

### 3

## Modelagem Aproximada de Cascas Cilíndricas Laminadas

Como discutido no primeiro capítulo, o objetivo do presente trabalho é propor um método para simular a dinâmica de cascas cilíndrica laminadas em altas frequências onde o perfil de deslocamento usualmente apresenta uma rápida variação espacial ao longo da espessura do laminado. Esta particularidade do campo de deslocamento faz com que as teorias clássicas de cascas (*Classical Theory of Shells-CST*) sejam inadequadas na faixa de altas frequências ou quando se trabalha com cascas grossas, já que o efeito da inércia rotacional e o efeito das deformações transversais não são considerados nestas teorias. Para superar este inconveniente empregou-se, neste trabalho, uma formulação baseada na teoria discreta de Reddy para compósitos laminados (*Reddy's discrete layerwise theory* [8]). Esta teoria, formulada para placas e vigas, é uma generalização das teorias com considerações cinemáticas simplificadas como as de Bernoulli e Timoshenko para vigas e Kirchoff e Mindlin para placas. Assim, o método consiste em dividir a espessura da casca em lâminas delgadas na direção radial, impondo condições cinemáticas para cada uma delas. Desta forma, um estado tridimensional de tensões é assumido para cada lâmina.

Neste capítulo são apresentados todos os passos para a obtenção da equação de estado que governa o comportamento dinâmico de uma casca cilíndrica laminada.

### 3.1

#### Teoria Discreta de Reddy

Neste trabalho empregou-se a teoria discreta de Reddy para representar o campo de deslocamento da casca cilíndrica, como o mostrado na Figura 3.1, da seguinte forma:

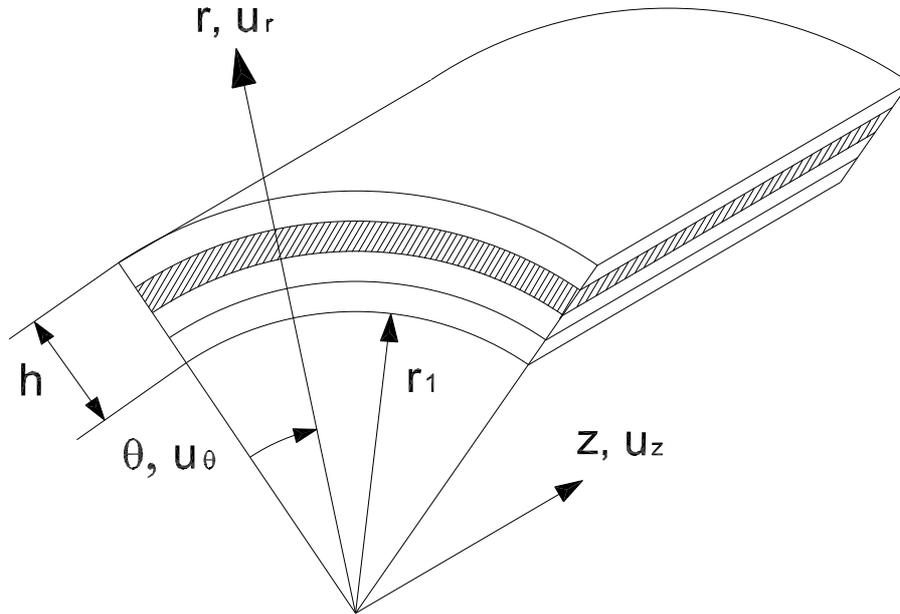


Figura 3.1: Geometria da Casca Cilíndrica Laminada

$$\begin{aligned}
 u_r(r, \theta, z, t) &= \sum_{\alpha=1}^N \xi^\alpha(r) u_r^\alpha(\theta, z, t) \\
 u_\theta(r, \theta, z, t) &= \sum_{\beta=1}^M \psi^\beta(r) u_\theta^\beta(\theta, z, t) \\
 u_z(r, \theta, z, t) &= \sum_{\gamma=1}^P \eta^\gamma(r) u_z^\gamma(\theta, z, t)
 \end{aligned} \tag{3-1}$$

Onde  $u_r^\alpha$ ,  $u_\theta^\beta$  e  $u_z^\gamma$  são os deslocamentos na direção radial, tangencial e axial na interface de cada camada, e  $\xi^\alpha, \psi^\beta$  e  $\eta^\gamma$  são as funções de interpolação que serão empregadas.

Na teoria de Reddy, a ordem e o número de funções de interpolação são arbitrárias; no entanto, neste trabalho empregou-se somente funções lineares de interpolação de Lagrange. Considerou-se também o mesmo número de funções de interpolação para o campo de deslocamento ( $N = M = P$ ). Neste caso,  $\alpha = \beta = \gamma = 1, 2, \dots, n_L + 1$ , onde  $n_L$  é o número de lâminas empregado. Isto pode ser observado na Figura 3.2. Nesta teoria, o número

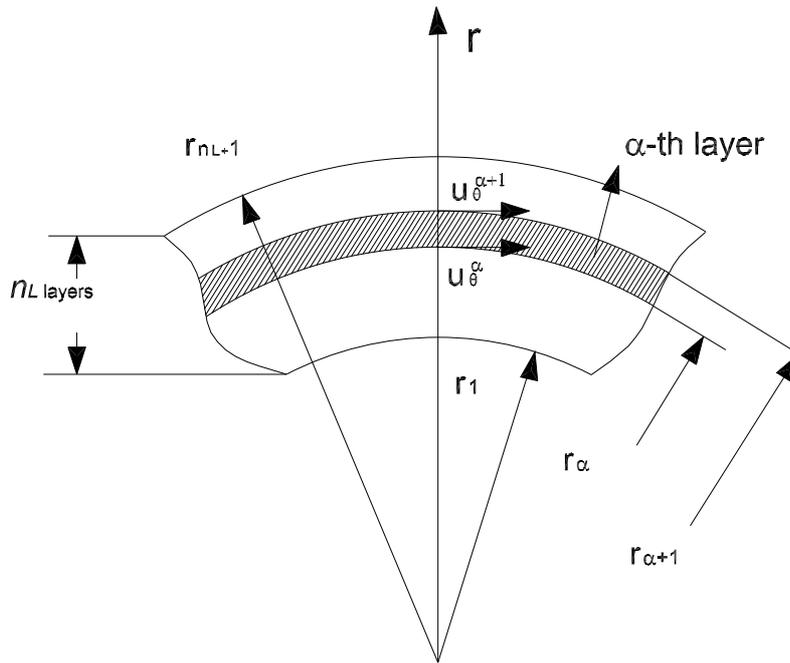


Figura 3.2: Distribuição de deslocamentos ao longo da espessura da casca de lâminas  $n_L$  não tem necessariamente que coincidir com o número de camadas homogêneas. Uma camada homogênea pode ser dividida em duas ou mais subcamadas do mesmo material, aumentando, desta maneira, o número de funções de interpolação.

As funções de interpolação são definidas da seguinte forma:

$$\xi^\alpha(r) = \psi^\alpha(r) = \eta^\alpha(r) = \begin{cases} \frac{r-r_{\alpha-1}}{r_\alpha-r_{\alpha-1}}, & \text{if } r_{\alpha-1} < r < r_\alpha \\ \frac{r_{\alpha+1}-r}{r_{\alpha+1}-r_\alpha}, & \text{if } r_\alpha < r < r_{\alpha+1} \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (3-2)$$

### 3.2 Formulação Variacional

O princípio variacional aplicado a uma casca cilíndrica laminada, considerando um estado tridimensional de tensões, pode ser escrito da

seguinte forma:

$$\int_V (T_1 \delta S_1 + T_2 \delta S_2 + T_3 \delta S_3 + T_4 \delta S_4 + T_5 \delta S_5 + T_6 \delta S_6) dV + \int_V \rho \left( \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} \delta u_r + \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial t^2} \delta u_\theta + \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} \delta u_z \right) dV - \int_A (f_r \delta u_r) dA = 0 \quad (3-3)$$

onde

$u_r$ ,  $u_\theta$  e  $u_z$ - componentes do vetor deslocamento

$T_I$  - componentes do tensor tensão

$S_I$  - componentes do tensor deformação

$f_r$  - carregamento radial por unidade de área

$\rho$  - densidade

O tensor deformação em função dos deslocamentos, em coordenadas cilíndricas, foi definido da seguinte forma:

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{\partial u_r}{\partial r} & S_2 &= \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} & S_3 &= \frac{\partial u_z}{\partial z} & S_4 &= \frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} \\ S_5 &= \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} & S_6 &= \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \end{aligned} \quad (3-4)$$

Neste caso, a equação constitutiva para uma lâmina de material ortotrópico tem a seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \\ T_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{22} & c_{23} & 0 & 0 & 0 \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \\ S_5 \\ S_6 \end{bmatrix} \quad (3-5)$$

Onde para o caso particular de um material isotrópico:

$$c_{11} = c_{22} = c_{33} = \lambda + 2\mu \quad c_{12} = c_{13} = c_{23} = \lambda \quad c_{44} = c_{55} = c_{66} = \mu$$

sendo  $\lambda, \mu$  as constantes de Lamé.

### 3.3

#### Equações de Balanço

Para determinar as equações de Balanço definiu-se os seguintes esforços generalizados:

$$P_i^\alpha = \int_{r_\alpha}^{r_{\alpha+1}} T_i \frac{\partial \xi^\alpha(r)}{\partial r} r dr \quad i = 1, 5, 6 \quad (3-6)$$

$$T_i^\alpha = \int_{r_\alpha}^{r_{\alpha+1}} T_i \xi^\alpha(r) dr \quad i = 2, 4, 6 \quad (3-7)$$

$$M_i^\alpha = \int_{r_\alpha}^{r_{\alpha+1}} T_i \xi^\alpha(r) r dr \quad i = 3, 4, 5 \quad (3-8)$$

Onde  $r_\alpha$  e  $r_{\alpha+1}$  são os raios interno e externo da  $\alpha$ -th camada da casca como mostrado na Figura 3.2.

Também será introduzida a seguinte notação:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}^{\beta,\alpha}(c) &= \int_{r_\alpha}^{r_{\alpha+1}} c \xi^\beta(r) \xi^\alpha(r) r dr & \mathcal{B}^{\beta,\alpha}(c) &= \int_{r_\alpha}^{r_{\alpha+1}} c \xi^\beta(r) \xi^\alpha(r) dr \\ \mathcal{C}^{\beta,\alpha}(c) &= \int_{r_\alpha}^{r_{\alpha+1}} c \xi^\beta(r) \frac{\partial \xi^\alpha(r)}{\partial r} dr & \mathcal{D}^{\beta,\alpha}(c) &= \int_{r_\alpha}^{r_{\alpha+1}} c \frac{\xi^\beta(r)}{r} \xi^\alpha(r) dr \end{aligned} \quad (3-9)$$

$$\mathcal{E}^{\beta,\alpha}(c) = \int_{r_\alpha}^{r_{\alpha+1}} c \frac{\partial \xi^\beta(r)}{\partial r} \frac{\partial \xi^\alpha(r)}{\partial r} r dr \quad \mathcal{F}^{\beta,\alpha}(c) = \int_{r_\alpha}^{r_{\alpha+1}} c \xi^\beta \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial r} r dr$$

Onde  $c$  representa uma constante elástica do material.

Substituindo os termos que foram definidos nas equações (3-6-3-9) no princípio variacional (Equação (3-3)) obtém-se:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} \begin{bmatrix} M_5^\alpha \\ M_4^\alpha \\ M_3^\alpha \end{bmatrix} + \frac{\partial}{\partial \theta} \begin{bmatrix} T_6^\alpha \\ T_2^\alpha \\ T_4^\alpha \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} P_1^\alpha \\ P_6^\alpha \\ P_5^\alpha \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} T_2^\alpha \\ -T_6^\alpha \\ 0 \end{bmatrix} \\ + \sum_{\beta=1}^N \begin{bmatrix} \mathcal{A}^{\beta,\alpha}(\rho) & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{A}^{\beta,\alpha}(\rho) & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{A}^{\beta,\alpha}(\rho) \end{bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \begin{bmatrix} u_r^\beta \\ u_\theta^\beta \\ u_z^\beta \end{bmatrix} &+ \begin{bmatrix} -f_r q^\alpha \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3-10)$$

Onde  $q^\alpha = b \delta(r_\alpha - r_{n_{L+1}})$ ,  $\delta(r_\alpha)$  é a função Delta de Dirac e  $b = r_{n_{L+1}}$  é o raio externo da casca cilíndrica.

Considerou-se, daqui em diante, que todos os campos dependem harmonicamente do tempo, assumindo a forma:

$$F(r, \theta, z, t) = F_n(r, z) e^{i(n\theta - \omega t)} \quad (3-11)$$

Utilizando a equação anterior pode-se reescrever as equações (3-6-3-8) da seguinte forma:

$$P_i^\alpha = p_i^\alpha(z) e^{i(n\theta - \omega t)} \quad (3-12)$$

$$T_i^\alpha = t_i^\alpha(z) e^{i(n\theta - \omega t)} \quad (3-13)$$

$$M_i^\alpha = m_i^\alpha(z) e^{i(n\theta - \omega t)} \quad (3-14)$$

A partir da equação (3-10) e utilizando as definições dadas em (3-11-3-14) pode-se encontrar as equações de balanço:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} \begin{bmatrix} m_5^\alpha \\ m_4^\alpha \\ m_3^\alpha \end{bmatrix} + in \begin{bmatrix} t_6^\alpha \\ t_2^\alpha \\ t_4^\alpha \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} p_1^\alpha \\ p_6^\alpha \\ p_5^\alpha \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t_2^\alpha \\ -t_6^\alpha \\ 0 \end{bmatrix} \\ -\omega^2 \sum_{\beta=1}^N \underbrace{\begin{bmatrix} \mathcal{A}^{\beta,\alpha}(\rho) & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{A}^{\beta,\alpha}(\rho) & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{A}^{\beta,\alpha}(\rho) \end{bmatrix}}_{\mathbf{U}_0} \begin{bmatrix} u_r^\beta \\ u_\theta^\beta \\ u_z^\beta \end{bmatrix} &+ \underbrace{\begin{bmatrix} -f_r q^\alpha \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{F}_0} \end{aligned} \quad (3-15)$$

### 3.4 Equação de Estado

As expressões dos esforços generalizados (Equações (3-12-3-14)) podem ser obtidas em função dos deslocamentos usando a equação consti-

tutiva(Equação (3-5)):

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} m_5^\alpha \\ m_4^\alpha \\ m_3^\alpha \end{bmatrix} &= \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & \mathcal{F}^{\alpha,\beta}(c_{55}) \\ 0 & 0 & in\mathcal{B}^{\beta,\alpha}(c_{44}) \\ \mathcal{F}^{\alpha,\beta}(c_{13}) + \mathcal{B}^{\beta,\alpha}(c_{23}) & in\mathcal{B}^{\beta,\alpha}(c_{23}) & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{U}_1} \begin{bmatrix} u_r^\beta \\ u_\theta^\beta \\ u_z^\beta \end{bmatrix} \\
 &+ \underbrace{\begin{bmatrix} \mathcal{A}^{\beta,\alpha}(c_{55}) & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{A}^{\beta,\alpha}(c_{44}) & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{A}^{\beta,\alpha}(c_{33}) \end{bmatrix}}_{\mathbf{V}_1} \frac{\partial}{\partial z} \begin{bmatrix} u_r^\beta \\ u_\theta^\beta \\ u_z^\beta \end{bmatrix} \quad (3-16)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} t_6^\alpha \\ t_2^\alpha \\ t_4^\alpha \end{bmatrix} &= \underbrace{\begin{bmatrix} in\mathcal{D}^{\beta,\alpha}(c_{66}) & \mathcal{C}^{\alpha,\beta}(c_{66}) - \mathcal{D}^{\beta,\alpha}(c_{66}) & 0 \\ \mathcal{C}^{\alpha,\beta}(c_{12}) + \mathcal{D}^{\beta,\alpha}(c_{22}) & in\mathcal{D}^{\beta,\alpha}(c_{22}) & 0 \\ 0 & 0 & in\mathcal{D}^{\beta,\alpha}(c_{44}) \end{bmatrix}}_{\mathbf{U}_2} \begin{bmatrix} u_r^\beta \\ u_\theta^\beta \\ u_z^\beta \end{bmatrix} \\
 &+ \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{B}^{\beta,\alpha}(c_{23}) \\ 0 & \mathcal{B}^{\beta,\alpha}(c_{44}) & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{V}_2} \frac{\partial}{\partial z} \begin{bmatrix} u_r^\beta \\ u_\theta^\beta \\ u_z^\beta \end{bmatrix} \quad (3-17)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} p_1^\alpha \\ p_6^\alpha \\ p_5^\alpha \end{bmatrix} &= \underbrace{\begin{bmatrix} \mathcal{E}^{\beta,\alpha}(c_{11}) + \mathcal{C}^{\beta,\alpha}(c_{12}) & in\mathcal{C}^{\beta,\alpha}(c_{12}) & 0 \\ in\mathcal{C}^{\beta,\alpha}(c_{66}) & \mathcal{E}^{\beta,\alpha}(c_{66}) - \mathcal{C}^{\beta,\alpha}(c_{66}) & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{E}^{\beta,\alpha}(c_{55}) \end{bmatrix}}_{\mathbf{U}_3} \begin{bmatrix} u_r^\beta \\ u_\theta^\beta \\ u_z^\beta \end{bmatrix} \\
 &+ \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & \mathcal{F}^{\beta,\alpha}(c_{13}) \\ 0 & 0 & 0 \\ \mathcal{F}^{\beta,\alpha}(c_{55}) & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{V}_3} \frac{\partial}{\partial z} \begin{bmatrix} u_r^\beta \\ u_\theta^\beta \\ u_z^\beta \end{bmatrix} \quad (3-18)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} t_2^\alpha \\ -t_6^\alpha \\ 0 \end{bmatrix} &= \underbrace{\begin{bmatrix} \mathcal{C}^{\alpha,\beta}(c_{12}) + \mathcal{D}^{\beta,\alpha}(c_{22}) & in\mathcal{D}^{\beta,\alpha}(c_{22}) & 0 \\ -in\mathcal{D}^{\beta,\alpha}(c_{66}) & \mathcal{D}^{\beta,\alpha}(c_{66}) - \mathcal{C}^{\alpha,\beta}(c_{66}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{U}_4} \begin{bmatrix} u_r^\beta \\ u_\theta^\beta \\ u_z^\beta \end{bmatrix} \\
 &+ \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & \mathcal{B}^{\beta,\alpha}(c_{23}) \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{V}_4} \frac{\partial}{\partial z} \begin{bmatrix} u_r^\beta \\ u_\theta^\beta \\ u_z^\beta \end{bmatrix} \quad (3-19)
 \end{aligned}$$

Substituindo as equações (3-16-3-19) nas equações de balanço (3-15) obtemos:

$$(in \mathbf{V}_2 - \mathbf{V}_3 - \mathbf{V}_4) \frac{d\mathbf{u}}{dz} + \frac{d\mathbf{m}}{dz} = (\mathbf{U}_3 + \mathbf{U}_4 - in \mathbf{U}_2 - \omega^2 \mathbf{U}_0) \mathbf{u} - \mathbf{F}_0 \quad (3-20)$$

De acordo com a equação (3-16) o vetor  $\mathbf{m}$  tem a forma:

$$\mathbf{m} = \mathbf{U}_1 \mathbf{u} + \mathbf{V}_1 \frac{d\mathbf{u}}{dz} \quad (3-21)$$

Após algumas manipulações com as equações (3-20) e (3-21) chega-se a equação de estado:

$$\frac{d\zeta}{dz} = \mathbf{A} \zeta + \mathbf{F} \quad (3-22)$$

Onde  $\mathbf{F}$  é o vetor de forças distribuídas definido da seguinte forma:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{F}_0 \end{bmatrix} \quad (3-23)$$

O vetor de estado  $\zeta$  e a matriz de estado  $\mathbf{A}$  são definidos como:

$$\zeta = \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{m} \end{bmatrix} \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix} \quad (3-24)$$

com

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_r \\ \mathbf{u}_\theta \\ \mathbf{u}_z \end{bmatrix} \quad \mathbf{m} = \begin{bmatrix} \mathbf{m}_5 \\ \mathbf{m}_4 \\ \mathbf{m}_3 \end{bmatrix} \quad (3-25)$$

e

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{11} &= -\mathbf{V}_1^{-1} \mathbf{U}_1 & \mathbf{A}_{12} &= \mathbf{V}_1^{-1} \\ \mathbf{A}_{21} &= \mathbf{N}_2 + \mathbf{N}_1 \mathbf{V}_1^{-1} \mathbf{U}_1 & \mathbf{A}_{22} &= -\mathbf{N}_1 \mathbf{V}_1^{-1} \end{aligned} \quad (3-26)$$

Nestas equações  $\mathbf{u}_r, \mathbf{u}_\theta, \mathbf{u}_z$  são vetores de dimensões  $n_L + 1$  agrupando, respectivamente, as variáveis  $u_r^\beta, u_\theta^\beta, u_z^\beta$ . As forças generalizadas  $\mathbf{m}_5, \mathbf{m}_4, \mathbf{m}_3$ , definidas na equação (3-14), são também de dimensões  $n_L + 1$ .

As matrizes  $\mathbf{N}_1$  e  $\mathbf{N}_2$  são definidas da seguinte forma:

$$\mathbf{N}_1 = in \mathbf{V}_2 - \mathbf{V}_3 - \mathbf{V}_4 \quad \mathbf{N}_2 = \mathbf{U}_3 + \mathbf{U}_4 - in \mathbf{U}_2 - \omega^2 \mathbf{U}_0 \quad (3-27)$$

A forma das matrizes  $\mathbf{N}_1$  e  $\mathbf{N}_2$ , assim como a forma das matrizes auxiliares  $\mathcal{A}(c), \dots, \mathcal{F}(c)$  podem ser consultadas no apêndice A.

A equação de Estado, definida na equação (3-22), é uma equação matricial diferencial linear de primeira ordem que descreve a resposta harmônica de uma casca cilíndrica laminada. Além disso, deve-se indicar que a matriz de estado  $\mathbf{A}$  é de dimensão  $6(n_L + 1) \times 6(n_L + 1)$  e depende do parâmetro circunferencial  $n$ , da frequência  $\omega$  e do número de lâminas empregado ( $n_L$ ).

Finalmente, indicam-se algumas propriedades das matrizes auxiliares da matriz de estado. Estas propriedades, que são de vital importância para a solução da equação de estado, serão utilizadas no próximo capítulo:

$$\mathbf{N}_2 = \mathbf{N}_2^H \quad (3-28)$$

$$\mathbf{N}_1 = -\mathbf{U}_1^H \quad (3-29)$$

Onde  $H$  indica a transposta de Hermite. Além disso, a matriz  $\mathbf{V}_1$  é sempre real e simétrica, porém:  $\mathbf{V}_1^H = \mathbf{V}_1$