

Carlos Enrique Rivas Aroni

**Modelagem do
comportamento em altas
frequências de cascas
cilíndricas laminadas**

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

**DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA
MECÂNICA**

**Programa de Pós-graduação em
Engenharia Mecânica**

Rio de Janeiro
fevereiro de 2003

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA
DO RIO DE JANEIRO



Carlos Enrique Rivas Aroni

**Modelagem do comportamento em altas
frequências de cascas cilíndricas laminadas**

Dissertação de Mestrado

Dissertação apresentada como requisito parcial para
obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós-
graduação em Engenharia Mecânica do Departamento de
Engenharia Mecânica da PUC-Rio

Orientador: Prof. Arthur Martins Barbosa Braga

Rio de Janeiro
fevereiro de 2003



Carlos Enrique Rivas Aroni

**Modelagem do comportamento em altas
frequências de cascas cilíndricas laminadas**

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica do Departamento de Engenharia Mecânica do Centro Técnico Científico da PUC-Rio. Aprovada pela Comissão Examinadora abaixo assinada.

Prof. Arthur Martins Barbosa Braga

Orientador

Departamento de Engenharia Mecânica — PUC-Rio

Prof. Carlos Alberto de Almeida

Departamento de Engenharia Mecânica PUC-Rio

Prof. Antonio Lopes Gama

Departamento de Engenharia Mecânica-UFF

Prof. Ney Augusto Dumont

Coordenador Setorial do Centro Técnico Científico —
PUC-Rio

Rio de Janeiro, 20 de fevereiro de 2003

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, do autor e do orientador.

Carlos Enrique Rivas Aroni

Graduou-se em Engenharia Mecânica na Universidad Nacional de Ingeniería (Lima, Perú) em 1997.

Ficha Catalográfica

Rivas, Carlos

Modelagem do comportamento em altas frequências de cascas cilíndricas laminadas / Carlos Enrique Rivas Aroni; orientador: Arthur Martins Barbosa Braga. — Rio de Janeiro : PUC-Rio, Departamento de Engenharia Mecânica, 2003.

v., 105 f: il. ; 29,7 cm

1. Dissertação (mestrado) - Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Engenharia Mecânica.

Inclui referências bibliográficas.

I. Braga, Arthur. II. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Engenharia Mecânica. III. Título.

CDD: 510

Agradecimentos

Ao meu orientador pelo apoio prestado durante estes dois anos
Ao CNPq e à Faperj pelos auxílios concedidos, sem os quais este
trabalho não poderia ser realizado

Á minha família pela compreensão e apoio

Aos meus colegas do Departamento de Mecânica da PUC-Rio

Á Ana Paula Castro pelo apoio na redação desta dissertação

Resumo

Rivas, Carlos; Braga, Arthur. **Modelagem do comportamento em altas frequências de cascas cilíndricas laminadas**. Rio de Janeiro, 2003. 105p. Dissertação de Mestrado — Departamento de Engenharia Mecânica, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Esta dissertação trata da modelagem do comportamento dinâmico de cascas cilíndricas laminadas numa faixa considerada de altas frequências onde o comprimento de onda é menor que a espessura da casca. Nestes casos, as teorias tradicionais de cascas tem problemas para representar com acuracidade a resposta dinâmica destas estruturas. Para superar este inconveniente, empregou-se a teoria discreta de Reddy para compósitos laminados. Esta teoria tem como característica o emprego de funções de interpolação para descrever a variação dos campos de deslocamento ao longo da espessura do laminado. Assim, discretizou-se a espessura da casca em lâminas delgadas na direção radial, impondo condições cinemáticas para cada uma delas. Por isto um estado tridimensional de tensões foi assumido para cada lâmina. Esta técnica permitiu a representação de campos de deslocamentos complexos na espessura do laminado representativos daqueles associados às ondas guiadas em altas frequências. A equação de estado que governa a dinâmica da casca foi então obtida no domínio da frequência a partir da aplicação do princípio variacional, sendo empregado o método de Riccati para solucionar a mesma. A validação da metodologia proposta nesta dissertação foi feita comparando o espectro de frequência exato com aquele previsto pela teoria aproximada. Desta forma demonstrou-se que a teoria de Reddy é capaz de representar com precisão o comportamento dinâmico da casca cilíndrica na faixa de alta frequência. Além disso, os resultados obtidos na faixa de baixa frequência foram comparados pelo método dos elementos finitos com excelentes resultados.

Palavras-chave

materiais laminados; propagação de ondas; altas frequências; teorias de cascas cilíndricas; cascas cilíndricas

Abstract

Rivas, Carlos; Braga, Arthur. **Model for the high frequency response of laminated cylindrical shells**. Rio de Janeiro, 2003. 105p. MSc. Dissertation — Departamento de Engenharia Mecânica, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

This dissertation addresses the problem of modeling the dynamic response of laminated cylindrical shells in the high frequency range (short wavelength). In this range of frequency, traditional theories fail to provide an accurate result of the vibratory structural response; So, in order to overcome this shortcoming, we employed a model based on Reddy's discrete layer-wise theory. In this method the cylindrical shell is discretized in an arbitrary number of layers in the radial direction, and a three dimensional stress state is assumed in each one. Hence, the application of this method let the representation of complex displacement fields through the thickness of the shell. This characteristic is representative of displacement fields associated to guided waves in the high frequency range. In the frequency domain, the governing equations were written in a state space form by applying a variational principle. The solution of this state equation was obtained by employing an algorithm based on a discrete version of the Ricatti transformation. To validate the method proposed in this dissertation, comparisons of the present work to the exact wave-dispersion spectra were assessed with excellent results. It indicates that the present method can predict an accurate description of the dynamic response in the high-frequency range. In the low frequency range, the results of the theory of Reddy were compared with the finite element method and, again, a good accuracy was obtained.

Keywords

Laminated structures; Wave propagation; High frequency; layer-wise theory; cylindrical shells

Lista de Símbolos

$\xi^\alpha, \psi^\beta, \eta^\gamma$	Funções de interpolação
λ, μ	Constantes de Lamé
ρ	Densidade
c_L	Velocidade de propagação de onda longitudinal
c_T	Velocidade de propagação de onda transversal
\mathbf{u}	Vetor dos deslocamentos
φ, χ, η	Potenciais escalares
ψ	Potencial vetorial
\mathbf{m}	Vetor de forças generalizadas
\mathbf{u}_r	Vetor deslocamento radial
\mathbf{u}_θ	Vetor deslocamento circunferencial
\mathbf{u}_z	Vetor deslocamento axial
ζ	Vetor de estado
\mathbf{A}	Matriz de estado
\mathbf{t}	Vetor tensão
ϕ	Vetor de potenciais escalares
\mathbf{F}	Vetor de forças distribuídas
i	Número imaginário
n	Modo circunferencial
\mathbf{A}, \mathbf{L}	Operadores matriciais diferenciais
Φ	Matriz diagonal com elementos de funções Hankel
c_p	Velocidade de fase
c_g	Velocidade de grupo
k_L	Número de onda longitudinal
k_T	Número de onda transversal

Conteúdo

1	Introdução	12
2	Propagação de ondas elásticas em cilindros	16
2.1	Elastodinâmica Linear	16
2.2	Ondas Harmônicas	20
2.3	Espectro de Freqüência	22
2.4	Modos Longitudinais e Torsionais	23
2.5	Modos de Flexão	23
2.6	Curva de dispersão	25
3	Modelagem Aproximada de Cascas Cilíndricas Laminadas	27
3.1	Teoria Discreta de Reddy	27
3.2	Formulação Variacional	29
3.3	Equações de Balanço	31
3.4	Equação de Estado	32
4	Solução Exata do problema de propagação de ondas e Solução da Equação de Estado	37
4.1	Solução exata do problema de propagação de ondas em cascas cilíndricas laminadas	39
4.2	Solução da Equação de Estado	50
5	Resultados	58
5.1	Comparação entre os espectros de dispersão exato e aproximado	59
5.2	Comparação entre a Teoria de Reddy e o Método dos Elementos Finitos	80
6	Conclusões	91
A	Matrizes auxiliares da Equação de Estado	93
B	Matrizes auxiliares $\underline{A}_\alpha(r)$ e $\underline{L}_\alpha(r)$	99
	Referências Bibliográficas	105

Lista de Figuras

2.1	Cilindro infinito	18
2.2	Espectro de Freqüência Longitudinais de um cilindro isotrópico	24
2.3	Espectro de Freqüência Torsionais de um cilindro isotrópico	24
2.4	Espectro de Freqüência de Flexão de um cilindro isotrópico	25
2.5	Curva de dispersão de ondas de Flexão de um cilindro isotrópico	26
3.1	Geometria da Casca Cilíndrica Laminada	28
3.2	Distribuição de deslocamentos ao longo da espessura da casca	29
4.1	Casca Cilíndrica Isotrópica	45
4.2	Casca Cilíndrica Laminada	47
4.3	Matriz de Reflexão na extremidade livre de um cilindro	53
4.4	Varredura de ida	55
5.1	Cilindro infinito	60
5.2	Espectro de Freqüência de modos axi-simétricos ($n=0$) para um cilindro isotrópico	61
5.3	Campo de deslocamento do modo 1 ($n=0$, $\omega.h = 1.14$ MHz-mm, $h/\lambda = 0.47$): (a) deslocamento radial, (b) deslocamento circunferencial	62
5.4	Campo de deslocamento axial do modo 1 ($n=0$, $\omega.h = 1.14$ MHz-mm, $h/\lambda = 0.47$)	63
5.5	Campo de deslocamento do modo 2 ($n=0$, $\omega.h = 0.37$ MHz-mm, $h/\lambda = 0.11$): (a) deslocamento radial, (b) deslocamento circunferencial, (c) deslocamento axial	64
5.6	Campo de deslocamento do modo 3 ($n=0$, $\omega.h = 1.77$ MHz-mm, $h/\lambda = 0.35$): (a) deslocamento radial, (b) deslocamento circunferencial, (c) deslocamento axial	65
5.7	Campo de deslocamento do modo 4 ($n=0$, $\omega.h = 4.05$ MHz-mm, $h/\lambda = 1.19$): (a) deslocamento radial, (b) deslocamento circunferencial, (c) deslocamento axial	66
5.8	Campo de deslocamento do modo 5 ($n=0$, $\omega.h = 4.09$ MHz-mm, $h/\lambda = 0.71$): (a) deslocamento radial, (b) deslocamento circunferencial, (c) deslocamento axial	67
5.9	Campo de deslocamento do modo 6 ($n=0$, $\omega.h = 4.34$ MHz-mm, $h/\lambda = 0.47$): (a) deslocamento radial, (b) deslocamento circunferencial, (c) deslocamento axial	68
5.10	Curva de Dispersão de modos de Flexão para um cilindro isotrópico ($n=1$)	69
5.11	Campo de deslocamento do modo 2 de flexão ($n=1$, $\omega.h = 0.37$ MHz-mm, $h/\lambda = 0.11$): (a) deslocamento radial, (b) deslocamento circunferencial (c) deslocamento axial	70

5.12 Campo de deslocamento do modo 5 de flexão ($n = 1$, $\omega.h = 4.09$ MHz-mm, $h/\lambda = 0.71$): (a) deslocamento normal, (b) deslocamento circunferencial, (c) deslocamento axial	71
5.13 Campo de deslocamento do modo 6 de flexão ($n = 1$, $\omega.h = 4.34$ MHz-mm, $h/\lambda = 0.47$): (a) deslocamento radial, (b) deslocamento circunferencial, (c) deslocamento axial	72
5.14 Cilindro Laminado Infinito	73
5.15 Espectro de Freqüência de modos de Flexão ($n = 1$) para um Cilindro Laminado	74
5.16 Curva de Dispersão de modos de Flexão para um Cilindro Laminado ($n = 1$)	75
5.17 Campo de deslocamento do modo 1 de flexão, ($n = 1$, $\omega.h = 0.67$ MHz-mm, $h/\lambda = 0.14$): (a) deslocamento radial, (b) deslocamento circunferencial, (c) deslocamento axial	76
5.18 Campo de deslocamento do modo 2 de flexão ($n = 1$, $\omega.h = 8.36$ MHz-mm, $h/\lambda = 2.86$): (a) deslocamento radial, (b) deslocamento circunferencial, (c) deslocamento axial	77
5.19 Campo de deslocamento do modo 3 de flexão ($n = 1$, $\omega.h = 11.08$ MHz-mm, $h/\lambda = 4.77$): (a) deslocamento radial, (b) deslocamento circunferencial, (c) deslocamento axial	78
5.20 Campo de deslocamento do modo 4 de flexão ($n = 1$, $\omega.h = 8.11$ MHz-mm, $h/\lambda = 0.95$): (a) deslocamento radial, (b) deslocamento circunferencial, (c) deslocamento axial	79
5.21 Cilindro Isotrópico com comprimento finito	81
5.22 Resposta em Freqüência para um cilindro isotrópico (Livre-Livre)	83
5.23 Resposta em Freqüência para um cilindro isotrópico (Engastado-Livre)	83
5.24 Esquema da malha por Elementos finitos da seção de um cilindro isotrópico	84
5.25 Cilindro Laminado de comprimento finito	85
5.26 Esquema da malha por Elementos Finitos da seção de um cilindro laminado	86
5.27 Resposta em freqüência de um cilindro laminado Livre-Livre	87
5.28 Resposta em freqüência de um cilindro laminado Engastado-Livre	87
5.29 deslocamento radial na extremidade livre do cilindro laminado (10 KHz)	89
5.30 deslocamento axial na extremidade livre do cilindro laminado (10 KHz)	89
5.31 deslocamento radial na extremidade livre do cilindro laminado (40 KHz)	90
5.32 deslocamento axial na extremidade livre do cilindro laminado (40 KHz)	90

Lista de Tabelas

5.1	Constantes elásticas para o Alumínio, Aço e cobre ($\bar{\rho} = 2700 \text{ Kg/m}^3$, $\bar{\mu} = 2.5947 \times 10^{10} \text{ Pa}$, e $\bar{c} = 3100 \text{ m/s}$)	59
5.2	Frequências naturais axi-simétricas ($n = 0$) para um cilindro Isotrópico (Hz)	82
5.3	Frequências naturais axi-simétricas ($n = 0$) para um cilindro Laminado (Hz)	86