \int_{\Omega} \delta \hat{v}_i \rho g_i d\Omega - \int_{\Omega} \frac{\partial(\delta \hat{v}_i)}{\partial x_j} \sigma_{ij} d\Omega \quad 2.12$$

Esta equação será usada para a formulação de elementos finitos.

2.1.2. Discretização no espaço

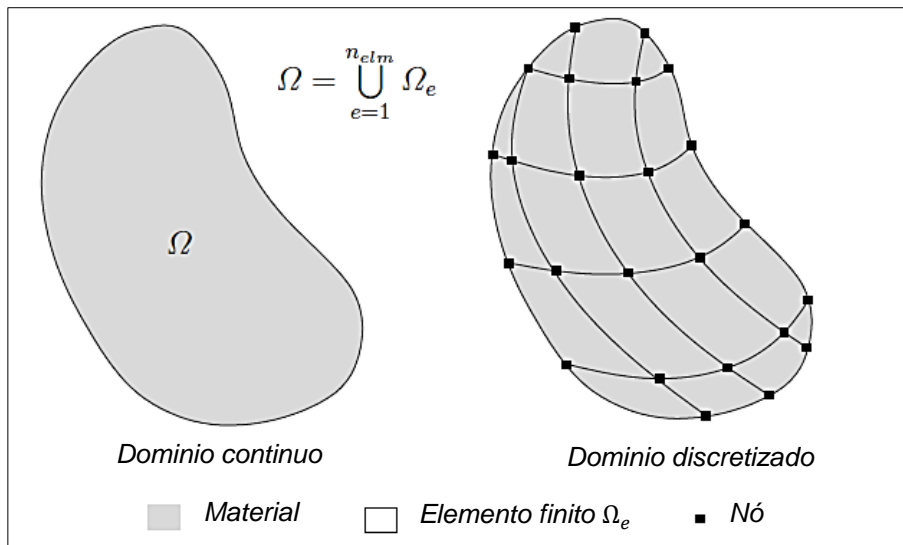


Figura 2.1 Elementos finitos discretizados no domínio. (Al-Kafaji, 2013)

No MEF a forma discreta é obtida mediante as aproximações com as funções de forma:

$$\hat{u}(x, t) \approx \bar{N}(x)u(t) \quad 2.13$$

$$\hat{v}(x, t) \approx \bar{N}(x)v(t) \quad 2.14$$

$$\hat{a}(x, t) \approx \bar{N}(x)a(t) \quad 2.15$$

Sendo $u(t)$, $v(t)$ e $a(t)$, os deslocamentos, velocidades e as acelerações ao longo do tempo.

Assim a equação 2.12 pode ser escrita da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \delta v^T \int_{\Omega} \bar{N}^T \varrho \bar{N} a \, d\Omega \\ = \delta v^T \int_{\partial\Omega_{\tau}} \bar{N}^T \tau \, dS + \delta v^T \int_{\Omega} \bar{N}^T \varrho g \, d\Omega - \delta v^T \int_{\Omega} B^T \sigma \, d\Omega \end{aligned} \quad 2.16$$

Onde :

$$B_i(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \bar{N}_i(x)}{\partial x_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial \bar{N}_i(x)}{\partial x_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial \bar{N}_i(x)}{\partial x_3} \\ \frac{\partial \bar{N}_i(x)}{\partial x_2} & \frac{\partial \bar{N}_i(x)}{\partial x_1} & 0 \\ 0 & \frac{\partial \bar{N}_i(x)}{\partial x_3} & \frac{\partial \bar{N}_i(x)}{\partial x_2} \\ \frac{\partial \bar{N}_i(x)}{\partial x_3} & 0 & \frac{\partial \bar{N}_i(x)}{\partial x_1} \end{bmatrix} \quad 2.17$$

B é a derivada das funções de forma em relação a ao domínio, τ e g são vetores que contém as componentes da força de superfície e de gravidade respectivamente. O vetor δv contém as velocidades virtuais nodais que são arbitrárias exceto quando elas são prescritas. Deste modo a equação anterior fica escrita de seguinte maneira.

$$\int_{\Omega} \bar{N}^T \varrho \bar{N} a \, d\Omega = \int_{\partial\Omega_{\tau}} \bar{N}^T \tau \, dS + \int_{\Omega} \bar{N}^T \varrho g \, d\Omega - \int_{\Omega} B^T \sigma \, d\Omega \quad 2.18$$

A equação 2.18 é desenvolvida para cada elemento finito, portanto, precisa-se fazer a montagem de todos os elementos da malha nesta equação. Deste modo a equação fica na forma de:

$$\left(A_{e=1}^{n_{elm}} \int_{\Omega_e} \bar{N}^T \varrho_e \bar{N} \, d\Omega \right) a = A_{e=1}^{n_{elm}} \int_{\partial\Omega_{\tau e}} \bar{N}^T \tau_e \, dS + A_{e=1}^{n_{relm}} \int_{\Omega_e} \bar{N}^T \varrho_e g \, d\Omega - A_{e=1}^{n_{elm}} \int_{\Omega_e} B^T \sigma_e \, d\Omega \quad 2.19$$

Onde A indica o processo de montagem das matrizes.

Por outro lado a equação 2.19 pode ser escrita da seguinte forma:

$$M^C a = F^{trac} + F^{grav} - F^{int} = F^{ext} - F^{int} \quad 2.20$$

Onde M^c é a matriz consistente de massa, F^{ext} é o vetor das forças externas e F^{int} é o vetor das forças internas. As forças externas são compostas pelas forças de superfície e a força de gravidade em todo o domínio; enquanto as forças internas são consequência da ação das forças externas.

2.1.3.

Discretização no tempo – método dos elementos finitos

Tem-se a equação 2.20 que pode ser escrita na seguinte forma.

$$Ma = F \quad 2.21$$

Onde F é a somatória de forças. Representando o termo da aceleração sob a forma de derivada, tem-se.

$$M \frac{dv}{dt} = F \quad 2.22$$

Integrando no intervalo $[t, t+\Delta t]$ tem-se:

$$\int_t^{t+\Delta t} M dv = \int_t^{t+\Delta t} F dt \quad 2.23$$

Obtendo:

$$M(v^{t+\Delta t} - v^t) \approx [\lambda_f F^{t+\Delta t} + (1 - \lambda_f) F^t] \Delta t \quad 2.24$$

E por fim:

$$v^{t+\Delta t} \approx v^t + M^{-1} [\lambda_f F^{t+\Delta t} + (1 - \lambda_f) F^t] \Delta t \quad 2.25$$

A velocidade é a derivada do deslocamento em relação ao tempo que pode ser escrita da seguinte forma.

$$\int_t^{t+\Delta t} du = \int_t^{t+\Delta t} v dt \quad 2.26$$

Então:

$$u^{t+\Delta t} - u^t \approx [\lambda_v v^{t+\Delta t} + (1 - \lambda_v) v^t] \Delta t \quad 2.27$$

$$\Delta u^{t+\Delta t} \approx [\lambda_v v^{t+\Delta t} + (1 - \lambda_v) v^t] \Delta t \quad 2.28$$

A razão de deformações nos pontos de Gauss q é calculada da seguinte forma:

$$\dot{\varepsilon}_q^{t+\Delta t} = B_q v_e^{t+\Delta t} \quad 2.29$$

O incremento das deformações

$$\Delta \varepsilon_q^{t+\Delta t} = B_q \Delta u_e^{t+\Delta t} \quad 2.30$$

Com o incremento das deformações, o estado de esforços para um tempo t , e a relação constitutiva, obtém-se as condições de esforço no tempo t mais o incremento de tempo Δt .

$$\{\sigma, \text{estado do material}\}^t \xrightarrow[\Delta \varepsilon^{t+\Delta t}]{\text{relação constitutiva}} \{\sigma, \text{estado do material}\}^{t+\Delta t}$$

A seguinte figura resume o procedimento iterativo para o calculo em cada acréscimo de tempo.

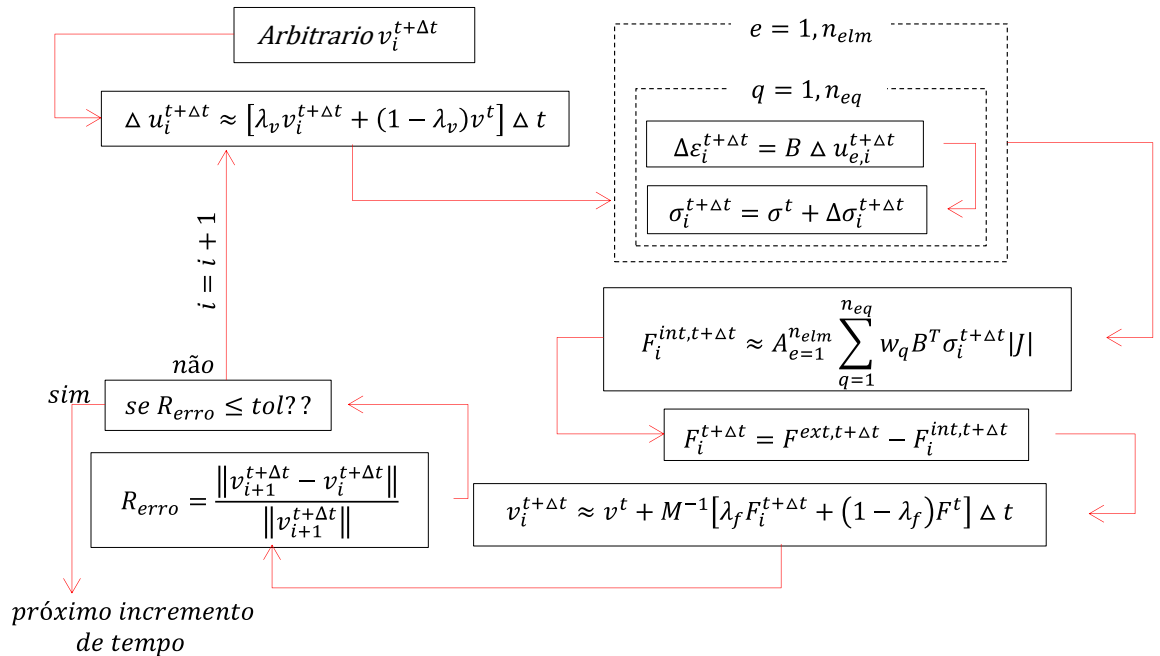


Figura 2.2 Fluxograma do processo dentro de um incremento do tempo.

Este procedimento é explicado da seguinte forma. Com o objetivo de conhecer a velocidade no nó i no instante de tempo $t+\Delta t$ assume-se um valor para

esta velocidade. Logo, conhecendo a velocidade no tempo t e a velocidade assumida no tempo $(t+\Delta t)$ tem-se o incremento no deslocamento no nó i para $(t+\Delta t)$.

$$\begin{array}{c} \boxed{\text{Arbitrario } v_i^{t+\Delta t}} \\ \rightarrow \boxed{\Delta u_i^{t+\Delta t} \approx [\lambda_v v_i^{t+\Delta t} + (1 - \lambda_v) v^t] \Delta t} \end{array}$$

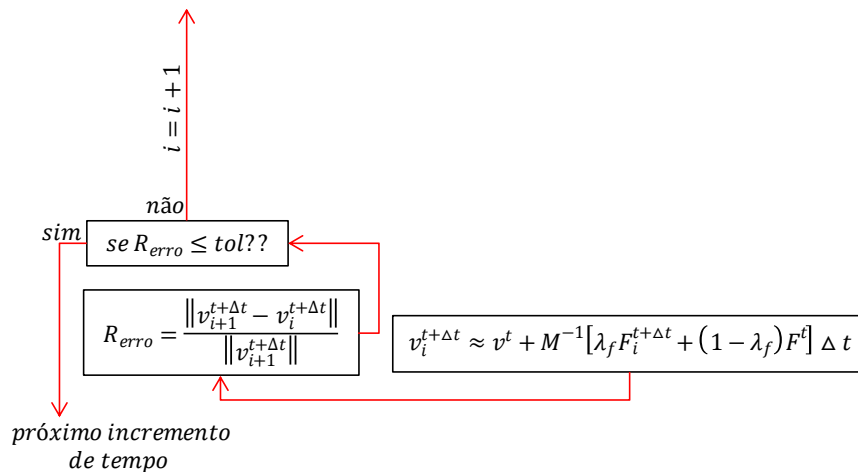
Com o incremento dos deslocamentos para o tempo $(t+\Delta t)$ e a matriz B obtém-se os incrementos das deformações para cada nó. E com os incrementos das deformações, considerando as relações constitutivas calcula-se o incremento de esforços para o tempo $(t+\Delta t)$.

$$\begin{array}{c} \boxed{e = 1, n_{elm}} \\ \boxed{q = 1, n_{eq}} \\ \boxed{\Delta \varepsilon_i^{t+\Delta t} = B \Delta u_{e,i}^{t+\Delta t}} \\ \boxed{\sigma_i^{t+\Delta t} = \sigma^t + \Delta \sigma_i^{t+\Delta t}} \end{array}$$

O passo seguinte é fazer a montagem da matriz de forças internas com o estado de esforços para o seguinte intervalo de tempo $(t+\Delta t)$. Também são calculadas as forças externas que de forma geral não são dependentes do tempo, pois a única força atuante é a gravidade.

$$\begin{array}{c} \boxed{F_i^{int,t+\Delta t} \approx A_{e=1}^{n_{elm}} \sum_{q=1}^{n_{eq}} w_q B^T \sigma_i^{t+\Delta t} |J|} \\ \rightarrow \boxed{F_i^{t+\Delta t} = F^{ext,t+\Delta t} - F_i^{int,t+\Delta t}} \end{array}$$

Finalmente obtém-se mediante a seguinte formulação a velocidade no tempo $(t+\Delta t)$. Esta velocidade é comparada com a velocidade assumida no início do processo a traves de um erro, repetindo o procedimento ou não.



2.2. Conceitos básicos do MPM

O MPM pode ser visto como uma extensão do método dos elementos finitos, onde o contínuo é representado por pontos lagrangianos chamados partículas. Elas carregam todas as propriedades físicas do contínuo como: a massa, o momento, parâmetros dos materiais, deformações, esforços, propriedades constitutivas e cargas externas, onde os nós da malha fixa não retêm informação de forma permanente.

No início de cada intervalo de tempo a informação é transferida desde as partículas até os nós da malha fixa. A utilidade da malha computacional fixa é determinar o incremento da solução em termos de deslocamento, velocidade e acelerações, esforços e deformações, em função do tempo. Ao final das análises computacionais, a informação obtida da malha é retornada para as partículas com um incremento, ocasionando a mudança de sua posição em relação ao intervalo de tempo posterior. Isto é descrito na seguinte figura.

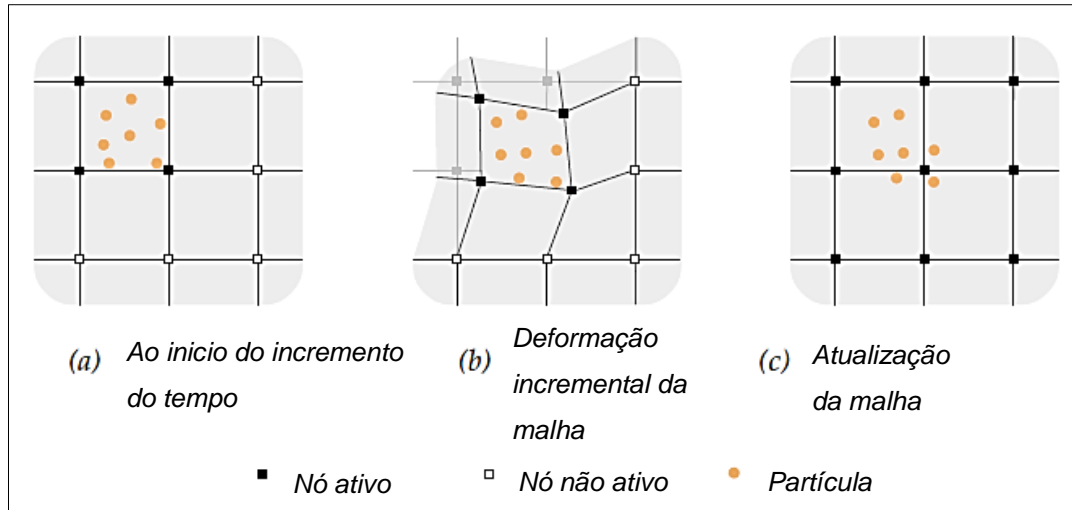


Figura 2.3 Conceito básico do MPM, partículas movimentando-se entre as malhas. (Al-Kafaji, 2013)

2.2.1. Discretização

Nos elementos finitos lagrangianos, tanto os nós da malha como os pontos de integração são carregados com propriedades físicas fixas. Contrariamente no MPM, os nós da malha fixa só tem propriedades físicas temporais. No MPM as partículas levam todas as propriedades físicas quando se movimentam livremente no domínio computacional da malha.

2.2.2. Inicialização das partículas

Cada partícula apresenta uma localização dentro de cada elemento da malha fixa. As coordenadas locais das partículas obtém-se da seguinte forma:

$$x(\xi_p) \approx \sum_{i=1}^{n_{en}} N_i(\xi_p) x_i \quad 2.31$$

Onde n_{en} é o numero total de nós no elemento e $N_i(\xi_p)$ é a função de forma no nó i avaliado para a posição local da partícula p . O volume associado em cada partícula é representado mediante a seguinte expressão.

$$\Omega_p = \frac{1}{n_{ep}} \int_{\Omega_e} d\Omega \quad 2.32$$

Onde Ω_p é o domínio (volume) associado à partícula p , n_{ep} indica o número de partículas no interior do elemento. Descrito de uma forma mais simples, o domínio de cada partículas é o domínio do elemento finito dividido entre o numero de partículas no interior dele. Assim a massa da partícula é seu domínio (volume) multiplicado pela densidade de cada partícula. Portanto a força de gravidade associada a cada partícula é a sua massa multiplicada pela gravidade.

$$m_p = \Omega_p \rho_p \quad 2.33$$

$$f_p^{grav} = m_p g \quad 2.34$$

A força de superfície é calculada mediante seguinte expressão:

$$\tilde{F}_e^{trac}(x) = \int_{S_e} N^T(\xi) \tilde{\tau}_e(x) dS \quad 2.35$$

Ou também descrita da seguinte forma.

$$\tilde{F}_e^{trac} = [\tilde{f}_1^{trac} \quad \tilde{f}_2^{trac} \quad \tilde{f}_3^{trac}]^T \quad 2.36$$

Onde:

$$\tilde{\tau}_e(x_p) \approx \sum_{i=1}^{n_{tri}} N_i(\xi_p) \tilde{\tau}_e(x_i) \quad 2.37$$

Esta expressão entende-se como a interpolação da força aos nós mediante as funções de forma. Onde N_i é a função de forma no nó i avaliado na posição local da partícula p .

$$\tilde{f}_p^{trac} = \tilde{\tau}_e(x_p) \frac{S_e}{n_{ebp}} = \frac{S_e}{n_{ebp}} \sum_{i=1}^{n_{tri}} N_i(\xi_p) \tilde{\tau}_e(x_i) \quad 2.38$$

A equação 2.38 indica a repartição para cada partícula das forças de força de superfície proporcionais à superfície entre o número de partículas localizadas na superfície.

2.3. Procedimento de solução

2.3.1. Inicialização da equação de movimento

O primeiro passo é obter a matriz de massa da seguinte forma:

$$M^t = A_{e=1}^{n_{elm}} M_e^t \quad 2.39$$

A matriz da massa no tempo t e a montagem de todas as matrizes de massa dos elementos para esse tempo. Onde n_{elm} representa o numero de elementos finitos ativos nesse momento (os elementos finitos ativos são aqueles que contem pelo menos uma partícula, Fig 2.3) e M_e^t e a matriz de massa de um elemento finito que e definido da seguinte forma.

$$M_e^t = \begin{bmatrix} m_1^t & 0 & \dots & 0 \\ 0 & m_2^t & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & m_{en}^t \end{bmatrix} \quad 2.40$$

É importante indicar que se usará a matriz condensada no lugar da matriz consistente devido ao tempo computacional que demanda. Entretanto a matriz condensada está associada a alguma dissipação de energia cinética.

Onde m_i^t representa a massa do nó i em as três dimensões.

$$\mathbf{m}_i^t = \begin{bmatrix} m_i^t & 0 & 0 \\ 0 & m_i^t & 0 \\ 0 & 0 & m_i^t \end{bmatrix} \quad e \quad \mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad 2.41$$

$$m_i^t \approx \sum_{p=1}^{n_{ep}} m_p N_i(\xi_p^t) \quad 2.42$$

Por outro lado as velocidades nodais são encontradas a partir das velocidades das partículas da seguinte forma:

$$M^t \mathbf{v}^t = \mathbf{P}^t \quad 2.43$$

Onde

$$P^t \approx A_{e=1}^{\bar{n}_{elm}} \sum_{p=1}^{n_{eq}} m_p N^T(\xi_p^t) \hat{v}_p^t \quad 2.44$$

P^t é o mapeamento das partículas para a velocidade. Isto é igual á matriz de massa multiplicada pela velocidade nodal (tudo isto no tempo t). Da mesma forma para a construção da matriz de forças no contorno tem-se:

$$\tilde{F}^{trac,t} \approx A_{e=1}^{\bar{n}_{telm}} \sum_{p=1}^{n_{ebp}} N^T(\xi_p^t) \tilde{f}_p^{trac} \quad 2.45$$

Logo

$$F^{trac,t} = \tilde{F}^{trac,t} T(t) \quad 2.46$$

E para as forças gravitacionais tem-se:

$$F^{grav,t} \approx A_{e=1}^{\bar{n}_{elm}} \sum_{p=1}^{n_{ep}} N^T(\xi_p^t) f_p^{grav} \quad 2.47$$

Portanto a somatória de forças internas é dada por:

$$F^{int,t} \approx A_{e=1}^{\bar{n}_{elm}} \sum_{p=1}^{n_{ep}} B^T(\xi_p^t) \sigma_p^t \Omega_p^t \quad 2.48$$

A somatória de forças externas e internas:

$$M^t a^t = F^{tract,t} + F^{grav,t} - F^{int,t} = F^t \quad 2.49$$

A equação 2.49 é similar à que se obtém mediante o procedimento lagrangiano para o método dos elementos finitos, mas a principal diferença é a forma como as matrizes são construídas.

2.4. Solução da equação de movimento

A forma de resolver é similar a que se usa nos elementos finitos lagrangianos; entretanto por causa de algumas desvantagens este procedimento e levemente modificado por Sulsky et al (1993). Estes dois procedimentos são chamados: Algoritmo lagrangiano e Algoritmo lagrangiano modificado.

2.4.1. Algoritmo lagrangiano modificado

Como uma forma de remediar o problema que origina as massas pequenas, introduziu-se o seguinte procedimento de solução. Resolve-se mediante a seguinte equação para as acelerações nodais.

$$a^t = M^{t,-1} F^t \quad 2.50$$

No seguinte passo, calcula-se as velocidades das partículas diretamente das acelerações nodais da seguinte forma:

$$\hat{v}_p^{t+\Delta t} = \hat{v}_p^t + \sum_{i=1}^{n_{en}} \Delta t N_i(\xi_p^t) a_i^t \quad 2.51$$

Algo fundamental deste algoritmo modificado é que as velocidades não são calculadas diretamente das acelerações nodais. As velocidades nodais são calculadas a partir das velocidades das partículas que são obtidas mediante a equação 2.51, e as velocidades nodais mediante a seguinte equação.

$$M^t v^{t+\Delta t} = p^{t+\Delta t} \quad 2.52$$

Onde,

$$p^{t+\Delta t} \approx A_{e=1}^{\bar{n}_{elm}} \sum_{p=1}^{n_{ep}} m_p N^T(\xi_p^t) \hat{v}_p^{t+\Delta t} \quad 2.53$$

Por tanto os incrementos nodais são os seguintes.

$$\Delta u^{t+\Delta t} = \Delta t v^{t+\Delta t} \quad 2.54$$

Depois de obter os incrementos de deslocamento nodal calcula-se através das funções de interpolação os deslocamentos das partículas e as localizações finais no tempo $t+\Delta t$.

$$\hat{u}_p^{t+\Delta t} = \hat{u}_p^t + \sum_{i=1}^{n_{en}} N_i(\xi_p^t) \Delta u_i^{t+\Delta t} \quad 2.55$$

$$x_p^{t+\Delta t} = x_p^t + \sum_{i=1}^{n_{en}} N_i(\xi_p^t) \Delta u_i^{t+\Delta t} \quad 2.56$$

2.4.2. Solução geral

1. O primeiro passo é a montagem da matriz de massa.

$$M^t = A_{e=1}^{\bar{n}_{elm}} M_e^t ; \quad M_e^t = \sum_{p=1}^{n_{ep}} m_p N^T(\xi_p^t)$$

$$M_e^t = \sum_{p=1}^{n_{ep}} m_p N^T(\xi_p^t) \quad 2.57$$

2. Conhecida a velocidade das partículas no tempo t calcula-se o mapeamento as velocidades nodais no tempo t .

$$M^t v^t \approx A_{e=1}^{\bar{n}_{elm}} \sum_{p=1}^{n_{ep}} m_p N^T(\xi_p^t) \hat{v}_p^t. \quad 2.58$$

3. As forças externas são calculadas pela a seguinte expressão:

$$F^{trac,t} = \tilde{F}^{trac,t} T(t) ; \quad \tilde{F}^{trac,t} \approx A_{e=1}^{\bar{n}_{relm}} \sum_{p=1}^{n_{ebp}} N^T(\xi_p^t) \tilde{f}_p^{trac}$$

$$2.59$$

Onde;

$$\tilde{F}^{trac,t} \approx A_{e=1}^{\bar{n}_{relm}} \sum_{p=1}^{n_{ebp}} N^T(\xi_p^t) \tilde{f}_p^{trac} \quad 2.60$$

4. A força de gravidade e a força interna:

$$F^{grav,t} \approx A_{e=1}^{\bar{n}_{elm}} \sum_{p=1}^{n_{ep}} N^T(\xi_p^t) f_p^{grav} ; \quad F^{int,t} \approx$$

$$A_{e=1}^{\bar{n}_{elm}} \sum_{p=1}^{n_{ep}} B^T(\xi_p^t) \sigma_p^t \Omega_p^t \quad 2.61$$

$$F^{int,t} \approx A_{e=1}^{\bar{n}_{elm}} \sum_{p=1}^{n_{ep}} B^T(\xi_p^t) \sigma_p^t \Omega_p^t \quad 2.62$$

5. Nesta etapa o sistema de equações encontra-se completo.

$$M^t a^t = F^{trac,t} + F^{grav,t} - F^{int,t} - F^{amort} = F^t \quad 2.63$$

6. Então resolve-se o sistema de equações para as acelerações nodais no tempo t .

$$a^t = M^{t,-1} F^t \quad 2.64$$

7. Nesta etapa as velocidades das partículas são atualizadas no tempo presente com o incremento do tempo $(t+\Delta t)$.

$$\hat{v}_p^{t+\Delta t} = \hat{v}_p^t + \sum_{i=1}^{n_{en}} \Delta t N_i(\xi_p^t) a_i^t \quad 2.65$$

8. As velocidades nodais no tempo $(t+\Delta t)$ são calculadas a partir das velocidades das partículas.

$$M^t v^{t+\Delta t} \approx A_{e=1}^{\bar{n}_{elm}} \sum_{p=1}^{n_{ep}} m_p N^T(\xi_p^t) \hat{v}_p^{t+\Delta t} \quad 2.66$$

9. Usam-se as velocidades nodais no intervalo de tempo seguinte para encontrar os incrementos de deslocamento.

$$\Delta u^{t+\Delta t} = \Delta t v^{t+\Delta t} \quad 2.67$$

10. Os esforços e as deformações das partículas são calculados.

$$\Delta \varepsilon_p^{t+\Delta t} = B(\xi_p^t) \Delta u_e^{t+\Delta t} \quad 2.68$$

$$\{\sigma_p, \text{estado do material}\}^t \xrightarrow[\Delta \varepsilon_p^{t+\Delta t}]{\text{relação constitutiva}} \{\sigma_p, \text{estado do material}\}^{t+\Delta t}$$

11. O volume associado ao incremento das deformações é calculado pela equação 2.69.

$$\Omega_p^{t+\Delta t} = (1 + \Delta \varepsilon_{vol,p}^{t+\Delta t}) \Omega_p^t \quad ; \quad \Delta \varepsilon_{vol} = \Delta \varepsilon_{11} + \Delta \varepsilon_{22} + \Delta \varepsilon_{33} \quad 2.69$$

$$\Delta \varepsilon_{vol} = \Delta \varepsilon_{11} + \Delta \varepsilon_{22} + \Delta \varepsilon_{33}. \quad 2.70$$

Como consequência do cambio de volume se modifica também a densidade da seguinte forma.

$$\rho_p^{t+\Delta t} = \frac{\rho_p^t}{(1+\Delta\varepsilon_{vol,p}^{t+\Delta t})} \quad 2.71$$

12. Por tanto obtém-se os deslocamentos e as novas posições das partículas como segue:

$$\hat{u}_p^{t+\Delta t} = \hat{u}_p^t + \sum_{i=1}^{n_{en}} N_i(\xi_p^t) \Delta u_i^{t+\Delta t} \quad ; \quad x_p^{t+\Delta t} = x_p^t + \sum_{i=1}^{n_{en}} N_i(\xi_p^t) \Delta u_i^{t+\Delta t} \quad 2.72$$

$$x_p^{t+\Delta t} = x_p^t + \sum_{i=1}^{n_{en}} N_i(\xi_p^t) \Delta u_i^{t+\Delta t} \quad 2.73$$

13. A informação é atualizada nesta etapa, incluindo a detecção de novos elementos dos quais as partículas saltaram para eles e os antigos elementos dos quais as partículas terem migrado. Como consequência o número de partículas por elemento deve ser contabilizado nesta nova etapa do cálculo.

2.5. Exemplo de aplicação

Tem-se uma coluna de solo de um metro de comprimento e de secção transversal de $0.01m^2$. Esta será modelado considerando o comportamento elástico com dois valores de modulo de Young: $40 kPa$ (análise 1) e $400 kPa$ (análise 2). A relação de Poisson de 0.3 e peso específico $20kN/m^3$. A razão de ter dois valores de modulo de elasticidade é porque quer se conhecer como é o comportamento para diferente ordem de grandeza da rigidez.

2.5.1. Solução analítica

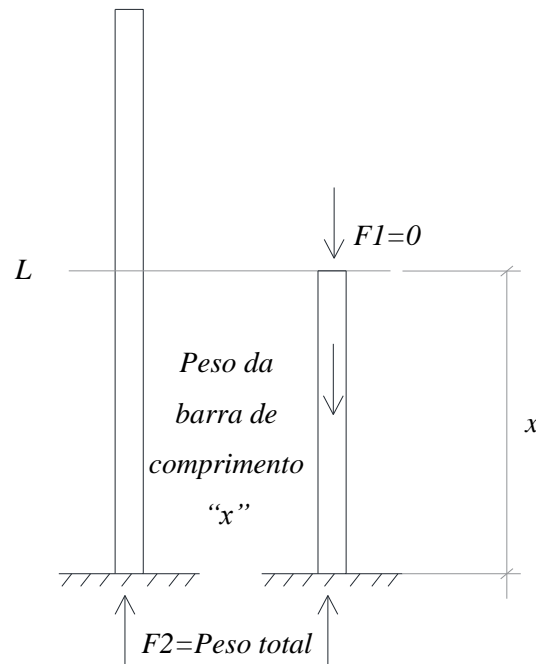


Figura 2.4 Gráfico da coluna de solo.

As seguintes formulações são conhecidas da teoria da elasticidade linear:

$$E\varepsilon = \sigma$$

$$E \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{F1}{A} = \frac{F2 - \text{peso barra "x"}}{A} = \frac{\text{peso da barra acima "(L-x)"}{A}$$

$$E \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\gamma(L-x)A}{A}$$

$$E \partial u = \gamma(L-x) \partial x$$

Fazendo a integração:

$$\int \partial u = \int_0^L \frac{\gamma(L-x) \partial x}{E}$$

$$u = \frac{\gamma L^2}{2E}$$

Desta forma quando o módulo de Young é de 40 kPa (análise 1) o deslocamento vertical total da barra pelo peso próprio é de 0.25 m, e desta forma, quando o módulo é 400 kPa (análise 2) o deslocamento é 0.025 m

2.5.2.

Solução com MEF – Método dos resíduos ponderados

Para resolver com MEF pode-se escolher qualquer das formulações disponíveis na literatura, pois o resultado será o mesmo. Nesta secção demonstrou-se a formulação de resíduos ponderados. Na figura 2.5 descreve-se o modelo e o diferencial de elemento da coluna de solo que será analisado.

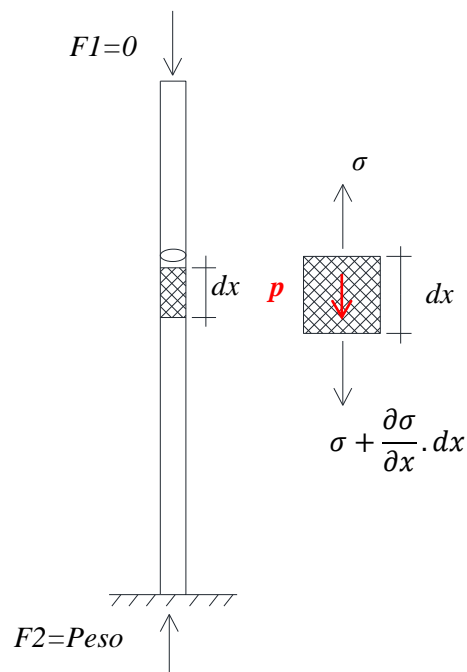


Figura 2.5 Esquema da coluna de solo e diferencial de solo.

Pode-se escrever então:

$$\sigma A = P + \left(\sigma + \frac{\partial \sigma}{\partial x} dx \right) A$$

Sabendo que o peso do diferencial de solo, e a relação constitutiva são dados por:

$$P = A dx \gamma$$

$$\sigma = E \varepsilon = E \frac{\partial u}{\partial x}$$

Então a expressão fica da seguinte forma

$$0 = A\gamma \cdot dx + A \cdot E \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx$$

E finalmente

$$0 = \gamma + \frac{E d^2 u}{\partial x^2}$$

Reescrevendo a última equação com a função $R(x)$, que corresponde a função que deve-se minimizar.

$$\frac{E d^2 \hat{u}}{\partial x^2} + \gamma = R(x) \quad ; \quad \text{onde } \hat{u} \text{ é } u \text{ quando } R(x) \text{ é mínimo}$$

Então se faz a ponderação do resíduo $R(x)$.

$$\int_{\Omega} R(x) W_i dx = 0$$

Onde W_i são as funções de ponderação, que segundo o método de Garlekin $W_i = N_i$. Por tanto:

$$\int_{\Omega} R(x) N_i dx = \int_{\Omega} \left(E \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial x^2} + \gamma \right) N_i dx$$

$$\int_{\Omega} \left(E \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial x^2} + \gamma \right) N_i dx = \int_{\Omega} \left(E \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial x^2} \right) N_i dx + \int_{\Omega} \gamma N_i dx$$

$$\underbrace{\hspace{10em}}_{\alpha} \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{\beta}$$

α :

$$\alpha = \int_{\Omega} E \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial x^2} N_i dx = \int_{\Gamma} E \frac{\partial \hat{u}}{\partial x} \cdot N_i dx - \int_{\Omega} E \frac{\partial \hat{u}}{\partial x} \cdot \frac{\partial N_i}{\partial x} dx$$

$$\underbrace{\hspace{10em}}_{\alpha_2} \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{\alpha_1}$$

$$\alpha_1 = \int_{\Omega} E \frac{\partial \hat{u}}{\partial x} \cdot \frac{\partial N_i}{\partial x} dx$$

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial x} = u_J \frac{\partial N_J}{\partial x}; \quad \frac{\partial N_J}{\partial x} = \frac{\partial N_J}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial N_J}{\partial \xi} \frac{2}{\ell}$$

$$\alpha_1 = \int_{\Omega} E u_J \frac{\partial N_J}{\partial \xi} \cdot \frac{2}{\ell} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \cdot \frac{2}{\ell} \frac{\ell}{2} d\xi = \frac{2E}{\ell} \int_{-1}^1 u_J \frac{\partial N_J}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial N_i}{\partial \xi} d\xi$$

Então:

$$\alpha_1 = \frac{2E}{\ell} \begin{bmatrix} \int_{-1}^{+1} \frac{\partial N_1}{\partial \xi} \frac{\partial N_1}{\partial \xi} d\xi & \int_{-1}^{+1} \frac{\partial N_1}{\partial \xi} \frac{\partial N_2}{\partial \xi} d\xi \\ \int_{-1}^{+1} \frac{\partial N_2}{\partial \xi} \frac{\partial N_1}{\partial \xi} d\xi & \int_{-1}^{+1} \frac{\partial N_2}{\partial \xi} \frac{\partial N_2}{\partial \xi} d\xi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial N_1}{\partial \xi} = -0.5 \quad ; \quad \frac{\partial N_2}{\partial \xi} = 0.5$$

Portanto:

$$\alpha_1 = \frac{E}{\ell} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

Enquanto:

$$\alpha_2 = \int_{\Gamma} E \frac{\partial \hat{u}}{\partial x} \cdot N_i dx$$

$$\alpha_2 = E u_J \frac{\partial N_J}{\partial x} N_i \Big|_0^L$$

A avaliação no contorno resulta $\alpha_2=0$.

$$\beta = \int_{\Omega} \gamma N_i dx = \frac{\gamma \ell}{2} \begin{bmatrix} \int_{-1}^1 N_1 d\xi \\ \int_{-1}^1 N_2 d\xi \end{bmatrix} = \frac{\gamma \ell}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Portanto tem-se:

$$0 = \alpha_2 - \alpha_1 + \beta$$

Esta equação é satisfeita para todo o modelo, então a sua montagem é dada por:

$$\mathbf{A}_{e=1}^{n_{elm}} \alpha_1 = \mathbf{A}_{e=1}^{n_{elm}} \beta$$

$$\alpha_1 = \frac{40 \frac{KN}{m^2}}{0.2m} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} ; \quad \beta = \frac{20 \frac{KN}{m^3} \times 0.2m}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{bmatrix} = 0.01m \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Resolvendo o sistema de equações para análise 1 e análise 2 e sabendo na condição de contorno o deslocamento no nó seis é zero ($u_6=0$):

Análise 1:

$$u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.25 \\ 0.24 \\ 0.21 \\ 0.16 \\ 0.09 \\ 0.00 \end{bmatrix} m$$

Análise 2:

$$u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.025 \\ 0.024 \\ 0.021 \\ 0.016 \\ 0.009 \\ 0.000 \end{bmatrix} m$$

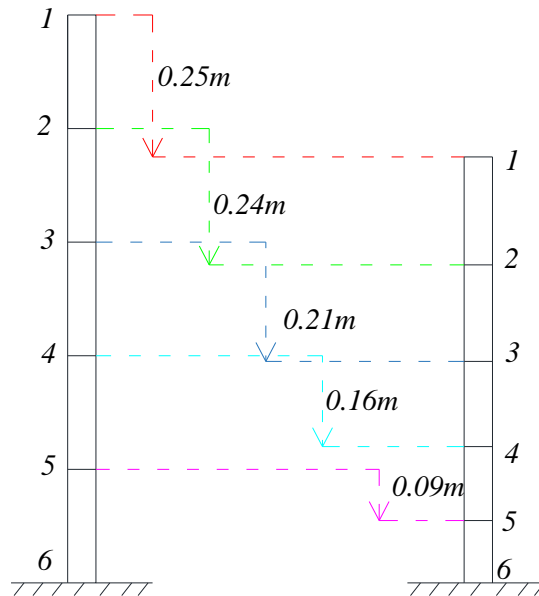


Figura 2.6 Deslocamento final dos nós da malha para análise 1.

Na figura 2.6 mostra-se a distorção da malha de elementos finitos depois da aplicação da carga do peso próprio para análise 1. Na análise 2 acontece o mesmo.

2.5.3. Solução com MEF - Conservação de quantidade de movimento

Nesta seção foi resolvido o mesmo problema com a abordagem da conservação de quantidade de movimento. Para isso aplica-se a equação geral de conservação do quantidade de movimento.

$$\begin{aligned}
 & \overbrace{\mathbf{A}_{e=1}^{n_{elm}} [\int \bar{\mathbf{N}}^T \rho_e \bar{\mathbf{N}} d\Omega] a}^{\theta_1} = \\
 & \mathbf{A}_{e=1}^{n_{elm}} \int_{\partial\Omega\tau_e} \bar{\mathbf{N}}^T \tau_e dS + \underbrace{\mathbf{A}_{e=1}^{n_{elm}} \int \bar{\mathbf{N}}^T \rho_e g d\Omega}_{\theta_2} - \underbrace{\mathbf{A}_{e=1}^{n_{elm}} \int_{\Omega_e} \mathbf{B}^T \sigma_e d\Omega}_{\theta_3'}
 \end{aligned}$$

Neste caso não tem-se forças de superfície, por tanto o primeiro termo da direita é zero.

O procedimento da solução de conservação de quantidade de movimento resolve-se no domínio do tempo, sendo, portanto, um problema de natureza

dinâmico. Logo, é preciso implementar um termo adicional, que represente o sistema amortecedor. portanto, a matriz de amortecimento é implementado:

$$\theta_1 a + \theta_4 v = \theta_2 - \theta_3'$$

Onde θ_4 e a matriz amortecedora.

θ_1 :

$$\theta_1 = A_{e=1}^{n_{elm}} \theta_1^e$$

$$\theta_1^e = \int \bar{N}^T \rho_e \bar{N} d\Omega$$

$$d\Omega = A dx = A \left(\frac{\ell}{2} d\xi \right)$$

$$\theta_1^e = \frac{\rho_e A \ell}{2} \int \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1 & N_2 \end{bmatrix} d\xi = \frac{\rho_e A \ell}{2} \int \begin{bmatrix} N_1^2 & N_1 N_2 \\ N_2 N_1 & N_2^2 \end{bmatrix} d\xi$$

$$\theta_1^e = \frac{\rho_e A \ell}{2} \begin{bmatrix} \int_{-1}^1 N_1^2 d\xi & \int_{-1}^1 N_2 N_1 d\xi \\ \int_{-1}^1 N_1 N_2 d\xi & \int_{-1}^1 N_2^2 d\xi \end{bmatrix}$$

$$\theta_1^e = \frac{\rho_e A \ell}{2} \begin{bmatrix} 2/3 & 1/3 \\ 1/3 & 2/3 \end{bmatrix}$$

$$\theta_1^e = \frac{2}{2943} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \frac{kN}{m} s^2$$

θ_2 :

$$\theta_2 = A_{e=1}^{n_{elm}} \theta_2^e$$

$$\theta_2^e = \rho_e g \int N^+ d\Omega$$

$$\theta_2^e = \frac{\rho_e g A \ell}{2} \int N^+ d\xi = \frac{\rho_e g A \ell}{2} \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} 0.5 - 0.5\xi \\ 0.5 + 0.5\xi \end{bmatrix} d\xi$$

$$\theta_2^e = \frac{\rho_e g A \ell}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 20 \frac{KN}{m^3} x \frac{1}{g} x g x 2 x 0.01 m^2 x 0.2 m x \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\theta_2^e = \frac{1}{50} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} kN$$

θ_4 :

Para a definição da matriz amortecedora considera-se o amortecimento de Rayleigh, que tem a forma que se mostra na seguinte equação. Onde $\hat{\alpha}$ e $\hat{\beta}$ são números que indicam a velocidade como o sistema vai amortecer, chamados parâmetros de Rayleigh.

$$\theta_4 = \hat{\alpha}M + \hat{\beta}K$$

Para este caso foi escolhido arbitrariamente $\hat{\alpha} = 0.65s^{-1}$ e $\hat{\beta} = 1 \times 10^{-3}s$. Lembrando que já se tem a matriz de massa:

$$\theta_1^e = \frac{2}{2943} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \frac{kN}{m} s^2$$

Então se demonstra que a matriz de rigidez é dada por:

$$K = \frac{EA}{\ell} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{40 \times 0.01}{0.2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\theta_4 = \hat{\alpha}M + \hat{\beta}K = 0,65x \frac{1}{s} x \frac{2}{2943} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \frac{KN}{m} \cdot s^2 + \frac{1}{1000} s \cdot 2 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \frac{kN}{m}$$

$$\theta_4 = \begin{bmatrix} 2.8835 & -1.5583 \\ -1.5583 & 2.8835 \end{bmatrix} \frac{kN}{m} \cdot s$$

Finalmente obtém-se:

$$\theta_1 a + \theta_4 v = \theta_2 - \theta_3'$$

Nesta última equação, a aceleração a , a velocidade v e a matriz θ_3' , são variantes no tempo.

Para resolver mediante conservação de quantidade de movimento sabe-se que a solução é feita com incrementos de tempo. Em cada incremento de tempo se faz múltiplas iterações. Para este problema numérico, o incremento de

tempo será de 0.005 segundos escolhido arbitrariamente, onde as condições iniciais são:

$$\begin{aligned} u^0 &= \mathbf{0} && \text{Deslocamentos no tempo zero são nulos} \\ v^0 &= \mathbf{0} && \text{Velocidades no tempo zero são nulos} \\ \sigma^0 &= \mathbf{0} && \text{Esforços no tempo zero são nulos} \\ F^0 &= \mathbf{0} && \text{Forças no tempo zero são nulos} \end{aligned}$$

Além disso, assume-se para o primeiro intervalo do tempo um valor para a velocidade nodal, que será modificada conforme a progressão das iterações. Tem-se a velocidade no primeiro intervalo do tempo ($\Delta t = 0.005 \text{ s}$) e a primeira iteração ($i=1$).

$$v_{i=1}^{\Delta t} = [0.1]_{5 \times 1} = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.1 \\ 0.1 \\ 0.1 \\ 0.1 \end{bmatrix} \frac{m}{s}$$

Então seguindo o procedimento descrito na secção 2.1.3, e considerando $\lambda_v = 0.5$.

$$\Delta u_{i=1}^{\Delta t} = [0.5 v_{i=1}^{\Delta t} + 0.5 v^0] \Delta t$$

Segue o cálculo dos incrementos de esforço com os incrementos de deslocamento.

$$\Delta \varepsilon_{i=1}^{\Delta t} = B_{1 \times 2} \Delta u_{i=1}^{\Delta t} \quad ; \quad B = \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial N}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} \quad ; \quad N = \begin{pmatrix} 0.5 - 0.5\xi \\ 0.5 + 0.5\xi \end{pmatrix}$$

Vale ressaltar que os incrementos de esforço são calculados independentemente para cada elemento, por isso neste caso tem-se uma matriz coluna de dois elementos.

$$\sigma_{i=1}^{\Delta t} = \sigma^0 + \Delta \sigma_{i=1}^{\Delta t} \quad ; \quad \Delta \sigma_{i=1}^{\Delta t} = E \Delta \varepsilon_{i=1}^{\Delta t}$$

Com os esforços calculados em cada elemento, calculou-se as forças internas em cada elemento, também disposta em uma matriz coluna de dois elementos.

$$F_{i=1}^{int, \Delta t} = A_{e=1}^{n_{elm}} [F_{i=1,e}^{int, \Delta t}]$$

$$F_{i=1,e}^{int,\Delta t} = \int B^T \sigma_{i=1}^{\Delta t} d\Omega$$

Onde:

$$B = \frac{\partial N}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial N}{\partial \xi} \frac{2}{\ell} = [-0.5 \quad 0.5] \frac{2}{0.2m} = [-5 \quad 5] \frac{1}{m}$$

$$d\Omega = A dx = A \frac{\ell}{2} d\xi = 0.01m^2 \times \frac{0.2m}{2} d\xi = 1 \times 10^{-3} d\xi$$

Então:

$$F_{i=1,e}^{int,\Delta t} = \begin{bmatrix} -5 \\ 5 \end{bmatrix} \sigma_{i=1}^{\Delta t} 1 \times 10^{-3} \int_{-1}^1 d\xi$$

$$F_{i=1,e}^{int,\Delta t} = 1 \times 10^{-2} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \sigma_{i=1}^{\Delta t}$$

Conhecidas as forças internas de cada elemento o seguinte passo é fazer a montagem delas para que fique uma matriz de 5×1 .

$$F_{i=1}^{int,\Delta t} = A_{e=1}^{n_{elm}} [F_{i=1,e}^{int,\Delta t}]$$

Portanto a somatória de forças é dada por:

$$F_{i=1}^{\Delta t} = \theta_2 - F_{i=1}^{int,\Delta t} - \theta_4 v_{i=1}^{\Delta t}$$

Para encontrar a velocidade na segunda iteração, permanecendo no mesmo incremento do tempo (considerando $\lambda_F = 0.5$):

$$v_{i=2}^{\Delta t} = v^0 + \theta_1^{-1} [0.5 F_{i=1}^{\Delta t} + 0.5 F^0] \Delta t$$

Desta forma, compara-se:

$$v_{i=1}^{\Delta t} \xrightarrow{VS} v_{i=2}^{\Delta t}$$

Quando esses valores são muito similares, então a velocidade atingiu o valor para o primeiro incremento do tempo em n iterações. E, finalmente tem-se:

$$v_{i=n}^{\Delta t} = v^{\Delta t}$$

$$u_{i=n}^{\Delta t} = u^0 + \Delta u_{i=n}^{\Delta t}$$

$$\sigma_{i=n}^{\Delta t} = \sigma^{\Delta t}$$

$$F_{i=n}^{\Delta t} = F^{\Delta t}$$

Repete-se o mesmo procedimento para o segundo incremento de tempo. A solução converge quando o erro entre duas velocidades finais em dois incrementos de tempo consecutivos é pequeno.

Este procedimento iterativo é complexo e demanda mais esforço computacional que a metodologia de MEF por resíduos ponderados, ou qualquer outro. Devido a isso, esta solução foi feita com auxílio do programa Microsoft Excel. A seguir apresenta-se os resultados dos deslocamentos ao final de cada iteração para diferentes tempos.

$$t=0$$

$$u^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} m$$

$$t=0.005$$

$$u^{0.005} = \begin{pmatrix} 6.1E-5 \\ 6.1E-5 \\ 6.2E-5 \\ 5.7E-5 \\ 6.1E-5 \\ 0 \end{pmatrix} m$$

$$t=6.400$$

$$u^{6.400} = \begin{pmatrix} 0.2275 \\ 0.2185 \\ 0.1915 \\ 0.1464 \\ 0.0827 \\ 0 \end{pmatrix} m$$

$$t=10.955$$

$$u^{10.955} = \begin{pmatrix} 0.2468 \\ 0.2369 \\ 0.2074 \\ 0.1581 \\ 0.0890 \\ 0 \end{pmatrix} m$$

$$t=28.800$$

$$u^{28.800} = \begin{pmatrix} 0.2499 \\ 0.2399 \\ 0.2099 \\ 0.1599 \\ 0.0900 \\ 0 \end{pmatrix} m$$

É importante ressaltar que a metodologia de conservação de quantidade de movimento é um processo dinâmico, logo, se desenvolve no domínio do tempo. Se fez seguimento aos deslocamentos verticais do nó 1 (nó superior) antes de atingir o valor final para o problema de análise 1 e análise 2.

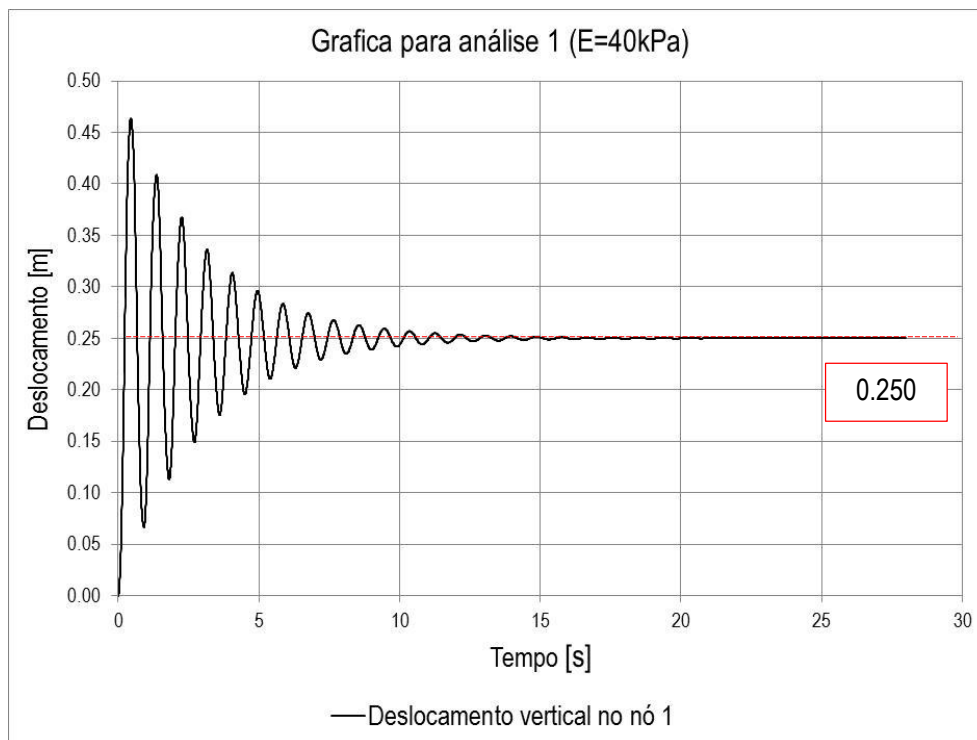


Figura 2.7 Deslocamento ao longo do tempo do nó superior para análise 1.

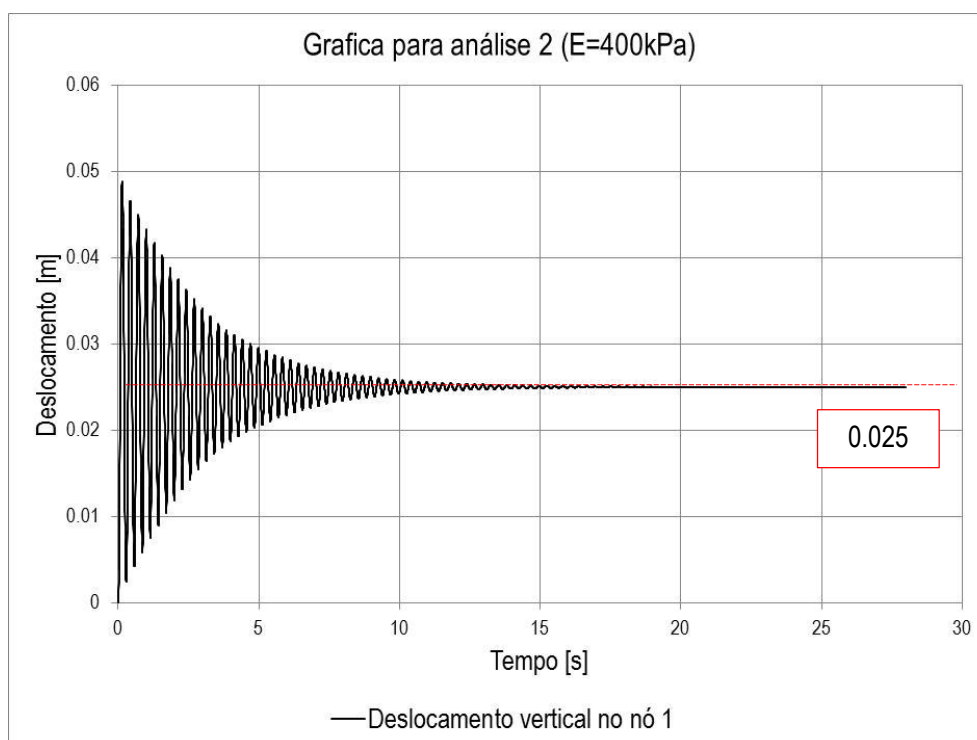


Figura 2.8 Deslocamento ao longo do tempo do nó superior para análise 2.

Percebe-se que para o tempo de aproximadamente 28.8 (depois de 5760 incrementos de carga, mesmo antes) os valores de deslocamentos já se situam

muito perto dos resultados analíticos. Portanto, a solução foi atingida corretamente.

2.5.4. Solução com MPM

A malha fixa no MPM para este exemplo *1D* foi feita com elementos de *0.1m* de comprimento com *11* nós e portanto *10* elementos finitos. Nesta implementação do MPM foram dois cenários: com *20* e *200* partículas. O objetivo é mostrar a influência do número de partículas na solução. A malha sempre é fixa com *11* nós e *10* elementos.

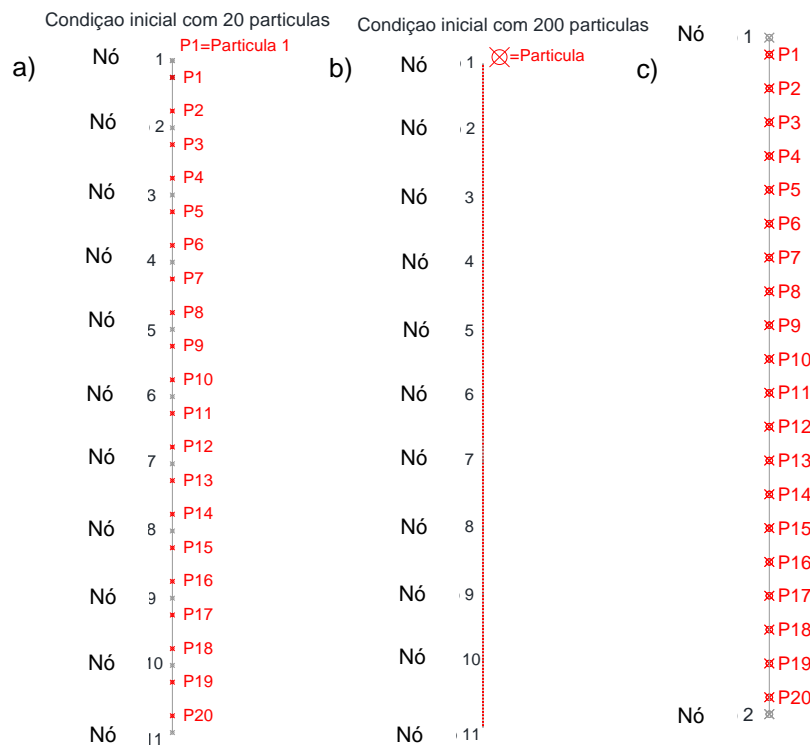


Figura 2.9 (a) Configuração inicial com 20 Partículas. (b) Configuração inicial com 200 partículas (c) Vista detalhada das primeiras 20 partículas do elemento entre os nodos 1 e 2 quando se faz a análise com 200 partículas no tempo zero.

Similarmente à análises feita com MEF pela metodologia de conservação de quantidade de movimento se fez o rastreo da partícula P1 (partícula superior) da modelagem com 20 partículas e com 200 partículas, para análise 1 e análise .

MPM é dinâmico, portanto tem desenvolvimento no domínio do tempo. Se fez análises com diferentes incrementos do tempo: *0.01s*, *0.005s*, *0.0005s* e *0.00005s* para as análises 1 e 2. Ver a seguinte figura resumo.

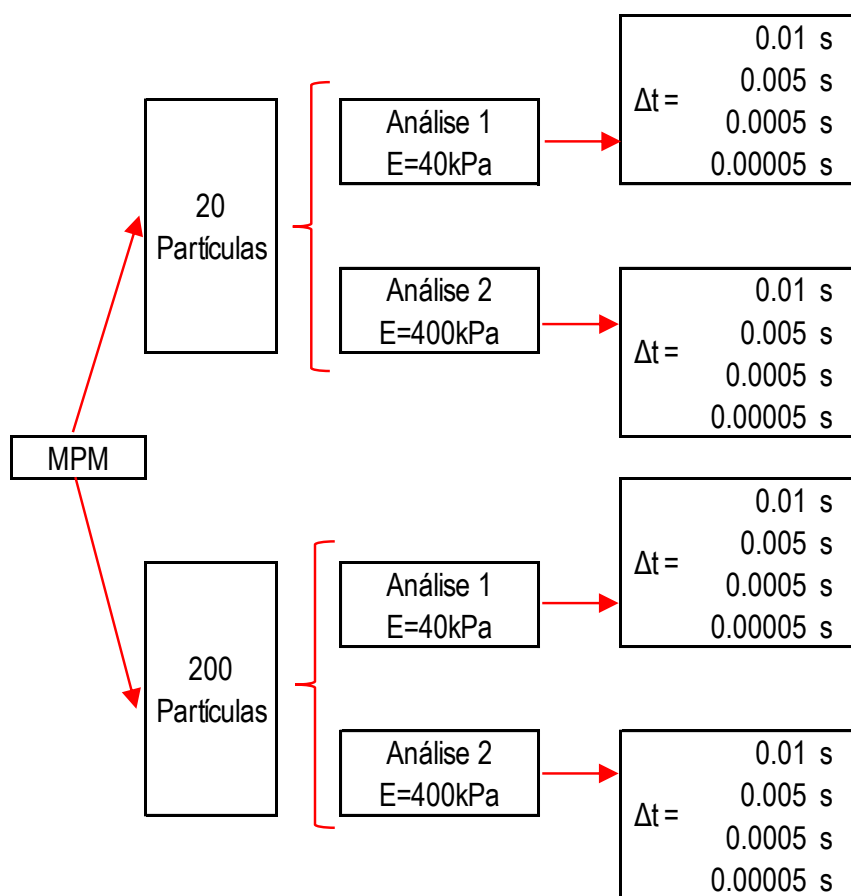


Figura 2.10 Esquema de distribuição das análises para a coluna de solo feita com MPM.

A partir deste ponto, a solução será detalhada para 20 partículas com incremento de tempo de 0.005 segundos. No caso de 200 partículas é o mesmo procedimento.

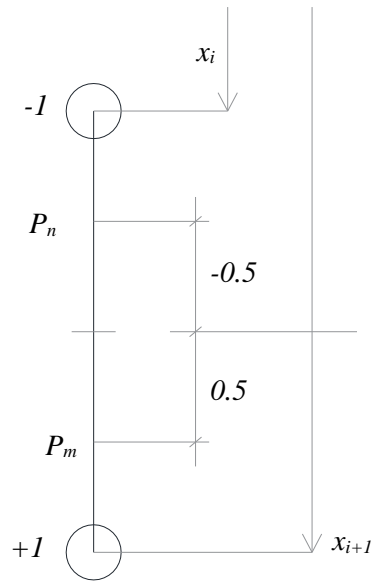


Figura 2.11 Posições iniciais das partículas P_n e P_m em coordenadas locais e coordenadas globais.

a. Matriz da massa

$$M^t = \mathbf{A}_{e=1}^{n_{elm}} M_e^t$$

Para o tempo zero:

$$M^0 = \mathbf{A}_{e=1}^{10} M_e^0$$

$$m_p = \Omega_p \rho = \rho \frac{1}{n_{ep}} \int_{\Omega_e} d\Omega$$

$$m_p = \rho \frac{1}{2} \int_{\Omega_e} d\Omega = \frac{\rho}{2} \int \frac{Al}{2} d\xi = \frac{\rho Al}{2} = \frac{1}{981} \left(\frac{kNs^2}{m} \right)$$

Então a massa nos nós:

$$m_i^t = \sum_{p=1}^{n_{ep}} m_p N_i(\xi_p^t)$$

Esta equação significa que a massa das partículas no interior da malha são definidas temporalmente nos nós da seguinte forma.

$$m_i^0 = \sum_{p=1}^{n_{ep}} m_p N_i(\xi_p^0).$$

A massa da partícula 1 $p1$ é multiplicada pela função de forma do nó 1 avaliada na posição da partícula 1 e esta é somada com a massa da partícula 2 multiplicada pela função de forma no nó 1 avaliada na posição da partícula 2.

$$m_{n1}^0 = m_{p1}N_{n1}(\xi_{p1}^0) + m_{p2}N_{n1}(\xi_{p2}^0)$$

Como a massa das partículas é a mesma tem-se:

$$m_{n1}^0 = m_p [N_{n1}(\xi_{p1}^0) + N_{n1}(\xi_{p2}^0)]$$

$$m_{n1}^0 = \frac{1}{981} \frac{kN \cdot s^2}{m} [(0.5 - 0.5\xi) \big|_{-0.5} + (0.5 - 0.5\xi) \big|_{0.5}]$$

$$m_{n1}^0 = \frac{1}{981} \frac{KN \cdot s^2}{m}$$

Desta mesma forma se faz para todos os demais nós. E para este caso tem-se 11 valores de massa nodal.

$$m_{n2}^0 = m_p [N_{n2}(\xi_{p1}^0) + N_{n2}(\xi_{p2}^0)] = \frac{1}{981} \frac{kN \cdot s^2}{m}$$

$$m_{n3}^0 = m_p [N_{n3}(\xi_{p1}^0) + N_{n3}(\xi_{p2}^0)] = \frac{1}{981} \frac{kN \cdot s^2}{m}$$

\vdots

$$m_{n11}^0 = m_p [N_{n11}(\xi_{p1}^0) + N_{n11}(\xi_{p2}^0)] = \frac{1}{981} \frac{kN \cdot s^2}{m}$$

Desta forma definiu-se a matriz de massa no tempo zero.

$$M^0 = \frac{1}{981} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 2 & 0 & \cdots & & 0 \\ 0 & 0 & 2 & & & \\ & \vdots & & \ddots & & \vdots \\ & & & & 2 & 0 & 0 \\ 0 & & \cdots & 0 & 2 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \frac{kN \cdot s^2}{m} \quad 11 \times 11$$

- b. **Mapeamento de quantidade de movimento das partículas**, para os nós de acordo com a função de interpolação.

$$M^t v^t \approx A_{e=1}^{n_{elm}} \theta_e$$

$$\theta_e = \sum_{p=1}^{n_{ep}} m_p N^T(\xi_p^t) \hat{v}_p^t$$

Esta última expressão é feita para cada elemento.

$$\theta_e^1 = \sum_{p=1}^{n_{ep}} m_p N^T(\xi_p^0) \hat{v}_p^0$$

$$\theta_e^1 = m_{p1} N^T(\xi_{p1}^0) \hat{v}_{p1}^0 + m_{p2} N^T(\xi_{p2}^0) \hat{v}_{p2}^0$$

$$\theta_1 = m_p \left[\begin{pmatrix} 0.5 - 0.5\xi \\ 0.5 + 0.5\xi \end{pmatrix}_{\xi=-0.5} \times 0 + \begin{pmatrix} 0.5 - 0.5\xi \\ 0.5 + 0.5\xi \end{pmatrix}_{\xi=0.5} \times 0 \right]$$

$$\theta_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} kNs$$

Portanto as velocidades nodais para este tempo são calculadas por:

$$v^0 = [0]_{11 \times 1} \frac{m}{s}$$

c. Somatória de forças

Neste caso não se tem forças de superfície. Aqui vai se descrever as forças de gravidade, forças internas e forças amortecedoras.

Em relação às forças de gravidade:

$$F^{grav,t} \approx \mathbf{A}_{e=1}^{n_{elm}} F_e^{grav,t}$$

$$F_e^{grav,t} \approx \sum_{p=1}^{n_{elm}} N^T(\xi_p^t) f_p^{grav}$$

Onde,

$$f_p^{grav} = m_p g = \frac{1}{100} kN$$

$$F_1^{grav,0} = N^T(\xi_{p1}^0) f_{p1}^{grav} + N^T(\xi_{p2}^0) f_{p2}^{grav}$$

$$F_1^{grav,0} = \frac{1}{100} kN \left[\begin{pmatrix} 0.5 - 0.5\xi \\ 0.5 + 0.5\xi \end{pmatrix}_{\xi=-0.5} + \begin{pmatrix} 0.5 - 0.5\xi \\ 0.5 + 0.5\xi \end{pmatrix}_{\xi=0.5} \right]$$

$$F_1^{grav,0} = \frac{1}{100} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} kN$$

Portanto a matriz geral de forças de gravidade é dada por:

$$F^{grav,0} = \frac{1}{100} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ \vdots \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}_{11 \times 1} kN$$

Para as forças internas:

$$F^{int,t} \approx \mathbf{A}_{e=1}^{n_{elm}} F_e^{int,t}$$

$$F_e^{int,t} = \sum_{p=1}^{n_{elm}} B^T(\xi_p^t) \sigma_p^t \Omega_p^t$$

$$F_e^{int,0} = \sum_{p=1}^{n_{elm}} B^T(\xi_p^0) \sigma_p^0 \Omega_p^0$$

$$F_e^{int,0} = B^T(\xi_{p1}^0) \sigma_{p1}^0 \Omega_{p1}^0 + B^T(\xi_{p2}^0) \sigma_{p2}^0 \Omega_{p2}^0$$

$$B = \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial N}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial N}{\partial \xi} \frac{2}{\ell} \rightarrow B = \begin{bmatrix} -10 \\ 10 \end{bmatrix} \frac{1}{m}$$

$$\sigma_{pi}^0 = [0]_{11 \times 1} \frac{kN}{m^2}$$

Então:

$$F^{int,0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{11 \times 1} kN$$

Sendo conhecidas as forças externas e as forças internas, precisa-se desenvolver também as forças amortecedoras.

$$F^{amort,t} = [\hat{\alpha} M^t + \hat{\beta} K^t] v^t$$

$$K = \int_{\Omega} [B]^T [C] [B] d\Omega \quad ; \quad K^t = \mathbf{A}_{e=1}^{n_{elm}} [k_e^t]$$

$$k_e^t = \sum_{p=1}^{n_{ep}} B^T(\xi_p^t) E B(\xi_p^t) \Omega_p^t$$

$$K_e^0 = B^T(\xi_{p1}^t) E \cdot B(\xi_{p1}^t) \frac{m_p}{\rho_{p1}} + B^T(\xi_{p2}^t) E \cdot B(\xi_{p2}^t) \frac{m_p}{\rho_{p2}}$$

$$K_e^0 = 2 \times \begin{bmatrix} -10 \\ 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -10 & 10 \end{bmatrix} \times \frac{40}{981} \frac{9.81}{20} \frac{kN}{m}$$

$$K_e^0 = 4 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \frac{kN}{m}$$

Portanto fazendo a montagem:

$$K^0 = 4 \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \ddots & \vdots \\ & \vdots & & \ddots & \vdots \\ & 0 & \cdots & -1 & 2 & -1 \\ & & & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \frac{kN}{m} \quad 11 \times 11$$

E lembrando a matriz de massa:

$$M^0 = \frac{1}{981} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \ddots & \vdots \\ & \vdots & & \ddots & \vdots \\ & 0 & \cdots & 0 & 2 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \frac{kN \cdot s^2}{m} \quad 11 \times 11$$

$$F^{amort,t} = [\hat{\alpha} M^t + \hat{\beta} K^t] v^t$$

$$\hat{\alpha} = 0.65 s^{-1} \text{ e } \hat{\beta} = 1 \times 10^{-3} s.$$

$$F^{amort,0} = [\hat{\alpha} M^0 + \hat{\beta} K^0] v^0$$

Como a velocidade nodal no tempo inicial é zero, então a força amortecedora nesse passo de tempo é nula também.

$$F^{amort,0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{11 \times 1} \quad kN$$

d. Equação para o cálculo das acelerações nodais no tempo t

$$M^t a^t = F^{tract,t} + F^{grav,t} - \underbrace{F^{int,t} - F^{amort,t}}_{zero}$$

$$M^t a^t = F^{grav,t}$$

$$\frac{1}{981} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 2 & 0 & \cdots & & 0 \\ 0 & 0 & 2 & & & \\ & \vdots & & \ddots & & \vdots \\ & & & & 2 & 0 & 0 \\ & 0 & & \cdots & 0 & 2 & 0 \\ & & & & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{11 \times 11} \times \frac{kN \cdot s}{m} \times \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \vdots \\ a_9 \\ a_{10} \\ a_{11} \end{bmatrix}_{11 \times 1} = F^{grav,0} = \frac{1}{100} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ \vdots \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}_{11 \times 1} \quad kN$$

$$a^0 = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \vdots \\ a_9 \\ a_{10} \\ a_{11} \end{bmatrix}_{11 \times 1} = 9.81 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}_{11 \times 1} \quad \frac{m}{s^2}$$

Pode-se ver que a aceleração no nó 11 é zero pois é uma condição de contorno, portanto a velocidade e deslocamento nesse nó são zero também.

e. Cálculo das velocidades das partículas no seguinte intervalo de tempo a partir das acelerações nodais no tempo t .

$$\hat{v}_p^{t+\Delta t} = \hat{u}_p^t + \sum_{i=1}^{n_{en}} \Delta t N_i(\xi_p^t) a_i^t$$

$$\hat{v}_p^{0,005} = \hat{0} + \sum_{i=1}^2 \Delta t N_1(\xi_p^0) a_i^0$$

Portanto existem 20 partículas, e assim, 20 valores de velocidade no tempo $(t+\Delta t)$.

$$\hat{v}_{p_j}^{0,005} = 0.005 \left[N_1 \left(\xi_{p_j}^0 \right) a_1^0 + N_2 \left(\xi_{p_j}^0 \right) a_2^0 \right]$$

$$\hat{v}_{p_1}^{0,005} = 0.005 \left[(0.5 - 0.5\xi) \Big|_{\xi=-0.5} \times 9.81 + (0.5 - 0.5\xi) \Big|_{\xi=-0.5} \times 9.81 \right] = 0.04905 \frac{m}{s}$$

$$\hat{v}_{p_2}^{0,005} = 0.005 \left[(0.5 - 0.5\xi) \Big|_{\xi=0.5} \times 9.81 + (0.5 - 0.5\xi) \Big|_{\xi=0.5} \times 9.81 \right] = 0.04905 \frac{m}{s}$$

$$\hat{v}_{p_3}^{0,005} = 0.005 \left[(0.5 - 0.5\xi) \Big|_{\xi=-0.5} \times 9.81 + (0.5 - 0.5\xi) \Big|_{\xi=-0.5} \times 9.81 \right] = 0.04905 \frac{m}{s}$$

$$\vdots$$

$$\hat{v}_{p_{19}}^{0,005} = 0.005 \left[(0.5 - 0.5\xi) \Big|_{\xi=-0.5} \times 9.81 + (0.5 - 0.5\xi) \Big|_{\xi=-0.5} \times 0 \right] = 0.03680 \frac{m}{s}$$

$$\hat{v}_{p_{20}}^{0,005} = 0.005 \left[(0.5 - 0.5\xi) \Big|_{\xi=0.5} \times 9.81 + (0.5 - 0.5\xi) \Big|_{\xi=0.5} \times 0 \right] = 0.01230 \frac{m}{s}$$

Por tanto:

$$\hat{v}_p^{0,005} = \begin{bmatrix} 0.04905 \\ 0.04905 \\ 0.04905 \\ 0.04905 \\ \vdots \\ 0.03680 \\ 0.01230 \end{bmatrix}_{20 \times 1} m/s$$

- f. **Cálculo das velocidades nodais.** Con as velocidades das partículas no tempo $(t+\Delta t)$, novamente interpola-se para obter as velocidades dos nós no tempo $(t+\Delta t)$.

$$M^t v^{t+\Delta t} \approx A_{e=1}^{n_{elm}} \theta_e$$

$$\theta_e = \sum_{p=1}^2 m_p N^T(\xi_p^t) \hat{v}_p^{t+\Delta t}$$

$$\theta_e^1 = m_{p1} N^T(\xi_{p1}^0) \hat{v}_{p1}^{0,005} + m_{p2} N^T(\xi_{p2}^0) \hat{v}_{p2}^{0,005}$$

$$\theta_1 = m_p \left[\begin{pmatrix} 0.5 - 0.5\xi \\ 0.5 + 0.5\xi \end{pmatrix}_{\xi=-0.5} \times 0.04905 + \begin{pmatrix} 0.5 - 0.5\xi \\ 0.5 + 0.5\xi \end{pmatrix}_{\xi=0.5} \times 0.04905 \right] = 5 \times 10^{-5} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} kNs$$

$$\theta_2 = m_p \left[\begin{pmatrix} 0.5 - 0.5\xi \\ 0.5 + 0.5\xi \end{pmatrix}_{\xi=-0.5} \times 0.04905 + \begin{pmatrix} 0.5 - 0.5\xi \\ 0.5 + 0.5\xi \end{pmatrix}_{\xi=0.5} \times 0.04905 \right] = 5 \times 10^{-5} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} kNs$$

$$\theta_3 = m_p \left[\left(\frac{0.5 - 0.5\xi}{0.5 + 0.5\xi} \right)_{\xi=-0.5} \times 0.04905 + \left(\frac{0.5 - 0.5\xi}{0.5 + 0.5\xi} \right)_{\xi=0.5} \times 0.04905 \right] = 5 \times 10^{-5} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} kNs$$

$$\vdots$$

$$\theta_{10} = m_p \left[\left(\frac{0.5 - 0.5\xi}{0.5 + 0.5\xi} \right)_{\xi=-0.5} \times 0.0368 + \left(\frac{0.5 - 0.5\xi}{0.5 + 0.5\xi} \right)_{\xi=0.5} \times 0.0123 \right] = 1 \times 10^{-5} \begin{bmatrix} 3.1274 \\ 1.8787 \end{bmatrix} kNs$$

Realizando a montagem dela e resolvendo obtém-se as velocidades nodais.

$$v^{0.005} = \begin{bmatrix} 0.0491 \\ 0.0491 \\ 0.0491 \\ \vdots \\ 0.0399 \\ 0.0000 \end{bmatrix}_{11 \times 1} \quad \frac{m}{s}$$

- g. **Cálculo de deslocamento.** Usando as velocidades nodais no tempo $(t+\Delta t)$ são obtidos os deslocamentos nodais.

$$\Delta u^{t+\Delta t} = \Delta t v^{t+\Delta t}$$

$$\Delta u^{0.005} = 1 \times 10^{-3} \begin{bmatrix} 0.2453 \\ 0.2453 \\ 0.2453 \\ \vdots \\ 0.1993 \\ 0.0000 \end{bmatrix}_{11 \times 1} \quad m$$

- h. **Cálculo de deformações.** Com o incremento de deslocamentos são calculados o aumento das deformações. Este cálculo é feito separadamente para cada elemento.

$$\Delta \varepsilon_p^{t+\Delta t} = B(\xi_p^t) \Delta u_e^{t+\Delta t}$$

$$\Delta \varepsilon_{p1}^{t+\Delta t} = [-10 \quad 10] \frac{1}{m} \times \begin{bmatrix} 0.2453 \\ 0.2453 \end{bmatrix} \times 10^{-3} m = 0$$

$$\Delta \varepsilon_{p2}^{t+\Delta t} = [-10 \quad 10] \frac{1}{m} \times \begin{bmatrix} 0.2453 \\ 0.2453 \end{bmatrix} \times 10^{-3} m = 0$$

$$\vdots$$

$$\Delta \varepsilon_{p16}^{t+\Delta t} = [-10 \quad 10] \frac{1}{m} \times \begin{bmatrix} 0.2453 \\ 0.2453 \end{bmatrix} \times 10^{-3} m = 0$$

$$\Delta \varepsilon_{p17}^{t+\Delta t} = [-10 \quad 10] \frac{1}{m} \times \begin{bmatrix} 0.2453 \\ 0.1993 \end{bmatrix} \times 10^{-3} m = -4.6 \times 10^{-4}$$

$$\Delta \varepsilon_{p18}^{t+\Delta t} = [-10 \quad 10] \frac{1}{m} \times \begin{bmatrix} 0.2453 \\ 0.1993 \end{bmatrix} \times 10^{-3} m = -4.6 \times 10^{-4}$$

$$\Delta \varepsilon_{p19}^{t+\Delta t} = [-10 \quad 10] \frac{1}{m} \times \begin{bmatrix} 0.1993 \\ 0.000 \end{bmatrix} \times 10^{-3} m = -19.93 \times 10^{-4}$$

$$\Delta \varepsilon_{p20}^{t+\Delta t} = [-10 \quad 10] \frac{1}{m} \times \begin{bmatrix} 0.1993 \\ 0.000 \end{bmatrix} \times 10^{-3} m = -19.93 \times 10^{-4}$$

$$\Delta \hat{\varepsilon}_p^{0.005} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -4.6 \\ -4.6 \\ -19.93 \\ -19.93 \end{bmatrix}_{20 \times 1} \times 10^{-4} m/s \quad ; \quad E = 40 \frac{kN}{m^2}$$

$$\Delta \hat{\sigma}_p^{0.005} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -0.0184 \\ -0.0184 \\ -0.0791 \\ -0.0791 \end{bmatrix}_{20 \times 1} \frac{kN}{m^2} \quad ; \quad \hat{\sigma}_p^0 = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{20 \times 1} \frac{kN}{m^2}$$

$$\hat{\sigma}_p^{0.005} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -0.0184 \\ -0.0184 \\ -0.0791 \\ -0.0791 \end{bmatrix}_{20 \times 1} \frac{kN}{m^2}$$

- i. **Volume e densidade.** No MPM a massa das partículas não muda com o tempo, entretanto o volume muda e a densidade também.

$$\Omega_p^{t+\Delta t} = (1 + \Delta \varepsilon_{vol,p}^{t+\Delta t}) \Omega_p^t$$

E segundo a teoria da elasticidade:

$$\Delta \varepsilon_{vol} = \Delta \varepsilon_{11} + \Delta \varepsilon_{22} + \Delta \varepsilon_{33} \quad ; \quad \Delta \varepsilon_{22} = \Delta \varepsilon_{33} = -\nu \times \Delta \varepsilon_{11}$$

$$\Delta \varepsilon_{vol,p}^{0.005} = \Delta \varepsilon_p (1 - 2\nu) = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -1.84 \\ -1.84 \\ -7.97 \\ -7.97 \end{bmatrix}_{20 \times 1} \times 10^{-4}$$

Por outro lado:

$$\Omega_p^t = \frac{m_p^t}{\rho_p^t}$$

$$\Omega_p^0 = \frac{1/981}{20/9.81} \rightarrow \Omega_p^0 = 5 \times 10^{-4} m^3 \rightarrow \hat{\Omega}_p^0 = [5 \times 10^{-4}]_{20 \times 1}$$

Sabendo as deformações em cada partícula no tempo $(t+\Delta t)$ tem-se:

$$\Omega_p^{0.005} = (1 + \Delta\varepsilon_{vol,p}^{0.005})\Omega_p^0$$

$$\Omega_p^{0.005} = \begin{bmatrix} 5.0000 \\ \vdots \\ 5.0000 \\ 4.9991 \\ 4.9991 \\ 4.9960 \\ 4.9960 \end{bmatrix}_{20 \times 1} \times 10^{-4} m^3$$

Devido à mudança de volume, também é alterada a densidade que é verificada pela equação:

$$\rho_p^{t+\Delta t} = \frac{\rho_p^t}{(1 + \Delta\varepsilon_{vol,p}^{t+\Delta t})}$$

$$\rho_p^{0.005} = \frac{\rho_p^0}{(1 + \Delta\varepsilon_{vol,p}^{0.005})}$$

$$\rho_p^{0.005} = \begin{bmatrix} 2.0387 \\ \vdots \\ 2.0387 \\ 2.0391 \\ 2.0391 \\ 2.0403 \\ 2.0403 \end{bmatrix}_{20 \times 1} \frac{kNs^2}{m^4}$$

j. As novas posições das partículas são atualizadas:

$$\hat{u}_p^{t+\Delta t} = \hat{u}_p^t + \sum_{i=1}^{n_{en}} N_i(\xi_p^t) \Delta u_i^{t+\Delta t}$$

$$\hat{x}_p^{t+\Delta t} = \hat{x}_p^t + \sum_{i=1}^{n_{en}} N_i(\xi_p^t) \Delta u_i^{t+\Delta t}$$

$$u_{p_1}^{0.005} = u_{p_1}^0 + [N_1(\xi_{p_1}^0) \Delta u_1^{0.005} + N_2(\xi_{p_1}^0) \Delta u_2^{0.005}]$$

$$u_{p_1}^{0.005} = [(0.5 - 0.5\xi) \big|_{\xi=-0.5} \times 0.2453 + (0.5 + 0.5\xi) \big|_{\xi=-0.5} \times 0.2453] \cdot 10^{-3} = 2.453 \times 10^{-4} m$$

$$u_{p_2}^{0.005} = [(0.5 - 0.5\xi) \big|_{\xi=0.5} \times 0.2453 + (0.5 + 0.5\xi) \big|_{\xi=0.5} \times 0.2453] \cdot 10^{-3} = 2.453 \times 10^{-4} m$$

⋮

$$u_{p_{17}}^{0,005} = [(0.5 - 0.5\xi) \Big|_{\xi=-0.5} \times 0.2453 + (0.5 + 0.5\xi) \Big|_{\xi=-0.5} \times 0.1993] \cdot 10^{-3} = 2.338 \times 10^{-4}m$$

$$u_{p_{18}}^{0,005} = [(0.5 - 0.5\xi) \Big|_{\xi=0.5} \times 0.2453 + (0.5 + 0.5\xi) \Big|_{\xi=0.5} \times 0.1993] \cdot 10^{-3} = 2.108 \times 10^{-4}m$$

$$u_{p_{19}}^{0,005} = [(0.5 - 0.5\xi) \Big|_{\xi=-0.5} \times 0.1993 + (0.5 + 0.5\xi) \Big|_{\xi=-0.5} \times 0] \cdot 10^{-3} = 1.495 \times 10^{-4}m$$

$$u_{p_{20}}^{0,005} = [(0.5 - 0.5\xi) \Big|_{\xi=0.5} \times 0.1993 + (0.5 + 0.5\xi) \Big|_{\xi=0.5} \times 0] \cdot 10^{-3} = 0.4983 \times 10^{-4}m$$

$$\hat{u}_p^{0,005} = \begin{bmatrix} 2.453 \\ \vdots \\ 2.453 \\ 2.338 \\ 2.108 \\ 1.495 \\ 0.498 \end{bmatrix}_{20 \times 1} \times 10^{-4}$$

$$\hat{x}_p^0 = \begin{bmatrix} 0.025 \\ 0.075 \\ 0.125 \\ 0.175 \\ 0.225 \\ 0.275 \\ 0.325 \\ 0.375 \\ 0.425 \\ 0.475 \\ 0.525 \\ 0.575 \\ 0.625 \\ 0.675 \\ 0.725 \\ 0.775 \\ 0.825 \\ 0.875 \\ 0.925 \\ 0.975 \end{bmatrix} m \Rightarrow \hat{x}_p^{0,005} = \begin{bmatrix} 0.0252453 \\ 0.0752453 \\ 0.1252453 \\ 0.1752453 \\ 0.2252453 \\ 0.2752453 \\ 0.3252453 \\ 0.3752453 \\ 0.4252453 \\ 0.4752453 \\ 0.5252453 \\ 0.5752453 \\ 0.6252453 \\ 0.6752453 \\ 0.7252453 \\ 0.7752453 \\ 0.8252338 \\ 0.8752108 \\ 0.9251495 \\ 0.9750498 \end{bmatrix} m$$

Finalmente, o processo se repete até que os resultados dos deslocamentos não apresentem variação. Como foi mencionado anteriormente, as análises foram feitas com 20 e 200 partículas, através de um código criado no programa MATLAB.

Do seguimento dos deslocamentos ao longo do tempo da partícula P1 (superior) da modelagem com 20 partículas e com 200 partículas, para os dois tipos de análises tem-se o seguinte.

Modelagem com 20 partículas:

Nas seguintes figuras pode-se ver o desenvolvimento dos deslocamentos verticais da partícula P1 ao longo do tempo até atingir o valor final da análise.

Nelas mostram-se os resultados das análises feitas com diferentes incrementos de tempo.

Na Figura 2.12 corresponde à análise 1 onde o resultado mais aproximado ao analítico corresponde ao incremento de tempo de 0.00005 segundos. Nesta análise o resultado mediante o MPM foi 0.408 m por tanto o erro em relação ao resultado analítico (0.25 m) foi 63%. Na Figura 2.13 para análise 2 o resultado mediante o MPM foi de 0.059 m, sendo o erro em relação ao resultado analítico (0.025 m) de 136%.

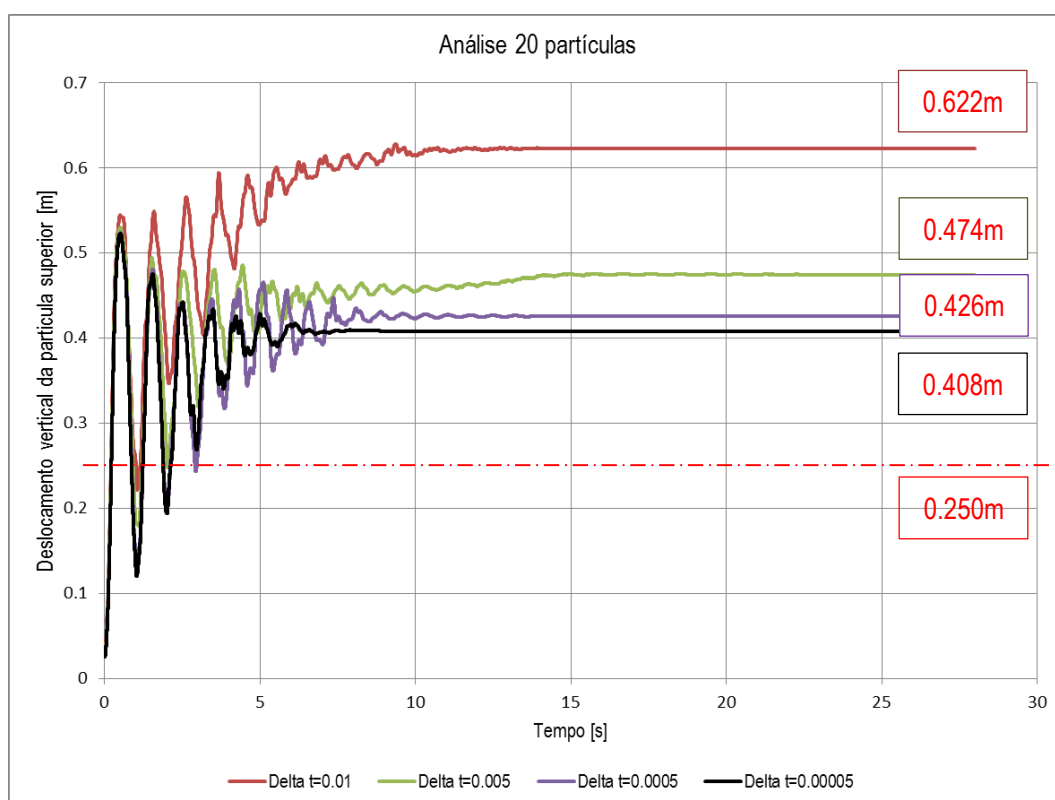


Figura 2.12 Análises com 20 partículas (análise 1) para diferentes intervalos de tempo na solução.

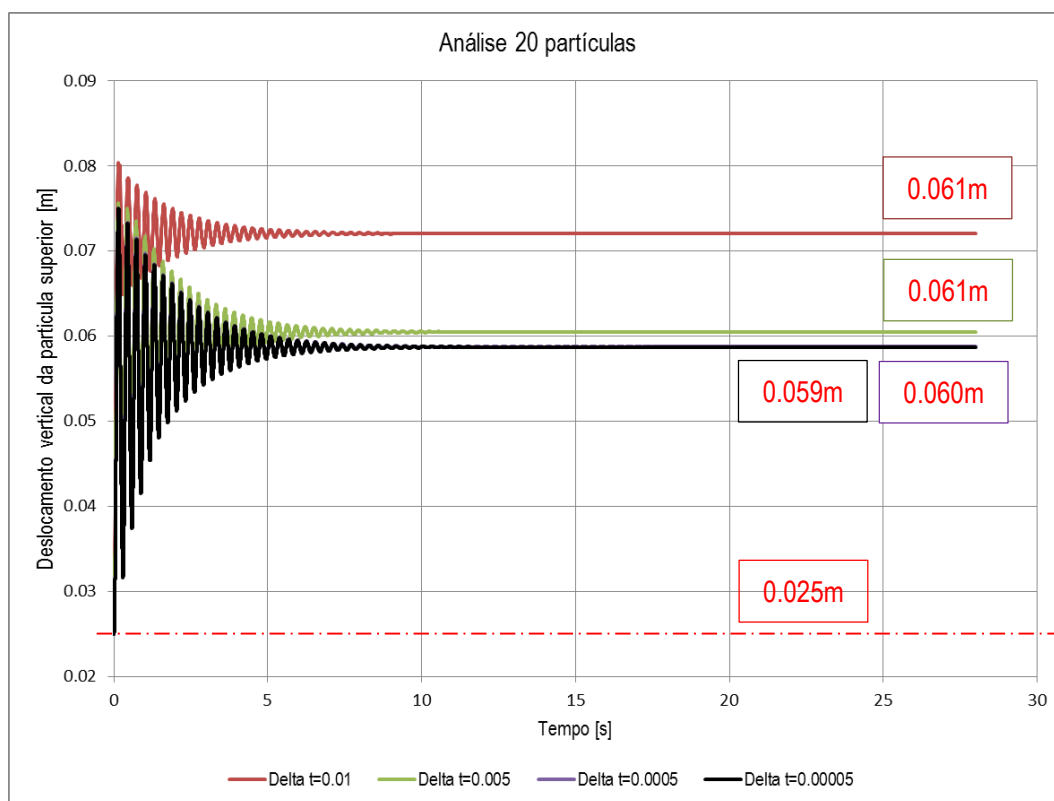


Figura 2.13 Análises com 20 partículas (análise 2) para diferentes intervalos de tempo na solução.

Modelagem com 200 partículas:

Similarmente que as figuras geradas da análise com 20 partículas pode-se ver o desenvolvimento dos deslocamentos verticais da partícula P1 ao longo do tempo até atingir o valor final da análise.

A Figura 2.14 corresponde à análise 1 onde o resultado mais aproximado ao analítico corresponde ao incremento de tempo de 0.00005 segundos. Para esta mesma análise o resultado mediante o MPM foi de 0.272 m por tanto o erro em relação ao resultado analítico (0.25 m) foi 8.8%. No análise 2 (Figura 2.15) o resultado mediante o MPM foi de 0.029 m, sendo o erro em relação ao resultado analítico (0.025 m) de 16%.

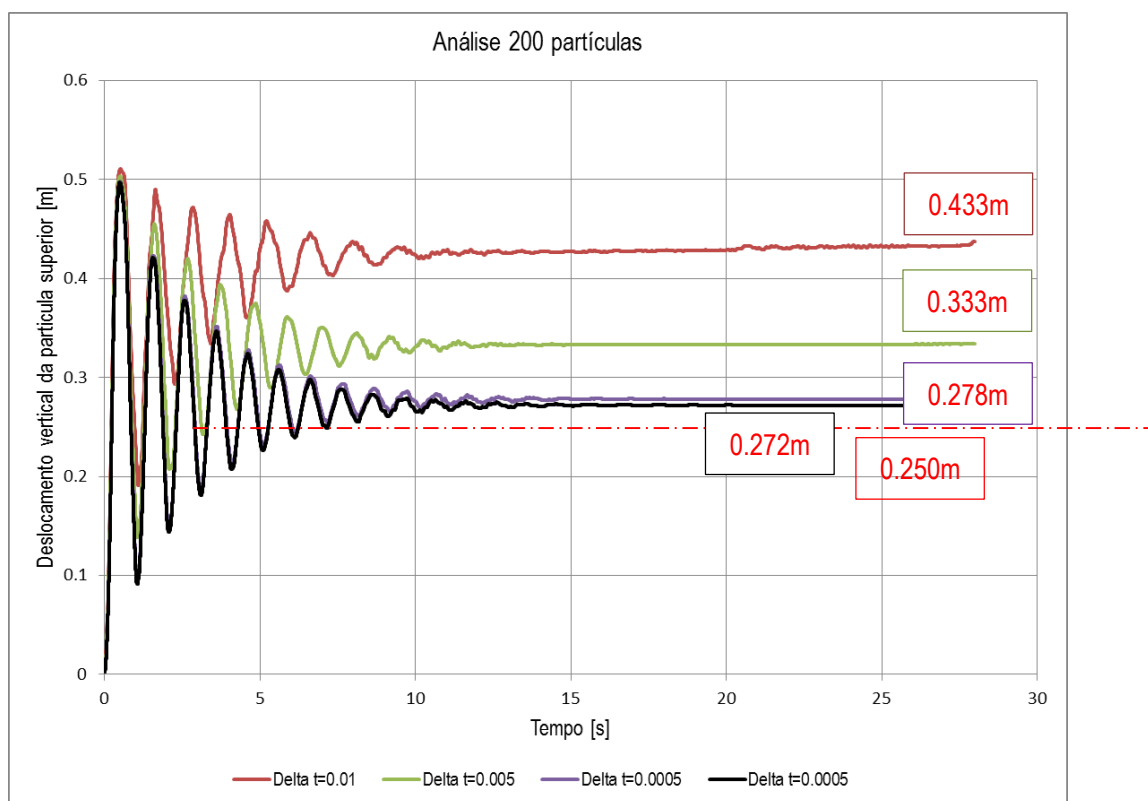


Figura 2.14 Análises com 200 partículas (análise 1) para diferentes intervalos de tempo na solução.

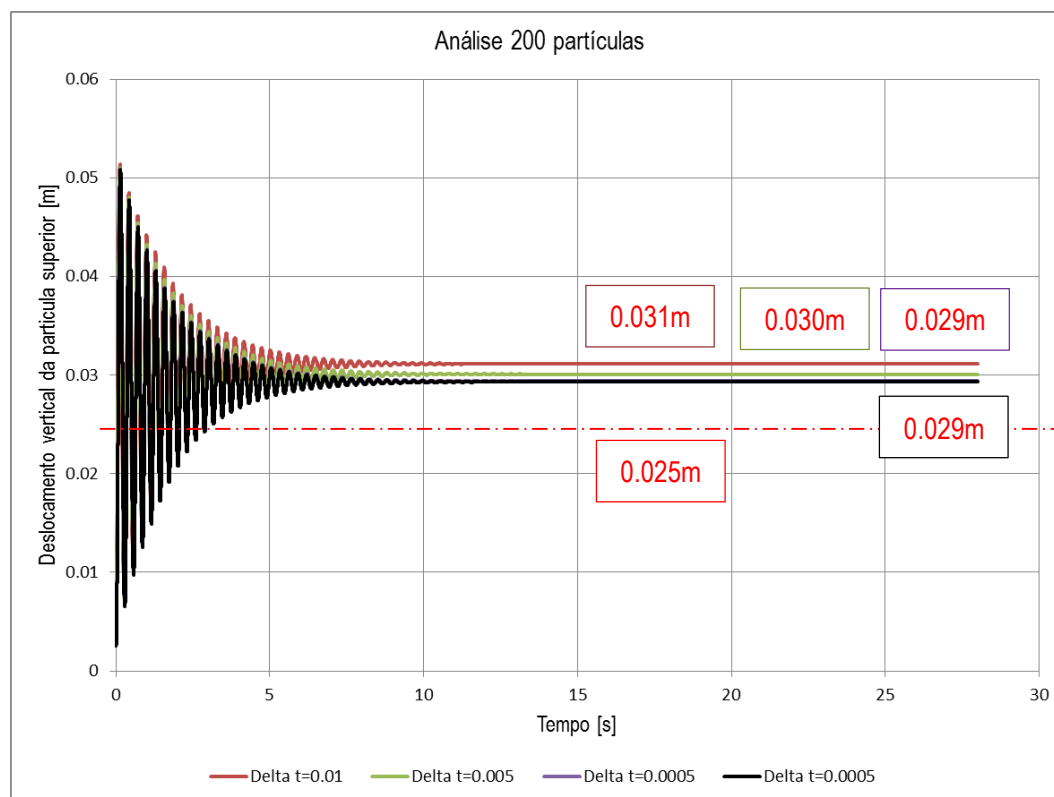


Figura 2.15 Análises com 200 partículas (análise 2) para diferentes intervalos de tempo na solução.

Para as duas análises de MPM (20 e 200 partículas) se fez a comparação dos resultados mais próximos ao analítico (incremento de tempo de 0.00005 segundos para cada um deles) com o resultado de MEF nos casos das análises 1 e 2.

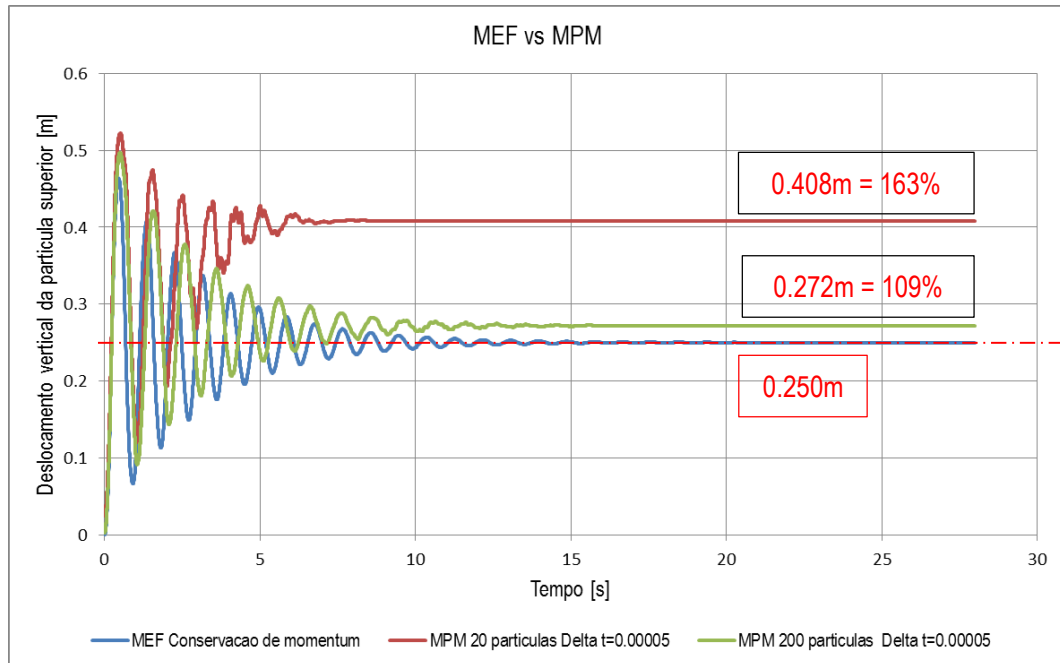


Figura 2.16 Comparação de MEF com MPM (análise 1).

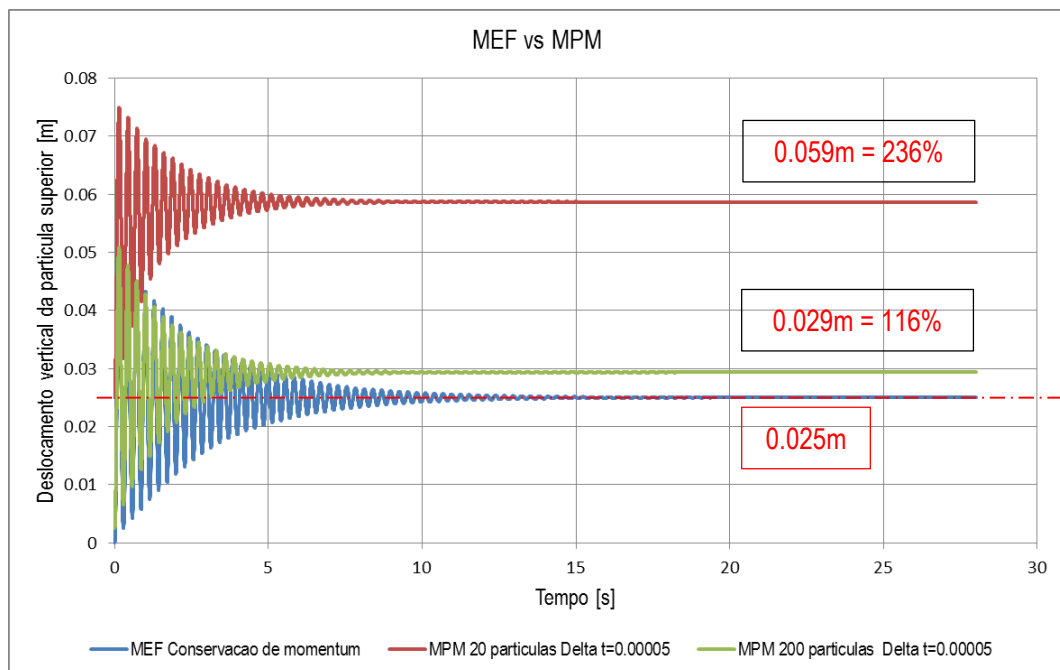


Figura 2.17 Comparação de MEF com MPM (análise 2).

Adicionalmente, a modelagem é feita com a programação no C++ baseado nas formulações matemáticas descritos detalhadamente neste capítulo. Esta codificação foi feita por Muller e Vargas (2014). A coluna (1D) de solo foi feita simplificada na implementação de Muller em 2D. As dimensões do modelo foram 1m na direção vertical e 0.1m na direção horizontal. Com o objetivo de simular este problema 1D na codificação em 2D considerou-se relação de Poisson perto do zero, por tanto as deformações nas laterais são quase zero. O número de partículas no modelo são 10×100 (horizontal \times vertical). O resultado é o seguinte:

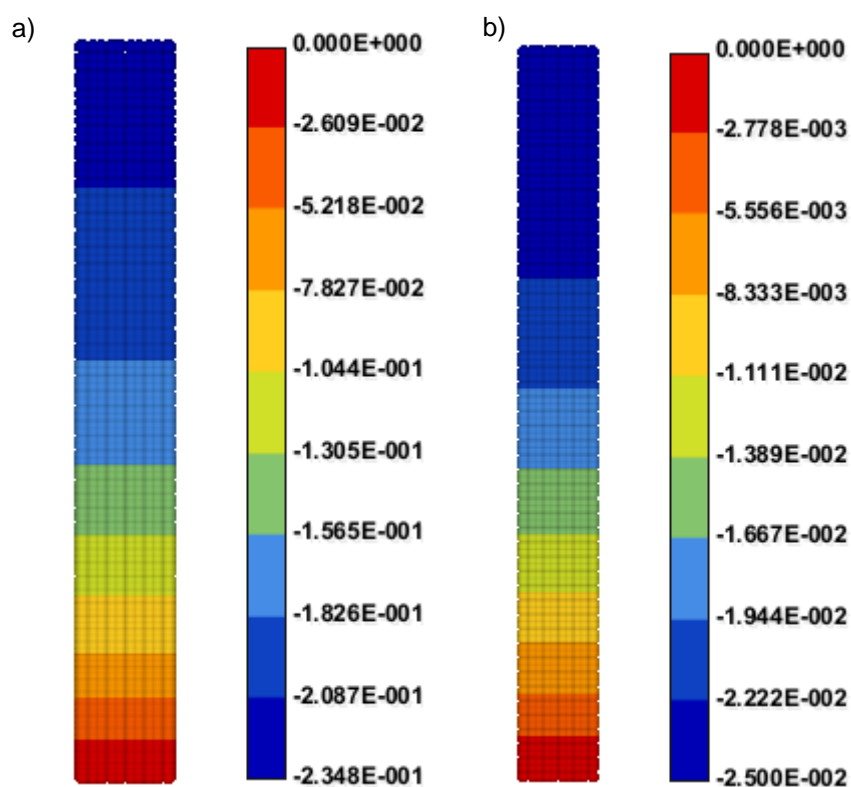


Figura 2.18 Resultado dos deslocamentos verticais em metros para (a) análise 1 e (b) análise 2.

3

Material point Method - Acoplado

Não é incomum encontrar problemas geotécnicos que envolvam problemas sólidos e fluidos de forma acoplada. O objetivo deste capítulo é entender o conhecimento de MPM para problemas acoplados, onde a velocidade dos fluidos e dos sólidos são as principais variáveis.

3.1.

Conceitos preliminares

3.1.1.

Esforço efetivo

De acordo com os conceitos de esforço efetivo para solos saturados, o esforço total σ_{ij} é decomposto em esforços efetivos, σ'_{ij} e pressão de poros através da seguinte expressão.

$$\sigma_{ij} = \sigma'_{ij} + p\delta_{ij} \quad 3.1$$

3.2.

Modelo hidromecânico para solos saturados

Para solos em condição saturada são apresentados as equações governantes: conservação de massa, conservação de quantidade de movimento, e a relação constitutiva.

3.2.1.

Conservação de massa

A equação de conservação de massa na fase sólida e líquida pode ser escrita da seguinte forma.

$$\frac{d}{dt}[(1-n)\rho_s] + \frac{\partial}{\partial x_j}[(1-n)\rho_s \hat{v}_j] = 0 \quad 3.2$$

$$\frac{d}{dt}(n\rho_w) + \frac{\partial}{\partial x_j}(n\rho_w\hat{w}_j) = 0 \quad 3.3$$

n é a porosidade.

Considerando o grão sólido incompressível desenvolve-se as equações mencionadas anteriormente

$$-\frac{dn}{dt} + (1-n)\frac{\partial \hat{v}_j}{\partial x_j} = 0 \quad 3.4$$

$$n\frac{d\rho_w}{dt} + \rho_w\frac{dn}{dt} + n\rho_w\frac{\partial \hat{w}_j}{\partial \hat{x}_j} = 0 \quad 3.5$$

Substituindo a equação 3.4 na equação 3.5 para eliminar a variação da porosidade no tempo tem-se:

$$n\frac{d\rho_w}{dt} + \rho_w(1-n)\frac{\partial \hat{v}_j}{\partial x_j} + n\rho_w\frac{\partial \hat{w}_j}{\partial \hat{x}_j} = 0 \quad 3.6$$

A água é considerada linearmente compressível. Por causa disso a densidade é linearmente variável com a poropressão conforme o módulo volumétrico da água.

$$\frac{d\rho_w}{dp} = -\frac{\rho_w}{K_w} \quad 3.7$$

Substituindo a equação 3.7 na equação 3.6 tem-se:

$$\frac{dp}{dt} = \frac{K_w}{n} \left[(1-n)\frac{\partial \hat{v}_j}{\partial x_j} + n\frac{\partial \hat{w}_j}{\partial \hat{x}_j} \right] \quad 3.8$$

3.2.2.

Conservação de quantidade de movimento

A conservação de quantidade de movimento na fase sólida pode ser expressa da seguinte forma:

$$(1-n)\varrho_s \frac{d\hat{v}_j}{dt} - \frac{\partial \sigma'_{ij}}{\partial x_j} - (1-n) \frac{\partial p}{\partial x_j} - (1-n)\varrho_s g_j - \frac{n^2 \varrho_w g}{k} (\hat{w}_j - \hat{v}_j) = 0 \quad 3.9$$

Onde K é a permeabilidade hidráulica que pode ser expressa em termos de permeabilidade de Darcy.

$$K = k \frac{\varrho_w g}{\mu_d} \quad 3.10$$

A conservação de quantidade de movimento da fase líquida:

$$n\varrho_w \frac{d\hat{w}_j}{dt} - n \frac{\partial p}{\partial x_j} - n\varrho_w g_j + \frac{n^2 \varrho_w g}{k} (\hat{w}_j - \hat{v}_j) = 0 \quad 3.11$$

Adicionando a equação de conservação de movimento de sólidos (equação 3.9) à equação de conservação de movimento de líquidos (equação 3.11) se tem a equação de conservação de movimento do solo saturado:

$$(1-n)\varrho_s \frac{d\hat{v}_j}{dt} + n\varrho_w \frac{d\hat{w}_j}{dt} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \varrho_w g_j \quad 3.12$$

3.2.3. Relação constitutiva

As relações constitutivas são as mesmas que para a fase sólida, entretanto estas são expressas em termos de esforços efetivos.

3.3. Revisão numérica de problemas em duas fases

Existem diferentes formulações que representam o comportamento nas duas fases (sólida e líquida):

Formulação $v-p$ velocidade de sólidos – poropressão

Formulação $v-w$ velocidade de sólidos – velocidade dos líquidos

Estas formulações representam adequadamente a propagação das ondas nos meios; entretanto $v-p$ não mostra a resposta adequada frente a cargas

dinâmicas, e por isso utiliza-se a formulação v - w no MPM. Esta formulação apresenta quatro variáveis desconhecidas que são: a velocidade na fase dos sólidos v_i , na fase líquida w_i , poropressão p , e o esforço efetivo σ'_{ij} .

As velocidades são calculadas nos nós, enquanto que a poropressão e os esforços são calculados mediante os pontos de gauss (MEF) e nas partículas (MPM). A sequência de solução das variáveis desconhecidas começa com o cálculo da velocidade na fase líquida a partir de a sua equação de conservação de quantidade de movimento.

$$\rho_w \frac{d\hat{w}_j}{dt} = \frac{\partial p}{\partial x_j} + \rho_w g_j - \frac{n\rho_w g}{k} (\hat{w}_j - \hat{v}_j) \quad 3.13$$

Conhecida a velocidade na fase líquida, tem-se a velocidade na fase sólida com a equação de conservação de quantidade de movimento nas duas fases.

$$(1 - n)\rho_s \frac{d\hat{v}_j}{dt} = -n\rho_s \frac{d\hat{w}_j}{dt} + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho_{sat} g_j \quad 3.14$$

A equação de conservação da massa é usado para o cálculo do poro pressão.

$$\frac{dp}{dt} = \frac{K_w}{n} \left[(1 - n) \frac{\partial \hat{v}_j}{\partial x_j} + n \frac{\partial \hat{w}_j}{\partial x_j} \right] \quad 3.15$$

Enfim a relação constitutiva é usada para o cálculo dos esforços efetivos.

3.4. Elementos finitos para a formulação v - w

Desde a perspectiva lagrangiana aqui considera-se os algoritmos para resolver.

3.4.1. Condições de contorno e condições iniciais

Com relação ao domínio se deve cumprir a seguinte condição.

$$\partial\Omega = \partial\Omega_u \cup \partial\Omega_\tau = \partial\Omega_w \cup \partial\Omega_p \quad 3.16$$

Onde o domínio de subscrito w é a velocidade prescrita na fase líquida. O subscrito p é a pressão prescrita na mesma fase. O subscrito u é a velocidade prescrita na fase sólida, em tanto que o subscrito τ é o esforço aplicado no contorno. As seguintes condições deveriam ser satisfeitas.

$$\partial\Omega_u \cup \partial\Omega_\tau = \emptyset \text{ e } \partial\Omega_w \cup \partial\Omega_p = \emptyset \quad 3.17$$

As condições de contorno de velocidade para as duas fases pode ser escrita da seguinte forma:

$$\hat{v}_i(x, t) = \hat{V}_i(t) \text{ no } \partial\Omega_u(t) \quad 3.18$$

$$\hat{w}_i(x, t) = \hat{W}_i(t) \text{ no } \partial\Omega_w(t) \quad 3.19$$

Em relação ao esforço no contorno e poropressão.

$$\sigma_{ij}(x, t)n_j = \tau_i(x, t) \text{ no } \partial\Omega_\tau(t) \quad 3.20$$

$$p(x, t)n_i = \bar{p}_i(x, t) \text{ no } \partial\Omega_p(t) \quad 3.21$$

As condições de velocidade para as duas fases:

$$\hat{v}_i(x, t_0) = \hat{V}_{0i}, \quad \hat{w}_i(x, t_0) = \hat{W}_{0i} \quad 3.22$$

As condições iniciais de esforço total e poropressão para as duas fases:

$$\sigma_{ij}(x, t_0) = \sigma_{0ij} \text{ e } p(x, t_0) = p_0 \quad 3.23$$

3.4.2. Formulação geral

Escrevendo-se de forma geral a equação de conservação de quantidade de movimento par as duas fases.

$$\int_{\Omega} \hat{t}_i \varrho_w \frac{\partial \hat{w}_j}{\partial t} d\Omega = \int_{\Omega} \hat{t}_j \frac{\partial p}{\partial x_j} d\Omega + \int_{\Omega} \hat{t}_j \varrho_w g_i d\Omega - \int_{\Omega} \hat{t}_j \frac{n \varrho_w g}{k} (\hat{w}_j - \hat{v}_j) d\Omega$$

3.24

$$\int_{\Omega} \hat{t}_i (1 - n) \varrho_s \frac{d\hat{v}_j}{dt} d\Omega = - \int_{\Omega} \hat{t}_j n \varrho_w \frac{d\hat{w}_j}{dt} d\Omega + \int_{\Omega} \hat{t}_j \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} d\Omega + \int_{\Omega} \hat{t}_j n \varrho_{sat} g_i d\Omega$$

3.25

Aplicando o teorema divergente e depois considerando as forcas de superfície nas duas equações anteriores tem-se.

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \hat{t}_j \varrho_w \frac{d\hat{w}_j}{dt} d\Omega &= \int_{\partial\Omega_p} \hat{t}_j \bar{p}_j dS - \int_{\Omega} \frac{\partial \hat{t}_j}{\partial x_j} p d\Omega + \int_{\Omega} \hat{t}_j \varrho_w g_i d\Omega \\ &\quad - \int_{\Omega} \hat{t}_j \frac{n \varrho_w g}{k} (\hat{w}_j - \hat{v}_j) d\Omega \end{aligned}$$

3.26

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \hat{t}_j (1 - n) \varrho_s \frac{d\hat{v}_j}{dt} d\Omega &= - \int_{\Omega} \hat{t}_j n \varrho_w \frac{d\hat{w}_j}{dt} d\Omega + \int_{\partial\Omega_{\tau}} \hat{t}_j \tau_j dS \\ &\quad - \int_{\Omega} \frac{\partial \hat{t}_j}{\partial x_i} \sigma_{ij} d\Omega + \int_{\Omega} \hat{t}_j \varrho_{sat} g_i d\Omega \end{aligned}$$

3.27

3.4.3. Discretização no espaço

O procedimento para a discretização no espaço é o mesmo que se utiliza para elementos finitos, com o mesmo critério das funções de forma.

$$\hat{v}(x, t) \approx \bar{N}(x) v(t) \quad 3.28$$

$$\hat{w}(x, t) \approx \bar{N}(x) w(t) \quad 3.29$$

$$\hat{t}(x, t) \approx \bar{N}(x) \mathbf{t}(t) \quad 3.30$$

Fazendo a substituição de isto nas equações anteriores tem-se:

$$\int_{\Omega} \bar{N}^T \varrho_w \bar{N} a_w d\Omega = \int_{\partial\Omega_p} \bar{N}^T \bar{p} dS - \int_{\Omega} B^T \delta_p d\Omega + \int_{\Omega} \bar{N}^T \varrho_w g d\Omega - \int_{\Omega} \bar{N}^T \frac{n\varrho_w g}{k} \bar{N} (w - v) d\Omega \quad 3.31$$

$$\int_{\Omega} \bar{N}^T (1 - n) \varrho_s \bar{N} a_s d\Omega = - \int_{\Omega} \bar{N}^T n \varrho_w \bar{N} a_w d\Omega - \int_{\partial\Omega_{\tau}} \bar{N}^T \tau dS - \int_{\Omega} B^T \sigma d\Omega - \int_{\Omega} \bar{N}^T \varrho_{sat} g d\Omega \quad 3.32$$

O vetor a_w contém as acelerações nodais da fase do agua, \bar{p} e a vetor da poropressão prescrita, e δ é definido da seguinte forma.

$$\delta = [1 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T \quad 3.33$$

Das formulações anteriores se conclui as equações de conservação de quantidade de movimento para fase solida e liquida, expressadas da seguinte maneira.

$$\begin{aligned} \left(A_{e=1}^{n_{elm}} \int_{\Omega_e} N^T \varrho_w N d\Omega \right) a_w &= A_{e=1}^{n_{pelm}} \int_{\partial\Omega_{pe}} N^T \bar{p}_e dS + \\ &A_{e=1}^{n_{elm}} \int_{\Omega_e} N^T \varrho_w g d\Omega - A_{e=1}^{n_{elm}} \int_{\Omega_e} B^T \delta p d\Omega - \\ &\left(A_{e=1}^{n_{elm}} \int_{\Omega_e} N^T \frac{n\varrho_w g}{k} N d\Omega \right) (w - v) \end{aligned} \quad 3.34$$

$$\begin{aligned} \left(A_{e=1}^{n_{elm}} \int_{\Omega_e} N^T (1 - n) \varrho_s N d\Omega \right) a_s &= \\ - \left(A_{e=1}^{n_{elm}} \int_{\Omega_e} N^T n \varrho_w N d\Omega \right) a_w &+ A_{e=1}^{n_{\tau elm}} \int_{\partial\Omega_{\tau e}} N^T \tau_e dS + \\ A_{e=1}^{n_{elm}} \int_{\Omega_e} N^T \varrho_{sat} g d\Omega - A_{e=1}^{n_{elm}} \int_{\Omega_e} B^T \sigma d\Omega \end{aligned} \quad 3.35$$

Pode-se escrever da forma seguinte.

$$M_w a_w = F_w^{trac} + F_w^{grav} - F_w^{int} - F_w^{drag} \quad 3.36$$

$$M_s a_s = -\bar{M}_w a_w + F^{trac} + F^{grav} - F^{int} \quad 3.37$$

Onde:

$$F_w^{drag} = Q(w - v) \quad 3.38$$

Q e a *lumped matrix* ou matriz de agrupamento:

$$Q = A_{e=1}^{n_{elm}} Q_e \quad 3.39$$

Com:

$$Q_e = \begin{bmatrix} q_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & q_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & q_{en} \end{bmatrix} \quad 3.40$$

Onde cada sub-matriz q_i corresponde ao nó i , e a matriz 0 e a matriz nula, e elas são expressadas como:

$$q_i = \begin{bmatrix} q_i & 0 & 0 \\ 0 & q_i & 0 \\ 0 & 0 & q_i \end{bmatrix}, \quad 0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad 3.41$$

Ademais:

$$q_i \approx \sum_{q=1}^{n_{eq}} w_q N_i(\xi_q) \frac{n_{qw}}{k} \left(x(\xi_q) \right) g |J(\xi_q)| \quad 3.42$$

3.4.4. Discretização no tempo

Reescrevendo a equação 3.36.

$$M_w \frac{dw}{dt} = F_w^{trac} + F_w^{grav} - F_w^{int} - Q(w - v) \quad 3.43$$

Integrando esta equação no tempo no intervalo t até $(t + \Delta t)$.

$$\int_t^{t+\Delta t} M_w dw = \int_t^{t+\Delta t} [F_w^{trac} + F_w^{grav} - F_w^{int} - Q(w - v)] dt \quad 3.44$$

Resolvendo a equação 3.44 explicitamente.

$$M_w(w^{t+\Delta t} - w^t) \approx [F_w^{trac,t} + F_w^{grav,t} - F_w^{int,t} - Q^t(w^t - v^t)] \Delta t \quad 3.45$$

Este mesmo processo é feito e pode ser expressas da seguinte forma

$$w^{t+\Delta t} \approx w^t + M_w^{-1} [F_w^{trac,t} + F_w^{grav,t} - F_w^{int,t} - Q^t(w^t - v^t)] \Delta t \quad 3.46$$

$$v^{t+\Delta t} \approx v^t + M_s^{-1} [-\bar{M}_w^{-1} a_w^t + F^{trac,t} + F^{grav,t} - F^{int,t}] \Delta t \quad 3.47$$

Onde:

$$a_w^t = \frac{w^{t+\Delta t} - w^t}{\Delta t} \quad 3.48$$

Sendo calculada a velocidade dos sólidos no tempo $(t + \Delta t)$, o incremento das deformações nos pontos de Gauss é calculado.

$$\Delta \varepsilon_q^{t+\Delta t} = B_q v_e^{t+\Delta t} \Delta t \quad 3.49$$

$$p_q^{t+\Delta t} \approx p_q^t + \Delta t \frac{K_w}{n} \delta^T [(1-n) B_q v_e^{t+\Delta t} + n B_q w_e^{t+\Delta t}] \quad 3.50$$

Os esforços efetivos são atualizados com a relação constitutiva.

$$\{\sigma', \text{estado do material}\}^t \xrightarrow[\Delta \varepsilon^{t+\Delta t}]{\text{relação constitutiva}} \{\sigma', \text{estado do material}\}^{t+\Delta t}$$

Portanto os esforços totais são atualizados.

$$\sigma_q^{t+\Delta t} = \sigma_q'^{t+\Delta t} + \delta p_q^{t+\Delta t} \quad 3.51$$

3.5.

MPM para problemas de duas fases

3.5.1.

MPM – discretização e inicialização das partículas

No estado saturado, o solo é representado por partículas únicas. O conceito do MPM é o mesmo que para a fase unicamente de sólidos. As partículas adquirem todas as propriedades físicas do sólido e líquido, e as suas posições são atualizadas de acordo á fase solida. As inicializações de partículas incluem: massa, forças internas, forças de superfície, além de outras propriedades dos solos saturados. Portanto:

$$m_{s,p} = \varrho_{s,p} \Omega_p \quad m_{w,p} = \varrho_{w,p} \Omega_p \quad m_p = \varrho_{sat,p} \Omega_p \quad 3.52$$

Então:

$$f_{s,p}^{grav} = m_{s,p} g \quad f_{w,p}^{grav} = m_{w,p} g \quad f_p^{grav} = m_p g \quad 3.53$$

3.5.2. Solução para um intervalo do tempo

Inicialização da equação de quantidade de movimento

Inicialmente as matrizes de massa devem ser formuladas.

$$m_{w,i}^t \approx \sum_{p=1}^{n_{ep}} m_{w,p} N_i(\xi_p^t) \quad 3.54$$

$$\bar{m}_{w,i}^t \approx \sum_{p=1}^{n_{ep}} n_p^t m_{w,p} N_i(\xi_p^t) \quad 3.55$$

$$m_{s,i}^t \approx \sum_{p=1}^{n_{ep}} (1 - n_p^t) m_{s,p} N_i(\xi_p^t) \quad 3.56$$

Depois as seguintes matrizes são integradas:

$$M_w \quad \bar{M}_w \quad e \quad M_s$$

O passo seguinte considera o mapeamento das velocidades das partículas para os nós.

$$M_s^t v^t = P_s^t \quad 3.57$$

Onde:

$$P_s^t \approx A_{e=1}^{\bar{n}_{elm}} \sum_{p=1}^{n_{ep}} (1 - n_p^t) m_{s,p} N^T(\xi_p^t) \hat{v}_p^t \quad 3.58$$

O mesmo procedimento é feito para a fase da água.

$$\bar{M}_w^t w^t = P_w^t \quad 3.59$$

Onde:

$$P_w^t \approx A_{e=1}^{\bar{n}_{elm}} \sum_{p=1}^{n_{ep}} n_p^t m_{w,p} N^T(\xi_p^t) \hat{w}_p^t. \quad 3.60$$

As forças de superfície nas duas fases:

$$\tilde{F}^{trac,t} \approx A_{e=1}^{\bar{n}_{elm}} \sum_{p=1}^{n_{ebp}} N^T(\xi_p^t) \tilde{f}_p^{trac} \quad 3.61$$

$$\tilde{F}_w^{trac,t} \approx A_{e=1}^{\bar{n}_{pelm}} \sum_{p=1}^{n_{ebp}} N^T(\xi_p^t) \tilde{f}_{w,p}^{trac} \quad 3.62$$

Então:

$$F^{trac,t} = \tilde{F}^{trac,t} \tau(t) \quad , \quad F_w^{trac,t} = \tilde{F}_w^{trac,t} \tau(t) \quad 3.63$$

As forças de gravidade são integradas.

$$F^{grav,t} \approx A_{e=1}^{\bar{n}_{elm}} \sum_{p=1}^{n_{ep}} N^T(\xi_p^t) f_p^{grav} \quad 3.64$$

$$F_w^{grav,t} \approx A_{e=1}^{\bar{n}_{elm}} \sum_{p=1}^{n_{ep}} N^T(\xi_p^t) f_{w,p}^{grav} \quad 3.65$$

Também são formuladas as forças internas devido aos esforços totais e a poropressão.

$$F^{int,t} \approx A_{e=1}^{\bar{n}_{elm}} \sum_{p=1}^{n_{ep}} B^T(\xi_p^t) \sigma_p^t \Omega_p^t \quad 3.66$$

$$F_w^{int,t} \approx A_{e=1}^{\bar{n}_{elm}} \sum_{p=1}^{n_{ep}} B^T(\xi_p^t) \delta p_p^t \Omega_p^t \quad 3.67$$

Em tanto que a força de arrastre:

$$F_w^{drag,t} = Q^t(w^t - v^t) \quad 3.68$$

Anteriormente já foi descrito a integração de Q , onde.

$$q_i^t \approx \sum_{p=1}^{n_{ep}} \frac{n_p^t m_{w,p} g}{k_p^t} N_i(\xi_p^t) \quad 3.69$$

Enfim as equações de quantidade de movimento são descritas da seguinte forma.

$$M_w^t a_w^t = F_w^{trac,t} + F_w^{grav,t} - F_w^{int,t} - F_w^{drag,t} \quad 3.70$$

$$M_s^t a_s^t = -\bar{M}_w^t a_w^t + F^{trac,t} + F^{grav,t} - F^{int,t} \quad 3.71$$

Resolvendo a equação de quantidade de movimento usando o Algoritmo Lagrangiano modificado

1. Reescrevendo a equação:

$$a_w^t = M_w^{t,-1} [F_w^{trac,t} + F_w^{grav,t} - F_w^{int,t} - F_w^{drag,t}] \quad 3.72$$

2. Sendo conhecida a aceleração nodal na fase líquida calcula-se a aceleração nodal na fase sólida.

$$a_s^t = M_s^{t,-1} [-\bar{M}_w^t a_w^t + F^{trac,t} + F^{grav,t} - F^{int,t}] \quad 3.73$$

3. As velocidades das partículas são atualizadas usando as acelerações nodais e as funções de forma como segue.

$$\hat{v}_p^{t+\Delta t} = \hat{v}_p^t + \sum_{i=1}^{n_{ep}} \Delta t N_i(\xi_p^t) a_{s,i}^t \quad 3.74$$

$$\hat{w}_p^{t+\Delta t} = \hat{w}_p^t + \sum_{i=1}^{n_{ep}} \Delta t N_i(\xi_p^t) a_{w,i}^t. \quad 3.75$$

4. Sendo conhecidas as velocidades das partículas nas duas fases, são atualizadas as velocidades nodais no tempo presente ($t+\Delta t$).

$$M_s^t v^{t+\Delta t} = A_{e=1}^{\bar{n}_{elm}} \sum_{p=1}^{n_{ep}} (1 - n_p^t) m_{s,p} N^T(\xi_p^t) \hat{v}_p^{t+\Delta t} \quad 3.76$$

$$\bar{M}_w^t w^{t+\Delta t} = A_{e=1}^{\bar{n}_{elm}} \sum_{p=1}^{n_{ep}} n_p^t m_{w,p} N^T(\xi_p^t) \hat{w}_p^{t+\Delta t}. \quad 3.77$$

5. Usam-se as velocidades nodais no ($t+\Delta t$) para encontrar os incrementos de deslocamento.

$$\Delta u^{t+\Delta t} = \Delta t v^{t+\Delta t} \quad 3.78$$

6. Os esforços efetivos e as deformações das partículas são calculadas:

$$\Delta \varepsilon_q^{t+\Delta t} = B(\xi_p^t) \Delta u_e^{t+\Delta t} \quad 3.79$$

Onde a relação constitutiva:

$$\{\sigma'_p, \text{estado do material}\}^t \xrightarrow[\Delta \varepsilon_p^{t+\Delta t}]{\text{relação constitutiva}} \{\sigma'_p, \text{estado do material}\}^{t+\Delta t}$$

7. A poropressão é atualizada.

$$p_p^{t+\Delta t} \approx p_p^t + \Delta t \frac{K_{w,p}}{n_p^t} \delta^T \left[(1 - n_p^t) B(\xi_p^t) v_e^{t+\Delta t} + n_p^t B(\xi_p^t) w_e^{t+\Delta t} \right] \quad 3.80$$

8. Os esforços totais também são calculados.

$$\sigma_p^{t+\Delta t} = \sigma'_p{}^{t+\Delta t} + \delta p_p^{t+\Delta t} \quad 3.81$$

14. Volume associado ao incremento das deformações e calculado pela a seguinte expressão.

$$\Omega_p^{t+\Delta t} = (1 + \Delta \varepsilon_{vol,p}^{t+\Delta t}) \Omega_p^t \quad 3.82$$

$$\Delta \varepsilon_{vol} = \Delta \varepsilon_{11} + \Delta \varepsilon_{22} + \Delta \varepsilon_{33} \quad 3.83$$

9. A posição das partículas é atualizada

$$x_p^{t+\Delta t} = x_p^t + \sum_{i=1}^{n_{en}} N_i(\xi_p^t) \Delta u_i^{t+\Delta t} \quad 3.84$$

3.6.

Exemplo de aplicação

Tem-se solo na geometria de quadrado de lado 1 metro que será modelado considerando o comportamento elástico linear com módulo de Young 10Mpa , coeficiente de Poisson de 0.2 e peso específico de 20kN/m^3 . Três partículas de controle foram consideradas no modelo: abaixo, no meio e no topo. Nelas vai se analisar o desenvolvimento das pressões de poros ao longo do tempo. O objetivo neste teste é demonstrar que ao final da análise a solução vai atingir as poropressões hidrostáticas. Esse valor é o peso específico da água multiplicado pela altura, resultando para este exemplo analiticamente 0.01Mpa para este exemplo. As condições de contorno nos extremos são: aceleração e velocidade na direção horizontal são nulas. As condições de contorno na base do modelo são: aceleração e velocidade são nulas nas duas direções.

Para esta análise utilizou-se a implementação feita em C++, baseado nas formulações matemáticas descritos detalhadamente neste capítulo. A codificação foi feita por Muller e Vargas (2014). Considerou-se 4 partículas no interior de cada elemento euleriano. Na figura abaixo, o modelo quadrado de 1m de lado.

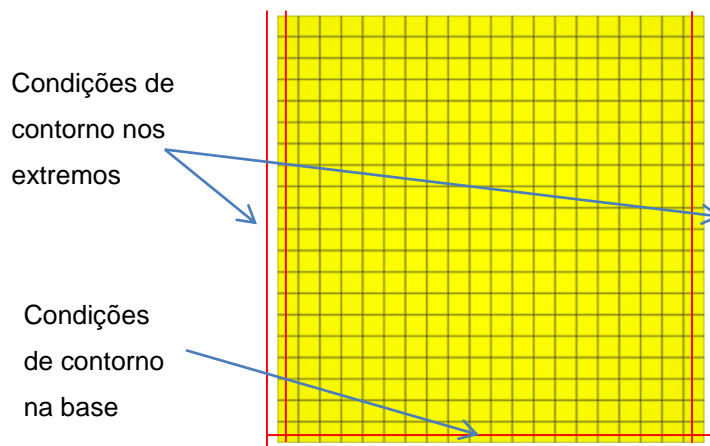


Figura 3.1 – Gráfico do modelo.

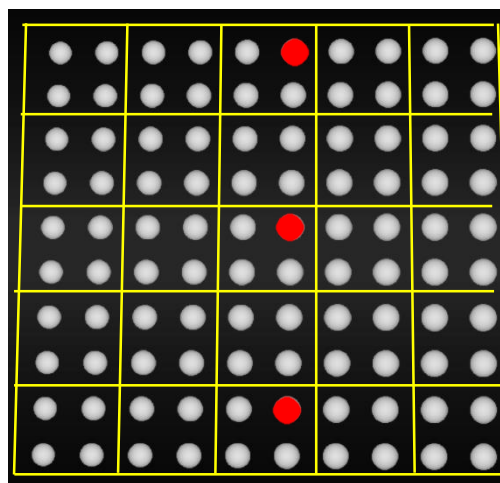


Figura 3.2 – Esquema simplificado e representativo das partículas de controle no modelo, os pontos vermelhos representam as partículas de controle na base, no meio e no topo.

Depois de feita a análise por 1 segundo, os valores das poropressões são resumidas na seguinte figura.

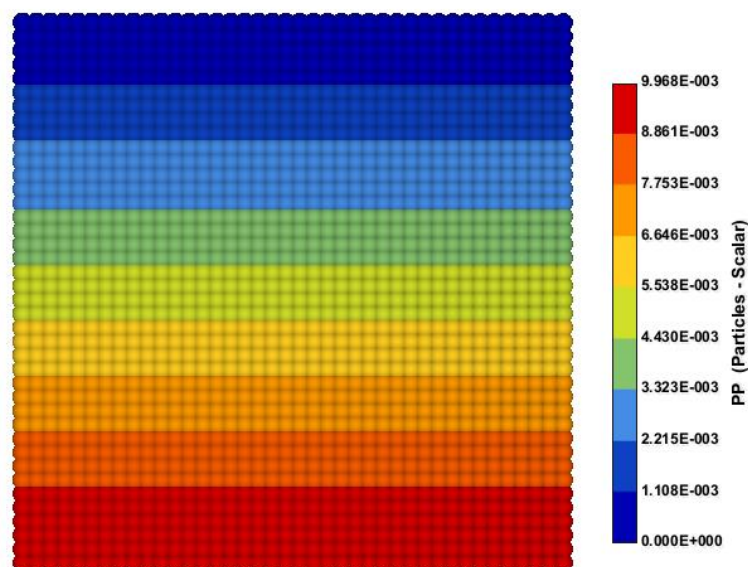


Figura 3.3 Situação final da poropressão.

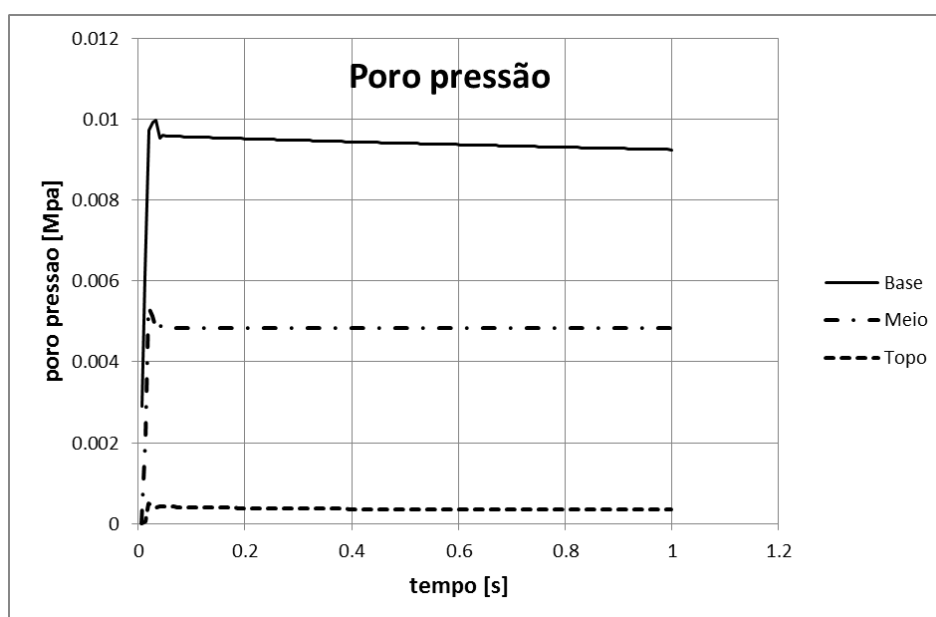


Figura 3.4 – Desenvolvimento das poropressões no tempo.

Pode-se ver na Figura 3.4 que o valor da poropressão para a partícula de controle na base do modelo, ao final da análise é 0.009244 Mpa. Esta partícula de controle está localizada na penúltima linha da base (Figura 3.2), e por causa disso não mostra um número maior, que é mostrado na escala gráfica da Figura 3.3: 0.009968 Mpa, que corresponde à última linha abaixo do modelo. Porém se conclui que a análise foi realizada corretamente atingindo a resposta analítica.

4

Modelagem numérica com MPM - aplicação na geotecnia

Neste capítulo considerou-se uma situação hipotética partindo de um projeto real. Foi feita a análise da barragem Palo Redondo, pertencente ao projeto Chavimochic, localizada na região de La Libertad, Perú. O reservatório tem um volume total de 370 milhões de metros cúbicos, dos quais 70 são de volume morto de sedimentos. A barragem Palo Redondo no projeto tem de uma longitude de corona de 770 metros e 480 metros na base, de altura máxima 115 metros sobre a cimentação da rocha.

As análises têm como objetivo controlar os deslocamentos horizontais e verticais da barragem (no talude jusante) gerados pelo peso próprio que foram calculadas mediante MPM e MEF, além dos deslocamentos permanentes gerados pela ação sísmica calculada por três métodos: MPM, MEF e um procedimento simplificado para estimar deformações permanentes. (Makdisi, Seed, 1977).

A geometria real e a configuração dos materiais se mostram na figura seguinte.

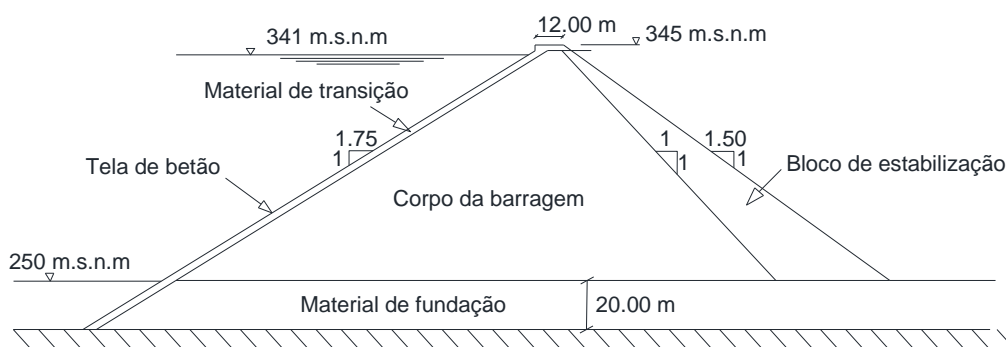


Figura 4.1 – Seção transversal da barragem.

Para a análise dinâmica considerou-se a componente horizontal N 82° O do sismo do Lima-Peru do dia 3 de outubro de 1974. Segundo o estudo de perigo sísmico da zona (Castillo, Alva, 1993), para este sismo de desenho se determinou uma aceleração máxima de 0.38 vezes a gravidade com uma magnitude sísmica Ms de 7.5, então o histórico das acelerações do sismo foi escalado a esse valor.

4.1. Hipóteses simplificadoras

A análise consiste na simplificação do projeto real da barragem Palo Redondo na sua primeira etapa. Isto com objetivos acadêmicos e demonstrativos. Estas simplificações são com relação a:

- Geometria
- Tipos de materiais

Geometria

A barragem foi modelada com as seguintes dimensões:

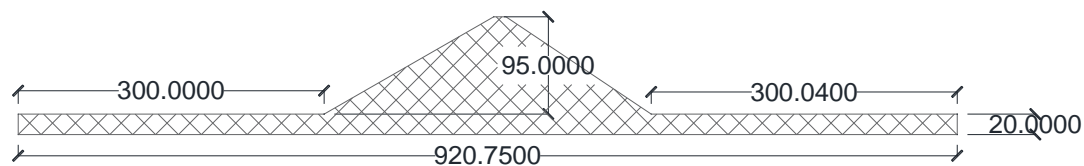


Figura 4.2 – dimensões do modelo

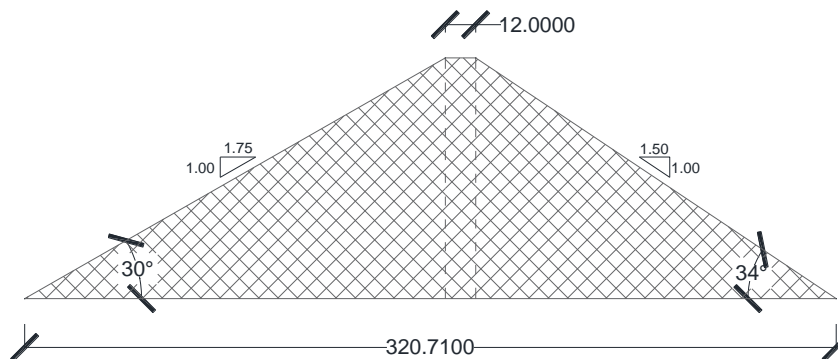


Figura 4.3 – Detalhe das dimensões do corpo da barragem

Nestas figuras pode-se notar que os materiais que conformam a barragem foram resumidos a um material só para o modelo inteiro.

Tipos de materiais

Para as análises considerou-se um tipo de material, que foi modelado mediante dois modelos constitutivos:

- Modelo constitutivo elástico.
- Modelo constitutivo de Mohr Coulomb.

O peso específico do material é 21 kN/m^3 , o módulo de Young é 60 kPa , coeficiente de Poisson $0,3$ e no caso do modelo constitutivo de Mohr Coulomb a coesão é 15 kPa e o ângulo de atrito é 40° .

Adicionalmente foi analisado um terceiro caso com todos os mesmos parâmetros do modelo de Mohr Coulomb, só neste caso a coesão mudou para 11.5 kPa . Esta análise foi feita para visualizar o rompimento da barragem por causa de um sismo exagerado, amplificado 50 vezes os valores do histórico das acelerações do sismo que tem como aceleração máxima 0.38 vezes a aceleração da gravidade.

Adicionalmente no cálculo da resposta dinâmica da barragem considerou-se amortecimento de Rayleigh na análise feita com MEF, e amortecimento de energia cinética quando se analisou mediante MPM.

Sismo de modelagem

Considerou-se o sismo escalado devido ao estudo de perigo sísmico da zona (Castillo, Alva, 1993) que aconteceu na cidade de Lima o dia 3 de outubro de 1974, resultando um sismo de 60 segundos onde a aceleração máxima foi de $0.38g$. Adicionalmente como este é um histórico do sismo real, ele foi corrigido por linha base e filtrado de frequências.

Estes valores de velocidade e aceleração ao longo de um intervalo de tempo são condições de contorno na base do modelo, que são utilizadas da mesma forma que foram inseridas nas matrizes de aceleração e velocidade dos nós da coluna de solo em 1D no item 2.5.4 deste trabalho. Dentro do tempo da análise, considera-se um tempo onde se desenvolve o sismo. Nesse tempo as condições de contorno de aceleração e velocidade dos nós são os números que correspondem ao histórico das acelerações e velocidades segundo as figuras 4.7 e 4.8, fora desse tempo, as condições de contorno para acelerações e velocidades na base do modelo são nulas. Nessas figuras mostram-se o histórico das acelerações e o histórico das velocidades do sismo escalado e corrigido.

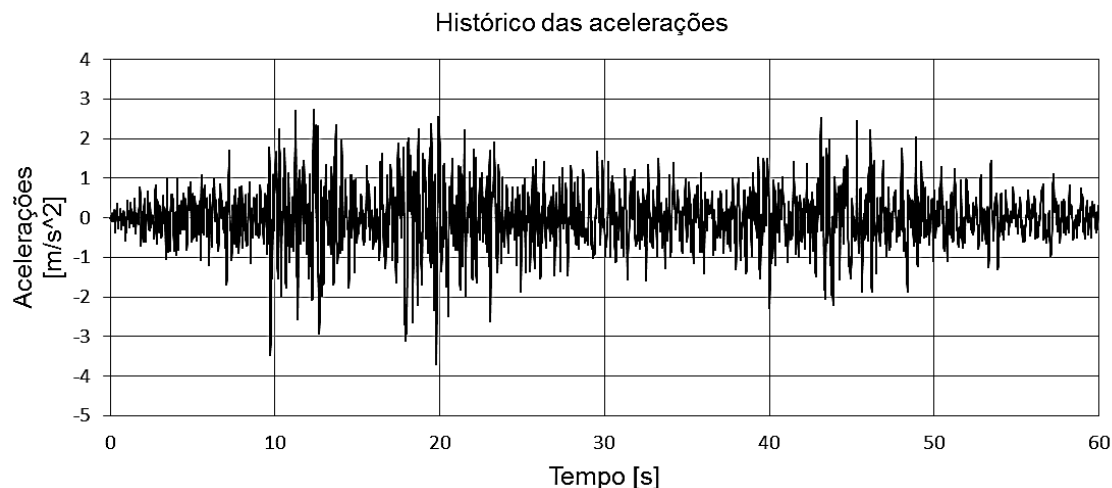


Figura 4.4 – Histórico das acelerações

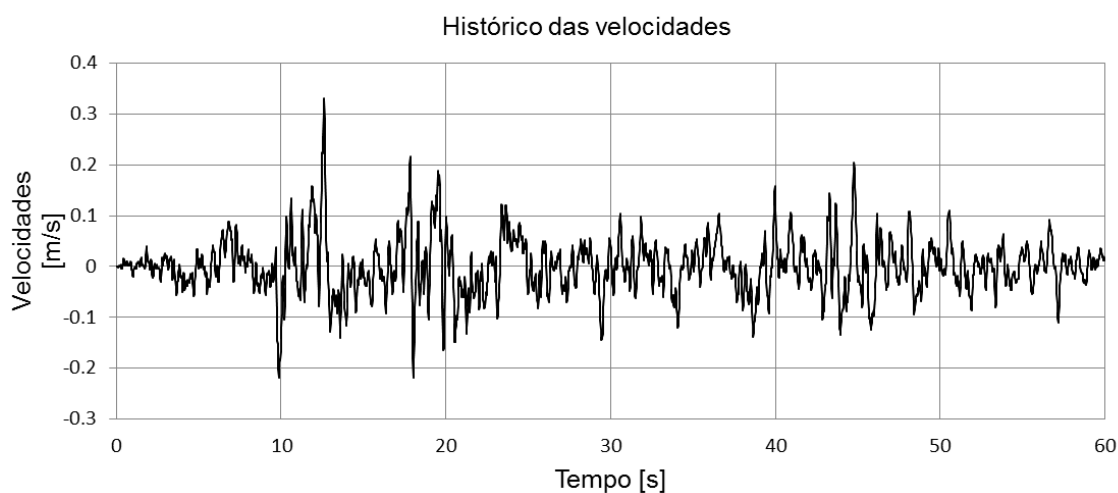


Figura 4.5 – Histórico das velocidades

4.2. Análise mediante o MEF

Esta análise foi resolvida pela teoria clássica do MEF, formulação variacional com auxílio do programa computacional PLAXIS 2D, que é um software comercial que a PUC-RJ tem licença. Foi analisada no talude jusante com cinco pontos de controle no talude jusante. O modelo gerado tem as mesmas dimensões indicadas nas figuras 4.2 e 4.3.

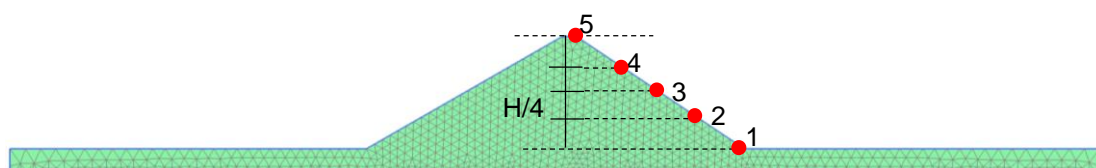


Figura 4.6 – Discretização da malha e pontos de controle

A barragem foi avaliada considerando os dois modelos constitutivos (Elástico e Mohr Coulomb) em três fases: A primeira foi atingir o equilíbrio estático, a segunda aplicação do sismo e a terceira livre vibração até atingir novamente o equilíbrio.

O modelo considera o estado plano de deformações e foi gerado com elementos finitos triangulares de 15 nós e 12 pontos de Gauss no interior de cada elemento.

4.3. Análise mediante o MPM

Para a análise com o MPM utilizou-se implementação feita em C++, baseado nas formulações matemáticas descritos detalhadamente nos capítulos 2 e 3, desenvolvido por Muller e Vargas (2014) e utilizaram-se quatro partículas no interior de cada elemento finito na malha fixa no tempo zero. A seguinte figura mostra a distribuição inicial das partículas no interior da malha.

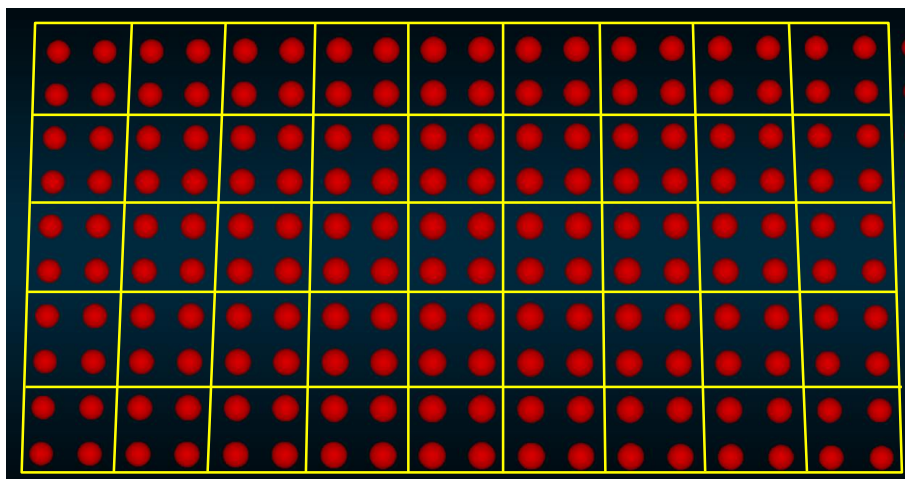


Figura 4.7 – Distribuição das partículas na malha fixa no tempo zero.

A malha de elementos finitos foi gerada pelo *software Two-dimensional Mesh Tool*, desenvolvido pelo Instituto de Desenvolvimento de Software Técnico-Científico da PUC-Rio (Tecgraf/PUC-Rio). Este permite a exportação das coordenadas da malha, de modo que quando se têm as coordenadas dos nós de algum elemento finito de quatro lados, quatro partículas mostradas na figura 4.2 são distribuídas uniformemente dentro de cada elemento finito, e a suas

coordenadas são as coordenadas globais das partículas no tempo zero, depois de isso elas podem-se movimentar livremente no domínio euleriano. O critério para a geração da malha de elementos finitos é tipicamente evitar elementos que tenham angularidade exagerada, todos os elementos finitos devem ter quase o mesmo tamanho e a mesma forma, etc. Como foi escrito no item 1.1 deste trabalho, não se aprofundará nos critérios de geração da malha.

A continuação as duas seguintes figuras mostram a discretização da malha de elementos finitos, partículas do MPM no corpo da barragem, além das partículas de controle.

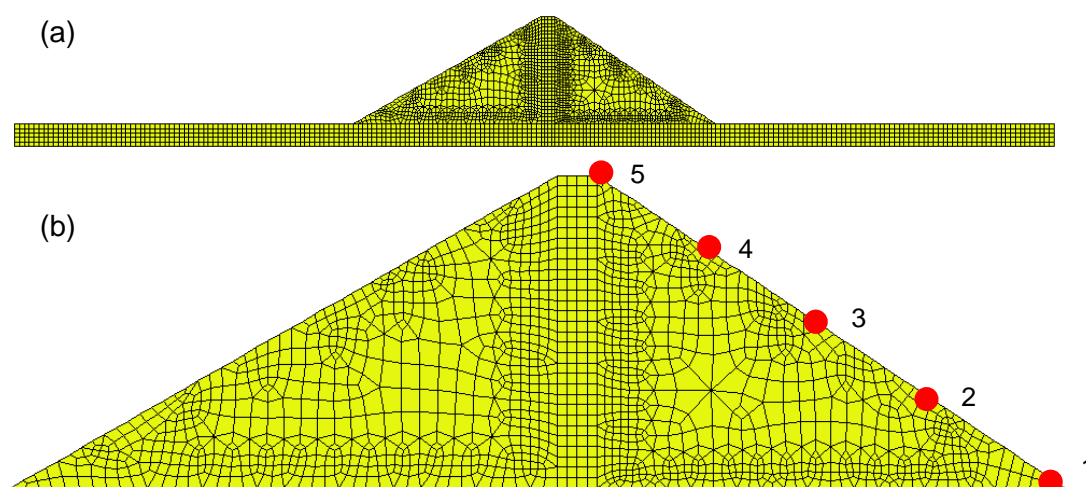


Figura 4.8 – (a) Vista geral da discretização da malha de elementos finitos (b) Discretização do corpo da barragem e partículas de controle.

Na seguinte figura mostra-se de cor vermelho as posições das partículas do MPM no tempo zero.

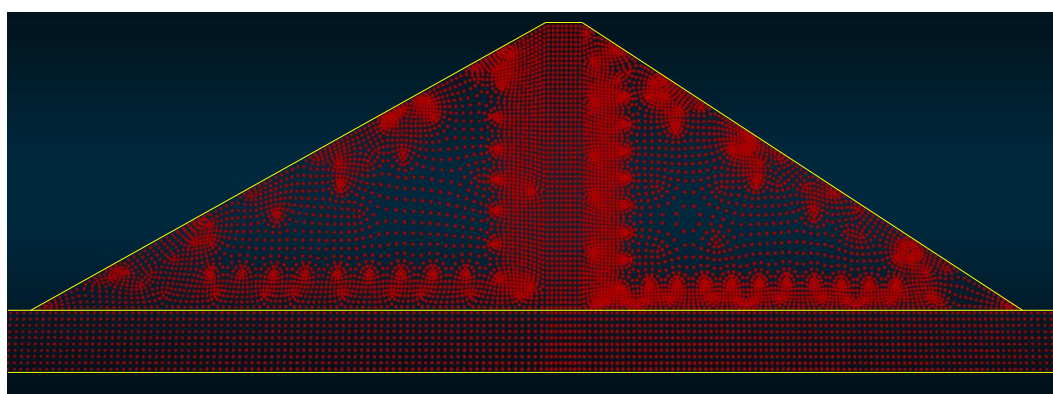


Figura 4.9 – Distribuição das partículas no modelo.

4.4.

Análise mediante o procedimento simplificado de Makdisi-Seed

Este é um método simples e racional que se aplica para barragens formadas por solos argilosos compactos, areias secas, e solos granulares densos. Originalmente este método foi proposto por Newmark (1965), e Makdisi e Seed (1977) propuseram um método simplificado baseado no conceito original de Newmark. Esta metodologia simplificada é muito utilizada atualmente devido a sua simplicidade, rapidez e tendência muito conservadora. A descrição geral do método é o seguinte:

- a) Determina-se a aceleração de escoamento, isto é, o coeficiente lateral sísmico igual à unidade para diferentes profundidades da barragem de altura H medidos desde o topo: $H/4$, $H/2$, $3H/4$ e H .
- b) Encontra-se a aceleração máxima no topo da barragem, período fundamental do movimento sísmico.

A barragem Palo redondo foi analisada mediante este procedimento simplificado, (Alva, Infantes, 1999). Esta solução foi modificada unicamente nos termos da aceleração do escoamento devido aos parâmetros do modelo constitutivo de Mohr Coulomb.

4.5.

Análises e resultados antes do sismo

Nesta primeira etapa foram comparados os deslocamentos verticais e horizontais do talude jusante da barragem no equilíbrio estático; isto é, devido somente ao peso próprio. Estas comparações foram feitas mediante o MPM e FEM com os dois modelos constitutivos considerados nesta dissertação.

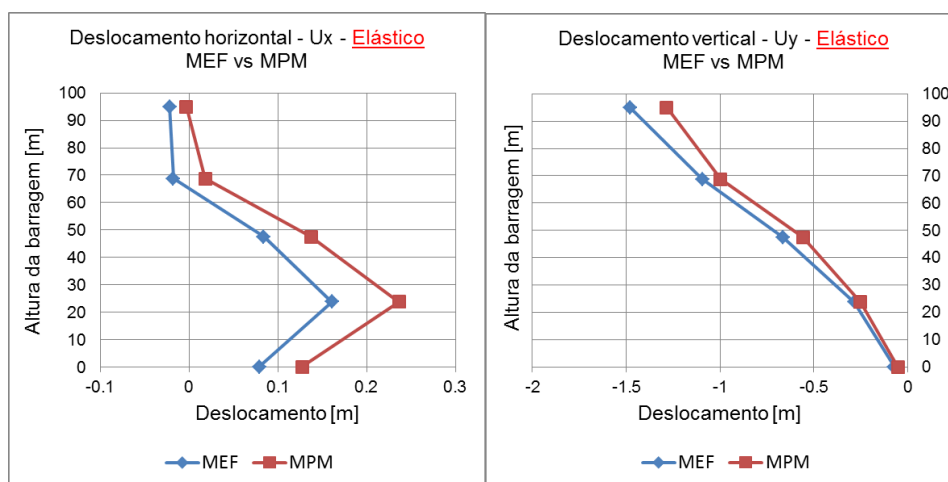


Figura 4.10 – Deslocamentos horizontais e verticais do talude jusante com o modelo constitutivo elástico para MEF e MPM.

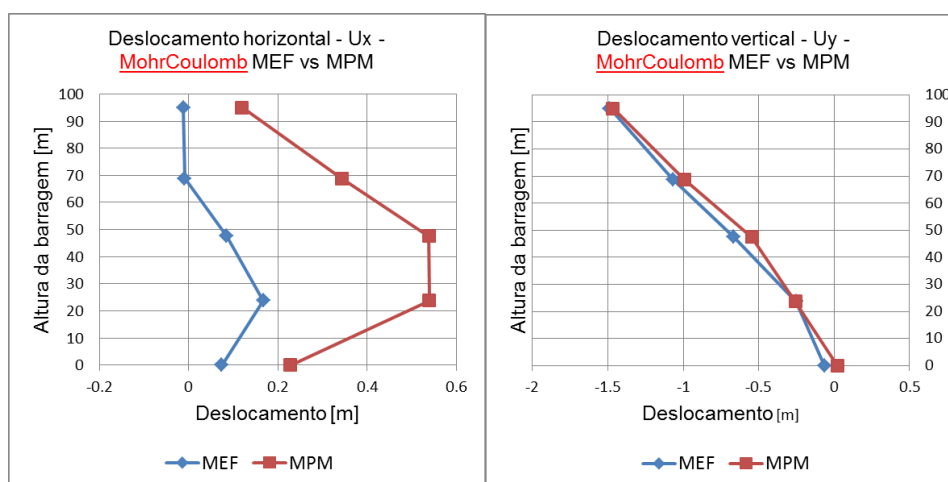


Figura 4.11 – Deslocamentos horizontais e verticais do talude jusante com o modelo constitutivo elástico-plástico para MEF e MPM.

4.6. Análises e resultados durante e depois do sismo

A análise durante o sismo foi feita para os deslocamentos horizontais com MPM e MEF com os 5 pontos de controle e para os dois modelos constitutivos considerados.

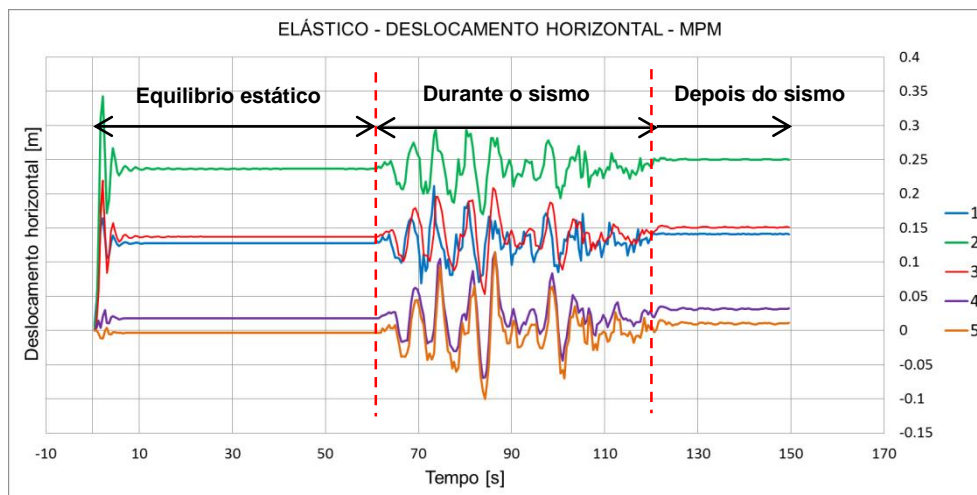


Figura 4.12 – Desenvolvimento dos deslocamentos horizontais para o equilíbrio estático, durante o sismo, e depois do sismo. (Modelo elástico)

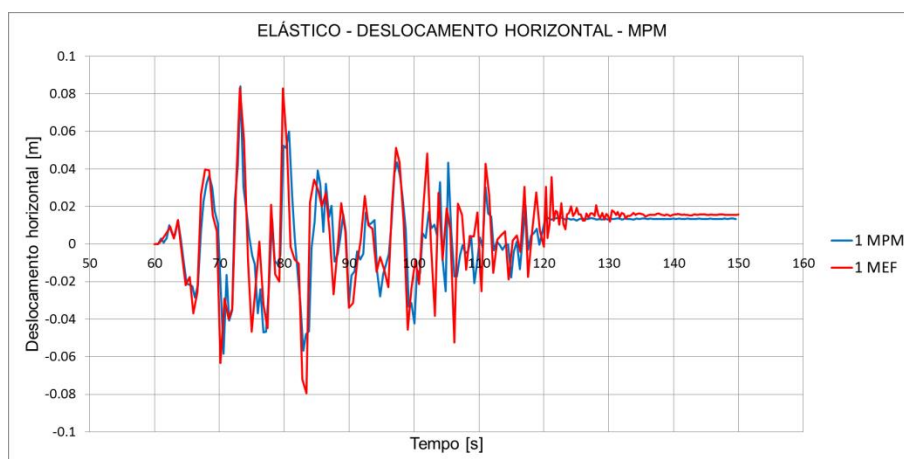


Figura 4.13 – Desenvolvimento dos deslocamentos horizontais do ponto de controle 1 devido ao sismo. (Modelo elástico)

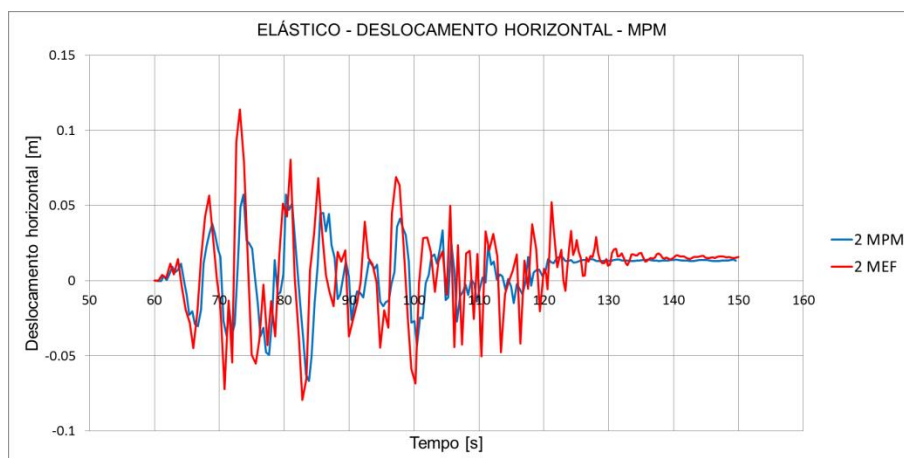


Figura 4.14 – Desenvolvimento dos deslocamentos horizontais do ponto de controle 2 devido ao sismo. (Modelo elástico)

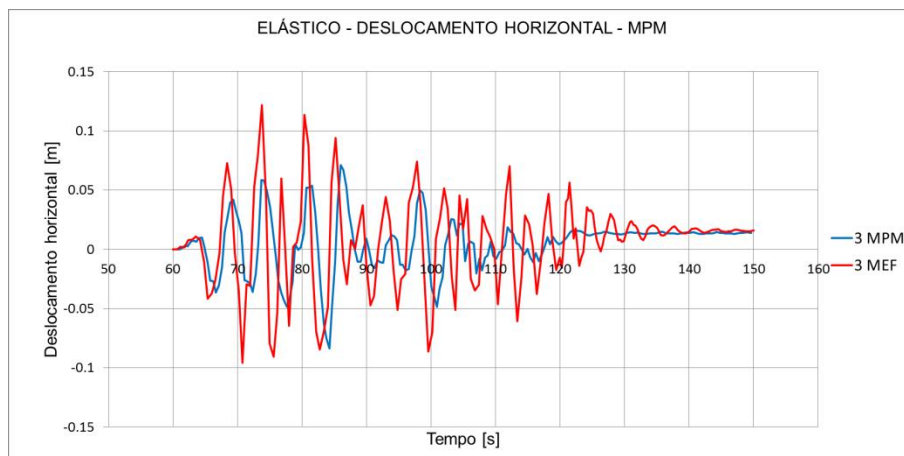


Figura 4.15 – Desenvolvimento dos deslocamentos horizontais do ponto de controle 3 devido ao sismo. (Modelo elástico)

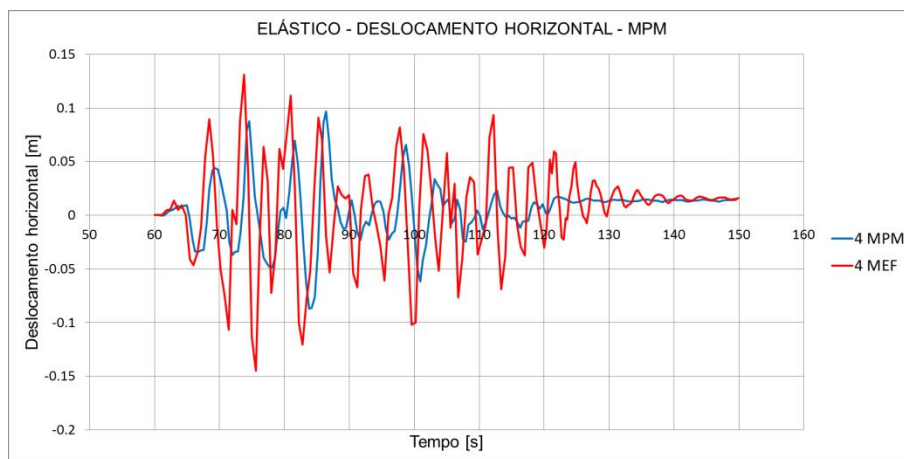


Figura 4.16 – Desenvolvimento dos deslocamentos horizontais do ponto de controle 4 devido ao sismo. (Modelo elástico)

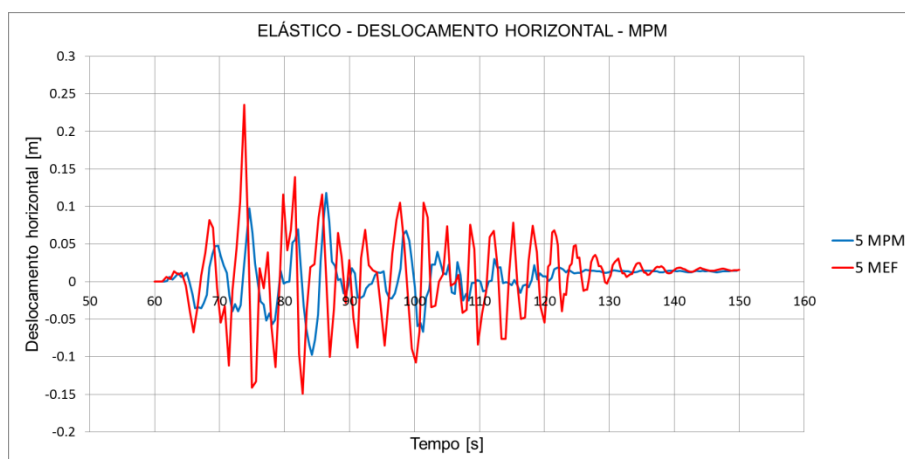


Figura 4.17 – Desenvolvimento dos deslocamentos horizontais do ponto de controle 5 devido ao sismo. (Modelo elástico)

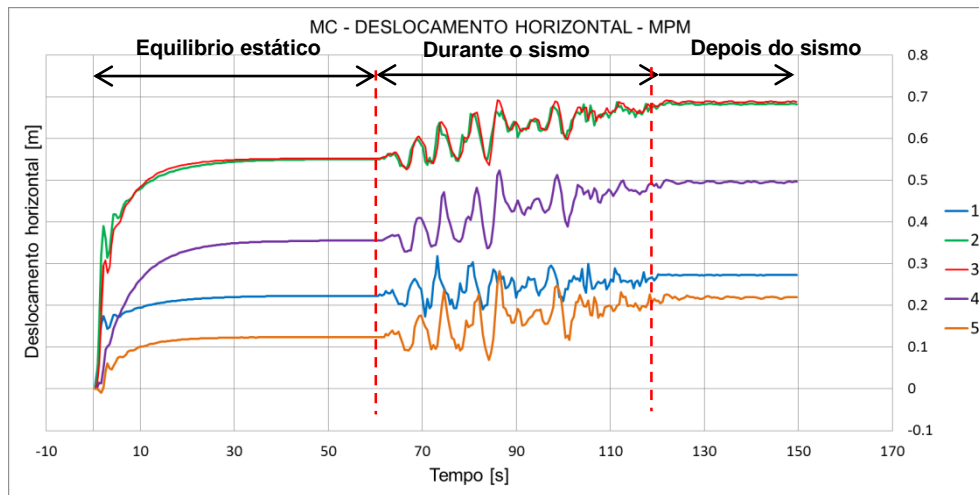


Figura 4.18 – Desenvolvimento dos deslocamentos horizontais para o equilíbrio estático, durante o sismo, e depois do sismo. (Modelo elástico plástico de Mohr Coulomb)

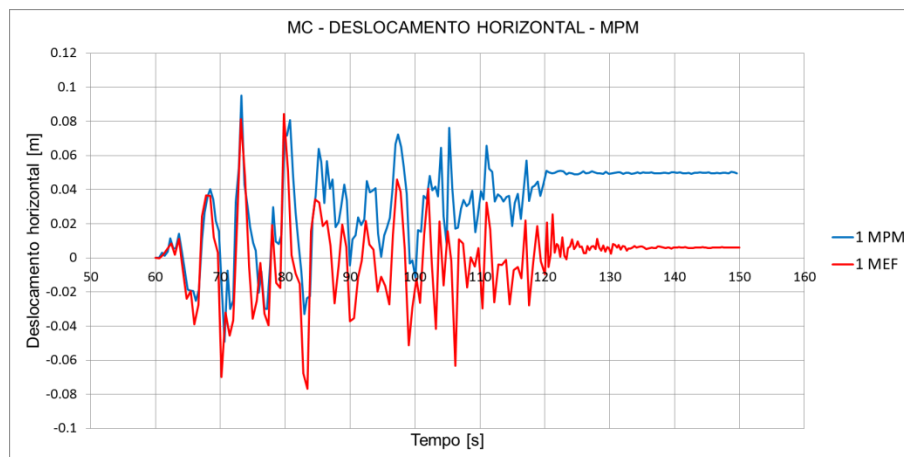


Figura 4.19 – Desenvolvimento dos deslocamentos horizontais do ponto de controle 1 devido ao sismo. (Modelo elástico plástico de Mohr Coulomb)

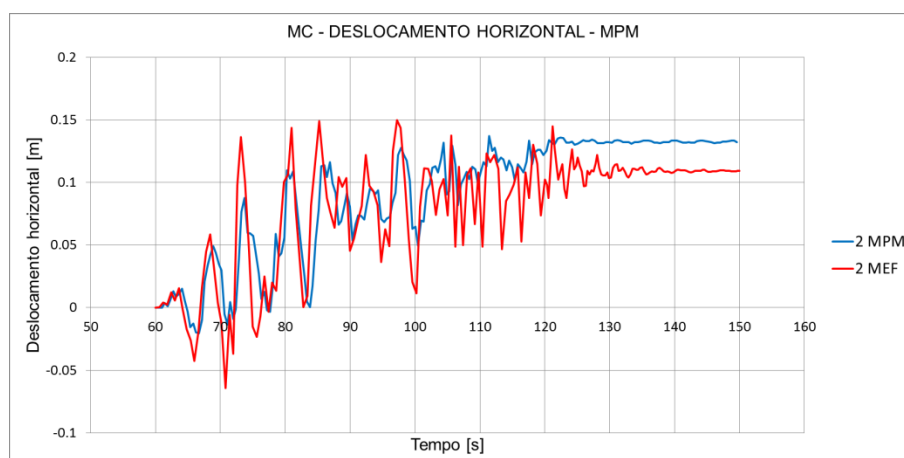


Figura 4.20 – Desenvolvimento dos deslocamentos horizontais do ponto de controle 2 devido ao sismo. (Modelo elástico plástico de Mohr Coulomb)

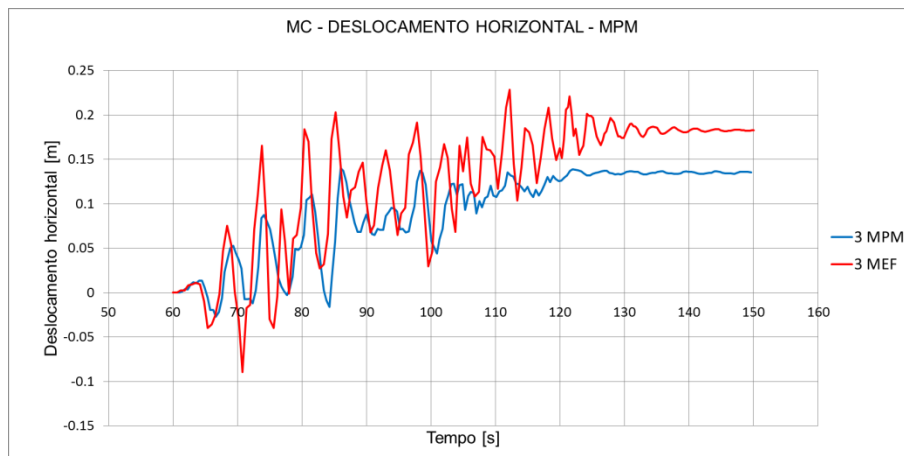


Figura 4.21 – Desenvolvimento dos deslocamentos horizontais do ponto de controle 3 devido ao sismo. (Modelo elástico plástico de Mohr Coulomb)

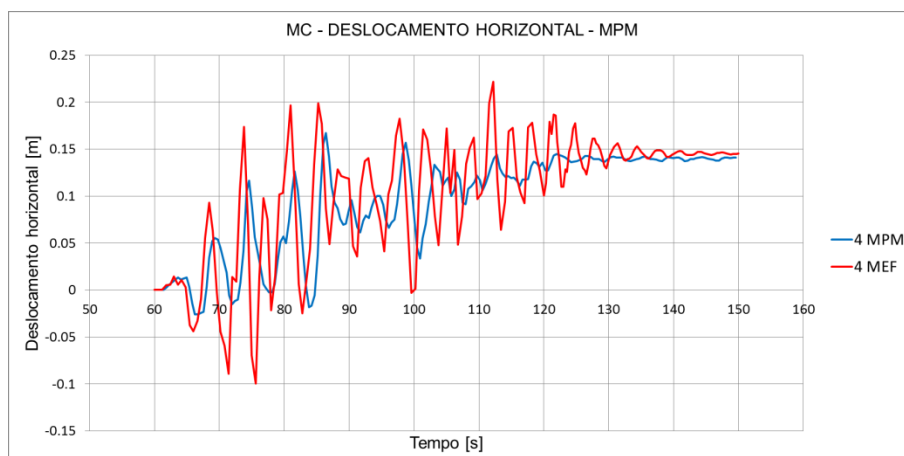


Figura 4.22 – Desenvolvimento dos deslocamentos horizontais do ponto de controle 4 devido ao sismo. (Modelo elástico plástico de Mohr Coulomb)

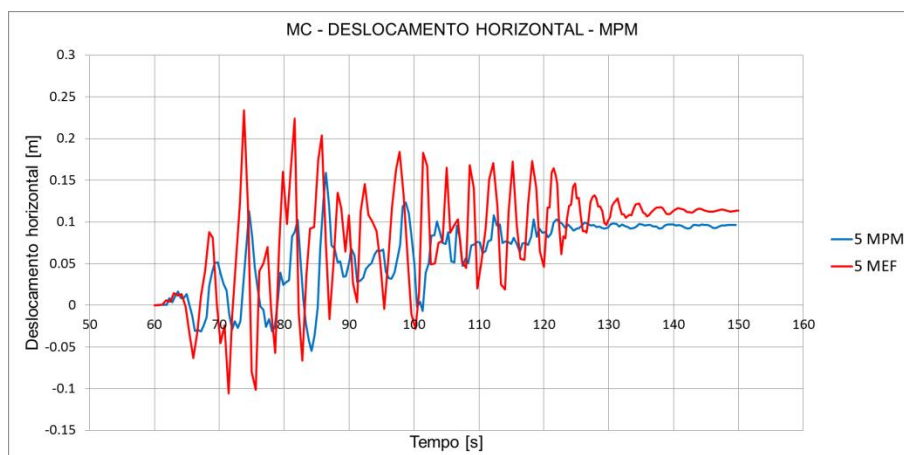


Figura 4.23 – Desenvolvimento dos deslocamentos horizontais do ponto de controle 5 devido ao sismo. (Modelo elástico plástico de Mohr Coulomb)

A análise depois do sismo foi feita para os deslocamentos permanentes horizontais e totais gerados devido ao sismo e com o modelo constitutivo elasto-plástico mediante as três formulações: MPM, MEF, procedimento simplificado de Makdisi e Seed.

Para o cálculo das deformações permanentes, segundo Alva, Infantes (1999) encontraram que a aceleração máxima no topo da barragem Palo Redondo é $1.1280g$ (U_{max}), período fundamental 0.737 segundos (T_o) para o sismo de análise de magnitude $M_s=7.5$. De esta forma encontrasse os deslocamentos permanentes.

Tabla 8
Deformaciones Permanentes Calculadas por el Método de Makdisi y Seed

Sismo de Lima – Perú 10/74 componente N82°O

$M_s = 7.50$ $\ddot{u}_{max} = 1.1280 g$ $T_o = 0.737 \text{ seg}$

**Muda Ky, por tanto mudan os
deslocamentos permanentes.**

A. Talud Aguas Arriba

y/H	K_y	$\frac{K_{max}}{\ddot{u}_{max}}$	K_{max}	$\frac{K_v}{K_{max}}$	$\frac{U}{K_{max} \cdot g \cdot T_o}$	Deformación Permanente (cm)
1/4	0.29	0.85	0.959	0.302	0.140	97.089
1/2	0.27	0.60	0.677	0.399	0.070	34.267
3/4	0.25	0.44	0.496	0.504	0.038	13.641
1	0.23	0.35	0.395	0.583	0.022	6.282

Resultados finais

Profundidade Y/H	Aceleração de escoamento (K_y)	K_{max}/U_{max}	k_{max}	k_y/k_{max}	$U/(k_{max} \cdot g \cdot t_o)$	U (m)
1/4	0.35	0.85	0.96	0.37	0.090	0.62
1/2	0.26	0.60	0.68	0.38	0.070	0.34
3/4	0.22	0.44	0.50	0.44	0.043	0.15
1	0.20	0.35	0.39	0.51	0.040	0.11

Figura 4.24 –Deslocamentos permanentes na jusante calculados por Alva e Infantes da barragem Palo Redondo, 1999 e modificados para este análise.

Finalmente se tem:

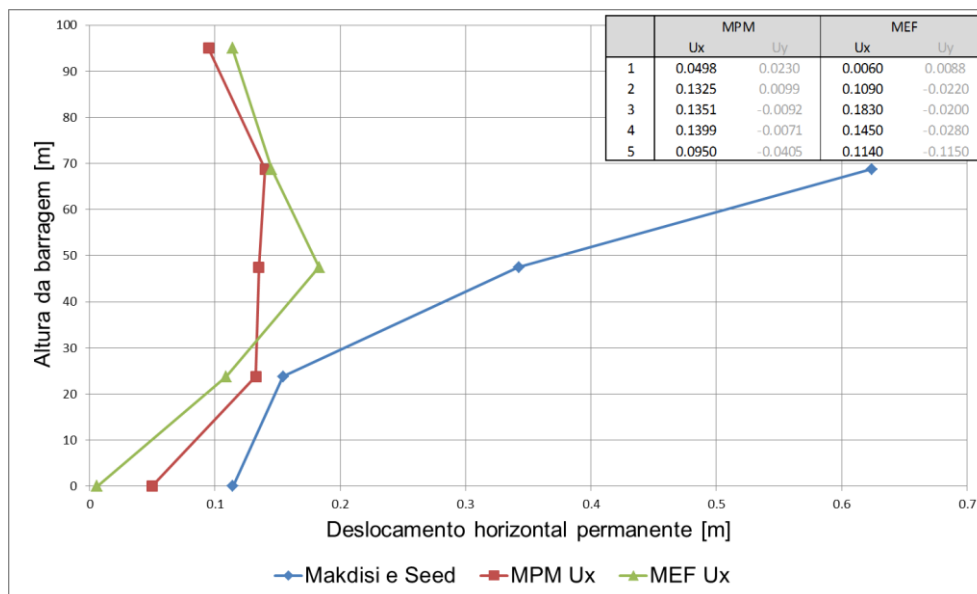


Figura 4.25 –Deslocamentos horizontais permanentes devido unicamente ao sismo.

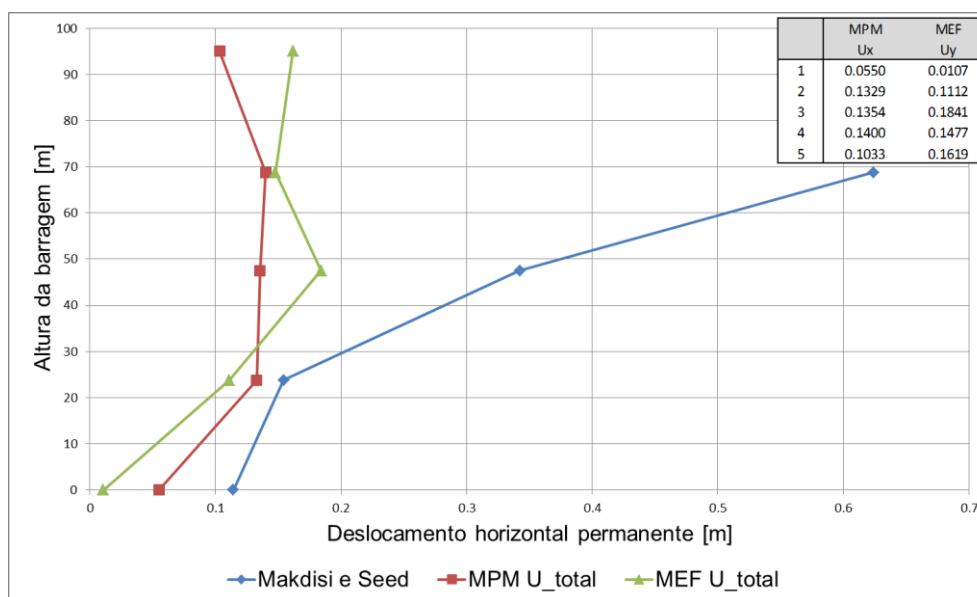


Figura 4.26 –Deslocamentos totais permanentes devido unicamente ao sismo.

Segundo o item 4.1 se fez uma terceira análise com o MPM com o sismo exagerado amplificado 50 vezes os valores do histórico das acelerações do sismo de tem como aceleração máxima 0.38 vezes a aceleração da gravidade e coesão reduzida de 15 kPa para 11.5 kPa. De este modo se tem os seguintes resultados dos mesmos pontos de controle.

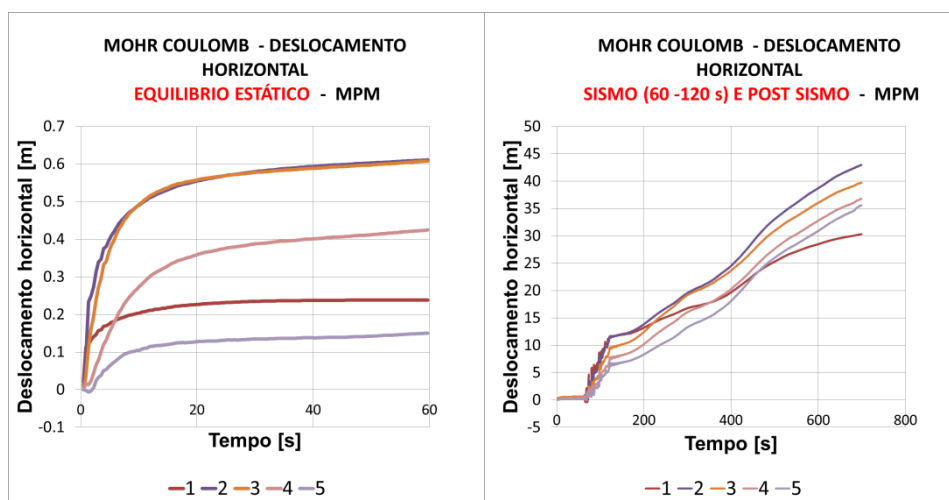


Figura 4.27 –Deslocamentos horizontais.

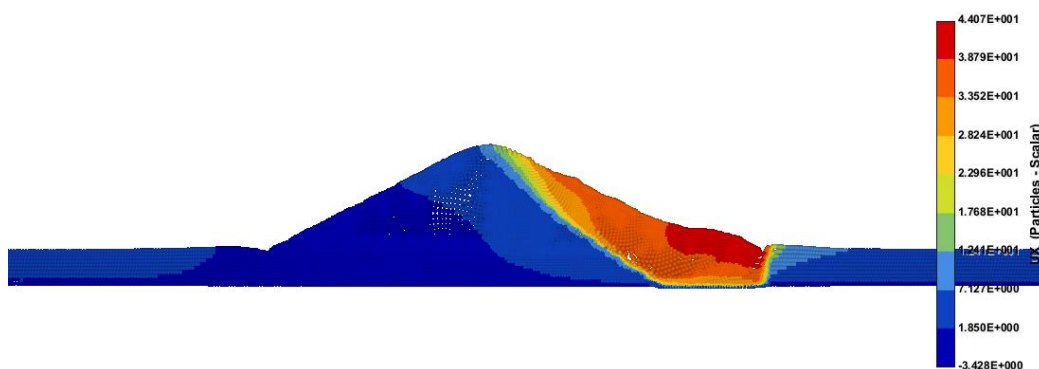


Figura 4.28 – Deslocamentos horizontais.

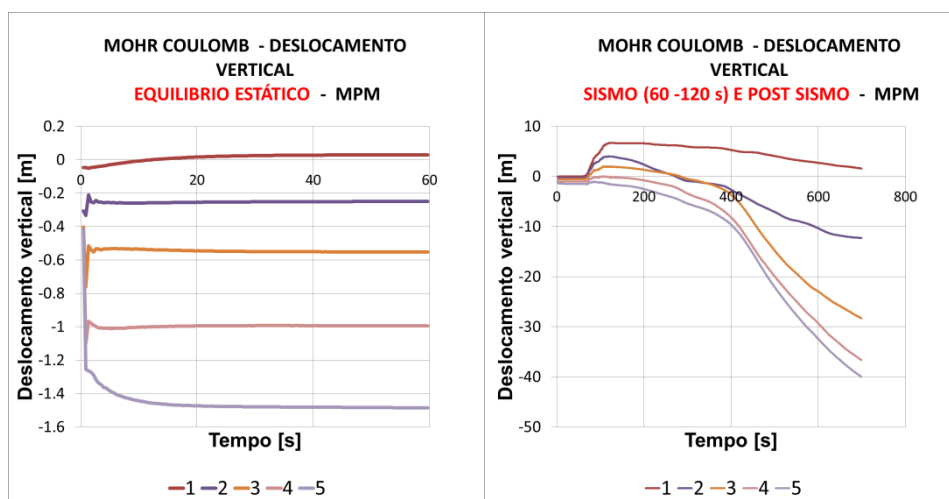


Figura 4.29 –Deslocamentos verticais.

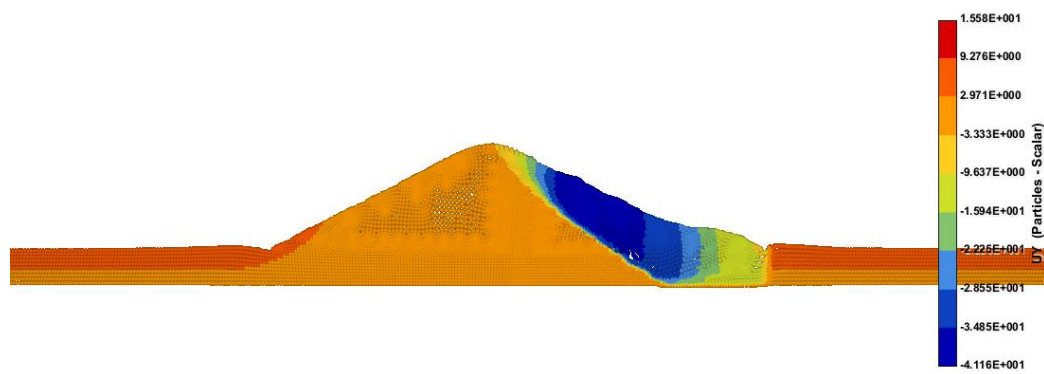


Figura 4.30 –Deslocamentos verticais.

5

Conclusões e sugestões

Das principais conclusões desta pesquisa, podem ser citadas:

- a. O MEF baseada nas equações de conservação de quantidade de movimento fornece um ótimo resultado com relação à solução analítica.
- b. O MPM apresenta uma boa aproximação (comparada com os resultados analíticos) contanto que o número das partículas totais no domínio sejam maiores, além de que o Δt nas iterações seja menor.
- c. A análise feita na coluna de solo com a codificação no lenguaje C++ mostra resultados quase exatos em relação aos analíticos, principalmente quando se fez a análise 2.
- d. Para a análise antes do sismo (equilíbrio estático por peso próprio), segundo as comparações de MEF com MPM no talude jusante da barragem mostram muita boa aproximação para os deslocamentos verticais, entretanto para os deslocamentos horizontais eles mostram a mesma tendência mas com diferente valor numérico. Isto para comportamento elástico e elastoplástico.
- e. A terceira análise feita, com o sismo escalado 50 vezes mostra grandes deslocamentos horizontais e verticais por causa somente do sismo.
- f. O comportamento dinâmico das partículas de controle (MPM) e dos pontos de controle (MEF) durante o sismo não se encontram no mesmo ordem de grandeza devido ao diferente metodologia de amortecimento utilizado no MPM (energia cinética) e no MEF (amortecimento de Rayleigh) mas eles mostram a mesma tendência e deslocamentos permanentes ao final do sismo muito próximos.
- g. Para a análise depois do sismo se conclui que MEF e MPM oferecem boa aproximação dos deslocamentos, entretanto o procedimento simplificado de Makdisi e Seed (1977) mostra resultados muito conservadores em comparação com os anteriores.
- h. O tempo de computação gasto com as metodologias de conservação de quantidade de movimento e MPM em comparação com o tempo

de computação do mesmo problema quando é resolvido por outra metodologia de elementos finitos é muito maior, portanto MPM não é aconselhável para resolver problemas simples.

- i. O MPM fornece resultados ótimos em problemas geotécnicos acoplados; isto é, quando as poropressões se desenvolvem ao mesmo tempo em que as deformações nos sólidos, ao longo do tempo.
- j. Pelo procedimento dinâmico de solução, robustez, além da simplicidade do MPM, as condições de contorno de acelerações e velocidades podem ser incluídas em qualquer momento do processo, portanto se pode introduzir todo tipo de cargas dinâmicas em termos de aceleração e velocidade, por exemplo, vibração de maquinarias, cravação de estacas, sismo, etc., na condição acoplada ou não, obtendo resultados favoráveis.
- k. O MPM devido a sua natureza dinâmica, precisa de sistemas amortecedores de qualquer tipo para atingir a solução.
- l. Pela simplicidade do MPM, a implementação dos modelos constitutivos podem ser feitas com ótimos resultados.

Como principais sugestões de futuras pesquisas são citadas as seguintes:

- a. Considerando o MPM como uma metodologia muito útil na engenharia geotécnica se aconselha a implementação dela num software de tipo comercial onde se encontrem disponível diferentes modelos constitutivos.
- b. Sugere-se a extensão da teoria do MPM para condições tridimensionais.
- c. Processos de otimização do tempo de computação no MPM e MEF - conservação de quantidade de movimento devem ser analisados com o objetivo de ser minimizados.

Referências bibliográficas

ALIPOUR, A., ZARCIAN, F., **Study Rayleigh Damping in Structures. Uncerainties And Treatments.** The 14th World Conference on Earthquake Engineering, The Henry Samueli School of Engineering, University of California Irvine ,USA, pp. 8, 2008.

ALVA, J., INFANTES, M., **Diseño Sísmico de Presas de Tierra y Enrocado.** XII congreso nacional de Ingeniería Civil, Huánuco, pp.1-19, 1999.

ISSAM K. J. AL-KAFAJI, **Formulation of a Dynamic Material Point Method (MPM) for Geomechanical Problems.** University of Stuttgart, pp.1-145, 2013.

MANCHAO, H., LEAL, E., MULLER, A., VARGAS, E., RIBEIRO, E., XIN, CH., **Analysis of excessive deformations in tunnels for safety evaluation.** Tunnelling and Underground Space Technology, v. 45, p.190-202, 2015.

MULLER, A., VARGAS, E., **The Material Point Method for analysis of closure mechanisms in openings and impact in saturated porous media.** In: 48th US Rock Mechanics / Geomechanics Symposium, 2014, Minneapolis. 48th US Rock Mechanics / Geomechanics Symposium, 2014.

MULLER, A., VARGAS, E., SILVESTRE, J., **Evaluation of MPM (Material Point Method) in the analysis of the viscous behavior of rocks around boreholes under large strains.** In: CILAMCE2015 - XXXVI Ibero-Latin American Congress on Computational Methods in Engineering, 2015, Rio de Janeiro. CILAMCE2015 - XXXVI Ibero-Latin American Congress on Computational Methods in Engineering, pp.1-13, 2015

PEI CHI, CH., NICHOLAS, P., **Elasticity: Tensor, Dyadic, and Engineering Approaches.** Drexel University Philadelphia, Pennsylvania, 1992, pp.1-47.

PEREZ, F., **Comportamento dinâmico de uma barragem de rejeitos com considerações de ameaça sísmica.** Dissertação de mestrado, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, p.90, 2013.

PLAXIS 2D software, **Reference manual**, 2016

RIBEIRO, E., VARGAS, E., RUIZ., KARAM K., LEAL, E., MULLER, A., **Analysis of Large Landslides Induced by the 2008 Wenchuan Earthquake.** China. Natural Hazards, Ponta Delgada, 2016.

STOMAKHIN, A., SCHROEDER, C., CHAI, L., TERAN, J., SELLE, A., **A Material Point Method for Snow Simulation.** University of California Los Angeles, Walt Disney Animation Studios, pp.1-10, 2013.

SULSKY, D., SCHREYER, H., **Axisymmetric Form of The Material Point Method with Applications to Upsetting and Taylor Impact Problems.**

Department of Mathematics and Statistics, University of New Mexico, Albuquerque, pp.1-8, 1996.

YERRO, A., ALONSO, E., **The Material Point Method: A Promising Computational Tool In Geotechnics**. Department of Geotechnical Engineering and Geosciences. International Center for Numerical Methods in Engineering. UPC, Barcelona, Spain, pp.1-4, 2013.