2
Propagação de ondas elásticas em cilindros

2.1
Elastodinâmica Linear

As equações que governam o movimento de um corpo sólido, elástico e isotrópico são:

$$\tau_{ij,j} + \rho f_i = \rho\,\ddot{u}_i \tag{2-1}$$

$$\tau_{ij} = \lambda\,\varepsilon_{kk}\,\delta_{ij} + 2\mu\,\varepsilon_{ij} \tag{2-2}$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(u_{i,j} + u_{j,i}\right) \tag{2-3}$$

Onde (2-1) é a equação de movimento, (2-2) é a equação constitutiva para um material isotrópico em função das constantes de Lamé e (2-3) é o tensor deformação.
Substituindo as expressões para as deformações e tensões na primeira equação, obtemos a equação de Navier para um meio isotrópico.

$$(\lambda + \mu)\,u_{j,j\,i} + \mu u_{i,jj} + \rho f_i = \rho\,\ddot{u}_i \tag{2-4}$$

Reescrevendo esta equação usando notação vetorial e sem considerar a força de corpo, temos:

$$(\lambda + \mu)\nabla\nabla.\mathbf{u} + \mu\nabla^2\mathbf{u} = \rho\,\ddot{\mathbf{u}} \tag{2-5}$$

Em notação indicial, esta equação representa três equações. Para obter um conjunto de equações mais simples será utilizada a decomposição de Helmholtz (Graff[14]).

$$\mathbf{u} = \nabla\varphi + \nabla \times \boldsymbol{\psi} \qquad \nabla.\boldsymbol{\psi} = 0 \tag{2-6}$$

A equação $\nabla.\boldsymbol{\psi} = 0$ é chamada "Gauge Condition"e fornece a última condição que é necessária para determinar o campo de deslocamento $\mathbf{u}$ (Graff [14]).

Substituindo a equação de Helmholtz na equação (2-5) encontra-se duas novas equações em função do potencial escalar φ e do potencial vetorial $\boldsymbol{\psi}$, respectivamente. Estas equações representam duas ondas se propagando. A primeira representa uma onda com o vetor deslocamento paralelo ao sentido de propagação (onda longitudinal) e a segunda representa uma onda com o vetor deslocamento transversal ao sentido de propagação (onda transversal).

$$\nabla^2\varphi = \frac{1}{c_L^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} \tag{2-7}$$

$$\nabla^2\boldsymbol{\psi} = \frac{1}{c_T^2}\frac{\partial^2\boldsymbol{\psi}}{\partial t^2} \tag{2-8}$$

Onde

$$c_L^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho} \qquad \text{e} \qquad c_T^2 = \frac{\mu}{\rho} \tag{2-9}$$

c_L e c_T são as velocidades de propagação de onda longitudinal e transversal, respectivamente.

Em coordenadas cilíndricas $\nabla^2\varphi$ e $\nabla^2\boldsymbol{\psi}$ são representados da seguinte forma:

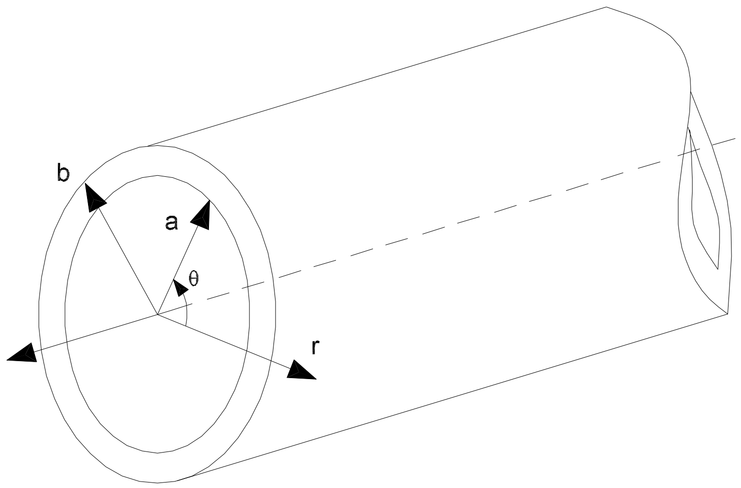

Figura 2.1: Cilindro infinito

$$\nabla^2\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} \tag{2-10}$$

$$\nabla^2\boldsymbol{\psi} = \left(\nabla^2\psi_r - \frac{\psi_r}{r^2} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial\psi_\theta}{\partial\theta}\right)\mathbf{e_r} + \left(\nabla^2\psi_\theta - \frac{\psi_\theta}{r^2} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial\psi_r}{\partial\theta}\right)\mathbf{e}_\theta + \nabla^2\psi_z\mathbf{e_z} \tag{2-11}$$

onde $\mathbf{e_r}, \mathbf{e}_\theta$ e $\mathbf{e_z}$ são os vetores unitários na direção radial, circunferencial e axial, respectivamente.

A partir das equações (2-8) e (2-11) pode-se resumir as equações para as componentes do potencial vetorial $\boldsymbol{\psi}$

$$\nabla^2\psi_r - \frac{\psi_r}{r^2} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial\psi_\theta}{\partial\theta} = \frac{1}{c_T^2}\frac{\partial\psi_r^2}{\partial t^2} \quad (2\text{-}12)$$

$$\nabla^2\psi_\theta - \frac{\psi_\theta}{r^2} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial\psi_r}{\partial\theta} = \frac{1}{c_T^2}\frac{\partial\psi_\theta^2}{\partial t^2} \quad (2\text{-}13)$$

$$\nabla^2\psi_z = \frac{1}{c_T^2}\frac{\partial^2\psi_z}{\partial t^2} \quad (2\text{-}14)$$

Sendo ∇ e ∇^2 definidos em coordenadas cilíndricas como :

$$\nabla = \mathbf{e_r}\frac{\partial}{\partial r} + \mathbf{e}_\theta\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} + \mathbf{e_z}\frac{\partial}{\partial z}$$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Em coordenadas cilíndricas, o campo de deslocamentos de acordo com a equação (2-6) pode ser escrito da seguinte forma:

$$u_r = \frac{\partial\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\psi_z}{\partial\theta} - \frac{\partial\psi_\theta}{\partial z} \quad (2\text{-}15)$$

$$u_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta} + \frac{\partial\psi_r}{\partial z} - \frac{\partial\psi_z}{\partial r} \quad (2\text{-}16)$$

$$u_z = \frac{\partial\varphi}{\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial(r\,\psi_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial\psi_r}{\partial\theta} \quad (2\text{-}17)$$

Para resolver estas equações considera-se um cilindro infinito como o mostrado na Figura 2.1, com raios interno e externo a e b, respectivamente. Se o cilindro é livre de tensões nas superfícies interna e externa, então as condições de contorno são:

$$\tau_{rr} = \tau_{r\theta} = \tau_{rz} = 0 \qquad r = a, b \quad (2\text{-}18)$$

2.2 Ondas Harmônicas

Considera-se a propagação de ondas harmônicas num cilindro, porém φ e $\boldsymbol{\psi}$ assumirão a seguinte forma:

$$\varphi = f(r)\Theta_1(\theta)e^{i(k_z z-\omega t)} \tag{2-19}$$

$$\psi_r = h_r(r)\Theta_r(\theta)e^{i(k_z z-\omega t)} \tag{2-20}$$

$$\psi_\theta = h_\theta(r)\Theta_\theta(\theta)e^{i(k_z z-\omega t)} \tag{2-21}$$

$$\psi_z = h_z(r)\Theta_z(\theta)e^{i(k_z z-\omega t)} \tag{2-22}$$

onde k_z é o numero de onda na direção z e ω é a freqüência de propagação.

Substituindo a equação (2-19) na equação (2-7) obtemos as seguintes equações:

$$\frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\,f}{dr} + (\alpha^2 - \frac{n^2}{r^2})f = 0 \tag{2-23}$$

$$\frac{d^2\Theta_1}{d\,\theta^2} + n^2\Theta_1 = 0 \tag{2-24}$$

onde $\alpha^2 = \omega^2/c_L^2 - k_z^2$ e n tem que ser um valor inteiro ou zero para garantir a continuidade de Θ_1 e suas derivadas.

A solução da última equação está composta por senos e cossenos com argumento $n\theta$ e a solução da equação (2-23) está composta por funções de Bessel.

$$f = A\,Z_n(\alpha_1 r) + B\,W_n(\alpha_1 r) \qquad A,\ B \text{ ctes} \tag{2-25}$$

onde

$$Z_n(\alpha\, r) = \begin{cases} J_n(\alpha\, r) & \text{se} \quad \alpha^2 > 0 \\ I_n(\alpha\, r) & \text{se} \quad \alpha^2 < 0 \end{cases} \qquad W_n(\alpha\, r) = \begin{cases} Y_n(\alpha\, r) & \text{se} \quad \alpha^2 > 0 \\ K_n(\alpha\, r) & \text{se} \quad \alpha^2 < 0 \end{cases} \tag{2-26}$$

sendo:

$J_n \rightarrow$ Função de Bessel de primeira classe

$Y_n \rightarrow$ Função de Bessel de segunda classe

$I_n \rightarrow$ Função de Bessel modificada de primeira classe

$K_n \rightarrow$ Função de Bessel modificada de segunda classe

Soluções similares são obtidas a partir das equações (2-20-2-22). Graff [14] utiliza a seguinte solução para estas equações :

$$\varphi = f(r)\cos(n\theta)\cos(\omega t + k_z z) \tag{2-27}$$

$$\psi_r = h_r(r)\sin(n\theta)\sin(\omega t + k_z z) \tag{2-28}$$

$$\psi_\theta = h_\theta(r)\cos(n\theta)\sin(\omega t + k_z z) \tag{2-29}$$

$$\psi_z = h_3(r)\sin(n\theta)\cos(\omega t + k_z z) \tag{2-30}$$

Onde $f(r)$ foi definido na equação (2-25). Os termos h_r,h_θ e h_3 têm a seguinte forma:

$$h_3 = A_2 Z_n(\beta_1 r) + B_2 W_n(\beta_1 r) \tag{2-31}$$

$$h_r = -h_\theta = A_3 Z_{n+1}(\beta_1 r) + B_3 W_{n+1}(\beta_1 r) \tag{2-32}$$

Nesta equação $\beta^2 = \omega^2/c_T^2 - k_z^2$, $\alpha_1 =\mid \alpha \mid$ e $\beta_1 =\mid \beta \mid$

O campo de deslocamento pode ser obtido substituindo as equações (2-27-2-30) nas equações (2-15-2-17)

$$u_r = \left(f' + (n/r)h_3 + k_z h_r\right)\cos(n\,\theta)\cos(\omega t + k_z z) \tag{2-33}$$

$$u_\theta = \left(-(n/r)f + k_z h_r - h_3'\right)\sin(n\,\theta)cos(\omega t + k_z z) \tag{2-34}$$

$$u_z = \left(-k_z f - h_r' - (n+1)h_1/r\right)\cos(n\,\theta)\sin(\omega t + k_z z) \tag{2-35}$$

O campo de tensões pode ser obtido substituindo o campo de deslocamento na equação (2-2). Nota-se que este campo de tensões depende de 6 constantes A, B, A_2, B_2, A_3, B_3. Estas constantes são obtidas a partir das condições de contorno (2-18). Finalmente, o determinante da matriz de coeficientes deste sistema de equações forma a equação geral para ondas em cilindros (Graff [14]).

$$\mid c_{i\,j} \mid = 0 \qquad \text{i,j =1,2,...,6} \tag{2-36}$$

2.3 Espectro de Freqüência

O espectro de freqüência é formado pela família de curvas cujos pontos (ω, k_z) para um n determinado, satisfazem a equação (2-36). Cada ponto (ω, k_z) representa um modo de propagação de uma onda guiada no cilindro e cada curva é chamada de ramo do espectro de freqüência. Os modos são calculados assumindo um valor para o parâmetro circunferencial n e para o número de onda na direção axial k_z. Estes valores são substituídos na equação anterior e resolvidos para a freqüência. Para cada par de valores assumidos podem ser encontradas infinitas raízes. No entanto, calculam-se estas freqüências para uma faixa determinada. O perfil de deslocamentos ao longo da espessura da casca para algum dos modos são apresentados no Capítulo 5.

2.4
Modos Longitudinais e Torsionais

Os modos Longitudinais e Torsionais são modos axi-simétricos ($n = 0$). Os primeiros se caracterizam por ter um campo de deslocamento com polarização no plano (r, z) ($u_\theta = 0$). Entretanto, os modos torsionais só contém a componente circunferencial do campo de deslocamento. Desta forma, a equação do espectro destes modos é obtida ao decompor a equação (2-36) em um produto de dois sub determinantes (Graff [14]):

$$D = D_3 D_4 \tag{2-37}$$

Onde D_3 corresponde aos modos longitudinais e D_4 corresponde aos modos torsionais.

As Figuras 2.2 e 2.3 mostram os espectros de freqüência longitudinal e torsional respectivamente. Estas figuras correspondem a um cilindro isotrópico de aço e foram calculadas a partir destas equações. Nestes gráficos nota-se o emprego da notação de Rose [15] para identificar o ramo dos modos longitudinais (L) e torsionais (T). Por exemplo, L(0,1) indica o primeiro ramo dos modos longitudinais ($n = 0$).

2.5
Modos de Flexão

Os modos de flexão são modos não axi-simétricos ($n \neq 0$). Porém, para cada $n = 1, 2, ...$ encontra-se uma quantidade infinita de modos de flexão. Neste caso, o campo de deslocamento dos modos de flexão tem, em geral, componentes nos três eixos ($u_r \neq u_\theta \neq u_z \neq 0$). A equação do espectro para o cálculo destes modos é representada pela equação (2-36). A Figura 2.4 mostra o espectro de freqüência de flexão calculado para um cilindro isotrópico de aço ($n = 1$). Neste gráfico emprega-se também a notação de Rose[15] para indicar os ramos dos modos de flexão de primeira ordem ($n = 1$).

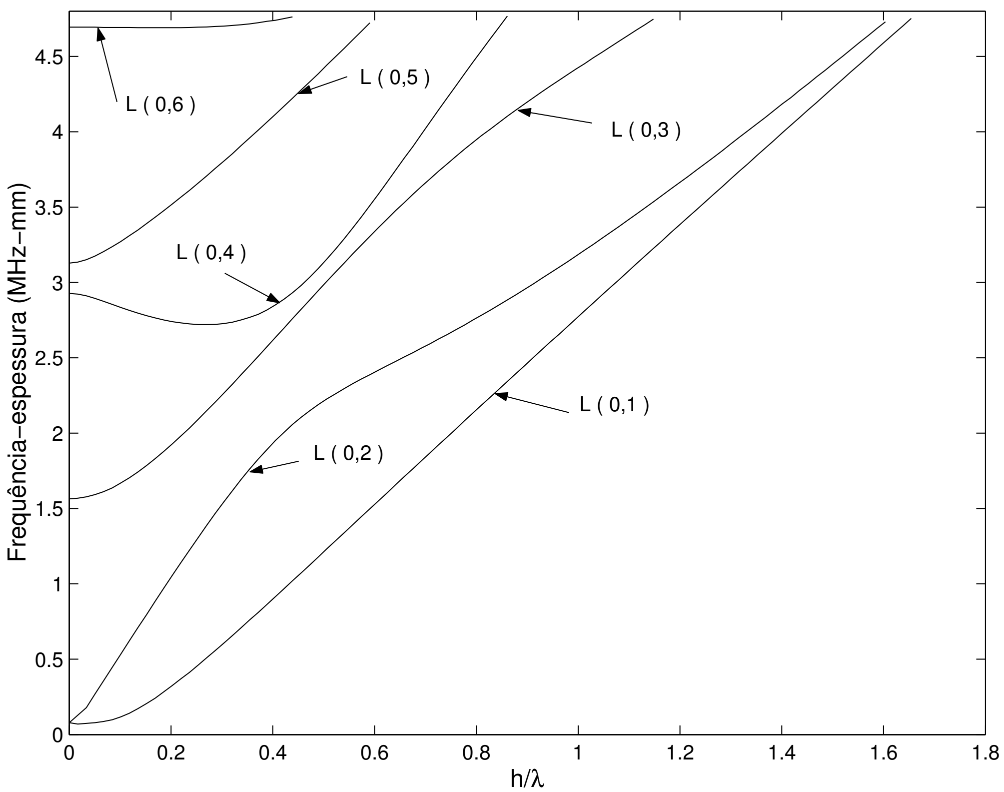

Figura 2.2: Espectro de Freqüência Longitudinais de um cilindro isotrópico

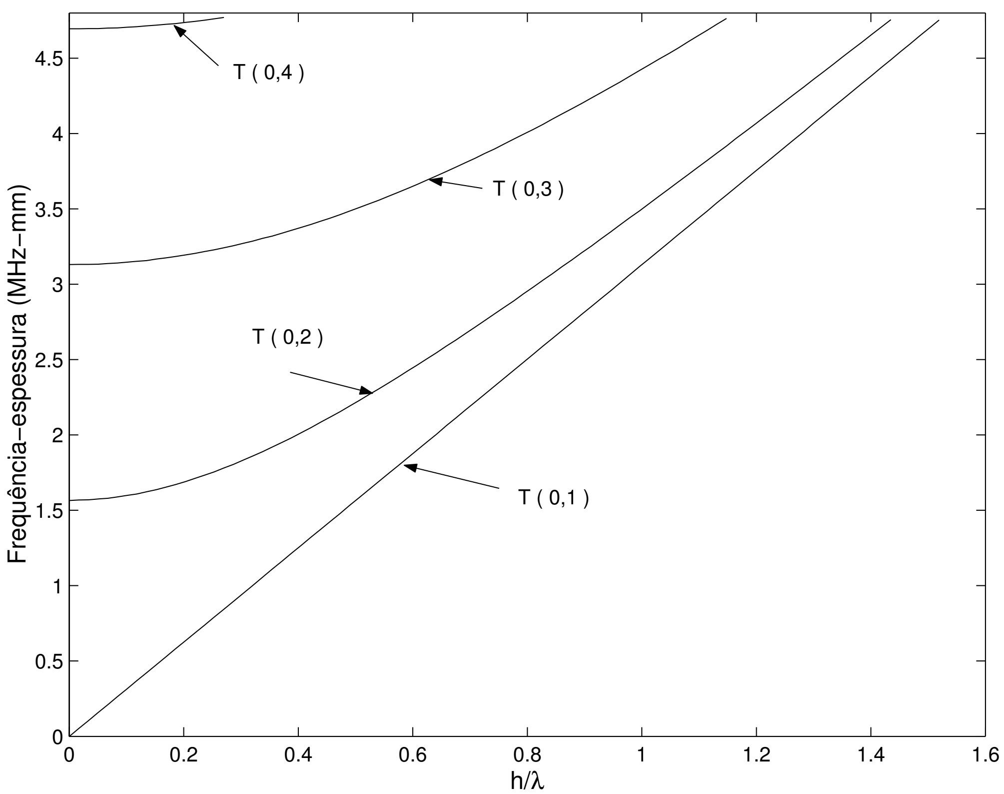

Figura 2.3: Espectro de Freqüência Torsionais de um cilindro isotrópico

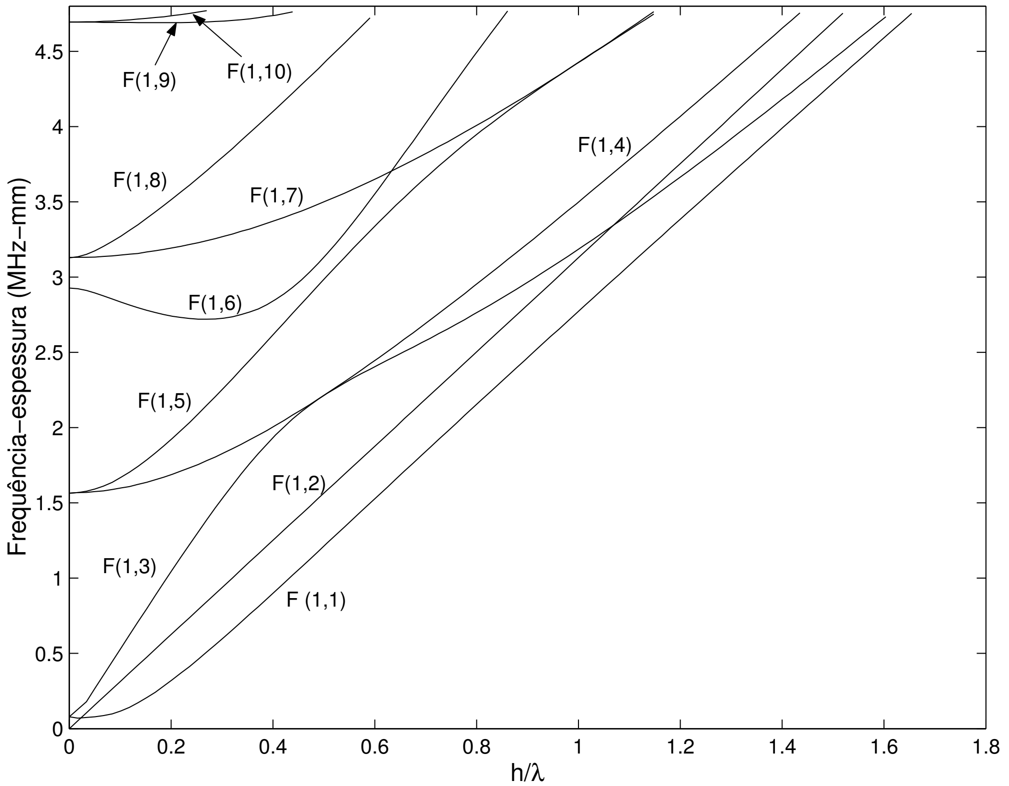

Figura 2.4: Espectro de Freqüência de Flexão de um cilindro isotrópico

2.6 Curva de dispersão

Tipicamente, duas classes de gráficos são usadas para representar os fatores básicos que governam a propagação de uma onda guiada num cilindro: a primeira relaciona a freqüência com o número de onda e é chamada de espectro de freqüência do sistema (item 2.3); a segunda relaciona a velocidade de fase (c_p) ou a velocidade de grupo (c_g) com a freqüência e são chamadas de curvas de dispersão.

A velocidade de fase e a velocidade de grupo são definidas da seguinte forma:

$$c_p = \frac{\omega}{k} \tag{2-38}$$

$$c_g = \frac{d\omega}{dk} \tag{2-39}$$

onde ω é a freqüência e k é o número de onda.

As curvas de dispersão podem ser obtidas a partir do espectro de freqüência usando a relação $\omega = k_z.c$, ou podem ser derivadas independentemente a partir da equação (2-36). A Figura 2.5 mostra as curvas de dispersão dos modos de flexão para um cilindro isotrópico de aço. Esta figura é equivalente à Figura 2.4, já que foi obtida para o mesmo parâmetro circunferêncial ($n = 1$), mas considerando só os primeiros oito ramos.

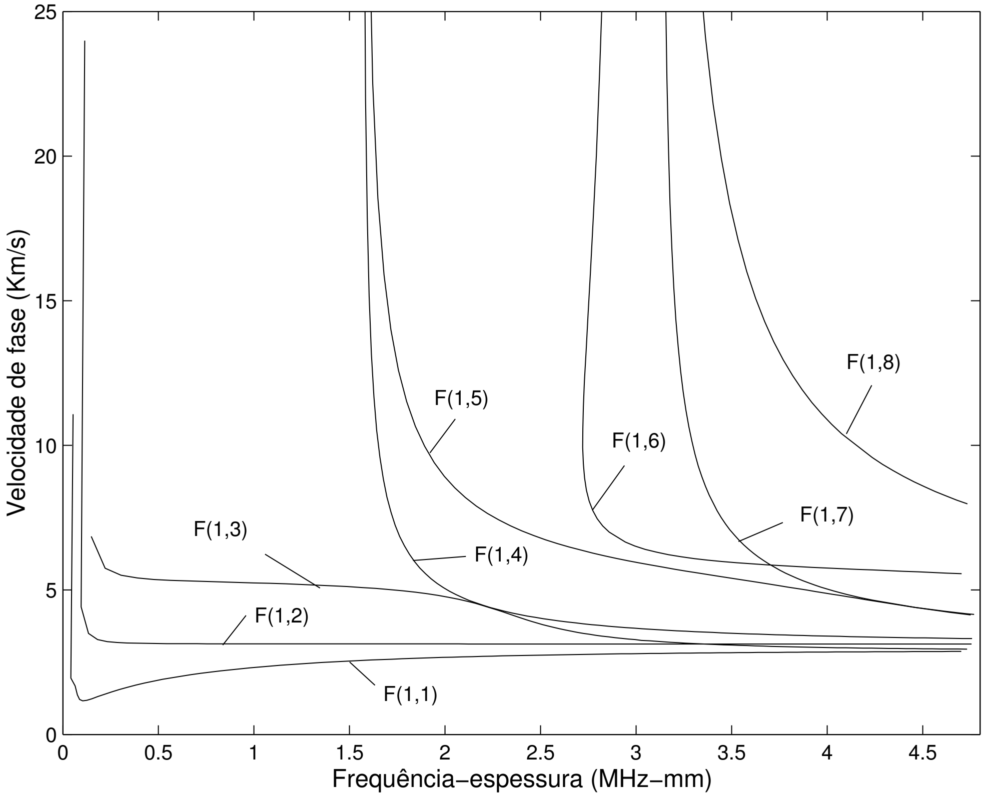

Figura 2.5: Curva de dispersão de ondas de Flexão de um cilindro isotrópico