



Glaudiane Lilian de Almeida

**Modelagem de Opções Reais com Teoria dos Jogos em
Tempo Contínuo: Uma Aplicação no Mercado Imobiliário
do Rio de Janeiro**

Tese de Doutorado

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção da PUC-Rio como requisito parcial para obtenção do grau de Doutor em Engenharia de Produção.

Orientador: Prof. Luiz Eduardo Teixeira Brandão

Rio de Janeiro
Novembro de 2017



Glaudiane Lilian de Almeida

**Modelagem de Opções Reais com Teoria dos Jogos
em Tempo Contínuo: Uma Aplicação no Mercado
Imobiliário do Rio de Janeiro**

Tese apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Doutor pelo programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção da PUC-Rio. Aprovada pela Comissão Examinadora abaixo assinada.

Prof. Luiz Eduardo Teixeira Brandão

Orientador

Departamento de Administração – PUC-Rio

Prof. Marco Antonio Guimarães Dias

Departamento de Engenharia Elétrica – PUC-Rio

Prof.^a Frances Fischberg Blank

Departamento de Engenharia Industrial – PUC-Rio

Prof. Jorge Cláudio Cavalcante de Oliveira Lima

Banco Nacional de Desenvolvimento Econômico e Social - BNDES

Prof. Léo da Rocha Ferreira

Universidade do Estado do Rio de Janeiro - UERJ

Prof. Márcio da Silveira Carvalho

Coordenador Setorial de Pós-Graduação do

Centro Técnico Científico – PUC-Rio

Rio de Janeiro, 30 de novembro de 2017

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, da autora e do orientador.

Glaudiane Lilian de Almeida

Economista pela UFRRJ em 2009 e mestre em Economia pela UERJ (2011) na área de Macroeconometria. É Professora Adjunta da área de Finanças e Economia no departamento de Engenharia de Produção da Escola de Engenharia da Universidade Federal Fluminense – Volta Redonda desde 2012. É vice chefe do mesmo departamento, coordena e leciona no curso de MBA em Gerenciamento de Projetos na mesma instituição desde 2015 e trabalha como coordenadora da disciplina Engenharia Econômica do curso a distância do CEDERJ-UFF.

Ficha Catalográfica

Almeida, Glaudiane Lilian de

Modelagem de opções reais com teoria dos jogos em tempo contínuo: uma aplicação no mercado imobiliário do Rio de Janeiro / Glaudiane Lilian de Almeida; orientador: Luiz Eduardo Teixeira Brandão. – 2017.

130 f. : il. color. ; 30 cm

Tese (doutorado) – Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Engenharia Industrial, 2017.

Inclui bibliografia

1. Engenharia Industrial – Teses. 2. Jogos de opções reais. 3. Mercado imobiliário. 4. Investimento sob incerteza. 5. VAR. 6. Grafos acíclicos direcionados. I. Brandão, Luiz Eduardo Teixeira. II. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Engenharia Industrial. III. Título.

CDD: 658.5

À minha família e à memória do
Professor Carlos Patricio Samanez.

Agradecimentos

Ao Professor Carlos Patricio Samanez (*in memoriam*) que infelizmente nos deixou precocemente. Seus conselhos, apoio e as longas conversas sobre política econômica e a carreira acadêmica estarão eternizadas em minha memória.

Ao meu orientador Prof. Luiz Eduardo Teixeira Brandão pelo apoio inestimável ao aceitar orientar a minha tese, pelos ensinamentos compartilhados e liberdade durante a elaboração deste trabalho.

Ao Prof. Marco Antonio Guimarães Dias por suas contribuições, ensinamentos, agradáveis conversas, seus conselhos e sua confiança.

Meus respeitosos agradecimentos aos Professores que participaram das bancas de qualificação, do exame de proposta de tese e da decisiva banca final.

Aos Professores do Departamento de Engenharia Industrial, do IAG e do Departamento de Engenharia Elétrica, que muito contribuíram para minha formação acadêmica.

Ao coordenador do programa de pós-graduação do DEI, Prof. Fernando Cyrino por toda ajuda e atenção prestadas.

À CAPES e à PUC-Rio, pelos auxílios concedidos, sem os quais este trabalho não poderia ter sido realizado.

Ao Secovi-Rio pela atenção e informações concedidas.

À funcionária Cláudia Teti, do Departamento de Engenharia Industrial, por toda ajuda e colaboração.

À Universidade Federal Fluminense e aos meus amigos Professores do Departamento de Engenharia de Produção: Christian Vargas, Cecilia Hernandez, Welington Kiffer, Kelly Alonso, Eliane Christo e Lidia Angulo Meza.

À minha família: meus queridos pais Luiz e Imaculada pela confiança e por toda formação que recebi e aos meus irmãos Lidianne e Lucio por todo apoio e carinho.

Ao Júlio Cezar, pela companhia na mesma turma de doutorado, pelo carinho e seu bom humor.

Ao meu filho (cachorro) Thor pelos momentos de alegria, agitação e pela companhia durante as madrugadas de intensos estudos.

Resumo

Almeida, Glaudiane Lilian; Brandão, Luiz Eduardo Teixeira. **Modelagem de Opções Reais com Teoria dos Jogos em Tempo Contínuo: Uma Aplicação no Mercado Imobiliário do Rio de Janeiro**. Rio de Janeiro, 2017. 130p. Tese de Doutorado – Departamento de Engenharia Industrial, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

A habilidade de determinar o momento ótimo para investir proporciona uma vantagem estratégica para as empresas em um ambiente competitivo. Se por um lado as incertezas exógenas podem ser fontes inibidoras do investimento, sob pressão dos competidores, essas empresas podem auferir uma vantagem competitiva caso invistam primeiro. Esta tese sintetiza os conceitos aplicados às metodologias de Opções Reais e da Teoria dos Jogos para propor uma metodologia de avaliação que contribui para a análise financeira de investimentos no mercado imobiliário. O primeiro modelo da tese é um modelo econométrico que considera as inter-relações na formação dos preços que compõem a dinâmica do mercado imobiliário do Rio de Janeiro, através de um modelo de autorregressão vetorial (VAR) identificado por grafos acíclicos direcionados. O objetivo deste trabalho é o de determinar a estratégia ótima de exercício da opção de investimento no equilíbrio de Nash considerando a incerteza na demanda por imóveis em uma região do Rio de Janeiro. Para tanto, o segundo modelo da tese adota uma versão modificada da metodologia de Grenadier (2002) com uma especificação mais adequada e robusta das incertezas para a função de demanda estocástica, em que foi inserida uma elasticidade do fator estocástico. Os parâmetros do modelo foram estimados com ferramentas econométricas a partir de dados reais do mercado imobiliário carioca. Foram realizadas simulações de Monte Carlo da demanda de forma a comparar os oligopólios em termos de níveis de investimento e quantidade produzida. Os resultados obtidos nos modelos de Jogos de Opções Reais desenvolvidos são intuitivos no sentido de que quanto maior a quantidade de concorrentes, menor o nível de demanda (gatilho) exigido para o investimento em novas unidades e quanto maior a volatilidade da demanda, maior o nível de demanda para ser ótimo o investimento.

Palavras-chave

Jogos de Opções Reais; Mercado imobiliário; Investimento sob incerteza; VAR; Grafos Acíclicos Direcionados

Abstract

Almeida, Glaudiane Lilian; Brandão, Luiz Eduardo Teixeira (Advisor). **Real Options Modeling with Game Theory in Continuous Time: An Application in the Real Estate Market of Rio de Janeiro.** Rio de Janeiro, 2017. 130p. Tese de Doutorado – Departamento de Engenharia Industrial, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

The ability to determine the optimal investment timing provides a strategic advantage for companies working in a competitive environment. While on the one hand, exogenous uncertainties may inhibit investment, under pressure from competitors, these firms can gain a competitive advantage if they are first movers. This thesis summarizes the concepts applied to Real Options and Game Theory methodologies to propose an evaluation methodology that contributes to the financial analysis of investments in the real estate market. The first model of the thesis is an econometric model that considers the interrelationships in the formation of prices that compose the real estate market dynamics of Rio de Janeiro, through a vector autoregression (VAR) model identified by directed acyclic graphs. The objective of this work is to determine the optimal strategy to exercise the investment option in the Nash equilibrium considering the uncertainty in the real estate demand in a region of Rio de Janeiro. To this end, the second model of the thesis adopted a modified version of the Grenadier (2002) methodology with a more adequate and robust specification of the uncertainties for the stochastic demand function, in which a stochastic factor elasticity was inserted. The parameters of the model were estimated using econometric tools based on real data from the real estate market in Rio de Janeiro. Monte Carlo simulations of demand were performed to compare the oligopolies in terms of levels of investment and quantity produced. The quantitative results obtained are intuitive in the sense that the larger the number of competitors, the lower the level of demand (threshold) required for investment in new units, whereas the greater the volatility of demand, the greater the demand threshold for the investment to be optimal.

Keywords

Real Options Games; Real estate market; Investment under uncertainty; VAR; Directed Acyclic Graphs

Sumário

1 Introdução	13
1.1 Descrição dos objetivos e organização da tese	15
1.2 A organização da tese	17
2 Revisão da Literatura	18
2.1 Opções Reais em Mercados Imobiliários	18
2.2 Teoria dos Jogos com Opções Reais	20
2.3 Jogos de Opções Reais no Mercado Imobiliário	27
3 Modelo de autorregressão vetorial (VAR)	31
3.1 Fundamentos econométricos do modelo VAR	34
3.2 Caracterização e tratamento dos dados	38
3.3 Causalidade	44
3.4 Causalidade de Granger	45
3.5 Uma alternativa ao teste de causalidade de Granger	46
3.6 Teoria dos grafos e grafos direcionados	47
3.7 O programa computacional TETRAD	49
3.8 Ordenação causal contemporânea	50
3.9 Funções Impulso- Resposta – Resultados empíricos	51
4 Modelagem do Jogo de Opções Reais	58
4.1 Incerteza na demanda	64
4.2 Modelo de Jogo de Opção Real para oligopólio	64
4.2.1 Composição do modelo de equilíbrio	64
4.2.2 Solução analítica da EDO do valor da firma	67
4.2.3 Solução particular da EDO do valor da firma – modelo com $X(t)$ no intercepto da curva de demanda	69

4.2.4 Solução analítica da EDO do valor da firma - modelo com $X(t)$ na inclinação da curva de demanda	71
5 Aplicação: Mercado Imobiliário Residencial da Cidade do Rio de Janeiro	79
5.1 Estimativa do Movimento Geométrico Browniano (MGB)	79
5.2 Resultados	83
5.2.1 Resultados para o modelo de Jogos de OR com $X(t)$ no intercepto da da demanda	81
5.2.2 As simulações para o modelo de oligopólio sob incerteza: modelo com choque estocástico no intercepto da demanda	85
5.2.3 Análise de sensibilidade dos parâmetros	88
5.2.4 Resultados do modelo de Jogos de OR com $X(t)$ na inclinação da curva de demanda	90
6 Conclusões	98
6.1 Conclusões e principais contribuições da tese	98
6.2 Limitações da tese e recomendações para trabalhos futuros	100
7 Referências bibliográficas	103
8 Apêndices e Anexos	111

Lista de figuras

Figura 1 - Preços de venda médios nominais do m ²	40
Figura 2 - Grafo direcionado representando um fluxo causal	48
Figura 3 – DAG observacionalmente equivalente	51
Figura 4 – FIR do Preço ao choque no PIB	55
Figura 5 – FIR do Preço ao choque na Renda	55
Figura 6 – FIR do preço ao choque na taxa Selic	55
Figura 7 – FIR do Preço ao choque no Financiamento	55
Figura 8 - FIR do Preço ao choque no Preço	56
Figura 9 - Curva de demanda linear com choque multiplicativo	58
Figura 10 - Comportamento de $X^*(Q)$ versus n	84
Figura 11 - Amostra do caminho e evolução da demanda para $n=10$	86
Figura 12 - Produção para oligopólio, comparação de $X^*(Q)$	87
Figura 13 – Produção para $n=1$, $n=2$ e $n=10$	87
Figura 14 - Sensibilidade da taxa de juros	88
Figura 15 - Sensibilidade da volatilidade	89
Figura 16 – Sensibilidade do parâmetro da demanda	90
Figura 17 - Gatilhos ótimos x n° de firmas concorrentes	93
Figura 18 - Sensibilidade da volatilidade	94
Figura 19 - Sensibilidade da elasticidade	95
Figura 20 - Sensibilidade do parâmetro da demanda – intercepto	96
Figura 21 – Série do Financiamento Habitacional sem ajuste	114
Figura 22 – Month-plot – Financiamento Habitacional	114
Figura 23 – Financiamento Habitacional com ajuste sazonal	115
Figura 24 – Componente sazonal irregular por mês	115
Figura 25 – série do financiamento habitacional ajustada	116
Figura 26 - Resíduos da variável PIB Real	117
Figura 27 - Resíduos da variável Renda Real	117
Figura 28 - Resíduos da variável Selic	118
Figura 29 - Resíduos da variável Financiamento Habitacional	118
Figura 30 - Resíduos da variável Preço Real do imóvel	118

Lista de tabelas

Tabela 1 - Bairros da cidade do Rio de Janeiro analisados	39
Tabela 2 - Variáveis e tratamento das séries temporais	41
Tabela 3 - Teste de estacionariedade ADF	42
Tabela 4 - Valores nominais por m ² - julho/2009 a janeiro/2016	78
Tabela 5 - Relação entre $X^*(Q)$ e o n ^o de empresas concorrentes	83
Tabela 6 – Relação entre $X^*(Q)$ e o n ^o de empresas concorrentes	92

*A matemática, vista corretamente, possui não só a
verdade, mas a suprema beleza – uma beleza fria e austera,
como de uma escultura.*
Bertrand Russell

1.

Introdução

Decisões de investimento são influenciadas pela concorrência estratégica entre empresas que atuam no mesmo setor da economia. Cada empresa avalia as suas vantagens competitivas frente aos seus concorrentes e às condições de mercado, como valor do produto, volatilidade dos fluxos de receitas e participação de mercado (monopólio, duopólio ou oligopólio) que afetam diretamente os resultados.

Neste sentido, o investimento em mercados competitivos pode ser visto como um jogo entre as empresas, uma vez que na tomada de decisões de investimento, as empresas implicitamente levam em conta as reações das outras empresas às suas próprias ações de investimento. Como assinala Porter (1992), o investimento é o fator mais importante da vantagem competitiva.

Essas decisões são tradicionalmente analisadas com base no método do Fluxo de Caixa Descontado (FCD), que consiste em projetar os fluxos de caixa futuros esperados e descontá-los à taxa ajustada ao risco do projeto. Uma desvantagem deste método, no entanto, é a sua natureza simplista e estática, que não captura o valor das flexibilidades gerenciais (opções reais) e estratégicas e ignora as reações das empresas concorrentes.

Por ter características de opções, essas flexibilidades somente podem ser avaliadas usando-se métodos de apreçamento de opções, como a metodologia de Opções Reais (OR), que modela as incertezas dinâmicas exógenas da economia (como a demanda de produtos) e as flexibilidades da empresa para se adaptar às mudanças de cenário. No entanto, as OR não consideram de forma endógena as possíveis interações competitivas.

Por outro lado, a Teoria dos Jogos analisa como as empresas tomam decisões quando estão cientes de que suas ações afetam as empresas rivais e que estas irão reagir de forma racional às ações dos rivais. Por conseguinte, uma combinação de Opções Reais com Teoria dos Jogos tem o potencial de gerar

resultados promissores para a análise da decisão de investimento, dada a complementariedade entre essas duas teorias.

A escolha do momento ideal para exercer a opção de investir é fundamental para criação de valor na empresa e para obter vantagens competitivas. Adicionalmente, as decisões entre investir ou abandonar um projeto envolvem diferentes riscos e incertezas, principalmente em ambientes competitivos onde as empresas podem ter diferentes políticas de investimento ótimo quando comparadas a uma empresa monopolista.

Essa interseção da Teoria dos Jogos com a Teoria das Opções Reais é denominada Jogos de Opções Reais, onde a competição é modelada de forma endógena e a entrada do competidor é feita de forma racional, e não aleatória, além de considerar as incertezas (processos estocásticos) e as flexibilidades (OR).

No caso clássico de Opções Reais, as firmas são apenas tomadoras de preços e detêm o monopólio da opção de investir, não sendo levado em consideração o fato de que a competição pode afetar o valor da opção real e a regra de decisão.

Em jogos de opções reais, o problema de maximização de valor da firma leva em consideração a presença de outras firmas como jogadores, que reagem otimamente aos processos estocásticos relevantes e às ações das outras firmas, possibilitando a modelagem da competição de forma endógena.

Conforme ressaltado por Grenadier (2002), uma questão comum na maioria dos trabalhos que aplicam as ferramentas da Teoria das Opções Reais é a ausência de uma análise a respeito das interações estratégicas dos detentores das opções, onde a regra ótima de investimento depende da reação dos competidores à realização do projeto. Assim, os jogos com opções reais são vistos como uma forma para superar as limitações das metodologias citadas anteriormente.

A análise estratégica das decisões de investimento a partir da solução integrada da teoria das opções reais e a teoria dos jogos tem sido alvo de intensa pesquisa. O número de abordagens, técnicas e teorias combinadas com a teoria das opções reais cresceu nas duas últimas décadas.

Uma variedade de suposições a respeito de modelos é extensa e os resultados subsequentes têm se revelado consistentes, com análises interessantes, possuindo modelos agora mais sólidos, melhor fundamentados na intuição, gestão

e teoria econômicas, tornando-se flexíveis e variados o suficiente para incorporar uma grande variedade de contextos econômicos.

De acordo com Azevedo e Paxson (2014), os modelos desenvolvidos para jogos de opções reais trazem poucos casos de aplicações empíricas. Ainda segundo os autores, um esforço neste sentido, pode definir as linhas de pesquisa que devem ser seguidas. Portanto, uma calibração dos parâmetros e seus resultados comparados pode, segundo eles, contribuir significativamente para o progresso dos modelos de jogos de opções reais.

Os modelos de Jogos de Opções Reais produzem metodologias de análise de investimentos plausíveis que incorporam tanto a incerteza como a concorrência a partir das técnicas de avaliação de investimento clássicas ou modelos de opções reais que fazem uma suposição irrealista de que as empresas têm um monopólio sobre as decisões de investimento.

As análises de investimento a partir da combinação da Teoria das Opções Reais com a Teoria dos jogos têm sido capazes de fornecer uma abordagem mais realista a respeito das questões modernas sobre as decisões de investimento, derivando novas soluções para os problemas que envolvem decisões de investimento, permitindo melhor compreensão da natureza complexa do comportamento das empresas em mercados onde a incerteza e a concorrência prevalecem.

1.1

Descrição dos objetivos e organização da tese

Esta tese fornece dois modelos para avaliação do mercado imobiliário residencial carioca. O primeiro, é um modelo de autorregressão vetorial (VAR) que tem como objetivo o de identificar a dinâmica e as inter-relações das variáveis que afetam a formação dos preços dos imóveis residenciais na cidade do Rio de Janeiro.

O segundo modelo é um modelo de oligopólio sob incerteza que combina a teoria das OR com a teoria dos jogos, sendo o seu objetivo o de determinar a estratégia ótima de investimento em equilíbrio de Nash no mercado imobiliário

carioca, considerando a incerteza na demanda por imóveis e o número de concorrentes ativos no mercado.

Para tanto, foi adotada uma versão modificada da metodologia de Grenadier (2002) com duas especificações mais adequadas e robustas das incertezas para a função de demanda. Ao contrário de estudos anteriores, onde a modelagem tradicional das incertezas era concentrada apenas em torno dos choques multiplicativos na função de demanda, aqui será visto que a incerteza na demanda é modelada a partir de um choque estocástico multiplicativo tanto no intercepto da demanda quanto em sua inclinação. Neste último caso, o choque estocástico inclui uma elasticidade do fator estocástico da demanda que permite levar a consideração a sensibilidade da demanda em relação à variável estocástica.

Esta tese fornece as soluções analíticas para um modelo de oligopólio com duas especificações da incerteza na demanda, a partir de funções de demanda estocásticas diferentes, gerando duas soluções para os gatilhos de investimento ótimo em novas construções.

Foram realizadas simulações de Monte Carlo da demanda com o objetivo de comparar oligopólios com poucas firmas e com muitas firmas em termos de níveis de investimento e produção. Neste sentido, a comparação dos oligopólios a partir de simulações permitiu fazer um estudo mais realista dos oligopólios para o setor imobiliário carioca, uma vez que a abordagem tradicional ignora a incerteza dinâmica da demanda.

Os resultados deste trabalho foram obtidos por meio de um modelo matemático em que foram utilizados dados reais do mercado imobiliário residencial do Rio de Janeiro. Foi fornecida uma solução analítica fechada para os gatilhos no equilíbrio, a partir de uma demanda linear inversa, com uma especificação diferente daquela sugerida por Grenadier (2002). Além disso, as soluções para os gatilhos permitiram encontrar os gatilhos ótimos no equilíbrio de Nash que se mostraram menos sensíveis aos parâmetros do modelo. Neste sentido, entende-se que a função de demanda estocástica linear inversa parece mais adequada para modelar empiricamente a realidade da análise de investimento a respeito da decisão ótima em novas construções no mercado imobiliário carioca ao considerar a competição de forma endógena no modelo matemático.

1.1

A organização da tese

Esta tese está estruturada da seguinte forma: além desta introdução, que também retrata as principais motivações e objetivos permitindo ilustrar a relevância do estudo, o capítulo 2 apresenta a revisão da literatura. O capítulo 3 trata da modelagem econométrica. O capítulo 4 apresenta duas especificações para a função de demanda estocástica, que são usadas para desenvolver analiticamente o modelo de Jogos de Opções Reais e suas características. Uma aplicação do modelo proposto ao mercado residencial da cidade do Rio de Janeiro é detalhada no capítulo 5, que também traz os resultados das simulações e em seguida estão apresentadas conclusões e contribuições da tese.

2. Revisão da Literatura

2.1 Opções Reais em Mercados Imobiliários

Desde a década de 1980, tem havido muito interesse na pesquisa acadêmica sobre os métodos de avaliação de opções reais e aplicação da teoria dos jogos no mundo dos negócios, gerando uma gama de modelos. A Teoria das Opções Reais foi aplicada pela primeira vez no setor imobiliário por Titman (1985). Seu trabalho forneceu um modelo de avaliação de preços de terrenos vagos em áreas urbanas, mostrando a implicação da relação entre incerteza e valores dos terrenos vagos em que o aumento da incerteza leva à diminuição na atividade de construção.

Titman (1985) também forneceu *insights* sobre o papel dos especuladores imobiliários que comprem terrenos vagos, e ao invés de desenvolvê-los imediatamente, optam por mantê-los vagos por um período de tempo, aguardando o melhor momento para investir. O modelo desenvolvido também pode ser estendido para analisar outras questões relacionadas aos preços dos imóveis sob incerteza. Por exemplo, ele pode ser usado para determinar o tempo ótimo para demolir um edifício e também para analisar o efeito da incerteza em relação à necessidade de reformas. Este artigo aplicou métodos de avaliação de opções desenvolvidos por Black e Scholes (1973) e Merton (1973).

Williams (1991) resolveu o problema de precificação de opções analiticamente e numericamente, o momento ideal e a densidade de construção, o momento ótimo para abandonar o projeto de construção, além dos valores dos projetos de propriedades construídas e não construídas.

Williams (1993), derivou estratégias de exercício de equilíbrio simétrico para o mercado imobiliário. Contudo, uma vez que tal equilíbrio assume que as construtoras irão exercer suas opções simultaneamente, pode não ser adequado para descrever as estratégias de exercício para alguns mercados específicos como por exemplo o mercado de imóveis comerciais que possui um grande número de construtoras.

Quigg (1993) forneceu evidências empíricas que mostram que os modelos baseados nos conceitos de opções reais podem ser úteis para prever valores de propriedade nos mercados imobiliários. A autora examinou as previsões empíricas de um modelo de avaliação de opções reais usando uma grande amostra de preços de mercado, encontrando suporte empírico para um modelo que incorporou uma opção de espera para investir em novas construções. O modelo de opção tem poder explicativo para prever os preços das transações além do valor intrínseco. Quigg também estimou os desvios-padrão implícitos para preços de imóveis comerciais individuais.

Childs et al. (1995) usaram opções reais para analisar a flexibilidade operacional para aumentar significativamente o valor da propriedade quando a correlação entre receitas dos diferentes tipos de imóveis é baixa ou quando os custos das reformas são baixos.

Yoshida (1999) analisou a validade de um modelo de investimento baseado em opções reais em oposição ao modelo de investimento neoclássico na tomada de decisões sobre construções imobiliárias comerciais, utilizando dados agregados de imóveis localizados no Japão, focando no efeito da incerteza. O autor concluiu que vários tipos de opções reais devem ser incorporados em modelos de investimento.

Yamazaki (2000) examinou como a incerteza desempenha um papel nos preços dos imóveis construídos, fornecendo modelos básicos de opções reais de preços de terrenos e imóveis na região central de Tóquio. O modelo deste trabalho analisou os preços pequenos terrenos cobrindo dados de lotes individuais. O autor utilizou dados econômicos de séries temporais e dados (micro) de corte transversal, incluindo termos de incerteza para os preços. Os resultados dos modelos baseados na teoria de opções reais revelaram que a incerteza total em relação ao retorno dos ativos construídos tem um efeito significativo no aumento dos preços dos terrenos, levando à conclusão de que um aumento da incerteza leva ao aumento nos preços dos terrenos.

Holland et al. (2000) examinaram empiricamente a relação entre incerteza e investimento usando dados do mercado imobiliário comercial. Para classificar os efeitos de longo prazo versus os efeitos de curto prazo para a volatilidade dos ativos ao considerar as decisões de investimento, os autores estenderam o modelo de opções reais padrão para determinar a probabilidade de investimento em um determinado horizonte temporal. A partir dessa ideia, encontraram como resultado

que um aumento na volatilidade dos ativos pode aumentar ou diminuir a probabilidade de desenvolvimento. O papel da incerteza na determinação da taxa real de investimento é então testado empiricamente usando dados agregados. Ao desenvolver duas medidas de volatilidade para o valor do imóvel, confirmaram uma forte relação esperada entre as mudanças na incerteza e a taxa de atividade de construção ou de desenvolvimento.

Na literatura nacional de opções reais, encontram-se os trabalhos de Rocha et al. (2007) e Fortunato et al. (2008) que aplicaram OR no setor imobiliário carioca. A abordagem de Rocha et al. (2007) partiu de um modelo de opções reais em tempo discreto para identificar a estratégia ótima para investimentos simultâneos ou sequenciais. Este modelo permitiu determinar o valor máximo a ser pago pelos direitos exclusivos sobre o uso de um terreno.

Fortunato et al. (2008) utilizaram a teoria das opções reais para determinar o valor da opção de abandono durante o período de construção do investimento em um imóvel residencial adquirido na planta, considerando diferentes níveis de devolução dos valores já pagos pelo comprador.

2.2

Teoria dos Jogos com Opções Reais

As decisões entre investir ou postergar um projeto envolvem diferentes riscos e incertezas principalmente em ambientes competitivos onde as empresas podem ter diferentes políticas de investimento ótimo quando comparadas à uma empresa monopolista.

Em situações em que existe a possibilidade de os competidores se anteciparem ao concorrente, o valor da opção de postergar os investimentos é deteriorada e diminui de valor, levando as firmas a investirem mais cedo do que no caso monopolista (Chevalier-Roignant e Trigeorgis, 2011).

Sob pressões competitivas, as empresas precisam decidir se a melhor estratégia é investir mais cedo e adquirir uma vantagem competitiva sobre os rivais, ou postergar os investimentos para adquirir mais informação e mitigar os efeitos das incertezas do mercado. Por outro lado, na presença de competição de firmas rivais, uma empresa pode ter vantagem competitiva se investir primeiro. Esse *trade-*

off pode ser estudado a partir de metodologias que combinam a teoria dos jogos com a teoria das opções reais.

Essa interseção da teoria dos jogos com a teoria das opções reais é chamada de jogos de opções reais, onde a competição é modelada de forma endógena e a entrada do competidor é feita de forma racional, e não aleatória. Anteriormente, a literatura de OR considerava a entrada da competição de forma exógena, sem usar conceitos de equilíbrio da teoria dos jogos. Em Kester (1984) foi modelado o tempo de expiração da OR como o tempo estimado para entrada do competidor, que destruiria o valor da OR de uma firma.

Trigeorgis (1991) considerou o efeito da preempção da entrada do competidor tanto como um “dividendo adicional” que é perdido pelo detentor da OR não exercida. O autor também modelou a entrada da competição de forma aleatória, como um evento de Poisson que causa um salto para baixo no valor do projeto.

Em jogos de opções reais, o problema de maximização de valor da firma que analisa um investimento deve considerar a presença de outras firmas como jogadores que reagem otimamente aos processos estocásticos relevantes e às ações das outras firmas.

A teoria dos jogos é assim vista como necessária e é inserida principalmente nas condições de contorno, com considerações sobre o equilíbrio do jogo. Dias (2005) define as teorias dos jogos e de opções reais como teorias complementares. De acordo com o autor, a teoria dos jogos tradicional não leva em consideração os avanços da teoria de finanças sobre risco-retorno e sobre o valor da flexibilidade gerencial sob incerteza. Por outro lado, a teoria das opções reais tradicional desconsidera o fato de que o exercício das opções por parte de outras firmas pode alterar o valor da sua opção real.

Em um ambiente de competição, as empresas precisam tomar decisões sobre o *timing* das estratégias. É mais vantajoso investir primeiro e obter uma vantagem competitiva em relação ao rival ou adiar os investimentos com o intuito de obter mais informações e com isso reduzir as incertezas de mercado? As incertezas exógenas podem ser fontes inibidoras de investimento e, de outra forma, sob pressões dos competidores, as empresas podem enxergar uma vantagem competitiva caso invistam primeiro (Costa et al., 2015).

Com o auxílio da teoria dos jogos, ao invés de se considerar apenas uma competição exógena que se reflita somente nos preços do produto, esta pode ser

modelada de forma endógena. As assimetrias entre as empresas podem existir *ex-ante*, que são aquelas verificadas antes do investimento, ou ainda podem ser temporárias ou permanentes, com o mesmo tamanho ou de tamanhos diferentes, de diferentes naturezas e modeladas como uma variável endógena ou como uma variável exógena.

A maioria dos jogos de opções reais supõe que as empresas são simétricas *ex-ante / ex-post* seguindo a tese de doutorado de Smets (1993). As assimetrias podem ser de várias fontes relacionadas a, por exemplo, diferentes taxas de aprendizagem, flexibilidade organizacional, restrições de liquidez ou benefícios (ou perdas) de externalidades positivas (ou negativas) devido a investimentos de outras empresas, ou diferentes custos operacionais e combinações de várias assimetrias. A maioria dos trabalhos publicados que foram pesquisados e estudados para escrever esta tese está centrada principalmente sobre as assimetrias em relação aos parâmetros das opções reais e a formulação usada para incorporá-las em modelos de jogos de opções reais.

Com a teoria das opções reais estudada extensivamente bem como aplicada ao desenvolvimento imobiliário e no mundo dos negócios em geral, pesquisadores começaram a questionar suas limitações e também algumas aplicações incompletas. As interações estratégicas parecem ter grande implicação em relação ao poder explicativo dos modelos de opções reais.

Neste contexto, surge a necessidade de utilizar a Teoria dos Jogos como uma forma de estender o modelo de opções reais. Tem sido crescente na literatura acadêmica de finanças estudos que analisam a relação entre flexibilidade gerencial e estratégia competitiva através da análise de jogos com opções reais.

O primeiro modelo de competição considerando opções reais foi desenvolvido na tese de Smets (1993), aplicando um duopólio onde a decisão tem relação com investimento estrangeiro direto. Tal modelo foi apresentado por Dixit e Pindyck (1994).

Smit e Ankum (1993) desenvolveram um modelo em tempo discreto em que analisaram um jogo de equilíbrio perfeito para tomada de decisões de investimentos de um ou dois estágios para um duopólio. Para tal, combinaram a abordagem das OR de *timing* do investimento com os princípios básicos da teoria dos jogos e da organização industrial, ilustrando a influência da concorrência no valor do projeto e no *timing* de investimento.

Smit (2003) teve como foco as estratégias de investimentos em infraestrutura para investigar sua intuição de que os investimentos de infraestrutura podem gerar outras oportunidades de investimento e, ao fazê-lo, mudam a posição estratégica da empresa.

Grenadier (2000) forneceu uma versão heurística das estratégias de exercícios de equilíbrio para um duopólio utilizando jogos de opções reais para formular estratégias de investimento das empresas em tempo contínuo.

Huisman (2001) trouxe novos modelos inovadores de jogos considerando como aplicação a adoção de tecnologia, adicionando à literatura, entre outras contribuições, o efeito da incerteza tecnológica sobre o comportamento investidor. Huisman e Kort (2004) avaliaram em seus trabalhos como duas empresas podem decidir simultaneamente sob condições de incerteza na demanda e em um contexto de competição.

Smit e Trigeorgis (2004) ilustraram o uso dos jogos com opções reais para analisar oportunidades de investimento em casos de decisões de estratégia competitiva em situação de incerteza. Huisman e Kort (2004) concentraram-se principalmente sobre os problemas irregulares de tempo contínuo, e Chevalier-Roignant e Trigeorgis (2011) são mais centrados em outros aspectos da modelagem de ferramentas de opções reais, tais como o comportamento do investidor míope e a expansão da capacidade incremental.

Os modelos de Jogos de Opções Reais têm se desenvolvido naturalmente, a partir de Smets (1993), expandindo a análise para modelos com estruturas concorrenciais oligopolistas que apresentam mais de duas empresas. De acordo com Azevedo e Paxson (2014) essa modelagem pode impor alguns desafios não só para efeitos da obtenção dos gatilhos de investimento, como também em relação à caracterização da sequência da entrada e do equilíbrio simultâneo.

As aplicações que utilizam estruturas concorrenciais a partir de oligopólios foram estudadas por Baldursson (1998) e Grenadier (2002) seguindo Leahy (1993), que trabalha sob a premissa de que os investimentos são infinitamente divisíveis.

Na literatura de Jogos de Opções Reais existem duas principais abordagens que consideram mais de duas empresas. A primeira é abordagem de Williams (1993), com aplicação no mercado imobiliário norte americano, onde assumiu que, *ex-ante*, existem n empresas simétricas, cujo valor das firmas depende de variáveis de estado exógenas e, no equilíbrio, todas as empresas investem ao mesmo tempo.

A segunda abordagem, fornecida por Bouis et al. (2009), assume que, *ex-ante*, há mais de duas empresas (três neste caso), cujos valores dependem de variáveis de estado exógenas. As empresas entram no mercado sequencialmente, fornecendo soluções analíticas para os gatilhos de investimento de cada empresa. Eles concluíram que o aumento da concorrência pode atrasar em vez de acelerar o investimento e que a entrada no mercado ocorre mais cedo, quando o número de entrantes antecipadas no mercado é pequeno.

Reiss (1998) e Armada et al. (2011) utilizaram abordagens que são um pouco diferentes dos dois modelos acima. Construíram um modelo completo de jogos de opções reais com preempção que avalia quando as empresas idênticas devem patentear / adotar uma inovação, onde o tempo de chegada de concorrentes é modelado como um processo de Poisson. O número de empresas não é especificado, mas em vez disso existe uma taxa de risco constante que é considerada como uma medida da intensidade da concorrência. Quatro estratégias distintas são derivadas: candidatar-se a uma patente sem introduzir a nova tecnologia de imediato, investir imediatamente na patente, iniciar o novo projeto sem proteção de patentes, ou adiar a decisão. Foi mostrado como a concorrência e o nível da taxa de patentes afetam a estratégia.

Grenadier (2002) forneceu uma abordagem interessante para derivar estratégias de investimento de equilíbrio em um equilíbrio de Cournot-Nash para as n empresas simétricas, assumindo que a função demanda inversa mercado é do tipo isoelástica com um choque multiplicativo na demanda que evolui de acordo com um processo estocástico do tipo Movimento Geométrico Browniano (MGB). No modelo por ele desenvolvido, as empresas produzem um produto único, homogêneo e infinitamente divisível e pode investir continuamente em capacidade adicional para aumentar a produção por incrementos infinitesimais.

Aguerrevere (2003) analisou o efeito da concorrência sobre a dinâmica dos preços do ativo e considera o investimento incremental com tempo para construir (*time to build*) e flexibilidade operacional. Sua abordagem difere da utilizada por Grenadier (2002) uma vez que não permite a flexibilidade na utilização da capacidade instalada independentemente do número de concorrentes.

Murto et al. (2004) estudaram um jogo de oligopólio em tempo discreto para os mercados de *commodities* não-armazenáveis, onde a demanda evolui estocasticamente e as empresas podem fazer múltiplos investimentos, a fim de

ajustar as suas funções de custo de produção ou as capacidades de produção. Compararam o caso em que as empresas investem montantes fixos idênticos com o caso em que uma empresa faz investimentos em proporções maiores do que as outras empresas, fornecendo uma abordagem para o *trade-off* entre as economias de escala e a flexibilidade (no sentido de que a empresa com pequenos investimentos é mais flexível e empresas com maiores investimentos são mais rentáveis). Seus resultados contrastam com aqueles encontrados por Williams (1993) e Grenadier (2002), onde as empresas devem investir sequencialmente para assegurar um equilíbrio perfeito de Markov-Nash.

Dias e Teixeira (2009) foram os únicos a ter guerra de atrito e barganha em Jogos de Opções Reais. Aguerrevere (2009) examinou a forma como a concorrência afeta a relação entre as decisões de investimento das empresas e as dinâmicas de retorno dos ativos, demonstrando que, quando a demanda é baixa, as empresas em setores mais competitivos ganham retornos mais elevados e, quando a demanda é alta, as empresas em setores mais concentrados alcançam retornos mais elevados.

Angelou e Economides (2009), usando jogos com opções, modelaram as interações competitivas que existem nos investimentos no setor de telecomunicações e tecnologia da informação. O modelo desenvolvido foi aplicado a um estudo de caso real estendendo a análise a partir das Opções Reais e da Teoria dos Jogos através da combinação de fatores quantitativos e qualitativos em uma única função utilidade. Consideraram que o problema analisado também possui um número de fatores qualitativos que deveriam ser também levados em consideração juntamente com os quantitativos. Mostraram que o *ranking* das alternativas de decisão pode mudar quando fatores quantitativos e qualitativos são integrados, em comparação com a análise puramente quantitativa usada pelos modelos de Jogos de Opções Reais.

Chevalier-Roignant e Trigeorgis (2011) também estudaram as decisões de investimento para mercados oligopolistas utilizando uma abordagem em tempo contínuo, onde as empresas identificam uma oportunidade para entrar no mercado antes que ele cresça até o ponto que justificaria o custo de entrada. Eles mostram que em mercados oligopolistas, a entrada no mercado, envolvendo investimentos irregulares ocorre em sequência, independente da possibilidade de as empresas observarem o comportamento das suas rivais.

Thijssen et.al. (2012), usando jogos com opções, trataram do caso de estratégias de equilíbrio simétrico para um duopólio. Mostraram que quando ambas as firmas pretendem ser as primeiras a investir, surgem os problemas de coordenação. Para resolver esse problema de coordenação, os autores propõem o uso de um método que envolve o uso de *symmetric mixed strategies* baseadas no modelo de Fudenberg e Tirole (1985). Eles mostraram que, em muitos casos, é incorreto afirmar que no equilíbrio a probabilidade de ambas as firmas investir simultaneamente, é zero. Além disso, desenvolveram uma nova formulação para a modelagem de jogos com *timing* determinístico e introduziram o “*principle of rent equalization*” para jogos de preempção, uma metodologia que foi estendida para os jogos de opções reais¹.

Costa et al. (2015) estudaram o impacto da preempção em jogos de momento ótimo num oligopólio assimétrico, aplicado no mercado brasileiro de latas de alumínio. No caso de um oligopólio simétrico, analisaram as interações estratégicas e suas consequências nos investimentos das empresas, a preempção e seus efeitos sobre as decisões ótimas a serem tomadas. No modelo de jogos de opções em um oligopólio assimétrico com preempção, adaptado para o caso com três empresas atuando no mercado, representando a indústria de latas de alumínio no Brasil, encontraram uma solução analítica, seguida por uma aplicação numérica. Um dos principais resultados encontrados reside no fato de que as empresas precisam antecipar seus investimentos quando existe a ameaça de preempção no mercado, o que as impede de investir no momento em que maximizariam seus valores.

Versaevel (2015), a partir de um modelo em tempo contínuo, analisou um mercado com desenvolvimento incerto, onde duas firmas potenciais entrantes neste mercado detectam uma demanda incipiente somente se um gatilho específico for atingido. As empresas entram no mercado através do investimento de forma irreversível antes de competir em quantidade. Quando a liderança na fase de investimento implica uma vantagem inédita, é feita uma análise de como o "estado de alerta" das empresas pode impulsionar os resultados de equilíbrio. Assim como em Huisman e Kort (1999), para o caso de detecção simétrica, a probabilidade de entrada simultânea é diferente de zero (podendo até ser um) embora a demanda

¹ Para uma discussão a respeito de uma análise mais conveniente sobre uma melhor adequação do jogo, ver a seção 2.2 em Thijssen et al. (2012).

ainda seja incipiente. Se as empresas detectam a nova demanda relativamente tarde, as estratégias de entrada e valores das firmas diferem qualitativamente dos Jogos de Opções Reais tradicionais em dois aspectos:

- i) Em caso de detecção assimétrica, a entrada é sempre sequencial, e a empresa mais alerta maximiza o valor, atrasando o seu investimento para entrar exatamente quando sua rival detectar a demanda;
- ii) Maior volatilidade da demanda reduz o valor diferencial entre as empresas.

A Tabela 7 que está no Apêndice 1 reúne os principais artigos que trabalharam na formulação e aplicação dos modelos mais importantes encontrados na literatura de Jogos de Opções Reais. Esta caracterização é uma extensão baseada em Azevedo & Paxson (2014) com alguns ajustes e adaptações particulares, onde a intenção foi atualizar as informações fornecidas a respeito dos modelos, incluindo referências mais recentes cuja preocupação também foi considerar trabalhos encontrados na literatura brasileira e/ou trabalhos publicados por autores brasileiros na literatura internacional.

2.3

Jogos de Opções Reais no Mercado Imobiliário

Análises de investimentos no mercado imobiliário é uma das aplicações clássicas das opções reais. Como em Titman (1985) e Williams (1991), o desenvolvimento do imobiliário é análogo a uma opção americana de compra, onde o preço de exercício é igual ao custo de construção. Uma opção é um contrato ou situação que dá ao seu detentor o direito, mas não a obrigação de comprar (*call*) ou vender (*put*) um determinado ativo (por exemplo, ações ordinárias ou projeto) pagando o preço de exercício.

O valor da terra pode ser análogo ao valor da opção. Ao manter o terreno e adiar a construção, o valor intrínseco do terreno seria maior do que o valor residual, como demonstrado em Quigg (1993). A abordagem tradicional da teoria das opções

reais implica que os construtores ignoram o comportamento de seus concorrentes frente à possíveis novas construções.

No entanto, nos mercados imobiliários, as construtoras e incorporadoras estão susceptíveis a enfrentar consideráveis competições de concorrentes, e as atividades de desenvolvimento dos concorrentes têm um impacto fundamental sobre suas opções de desenvolver um projeto de construção.

Assim, ao ampliar a abordagem das opções reais considerando a interação estratégica de forma endógena no modelo, obtém-se um rico conjunto de implicações estratégicas. Os modelos tradicionais de OR ditam que um desenvolvedor deve esperar até que a opção de construir um imóvel esteja *in-the-money*, o que significa que o valor do imóvel deve ser muito maior do que o custo de construção.

Ao considerar a competição, o receio da ameaça de preempção forçará os construtores a exercer suas opções mais cedo. Além disso, enquanto os modelos tradicionais de opções reais implicam que as construções serão simultâneas, os modelos de teoria dos jogos permitem a possibilidade de construções sequenciais.

Modelos competitivos de desenvolvimento imobiliário também podem ajudar a explicar o comportamento de "*boom-and-bust*" nas construções comerciais, bem como o motivo pelo qual os desenvolvedores racionais podem construir novos prédios diante da demanda declinante e dos valores de mercado em queda como mostrado em Grenadier (1996). O autor desenvolveu um jogo de equilíbrio para estratégias de exercício de opções reais para um mercado em duopólio simétrico, sugerindo uma possível explicação do por que alguns mercados podem experimentar *booms* de construção frente a diminuição da demanda e dos valores dos imóveis e terrenos.

Grenadier (1999) e Childs et al. (2002), estendem a literatura, examinando o impacto da informação assimétrica sobre as estratégias de exercício por parte das construtoras de imóveis. Por outro lado, reconhecendo que uma decisão de construir um imóvel não ocorre de forma isolada e a decisão de uma construtora ou incorporadora afeta as decisões das outras empresas concorrentes, os pesquisadores também avançam na literatura por meio da análise de estratégias de exercício das opções em um ambiente de equilíbrio considerando o impacto das pressões competitivas.

Uma análise do equilíbrio dos contratos de arrendamento de imóveis foi investigada por Grenadier (2005), que forneceu uma abordagem de equilíbrio unificada para avaliar uma ampla variedade de contratos comerciais de locação de imóveis. Usando uma combinação da teoria dos jogos com a análise das opções reais, o autor analisou como as construtoras tomam decisões de construção considerando a incerteza na demanda.

Costa e Samanez (2008) analisaram o mercado imobiliário do Rio de Janeiro sob a ótica dos jogos de opções reais, onde buscaram determinar o equilíbrio entre a oferta e a demanda comparando com o ciclo real de negócios do mercado imobiliário. Além de trabalharem com uma amostra pouco representativa para o Rio de Janeiro, utilizaram valores arbitrários e exógenos como *proxy* para suas estimativas, assim como a maioria dos estudos que aplicaram modelos de jogos de Opções Reais.

O presente capítulo abordou os principais trabalhos que usaram ferramentas da Teoria das OR e modelos de jogos com opções em mercados imobiliários no Brasil e no exterior. Esta tese se diferencia de outros trabalhos já existentes ao modificar a metodologia de Grenadier (2002) a partir da especificação da função de demanda com formato particularmente mais simples permitindo interpretações econômicas mais intuitivas.

Este trabalho é o primeiro a fazer uso de uma função de demanda estocástica em que a variável estocástica altera a inclinação da curva de demanda permitindo gerar uma especificação mais adequada e robusta das incertezas na demanda. Além disso, diversos modelos de Jogos de OR que usaram valores exógenos para os parâmetros do modelo, podendo ser escolhas subjetivas e arbitrárias desses valores. Tal situação pode ser encontrada em trabalhos como: Grenadier (1996), Grenadier (2000), Grenadier (2002), Costa e Samanez (2008), entre outros aqui citados.

Para evitar tais escolhas arbitrárias em relação à definição das variáveis que vão representar os choques multiplicativos na inclinação e no intercepto da demanda estocástica linear inversa, esta tese faz uma análise econométrica de um grupo de variáveis e busca identificar os determinantes e a dinâmica das variáveis que afetam a demanda (preço) dos imóveis residenciais da cidade do Rio de Janeiro.

Neste contexto (econométrico), a tese contribui para a literatura de jogos de OR ao aplicar um modelo bastante utilizado pela macroeconomia, o modelo VAR (Vetor Autorregressivo). O presente trabalho se difere de outros trabalhos

encontrados na literatura econométrica aplicada à realidade do mercado imobiliário no sentido de que aqui foi utilizada uma metodologia mais adequada para identificar as relações de causalidade contemporânea do modelo VAR. Para isso, foi usada a teoria dos grafos e, a partir de Grafos Acíclicos Direcionados (DAGs), foi determinada a ordenação das variáveis do modelo. Consequentemente, foi avaliado o impacto de variáveis macroeconômicas selecionadas, através de funções impulso-resposta (FIRs). Tais resultados e análises foram úteis para a modelagem econométrica da metodologia do jogo de OR desenvolvido na tese. É neste sentido que o modelo econométrico (VAR) se conecta ao principal modelo da tese (modelo de oligopólio de jogos de OR).

Tal modelo está baseado em Grenadier (2002) que se trata de um modelo clássico sobre estratégias de exercício no equilíbrio de Nash. Além de desenvolver uma abordagem original com respeito à estrutura de competição para oligopólios, Grenadier (2002) obteve uma solução analítica para o caso de oligopólio como um problema de otimização de um único agente, o que facilita sobremaneira a análise.

Conforme foi afirmado anteriormente, neste trabalho, a metodologia de Grenadier foi modificada a partir de uma especificação da função de demanda, onde foi usada função de demanda estocástica diferente. O choque estocástico proposto no intercepto da demanda inclui um parâmetro que representa a elasticidade do fator estocástico da demanda, o que permitiu maiores interpretações econômicas, ao comparar ao trabalho de Grenadier (2002). A partir desta modificação no modelo de Grenadier, a tese fornece uma solução analítica detalhada para se obter os gatilhos ótimos de equilíbrio a partir de duas funções de demanda inversa diferentes daquela empregada pelo autor. Além disso, os parâmetros da demanda foram estimados a partir de dados reais, enquanto a maioria dos trabalhos que tratam de jogos de opções reais utilizam dados sintéticos, valores arbitrários ou exógenos para os parâmetros, que não expressam a realidade do setor imobiliário. Este trabalho também se preocupou em avaliar o impacto dos parâmetros do modelo no gatilho ótimo de equilíbrio. Para isso, foi feita uma análise de sensibilidade dos gatilhos considerando variações de importantes parâmetros do modelo.

O capítulo 3 traz o modelo econométrico de Autorregressão Vetorial (VAR) para medir os impactos de um grupo de variáveis macroeconômicas sobre os preços dos imóveis, permitindo aplicar as análises na modelagem do jogo de OR desenvolvido.

3

Modelo de Autorregressão Vetorial (VAR)

Este capítulo tem como objetivo identificar a dinâmica e as inter-relações das variáveis macroeconômicas que afetam a formação dos preços dos imóveis residenciais na cidade do Rio de Janeiro.

Acredita-se que uma análise econométrica da dinâmica dos fatores determinantes dos preços dos imóveis pode clarificar a identificação do fator mais preponderante na formação dos preços dos imóveis, possibilitando fornecer uma justificativa robusta para a escolha da variável que vai representar o choque estocástico multiplicativo nas funções de demanda inversa do modelo de jogos de opções reais desenvolvido na tese.

Diversos modelos de jogos de opções reais foram desenvolvidos ao longo das últimas décadas, conforme detalhado no capítulo 3, e a maioria deles tem uma abordagem arbitrária e subjetiva quanto à escolha do choque estocástico na demanda. Tais modelos utilizam choques estocásticos na demanda e, diferentemente dos trabalhos anteriores, esta tese aplicar um modelo econométrico que pode ser capaz de auxiliar na escolha da variável que deverá representar esse choque na demanda.

Conforme ressaltado por Gonçalves e Castelo (2012), o setor imobiliário brasileiro colaborou para atenuar os efeitos da crise do *subprime* nos EUA sobre a economia brasileira. O setor permaneceu estável durante todo o período da crise. De acordo com os autores, tal desempenho favoreceu o aumento da construção civil, elevando a sua participação PIB nacional em 17% no ano de 2012.

Neste sentido é possível considerar a relevância do mercado imobiliário no contexto da macroeconomia brasileira. Sendo assim, esta tese pretende contribuir com a literatura de jogos de OR ao proporcionar uma integração entre as análises micro e macroeconômicas. Acredita-se que dessa forma será possível entender mais adequadamente o sistema econômico, onde o foco é o setor imobiliário residencial, e as implicações para a aplicação de políticas econômicas que possam afetar os preços dos imóveis e consequentemente a demanda.

Este capítulo fornece uma descrição do modelo de autorregressão vetorial (VAR), o passo a passo para estruturá-lo e a contribuição da tese, no contexto econométrico, está na utilização de Grafos Acíclicos Direcionados (por meio da teoria dos grafos) na estratégia de identificação da ordem causal das variáveis que impactam os preços dos imóveis.

Tal modelo possibilita que, em vez do pesquisador, os próprios dados possam especificar a estrutura dinâmica do modelo. Neste sentido, o presente capítulo pretende identificar as variáveis macroeconômicas que afetam a demanda por imóveis residenciais da cidade do Rio de Janeiro, medindo seus impactos nos preços dos imóveis através do modelo VAR.

O modelo VAR foi concebido por Sims (1980) e, como enfatizado por Sims (1982), é considerado bastante difundido entre os economistas. Atualmente pode ser visto como um instrumento econometricamente robusto bastante usado em análises empíricas macroeconômicas. Poucos trabalhos sobre análise de investimentos em mercados imobiliários utilizaram a metodologia VAR como ferramenta para análises empíricas mais bem estruturadas.

Na literatura internacional, encontram-se os trabalhos de Kling e McCue (1987), que utilizaram um modelo VAR para investigar a relação entre variáveis macroeconômicas e os retornos de investimentos imobiliários nos EUA entre 1973 e 1985. Os resultados encontrados indicaram a taxa de juros nominal como a variável mais explicativa das variações nas séries do mercado imobiliário.

Chen e Tzang (1988) investigaram a sensibilidade das taxas de juros em investimentos imobiliários norte-americanos. Concluíram que os investimentos imobiliários são sensíveis às taxas de juros de curto e longo prazos e que a fonte de sensibilidade varia de acordo com o tipo de investimento no ramo imobiliário.

Na literatura nacional, encontram-se trabalhos como o de Santos e Cruz (2000) que analisaram a dinâmica dos mercados imobiliários residenciais da região da Grande São Paulo. A preocupação dos autores concentrou-se em formular políticas públicas na área de habitação. Concluíram que o mercado de habitação se comporta de forma cíclica, a elasticidade-preço da oferta de novas habitações é unitária, a taxa de juros tem impacto negativo sobre o comportamento da demanda e a renda tem forte correlação com a procura por imóveis.

Santos et al. (2010) investigaram o impacto da crise do *sub-prime* no retorno de ações de empresas do setor da construção civil. Para as empresas brasileiras, não foi observada a geração de retornos anormais estatisticamente significativos.

Todos os autores (de trabalhos pesquisados para estruturar este capítulo) que usaram a metodologia VAR para avaliar o impacto das variáveis macroeconômicas em mercados imobiliários, optaram por usar critérios de identificação dos modelos e as relações de causalidade contemporânea a partir do teste de causalidade de Granger, considerado bastante popular no Brasil.

De acordo com esse método, o VAR é identificado através de uma decomposição de Cholesky, na qual a ordenação causal é definida em conformidade com os resultados de testes de causalidade de Granger, sob a hipótese implícita de que a ausência de causalidade (no sentido de Granger) de uma variável X para outra variável Z deve implicar a ausência de efeito contemporâneo de X sobre Z . O objetivo aparente desse procedimento seria reduzir o grau de arbitrariedade na escolha da ordenação causal a ser adotada, pois esta estaria amparada em critérios estatísticos. Mas trata-se de um equívoco, pois o conceito de causalidade de Granger não guarda necessariamente nenhuma relação com a ocorrência (ou não) de efeitos contemporâneos de uma variável sobre outra.

Considerando essas informações, este trabalho busca contribuir para a análise do mercado imobiliário ao usar a teoria dos grafos e, a partir de Grafos Acíclicos Direcionados (DAG), será mostrado que é possível inferir causalidade a partir dos dados e não apenas a partir de argumentações teóricas ou de conhecimentos antecipados ou intuitivos a respeito da natureza das relações contemporâneas das variáveis. A seção 3.1 traz os fundamentos econométricos do modelo autorregressivo vetorial. Tais fundamentos estão baseados em Enders (1995) e Hamilton (1994).²

² Mais detalhes sobre modelos autorregressivos vetoriais podem ser encontrados também em Sims (1986).

3.1

Fundamentos econométricos do modelo VAR

Para representar um VAR de forma simplificada, supõe-se que as inter-relações entre duas variáveis, y e z , possam ser descritas pelo seguinte modelo:

$$y_t = \varphi_0 + \varphi_1 z_t + \varphi_2 z_{t-1} + e_t^y \quad (1)$$

$$z_t = \Psi_0 + \Psi_1 y_t + \Psi_2 y_{t-1} + e_t^z \quad (2)$$

O modelo representado pelas equações (1) e (2) é também conhecido na literatura econométrica de séries temporais como modelo estrutural por incorporar relações contemporâneas de dependência (y_t depende de z_t , e vice-versa) que podem retratar aspectos fundamentais do comportamento dos agentes econômicos.

Trata-se de um modelo de duas equações e duas incógnitas, que pode ser resolvido em função das variáveis predeterminadas (z_{t-1} e y_{t-1}) e dos choques aleatórios (e_t^y e e_t^z). Substituindo z_t na equação (1) por sua definição dada na equação (2) e remanejando os termos, chega-se à expressão para y_t :

$$y_t = \varphi_0 + \varphi_1 (\Psi_0 + \Psi_1 y_t + \Psi_2 y_{t-1} + e_t^z) + \varphi_2 z_{t-1} + e_t^y \quad (3)$$

Reordenando os termos da eq. (3), tem-se:

$$y_t = \frac{\varphi_0 + \varphi_1 \Psi_0}{1 - \varphi_1 \Psi_1} + \left(\frac{\varphi_1 \Psi_2}{1 - \varphi_1 \Psi_1} \right) y_{t-1} + \left(\frac{\varphi_2}{1 - \varphi_1 \Psi_1} \right) z_{t-1} + \frac{\varphi_1 e_t^z + e_t^y}{1 - \varphi_1 \Psi_1} \quad (4)$$

Usando a eq. (4) para eliminar y_t da segunda equação do modelo estrutural, obtém-se:

$$z_t = \varphi_0 + \Psi_1 \left[\frac{\varphi_0 + \varphi_1 \Psi_0}{1 - \varphi_1 \Psi_1} + \left(\frac{\varphi_1 \Psi_2}{1 - \varphi_1 \Psi_1} \right) y_{t-1} + \left(\frac{\varphi_2}{1 - \varphi_1 \Psi_1} \right) z_{t-1} + \frac{\varphi_1 e_t^z + e_t^y}{1 - \varphi_1 \Psi_1} \right] + \quad (5)$$

$$+ \Psi_2 y_{t-1} + e_t^z$$

Reescrevendo a equação

(5):

$$z_t = \varphi_0 + \frac{(\varphi_0 + \varphi_1 \Psi_0) \Psi_1}{1 - \varphi_1 \Psi_1} + \left(\frac{\varphi_1 \Psi_2 \Psi_1}{1 - \varphi_1 \Psi_1} + \Psi_2 \right) y_{t-1} + \quad (6)$$

$$+ \left(\frac{\varphi_2 \Psi_1}{1 - \varphi_1 \Psi_1} \right) z_{t-1} + \left(\left[\frac{\varphi_1 e_t^z + e_t^y}{1 - \varphi_1 \Psi_1} \right] \Psi_1 + e_t^z \right)$$

É possível escrever o modelo VAR na forma reduzida, ou seja, a solução do modelo em função das variáveis predeterminadas e dos choques:

$$y_t = \pi_0^1 + \pi_1^1 y_{t-1} + \pi_2^1 z_{t-1} + \mathcal{G}_t^1 \quad (7)$$

$$z_t = \pi_0^2 + \pi_1^2 y_{t-1} + \pi_2^2 z_{t-1} + \mathcal{G}_t^2 \quad (8)$$

As equações (7) e (8) tratam de um sistema onde y e z dependem apenas de suas defasagens, além de choques que correspondem a combinações lineares dos choques do modelo estrutural. Definindo:

$$x_t = \begin{pmatrix} y_t \\ z_t \end{pmatrix}; \quad \Pi_0 = \begin{pmatrix} \pi_0^1 \\ \pi_0^2 \end{pmatrix}; \quad \Pi_1 = \begin{pmatrix} \pi_1^1 & \pi_1^2 \\ \pi_2^1 & \pi_2^2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathcal{G}_t = \begin{pmatrix} \mathcal{G}_t^1 \\ \mathcal{G}_t^2 \end{pmatrix}$$

a forma reduzida pode ser reescrita da forma:

$$x_t = \Pi_0 + \Pi_1 x_{t-1} + \mathcal{G}_t \quad (9)$$

A eq. (9) pode ser vista como uma representação de um processo autorregressivo para o vetor x_t . Por este motivo o nome “modelo autorregressivo vetorial” (“*Vector-AutoRegressive model*” - VAR). No exemplo representado pela eq. (9), há um modelo VAR de ordem 1, ou VAR (1), pois o vetor x_t depende apenas de sua primeira defasagem. Em termos mais gerais, o modelo pode incluir p defasagens:

$$x_t = \Pi_0 + \Pi_1 x_{t-1} + \Pi_2 x_{t-2} + \dots + \Pi_p x_{t-p} + \mathcal{G}_t \quad (10)$$

$$\text{Com } E(\mathcal{G}_t) = 0 \text{ e } E(\mathcal{G}_t \mathcal{G}_\tau') = \begin{cases} \Sigma & t = \tau \\ 0 & t \neq \tau \end{cases}$$

Os termos da eq. (10) estão representados por:

x_t = vetor ($n \times 1$) de variáveis

Π_0 = vetor ($n \times 1$) de interceptos

Π_1 = matrizes ($n \times n$) de coeficientes

\mathcal{G}_t = vetor ($n \times 1$) de distúrbios

Σ = matriz ($n \times n$) de covariância dos distúrbios contemporâneos

É importante ressaltar que todas as variáveis do VAR têm a mesma ordem de defasagens em todas as equações. De acordo com Baffoe-Bonnie (1998) e Pindyck e Rubinfeld (1991), a metodologia VAR consiste basicamente em especificar um conjunto de variáveis endógenas e exógenas que interagem entre si e consequentemente deveriam ser incluídas como parte do modelo econômico e o maior número necessário de defasagens a fim de capturar os efeitos que as variáveis produzem entre si ao longo dos períodos.

O VAR descrito pela equação (10) é a forma reduzida de um modelo estrutural que pode ser descrito da forma da eq. (11):

$$Jx_t = G_0 + G_1x_{t-1} + \dots + G_px_{t-p} + u_t \quad (11)$$

onde:

- $J \sim (n \times n)$
- $G_0 \sim (n \times 1)$
- $G_1 \sim (n \times n), \dots, G_p \sim (n \times n)$ são parâmetros
- $u_t = (u_{1,t}, \dots, u_{m,t})$ é um vetor compostos pelos choques estruturais.

Os termos da equação (11) são representados pelos termos da relação entre a forma reduzida e a forma estrutural. Os parâmetros J, G_0, G_1, \dots, G_p não podem ser estimados (equação por equação) por mínimos quadrados ordinários (MQO) ou máxima verossimilhança (MV). Por outro lado, os parâmetros da forma reduzida do VAR (eq. (10)), tomando-se equação por equação, podem ser estimados via MQO ou MV, pois contêm apenas variáveis predeterminadas.

Além disso, os distúrbios de cada equação satisfazem as propriedades clássicas de homocedasticidade e ausência de autocorrelação. Portanto, cada equação pode ser estimada por MQO. A matriz de variância-covariância dos resíduos também pode ser estimada da forma usual, a partir dos resíduos da estimação por MQO.

A partir do que foi exposto até o momento, a questão que fica é a seguinte: será possível identificar ou recuperar os parâmetros estruturais a partir dos parâmetros da forma reduzida? De fato, o modelo estrutural tem, em geral, um excesso de parâmetros comparado à forma reduzida, sendo necessárias restrições adicionais para identificar o modelo.

A partir dos termos das equações (10) e (11), sabe-se que:

$$\Pi_0 = J^{-1}G_0;$$

$$\Pi_1 = J^{-1}G_1;$$

$$\Pi_p = J^{-1}G_p \text{ e}$$

$$\Sigma_g = J^{-1}\Sigma_u(J^{-1})'.$$

Logo, é necessário encontrar a matriz J . Sabe-se que o número de parâmetros na forma reduzida é igual a $n(1+pn) + \frac{n(n+1)}{2}$ (n interceptos, pn^2 elementos das matrizes Π e $\frac{n+(n^2-n)}{2}$ variâncias/covariâncias) e a forma estrutural tem $n(n-1) + n(1+pn) + n$ parâmetros (os parâmetros vieram de n interceptos, pn^2 nas matrizes e n variâncias). Assim, a forma reduzida tem $\frac{n(n-1)}{2}$ parâmetros a mais. Com isso, é preciso impor $\frac{n(n-1)}{2}$ restrições.³ Uma alternativa é a decomposição de Cholesky ou identificação recursiva, já que a matriz J é uma matriz triangular inferior (superior).

Considerando essas informações a respeito das restrições, o modelo estrutural se torna identificado. Logo, torna-se possível obter os parâmetros do modelo estrutural e calcular a resposta de cada variável a um impulso em outra variável, isto é, a uma inovação na equação dessa variável, que será a última etapa do procedimento de estimação do modelo.

Por enquanto, as próximas etapas tratam da caracterização dos dados, especificação e estimação do modelo.

3.2 Caracterização e tratamento dos dados

Antes de passar aos resultados, é necessário tecer algumas considerações acerca das variáveis utilizadas neste estudo. Trabalha-se com séries históricas mensais que contém informações para o período compreendido entre junho de 2009 e janeiro de 2016. As amostras foram obtidas através de pesquisas e consultas às fontes de dados como Secovi-Rio, Ipeadata e Banco Central (BACEN). As variáveis selecionadas para o modelo VAR são: preço do metro quadrado de imóveis residenciais padrão dois quartos, taxa de juros do Sistema Especial de Liquidação e Custódia (SELIC), o Produto Interno Bruto (PIB), Financiamento

³ Outras formas de identificar o modelo VAR podem ser: através de restrições de longo-prazo alguns choques não têm impacto no longo-prazo em algumas variáveis (Blanchard e Quah (1989)); Variáveis instrumentais; restrições de sinal, teoria (por exemplo os modelos de equilíbrio geral estocástico dinâmico – DSGE)

Habitacional (FinHab) e renda real do trabalhador. As séries de preço e PIB foram deflacionadas pelo IPCA para que fosse retirado o efeito da inflação.

Em relação ao preço dos imóveis, optou-se por utilizar uma série de preços única para representar uma região da cidade do Rio de Janeiro. Esta série foi calculada a partir de valores de preços de 16 bairros do município do Rio de Janeiro, como mostra a Tabela 1:

Tabela 1 - Bairros da cidade do Rio de Janeiro analisados

1. Barra da Tijuca	10. Jardim Botânico
2. Botafogo	11. Lagoa
3. Centro	12. Laranjeiras
4. Copacabana	13. Leblon
5. Flamengo	14. Méier
6. Gávea	15. Recreio
7. Ilha do Governador	16. Tijuca
8. Ipanema	17. Vila Isabel
9. Jacarepaguá	

Os apartamentos residenciais com dois quartos foram usados como o modelo padrão para a amostra representativa do mercado imobiliário da região escolhida para análise. De acordo com o Secovi-Rio (2014, 2015), apartamentos de dois quartos são os que possuem maior demanda e oferta dentre as opções do mercado de imóveis residenciais além de apresentarem maior liquidez.

Escolheu-se esse grupo de bairros devido à disponibilidade de dados, que é bastante restrita. Além disso, esses bairros são os principais da capital do Rio de Janeiro que fazem parte da região de maior especulação imobiliária alavancada pelos eventos esportivos sediados na cidade, como a Copa do Mundo, em 2014, e as Olimpíadas, em 2016.

A mostra os valores nominais médios por metro quadrado (em R\$) de cada bairro que forma o grupo representativo da região da cidade analisada neste trabalho.

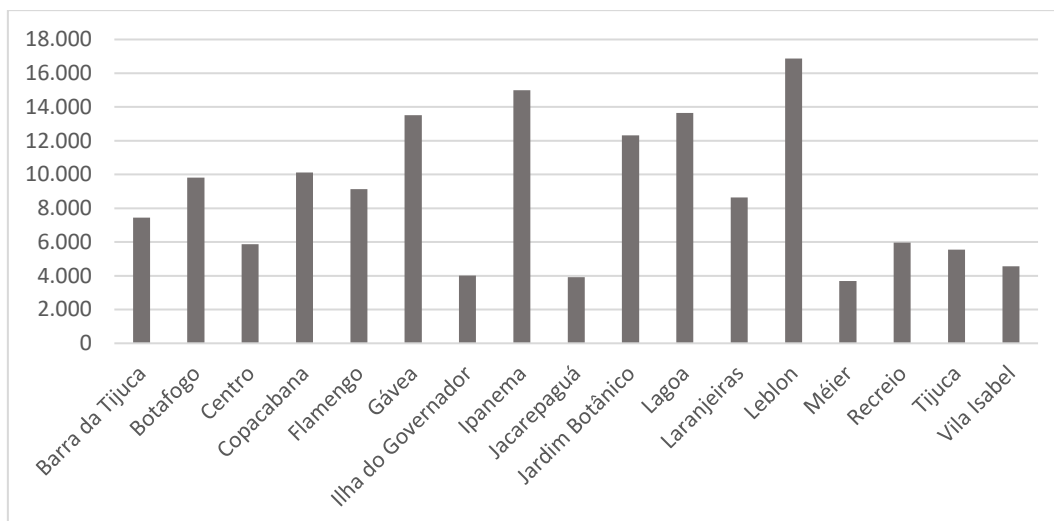


Figura 1 - Preços de venda médios nominais do m²

Conforme ressaltado por Dias (2015), é importante que sejam feitos diversos testes econométricos para investigar o comportamento das séries temporais. Caso não seja feita uma cuidadosa análise estatística e econométrica das variáveis, o pesquisador pode chegar a conclusões seriamente inadequadas a respeito das séries temporais usadas em seus modelos.

Considerando as variáveis selecionadas, esta seção traz uma descrição das análises realizadas em torno da análise do comportamento sazonal dessas variáveis. Foram, portanto, utilizados programas estatísticos como RStudio, Eviews 7, X-13ARIMA-SEATS. Este último é a junção de outros dois programas de ajuste sazonal: X12-ARIMA de Findley et al. (1998) e TRAMO/SEATS de Gómez e Maravall (1996). Além de dessazonalizar as séries, o programa oferece diversos diagnósticos que permitem avaliar a qualidade do ajuste sazonal.

Neste sentido, a primeira preocupação com as variáveis selecionadas está relacionada à verificação de padrões de sazonalidade e/ou presença de *outliers*. A partir de análises gráficas, pode ser possível investigar padrões de sazonalidade em uma série temporal. Foram realizadas as etapas de avaliação do ajuste sazonal para cada série temporal a partir de quatro passos principais: i) fazer uma verificação do teste de sazonalidade através da estatística QS; ii) diagnosticar o pré-ajuste e o modelo ARIMA; iii) investigar os indícios de sazonalidade ou efeitos de *outlier* graficamente; iv) analisar a estabilidade do ajuste sazonal.

O próximo diagnóstico fornecido pelo programa tem o objetivo de verificar se há indícios de sazonalidade. O diagnóstico é dado pelo gráfico da função de autocovariância da série temporal, reestimada por densidade espectral. O diagnóstico é dado para quatro séries: original, série dessazonalizada, resíduos do modelo ARIMA (modelos Autorregressivos Integrados de Média Móvel) e componente irregular.

Para avaliar a qualidade do ajuste, o X13 fornece ferramentas como testes que permitem, além da verificação da sazonalidade, a detecção de autocorrelação e normalidade residual e gráficos para verificar a estabilidade dos fatores sazonais.

De posse dessas informações, as variáveis SELIC, PIB e financiamento habitacional (FinHab) foram ajustadas por apresentarem componentes sazonais, enquanto o preço e renda apresentaram intervenções do tipo *outlier*, conforme mostra a Tabela 2:

Tabela 2 - Variáveis e tratamento das séries temporais

Variável	Ajuste Sazonal	Intervenção	Fonte
Preço	Não	Outlier	Secovi-Rio
Renda	Não	Não	IPEA
SELIC	Sim	Outlier	IPEA
PIB	Sim	Não	BCB
FinHab	Sim	Outlier	BCB

Portanto, as séries que apresentaram componentes sazonais e *outliers* foram ajustadas pelo programa X-13ARIMA-SEATS através do RStudio e usadas devidamente ajustadas na modelagem econométrica realizada no programa MATLAB. A seguir, segue-se com os procedimentos de estimação do modelo.

A compra de um imóvel é vista como uma decisão de investimento de longo prazo. As expectativas dos agentes econômicos são importantes no desempenho das variáveis econômicas, especialmente, as variáveis que definem a dinâmica macroeconômica. Se as expectativas dos consumidores em relação ao futuro é estável, melhora e aumenta a confiança do consumidor o que pode fazer com que assuma compromissos de longo prazo como o financiamento habitacional.

Como o objetivo desta seção é analisar a inter-relação entre as variáveis do modelo VAR e observar especialmente as funções impulso-resposta do preço dos

imóveis frente aos choques de cada variável selecionada, utilizou-se uma transformação monotônica nas referidas variáveis com a aplicação do logaritmo natural (Ln) em todas as séries temporais.

Uma preocupação relevante com os modelos econométricos, é que tenha sido testada a condição de estacionariedade das séries temporais. Para tanto, utilizou-se o conhecido teste Dickey- Fuller Aumentado (ADF), com o auxílio do *software* estatístico RStudio.

Inicialmente, foram testadas todas as variáveis tendo como hipótese nula (H_0) a não estacionariedade da série (presença de raiz unitária). Em seguida, as séries que se mostraram não-estacionárias foram diferenciadas até que se tornassem estacionárias. Dessa forma, a Tabela 3 mostra os resultados do Teste ADF, indicando que todas as variáveis são estacionárias em primeira diferença usando a escala logarítmica, ao nível de significância de 1%.

Os resultados da estatística ADF e os valores críticos de cada série temporal utilizada estão apresentados na Tabela 3.

Tabela 3 - Teste de estacionariedade* ADF

Série	Estacionariedade	Valores Críticos	Estatística ADF
LnPreço	1ª diferença	-4,0833	-5,2019
LnRenda	1ª diferença	-3,5215	-7,2391
LnSelic	1ª diferença	-3,5215	-9,4236
LnPIB	1ª diferença	-3,5190	-7,2809
LnFH	1ª diferença	-3,5190	-11,5587

*Nível de significância de 1%

O teste ADF é um teste tradicionalmente usado para examinar se a série é não-estacionária. Contudo, este teste é considerado de baixa potência para medir as informações a respeito do comportamento da série. Além disso, conforme será visto no capítulo 5, Pindyck (1999) sugere que o teste ADF não é suficiente para determinar a escolha do processo estocástico e defende o teste de razão de variância como uma alternativa. Este teste fornece mais informações do que o teste de raiz

unitária ADF, ao mensurar o grau em que a variância da série cresce à medida que o número de defasagens aumenta.

Portanto, além do teste ADF, foi aplicado também o teste de razão de variância. A partir da variação dos *lags* de 2 a 79 dos logaritmos das séries utilizadas no presente capítulo, os resultados deste teste indicaram que a razão da variância aumentou com o aumento do número de *lags*.

A próxima etapa se concentra em analisar os resíduos do modelo VAR. Como não é relevante tentar interpretar os coeficientes individuais estimados para cada equação do modelo por não fazer muito sentido no contexto dos modelos VAR, inicialmente, é necessário verificar se os resíduos do VAR apresentam autocorrelação significativa. Isso indicaria que não foi incluído um número suficiente de defasagens no modelo. Os gráficos dos resíduos de cada equação estão ilustrados no Apêndice 3.

Analizando os gráficos, aparentemente, não há indícios claros de autocorrelação serial. A fim de testar formalmente tal hipótese, realizou-se o teste de autocorrelação *LM Test* (teste do multiplicador de Lagrange). O resultado do teste confirmou que não há autocorrelação, quando foi possível notar p-valores elevados, de modo que a hipótese nula de ausência de autocorrelação não é rejeitada.

Portanto, o próximo passo é determinar o quanto o passado das variáveis do modelo proposto é importante para explicar o presente. Para isso é necessário definir o número de defasagens para o modelo. Por um lado, é desejável incluir o maior número possível de defasagens, para evitar a imposição de restrições falsas sobre a dinâmica do modelo e garantir que os resíduos não sejam autocorrelacionados. Contudo, a escolha de um elevado número de *lags* leva ao maior número de parâmetros a serem estimados, levando o pesquisador a trabalhar com menos graus de liberdade em sua estimação.

A partir desta importante observação, o esforço econométrico deste capítulo parte de um número máximo de defasagens, dada a restrição imposta pela disponibilidade de dados, que gere resíduos aproximadamente independentes e identicamente distribuídos (*i.i.d*). Em seguida, testa-se a exclusão sucessiva da

maior defasagem através de testes-F e critério de informação⁴ proposto por Schwarz (1978), até chegar ao “melhor modelo” – aquele que tenha o menor valor do critério de informação sujeito à restrição de que os resíduos não sejam autocorrelacionados.

Considerando esta importante observação, utilizou-se a ferramenta *lag length criteria* do *software* econométrico Eviews para definir a escolha da ordem de defasagens do VAR. Assim, baseando-se no critério de informação de Schwarz (1978), o número de defasagens indicado para as variáveis do modelo VAR foi de três meses. Tal resultado significa que, do ponto de vista econômico, eventuais mudanças nas variáveis selecionadas levariam perto de três meses para serem refletidas sobre o preço dos imóveis.

Considerando essas informações, em seguida será detalhada a metodologia para identificar e analisar as relações de ordenação e causalidade contemporânea entre as variáveis escolhidas para o modelo VAR.

3.3 Causalidade

Os modelos VAR têm se mostrado bastante populares pois permitem analisar as inter-relações entre diversas variáveis a partir de um conjunto mínimo de restrições de identificação - isto é, de restrições que permitam identificar o componente exógeno de cada variável, possibilitando a estimação do efeito de um choque nessa variável sobre as demais.

Em relação à identificação do VAR, o método mais popular é o procedimento de ortogonalização dos resíduos do VAR baseado na decomposição de Cholesky. Essa ferramenta permite impor uma estrutura recursiva à matriz de relações contemporâneas entre as variáveis do modelo. Com isso, as variáveis do modelo não são afetadas umas pelas outras e vice-versa, cabendo ao pesquisador apenas selecionar a ordenação causal adequada das variáveis sob análise.

Com isso, o modelo passa a ser exatamente identificado e é possível investigar as inter-relações entre as variáveis por meio de funções impulso-resposta e da decomposição de variância dos erros de previsão do modelo. Contudo, para

⁴ É de consenso geral na literatura econométrica o fato de o critério de informação Schwarz (1978) ser o mais parcimonioso. Pindyck (1999) detalha os procedimentos de cálculo desse critério.

identificar o modelo, é necessário definir a ordenação das variáveis utilizadas no VAR.

Em muitos trabalhos⁵ - em especial aqueles que aplicaram a metodologia VAR para avaliar os impactos dos choques nas variáveis relacionadas ao mercado imobiliário – a opção por uma determinada ordenação das variáveis não tem sido justificada de forma consistente. Em grande parte dos casos, observa-se a dificuldade e até inexistência de argumentação teórica ou conhecimento antecipado acerca da natureza das relações contemporâneas entre as variáveis, tornando-se difícil fornecer argumentos convincentes em favor de uma determinada ordenação causal.

O método de identificação bastante popular e amplamente utilizado é o teste de causalidade de Granger (1969). A ideia era usar este teste no intuito de verificar a direção (ordenação) e a intensidade da causalidade entre as variáveis. Contudo, esse teste não permite garantir que uma determinada variável causa a outra contemporaneamente.

3.4

Causalidade de Granger

Em geral, o uso de modelos VAR tem como objetivos a previsão não condicionada de variáveis de interesse e a análise de inter-relações entre variáveis. O teste geralmente utilizado para testar a hipótese de causalidade é o Teste de causalidade de Granger. Este teste está associado à ideia de precedência temporal. Neste sentido, ao considerar-se uma formulação mais geral do VAR, os valores defasados de cada variável aparecem em cada equação do sistema. Pode ser interessante testar se uma determinada variável ou um grupo de variáveis tem alguma relação na determinação de outras variáveis do sistema. Supondo um VAR simples com apenas duas variáveis especificado da forma da eq. (12):

⁵ Santos et al. (2000), Melo (2011), Sutton (2002), entre outros.

$$\begin{bmatrix} y_{1t} \\ y_{2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & 0 \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{1,t-1} \\ y_{2,t-2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_{1t} \\ e_{2t} \end{bmatrix} \quad (12)$$

De acordo com a abordagem de Johnston e DiNardo (2000), é possível perceber que os valores defasados de y_2 não desempenham papel na determinação de y_1 , permitindo dizer que y_2 não causa y_1 . A hipótese de que y_2 não causa y_1 poderia ser testada simplesmente através da regressão de y_1 sobre os valores defasados de y_1 e y_2 , examinando em seguida se o coeficiente de y_2 é significativamente diferente de zero. Contudo, de forma mais geral, o vetor y poderia ser dividido em dois subvetores:

- i) y_1 do tipo $K_1 \times 1$
- ii) y_2 do tipo $K_2 \times 1$

A hipótese de que o bloco y_2 não causa y_1 à Granger é testada pela estimação das K primeiras k_1 equações do VAR, testando em seguida se os coeficientes dos vetores y_2 defasados diferem significativamente de zero. O teste mais simples é um teste de razão de verossimilhanças baseado nas matrizes de variâncias e covariâncias dos resíduos.

3.5

Uma alternativa ao teste de causalidade de Granger

O conceito de causalidade de Granger não tem relação com a ocorrência ou não de efeitos contemporâneos de uma variável sobre a outra. Não é possível afirmar, através deste teste, que se não for constatada causalidade de Granger de uma variável para outra, não há implicação de efeito contemporâneo⁶. Contudo, esse erro tem sido cometido em diversos trabalhos que aplicaram a metodologia VAR.

⁶ Marco (2012), Lima et al. (2009)

Neste contexto, diferentemente de trabalhos anteriores, esta tese analisa as inter-relações entre as variáveis que compõem a dinâmica do mercado imobiliário do Rio de Janeiro, a partir do emprego do método de grafos acíclicos direcionados (DAGs) desenvolvido por Spirtes et al. (2000). Para gerar as DAGs foi utilizado o programa computacional Tetrad⁷.

Assim, a identificação do VAR estrutural será feita a partir DAGs para determinar a ordenação de causalidade contemporânea do modelo, possibilitando inferir causalidade a partir dos dados. Os DAGs vão testar as relações de independência condicional entre as variáveis observadas que impõem restrições gráficas sobre as possíveis estruturas causais, baseando-se em determinadas hipóteses. A próxima etapa apresenta brevemente a Teoria dos Grafos e o programa computacional usado para gerar as DAGs, chamado Tetrad.

3.6 Teoria dos grafos e grafos direcionados

A Teoria dos Grafos é um ramo da matemática que estuda as relações entre os objetos de um determinado conjunto. Segundo Biggs et al. (1986) um grafo é uma estrutura $G(H,E)$ onde H é um conjunto não vazio de objetos denominados vértices e E é um conjunto de arestas. As arestas podem ou não ter direção. Se as arestas têm uma direção associada (indicada por uma seta na representação gráfica) tem-se um grafo direcionado, grafo orientado ou dígrafo.

Um Grafo Direcionado é uma figura que representa um fluxo causal, indicado por setas (arestas direcionadas) entre alguns pares de vértices (variáveis). Um grafo pode ser marcado por uma única ponta de seta na extremidade (direcionado) ou não dirigida (não marcado). As setas representam as relações causais: se houver uma seta que aponta de X_i a X_j que significa que X_i tem um efeito causal direto em X_j . A Figura 2 ilustra um exemplo:

⁷ O programa está disponível para download em <http://www.phil.cmu.edu/projects/Tetrad/>

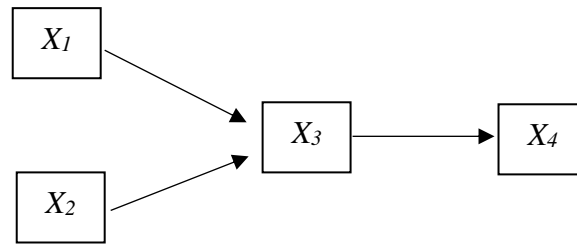


Figura 2 - Grafo direcionado representando um fluxo causal

Um grafo direcionado (causal) é uma imagem que representa um fluxo causal, indicado por setas (bordas direcionadas) entre alguns pares de vértices (variáveis). Uma borda em um grafo pode ser direcionada (marcada por uma única ponta de flecha na borda) ou não direcionada (não marcada). Se todas as bordas de um gráfico forem direcionadas, que é um grafo direcionado. A seguir é fornecida uma breve explicação a respeito dos DAGs seguindo de perto o trabalho de Spirtes et al. (2000).

As setas representam relações causais: se há uma flecha apontando de X_i para X_j , significa que X_i tem um efeito causal direto em X_j , em relação a todos os vértices. Um caminho direcionado de tamanho n entre os vértices X e Y é uma sequência de n vértices começando em X e terminando em Y da forma:

$$X \rightarrow V_1 \rightarrow V_2 \rightarrow \dots \rightarrow V_{n-2} \rightarrow Y$$

ou da forma:

$$X \leftarrow V_1 \leftarrow V_2 \leftarrow \dots \leftarrow V_{n-2} \leftarrow Y$$

Um Grafo Acíclico Direcionado (DAG) é um grafo direcionado sem ciclo direcionado, na medida em que não é possível iniciar um vértice (variável) e seguir um caminho direcionado de volta para esse vértice.

O vértice X_i está no conjunto de "pais" de uma variável X_j em um DAG F , denotado por $PA_F(X_j)$, se houver uma borda $X_i \rightarrow X_j$ em F , X_j será um "descendente" de X_i em F se houver um caminho direcionado de X_i para X_j ou $X_i = X_j$.

O modelo de Spirtes et al. (2000) começa com um triplo $\langle F, H, P \rangle$, onde F é um DAG com um conjunto não vazio de vértices (variáveis) H , $H = (X_1, X_2, \dots, X_k)$ é um vetor de variáveis aleatórias e P é uma distribuição de probabilidade conjunta para H . Uma vez que o objetivo da inferência causal é obter algumas informações sobre a causalidade a partir da informação sobre associação, deve haver alguns pressupostos que os conectem (ver Spirtes et al. (2000) para mais detalhes).

Formalmente, a correlação parcial entre X e Y dado um conjunto de n variáveis de controle $Z = \{Z_1, Z_2, \dots, Z_n\}$, $\rho_{XY \cdot Z}$, é a correlação entre os resíduos R_X e R_Y que resultam, respectivamente, de uma regressão linear de X em Z e de Y em Z . A estatística $\rho_{XY \cdot Z}$, conhecida como correlação parcial de Pearson, não tem distribuição normal. A transformação desta estatística, denominada estatística z de Fisher, tem distribuição normal e permite computar intervalos de confiança para $\rho_{XY \cdot Z}$. No programa Tetrad, descrito na seção 3.6.1, foi escolhida a estatística z de Fisher que, considerando o tamanho da amostra (razoavelmente pequeno), optou-se por utilizar 20% de significância para testar a hipótese de correlação parcial igual a zero (hipótese nula).

3.7

O programa computacional Tetrad

O Tetrad foi desenvolvido por Spirtes et al. (2000) e pode ser usado para estimar os grafos acíclicos direcionados. O programa Tetrad utiliza como insumo a matriz de covariância dos resíduos do VAR na forma reduzida e a converte em uma matriz de correlação. Em seguida são realizados testes de hipóteses, onde a hipótese nula é uma correlação parcial igual a zero.

O programa inicia com um grafo direcionado saturado, no qual qualquer par de vértices é conectado por uma aresta não-direcionada. Se a hipótese de correlação parcial igual a zero não é rejeitada, utilizando o teste z de Fisher, a aresta é apagada. Depois de examinar todos os pares de variáveis, o programa passa a considerar triplas (de variáveis), e assim por diante. Ele orienta as arestas que permanecem no grafo utilizando a conexão entre independência probabilística e a teoria dos grafos.

O Tetrad fornece como resultado um conjunto de DAGs que são observacionalmente equivalentes e que representam as estruturas causais do modelo.

É possível adotar uma estratégia que utiliza as relações de dependência e independência condicionais entre as variáveis para selecionar as restrições de identificação que resultam da aplicação de DAGs.

A variáveis selecionadas para aplicação no programa Tetrad são as mesmas detalhadas no início deste capítulo: PIB real, taxa de juros SELIC, renda real, financiamento habitacional e preço real do metro quadrado do apartamento padrão. A seguir será mostrado o resultado gerado pelo programa Tetrad para a ordenação causal contemporânea das variáveis para o VAR estrutural.

3.8

Ordenação causal contemporânea

Para a aplicação do programa Tetrad, foi necessário adotar um nível de significância de 20% a fim de permitir que as variáveis selecionadas sejam causalmente suficientes. Spirtes et al. (2000) sugerem o nível de significância de 20% para amostras menores do que 100 observações, 10% para amostras com número de observações entre 100 e 300 e nível de significância menor do que 10% para amostras maiores de 300 observações.

De acordo com Spirtes et al. (2000), um conjunto V de variáveis é considerado causalmente suficiente se qualquer causa comum de duas ou mais variáveis em V está em V . Como o programa Tetrad tem um viés para exclusão de relação causal presente no dado, sugere-se que seja usado o nível de significância de 20% para contornar tal limitação.

Assumiu-se que as variáveis selecionadas para o modelo são causalmente suficientes e, a partir da matriz de covariância dos resíduos do modelo VAR na forma reduzida, com o uso de DAGs, foi detectada a representação padrão para causalidade contemporânea das variáveis do modelo. O padrão é uma representação gráfica do conjunto de DAG observacionalmente equivalente contendo a ordem causal contemporânea das variáveis.

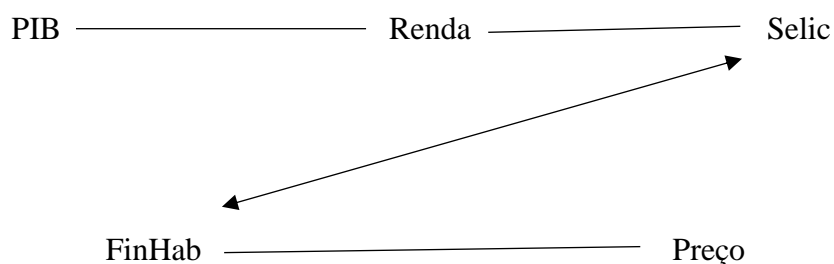


Figura 3 – DAG observacionalmente equivalente

A representação padrão é um DAG parcialmente orientado, onde as bordas direcionadas representam setas que são comuns a cada membro na classe equivalente, enquanto as bordas não direcionadas são direcionadas de uma maneira em alguns DAGs e de outra maneira em outros. As bordas não direcionadas (-) significam que há uma causalidade em uma das duas direções, mas não em ambos, enquanto que as arestas orientadas duas vezes (\leftrightarrow) indicam causalidade em ambas as direções. Portanto para identificar o modelo VAR, as relações de causalidade identificadas com base nos DAGs é a seguinte:

$$\text{PIB} \rightarrow \text{Renda} \rightarrow \text{Selic} \rightarrow \text{FinHab} \rightarrow \text{Preço}$$

As relações derivadas do DAG entram na matriz J da equação (11) como restrições que ajudam no processo de identificação dessa matriz tal como definido anteriormente.

3.9

Funções Impulso-Resposta – resultados empíricos

A partir da ordem causal contemporânea derivada dos DAGs para identificar o modelo, analisam-se nesta seção as funções impulso-resposta (FIR) de variáveis econômicas para choques exógenos e independentes nas variáveis selecionadas. Procura-se responder à pergunta: como determinada variável y responde a um choque em outra variável z ?

De acordo com Enders (1995), para responder a essa pergunta, porém, não se deve olhar para o modelo na forma reduzida, mas para o modelo estrutural. Com isso, as inovações (erros) do VAR são combinações lineares das inovações de um modelo estrutural, e não têm, portanto, significado econômico. São os efeitos de inovações no modelo estrutural que vão permitir alguma interpretação intuitiva.

A partir dessas considerações, as funções impulso-resposta de um choque nas variáveis do modelo por um aumento inesperado do tamanho de dois desvios-padrão em cada uma das variáveis selecionadas sobre o preço dos imóveis, com base na identificação advinda dos DAGs, estão representadas nas Figuras 4 até 8.

O comportamento das funções impulso-repostas considera um horizonte de tempo de 12 meses à frente. É importante ressaltar que todas as variáveis do modelo foram diferenciadas para que se tornassem estacionárias. Por isso, cada variável analisada em um determinado período representa a variação dela no ano anterior. Portanto, os choques aplicados sobre as variáveis utilizando as funções impulso-reposta seguem a mesma ideia.

Uma característica dos gráficos de funções impulso-resposta é que a linha tracejada (azul), que pode ser visualizada nas Figuras 4 até 8, mostra a potencial variação da resposta acumulada para uma amplitude de até dois erros padrão.

De acordo com os conceitos microeconômicos, a demanda por um bem qualquer, ou especificamente por um imóvel está relacionada positivamente ao nível de renda real dos consumidores. Assim como em Sutton (2002), neste trabalho foi encontrado que um choque positivo no PIB provoca um aumento da renda real do consumidor, levando ao aquecimento (aumento) da demanda por imóveis e, conseqüentemente, ao aumento do preço. Tais efeitos podem ser observados através dos resultados derivados das funções de impulso-resposta ilustradas na Figura 4.

Tsatsaronis e Zhu (2004) também encontraram esse resultado e ainda argumentam que o PIB, por ser uma variável agregada, consegue sumarizar medidas (como salários e desemprego) que podem afetar a renda e também a riqueza dos consumidores.

Um choque na renda real provoca efeito transitório nos preços dos imóveis. Inicialmente, observa-se que um choque positivo na renda real provoca uma queda no nível de preços dos imóveis e, a partir do sexto mês, os preços começam a se recuperar. Uma explicação para isso pode ser o fato de que um possível aumento da renda real, no curto prazo, não eleva a demanda por bens de consumo com valor

elevado como um imóvel. Grande parte das famílias brasileiras recorrem aos financiamentos habitacionais para fechar os negócios imobiliários por não acumularem recursos em um curto espaço de tempo. Assim, o que pode explicar o aumento do preço dos imóveis a partir do sexto mês, pode ser devido ao tempo necessário para os consumidores de imóveis acumularem os recursos para, por exemplo, dar a entrada em um apartamento. Com isso a demanda leva um tempo para ser percebida e consequentemente os vendedores de imóveis vão elevar os preços períodos a frente.

Ainda no contexto dos efeitos transitórios do choque da renda real nos preços dos imóveis, pode-se ressaltar a importância de dois conceitos: renda permanente e renda transitória de Friedman (1957). A primeira pode ser definida como a parte da renda que os consumidores esperam que persista no futuro. Enquanto a segunda (renda transitória) é a parte da renda que as pessoas não esperam que persista futuramente. Sob outro aspecto, a renda transitória é o desvio aleatório da renda permanente. O autor propôs a hipótese da renda permanente que ajuda a explicar o comportamento do consumidor, dado que a renda permanente enfatiza que as pessoas experimentam variações aleatórias e temporárias em suas rendas de ano para ano. Portanto, o conceito relevante que ajuda a explicar os efeitos transitórios é o conceito de renda permanente, pois os demandantes de imóveis vão considerar a renda permanente e descontar todos os fluxos de caixa e, junto a isso, vão cotejar com o financiamento de longo prazo.

A próxima análise será para a taxa de juros. Conforme ressaltado de Grenadier (2002), o imóvel é um tipo de ativo que gera serviços de habitação por longos períodos de tempo e o valor implícito do imóvel pode ser encontrado através dos fluxos de lucros esperados. Consequentemente, o valor do imóvel pode depender da taxa de juros que irá descontar a valor presente o fluxo de lucros. Com isso, o impacto do valor do imóvel considerando um choque positivo na taxa de juros provocará redução do seu preço. A função impulso-resposta ilustrada na Figura 6 mostra uma tendência de queda acentuada no preço dos imóveis indicando que um choque positivo na taxa de juros tem forte impacto sobre o preço dos imóveis.

O volume de financiamento habitacional pode ser considerado uma variável relevante no mercado imobiliário. No Brasil existe uma elevada tendência das famílias que dependem de recursos do financiamento habitacional para efetivar as

negociações de imóveis, já que parte considerável da população não possui recursos em poupança disponíveis para efetuar a compra de um imóvel, conforme mencionado anteriormente. Como consequência, existe uma demanda por crédito habitacional bastante relevante. Considerando que essas características afetam o preço dos imóveis e vice-versa, conforme indicado pelo DAG encontrado neste trabalho, torna-se importante analisar a função de impulso-resposta para o preço dado um choque positivo no volume de financiamento habitacional. O que se observa, através da Figura 7, um choque positivo no financiamento provoca um aquecimento da demanda por imóvel elevando consequentemente os preços, mostrando-se ter forte impacto sobre os preços dos imóveis. Esse comportamento é bastante intuitivo no tocante à resposta dos preços dos apartamentos diante de um choque no volume de financiamentos imobiliários.

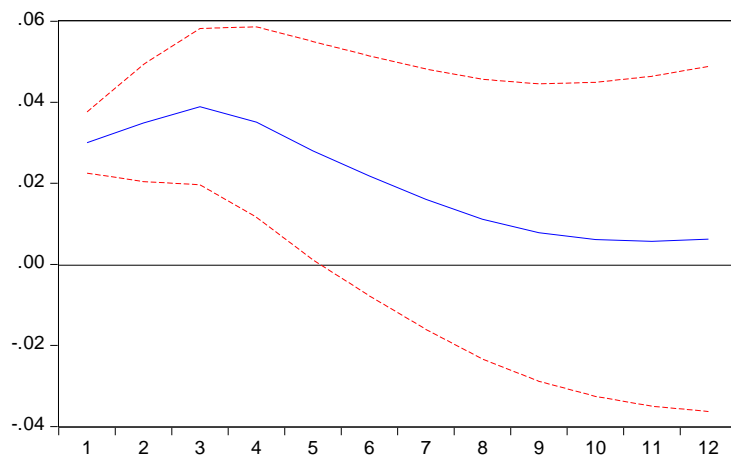


Figura 4 - FIR do Preço ao choque no PIB

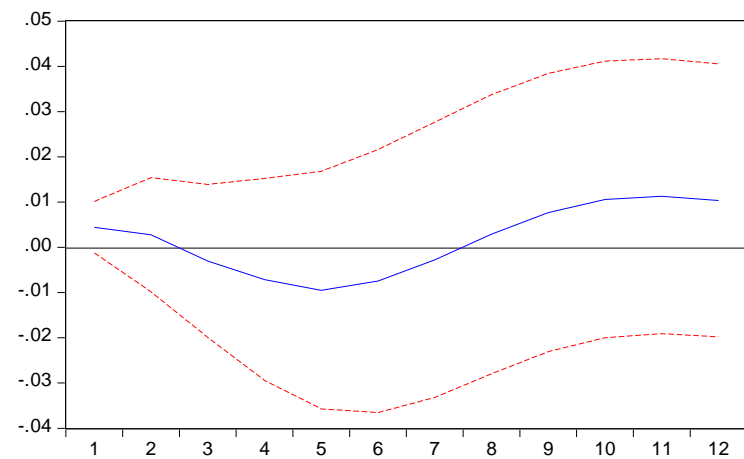


Figura 5 - FIR do Preço ao choque na Renda

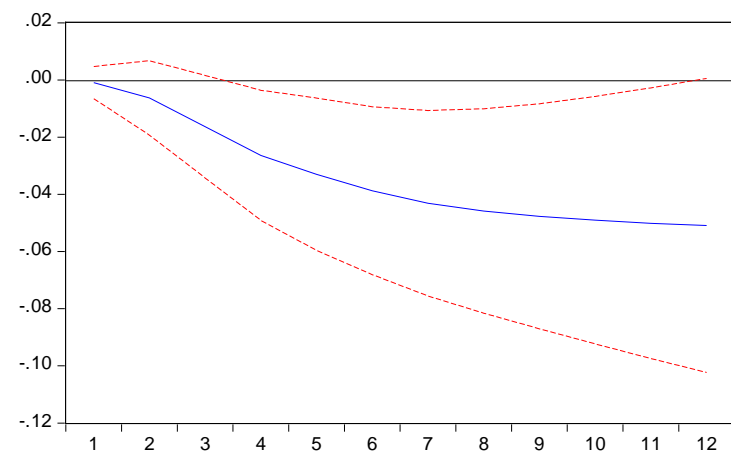


Figura 6 - FIR do preço ao choque na taxa Selic

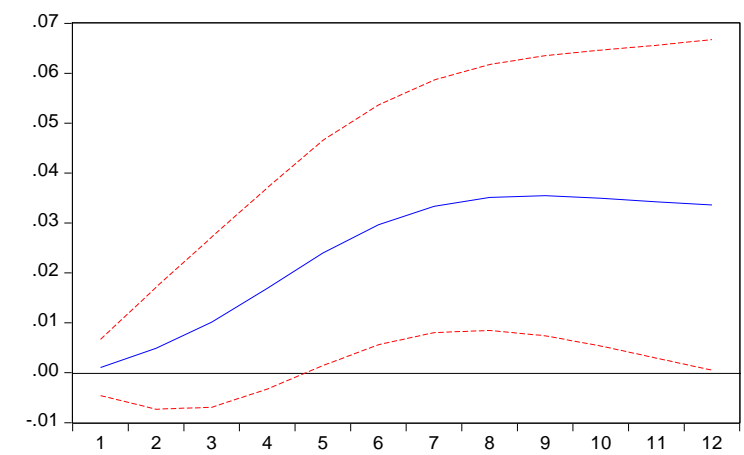


Figura 7 - FIR do Preço ao choque no Financiamento

Por fim, a Figura 8 mostra a função impulso-resposta do preço para um choque no próprio preço. Lembrando que os valores da série de preços estão em primeira diferença, percebe-se que um choque no preço dos imóveis faz a demanda responder negativamente, respeitando fortemente a lei da demanda. O preço responde de maneira mais significativa a seus próprios choques, o que faz mais sentido. O choque parece levar a resposta do preço a uma queda mais acentuada a partir do sexto mês.

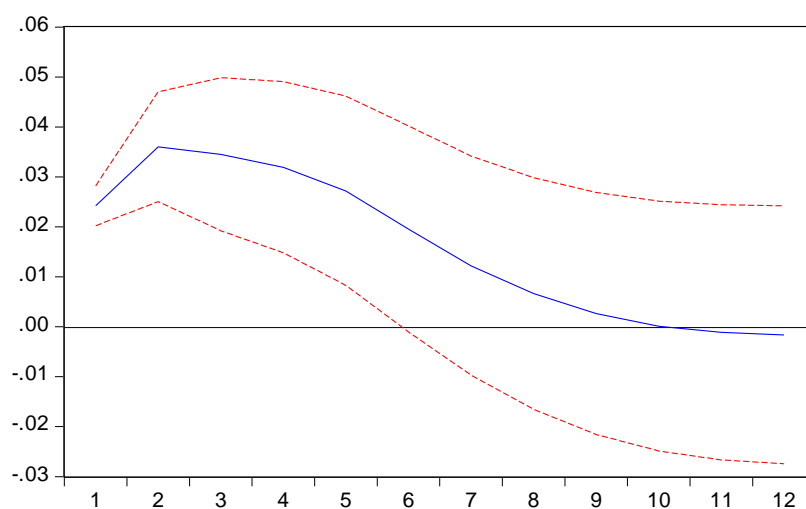


Figura 8 - FIR do Preço ao choque no Preço

Este capítulo teve como objetivo medir os impactos das variáveis macroeconômicas no preço dos imóveis em uma região da cidade do Rio de Janeiro. Ao contrário de trabalhos anteriores, onde a maioria dos estudos econométricos se baseou nos testes de causalidade de Granger para definir a ordenação das variáveis no modelo VAR, aqui foi dada a devida atenção à identificação do modelo a partir da identificação das relações causais contemporâneas usando os dados do modelo ao invés de intuições ou imposições de restrições, utilizando-se uma metodologia mais robusta, derivada dos DAGs.

Resumidamente, conclui-se que as variáveis PIB, financiamento habitacional e o preço defasado dos imóveis foram as que mais contribuíram para a formação dos preços dos imóveis residenciais de uma região da cidade do Rio de Janeiro.

O modelo aqui desenvolvido pode ainda ser melhorado em alguns aspectos, a saber: em primeiro lugar, pode ser interessante usar a estatística bayesiana aplicando ferramentas de seleção de modelos bayesianos para encontrar um grafo causal usando os dados que permitam fazer inferências probabilísticas sobre as restrições de independência condicional, ao considerar a incerteza sobre a possibilidade de independência. Aqui foi considerado que as variáveis são independentes (estatística clássica).

Em segundo lugar, as funções de impulso-resposta podem ser geradas a partir de restrições mais robustas acerca dos procedimentos de identificação do modelo, onde são consideradas restrições de sinais nas funções de impulso-resposta que permitem identificar diversos choques exógenos independentes, como choques na taxa de juros, na taxa de câmbio, na demanda e na oferta. Isso demandaria um estudo mais aprofundado sobre os modelos dinâmicos que poderiam indicar claramente os sinais de cada choque para a realidade do mercado imobiliário.

4

Modelagem do Jogo de Opções Reais

4.1

Incerteza na demanda

Esta tese aborda a modelagem das incertezas na curva de demanda que se torna útil quando o objetivo do estudo é capturar o valor da flexibilidade a partir das fundamentações dos modelos de equilíbrio de mercado, ou seja, a definição do equilíbrio entre a oferta e a demanda.

O estudo da incerteza na demanda tem sido aplicado em modelos de jogos de opções reais, contudo, a maioria dos trabalhos não faz um estudo empírico para calibrar os parâmetros desses modelos. De acordo com Azevedo e Paxson (2014), a calibração dos parâmetros e seus resultados comparados pode contribuir significativamente para o progresso dos modelos de jogos de opções reais, que trazem poucos casos de aplicações empíricas. Ainda segundo os autores, um esforço neste sentido, pode definir as linhas de pesquisa que devem ser seguidas.

Trabalhos na literatura usaram valores exógenos para os parâmetros dos modelos de jogos de OR, podendo ser escolhas subjetivas e arbitrárias desses valores (Grenadier (1996), Grenadier (2000), Grenadier (2002), Grenadier (2005). Esta tese, além de considerar duas especificações diferentes deste autor para a demanda estocástica, estima os parâmetros do modelo com ferramentas econométricas a partir de dados reais do mercado imobiliário carioca.

Retornando às fundamentações do modelo desenvolvido a seguir, o que se verifica é que em vez de modelar o preço como um processo estocástico exógeno, modela-se a incerteza na demanda que resulta neste preço. Em geral, é usada uma função de demanda inversa, que no caso determinístico é representada pela forma da eq. :

$$P = D(Q) \tag{13}$$

onde Q representa a produção total de uma determinada indústria no mercado. A curva de demanda tem comportamento decrescente, o que significa interpretar a sua

relação preço-quantidade: quanto maior a oferta na indústria, menor será o preço de equilíbrio.

Seguindo este contexto, o modelo de oligopólio desenvolvido nesta tese, emprega um processo estocástico na curva de demanda $D(Q)$, de forma que ela pode ser alterada a partir de choques contracionistas ou expansionistas na economia de forma estocástica.

A modelagem da curva de demanda inversa de forma estocástica pode ser realizada por meio dos parâmetros da função de demanda ou através de choques estocásticos multiplicativos de uma função de demanda determinística.

De acordo com Dias (2015), seja $D(Q)$ a função de demanda inversa, o formato geral da equação que representa os preços estocásticos gerados por uma curva de demanda estocástica é:

$$P(t) = D(Q, X(t)) \quad (14)$$

onde $X(t)$ é o choque estocástico da demanda que pode ser modelado através de um processo de Itô⁸. Dixit e Pindyck (1994) fazem uma aplicação simplificada em que usaram X como um choque estocástico multiplicativo (representado por um MGB) de uma função $D(Q)$ determinística da forma da eq.:

$$P(t) = X(t)D(Q) \quad (15)$$

O choque estocástico multiplicativo X faz a curva de demanda se deslocar para cima ou para baixo, podendo também alterar a sua inclinação (se for a curva de demanda for especificada como inversa linear), refletindo o aquecimento ou desaquecimento da economia, respectivamente.

A literatura microeconômica apresenta diversos modelos de curva de demanda, sendo que a mais popular é a curva de demanda linear, que no caso estocástico pode ser bastante útil nas formulações dos modelos de jogos de opções reais, por permitir interpretações econômicas ao alterar-se também a inclinação da curva de demanda linear.

⁸ Dias (2015) define um processo de Itô como um processo de Wiener generalizado dado pela equação diferencial estocástica da forma: $dX(t) = a(X, t)dt + b(X, t)dz$.

Contudo, deve-se olhar para as formulações das funções de demanda estocásticas com parcimônia. Pode-se apontar um detalhe importante na verificação de um problema ao considerar o choque estocástico na equação da demanda em que ao multiplicar toda a função de demanda inversa, pode resultar em preço menor. Considerando a equação (16), onde $a > 0$ e $b < 0$ para garantir que $D_Q < 0$, caso $X(t)$ tenha uma variação positiva, provocará aumento tanto no parâmetro do intercepto da demanda (a) quanto na inclinação (b).

$$P = X(t)(a + bQ) \quad (16)$$

Tal fato é inconsistente no contexto microeconômico. A Figura 9 ilustra tal situação:

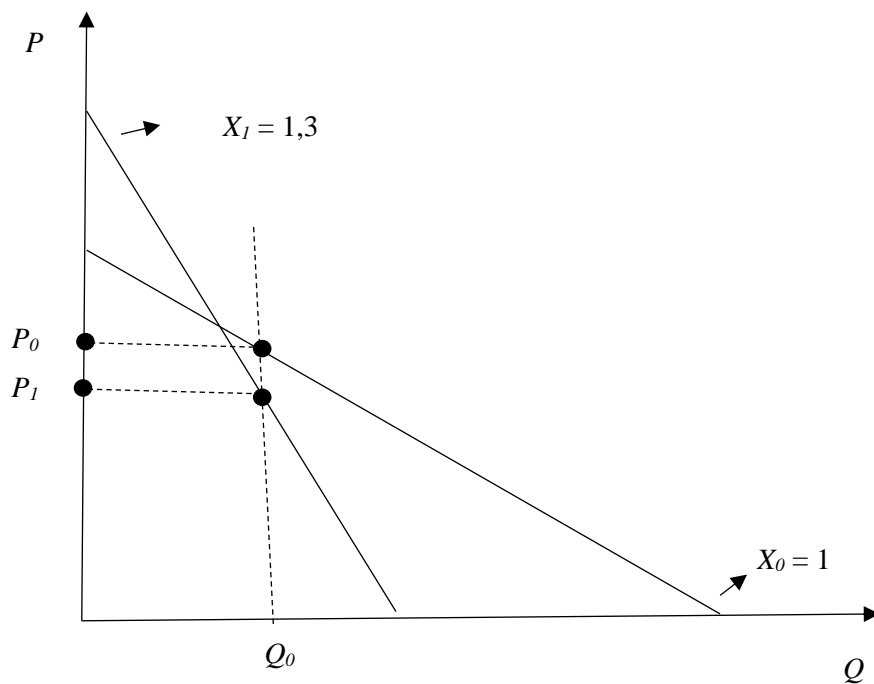


Figura 9 - Curva de demanda linear com choque multiplicativo

A Figura 9 ilustra uma inconsistência ao tratar do choque estocástico multiplicando toda a equação da demanda linear determinística. No caso da demanda determinística linear, pode correr a seguinte situação:

Dado que $X_1 > X_0$, tem-se $P_0 > P_1$.

Tal situação pode gerar problemas, por exemplo, na definição do gatilho no equilíbrio de Nash. Além disso, um gatilho alto não significa que passe a investir. O caso da situação ilustrada no gráfico, leva a gatilhos estritamente pequenos, não sendo minimamente consistentes com as intuições econômico-financeiras.

Importantes autores da teoria microeconômica como Tirole (1988) e Bolow e Pfleiderer (1983) argumentaram sobre a dependência do tipo de função de demanda, considerando quatro tipos de função de demanda: a demanda linear, a demanda exponencial, a demanda de elasticidade constante e a demanda potencial. De acordo com os autores, ao considerar impostos e/ou subsídios, se se a curva de demanda for linear, o consumidor paga apenas metade dos acréscimos dos custos; se for uma curva de demanda exponencial, o consumidor absorverá todo o acréscimo de custo; se for de elasticidade constante, o consumidor absorve um valor menor do que o custo incrementado; e se for uma função potencial, pagará sempre menos do que o aumento do custo.

O modelo de oligopólio desenvolvido ao longo desta tese incorpora dois tipos de função de demanda linear, a saber:

A primeira incorpora os efeitos de aquecimento e resfriamento da demanda a partir de um choque multiplicativo (no intercepto com o eixo dos preços) da equação da demanda linear, da forma da eq. (17), onde $a > 0$ e $b < 0$ para garantir que $D_Q < 0$.

$$P(t) = aX(t) + bQ \quad (17)$$

A segunda especificação para a demanda no modelo de oligopólio utiliza uma função de demanda linear mais sofisticada onde a inclinação da curva de demanda é estocástica, sendo representada pela equação :

$$P(t) = a + bQ(X(t))^{-\varepsilon} \quad (18)$$

O parâmetro ε representa a elasticidade do fator estocástico da demanda, $a > 0$ e $b < 0$. Quando $\varepsilon = 0$ corresponde ao caso em que os preços ficam insensíveis

aos choques estocásticos na inclinação da demanda. No caso de ε elevado, pode significar muita sensibilidade da curva de demanda, podendo ficar praticamente horizontal com um pequeno aumento de X , desde que $X > 1$, onde o preço pode ficar igual ao preço máximo, independente de Q .

O choque $X(t)$ é exógeno e será representado por um processo de difusão do tipo Movimento Geométrico Browniano (MGB), que é o processo estocástico mais usado em finanças e economia devido às boas propriedades matemáticas que possui. Uma detalhada explicação a respeito dos processos estocásticos mais usados em OR, seus principais conceitos e aspectos teóricos da teoria de probabilidade pode ser encontrada em Dias (2015).

4.2

Modelo de Jogo de Opção Real para oligopólio

O modelo desenvolvido nesta seção considera uma indústria oligopolista com n firmas iguais, onde o número de firmas é fixo, mas cada uma pode produzir mais de uma unidade.

Neste oligopólio, cada firma possui uma sequência de oportunidades de investimento equivalentes a opções de compra americanas perpétuas. Embora construções imobiliárias demorem um tempo para serem finalizadas (*time to build*), para efeitos de simplificação, assume-se aqui que as construções serão imediatas (ou que os valores já estão em valor presente na data de exercício), e que a empresa i produz $q_i(t)$ unidades de um produto infinitamente divisível.

Baseando-se em conceitos da Teoria dos Jogos como o equilíbrio perfeito em subjogos de Cournot-Nash, as estratégias são quantidades e o mercado fornece o preço de equilíbrio para cada estado da demanda. Os investidores imobiliários consideram as quantidades Q_{-i}^* como as melhores respostas dos competidores e maximizam seus lucros ao escolher as quantidades a serem produzidas $q_i^*(t) = 1, 2, \dots, n$. Com n firmas iguais, têm-se equilíbrios de Nash (EN) simétricos e a produção ótima de cada empresa nesse oligopólio simétrico em EN é dada pela eq. (19):

$$q_i^*(t) = Q^*(t)/n \quad (19)$$

O processo de oferta da indústria é $Q(t) = \sum_{j=1}^n q_j(t)$, e a oferta de todas as firmas, com exceção da firma i , é dada por $Q_{-i}(t) = \sum_{j=1, j \neq i}^n q_j(t)$. Dado o estado atual da indústria, o fluxo de lucro da firma i é determinado pela eq.(20):

$$\pi_i[X(t), q_i(t), Q_{-i}(t)] \equiv q_i(t) \times D[X(t), q_i(t) + Q_{-i}(t)] \quad (20)$$

A função D é duas vezes diferenciável continuamente, estritamente crescente em X e estritamente decrescente em Q^9 . A função demanda D é tal que as condições $\frac{\partial^2 \pi_i}{\partial X \partial q_i} > 0$ e $\frac{\partial^2 \pi_i}{\partial q_i^2} < 0$ são válidas para todo i .

Em qualquer instante do tempo, cada empresa pode investir em capacidade adicional a fim de aumentar sua produção por um incremento infinitesimal $dq_i \equiv dQ/n$. Se todas as firmas aumentarem sua capacidade de forma simultânea, $Q(t)$ sofrerá um aumento equivalente a dQ . O custo deste incremento é linear de forma que o aumento da produção envolve um custo I por unidade produzida¹⁰.

A opção de aumentar a capacidade é exercida pela firma i quando $X(t)$, que representa o choque multiplicativo na demanda, atingir o gatilho $X(t)$. O choque exógeno da demanda $X(t)$ segue um processo de difusão estocástico na forma da eq. (21) :

$$dX = \alpha(X)dt + \sigma(X)dz \quad (21)$$

onde $z(t)$ é o processo de Wiener padrão. Se $\alpha(X) = \alpha X$ e $\sigma(X) = \sigma X$ então $X(t)$ segue um Movimento Geométrico Browniano (MGB), com distribuição lognormal.

Uma premissa importante é o fato de todas as firmas usarem o mesmo MGB e, como é padrão na literatura, o fluxo de caixa é avaliado na medida neutra ao risco, e por isso a taxa de desconto tem de ser a taxa livre de risco r . O preço unitário $P(t)$

⁹ Além disso, a fim de assumir valores finitos para os ativos, $E \left\{ \int_0^\infty e^{-rt} D[X(t), \hat{q}] dt \right\} < \infty$, para todo $\hat{q} \in R_+$ fixo.

¹⁰ De acordo com Harrison e Taksar (1983), os pressupostos de que a função lucro é côncava em q_i e que os custos do investimento são proporcionais garantem a capacidade ótima de expansão.

é dado pela função demanda inversa representada pela eq. $P(t) = D[X(t), Q(t)]$. Essa função será especificada com base nas equações (17) e (18).

4.2.1

Composição do modelo de equilíbrio

De acordo com a proposição 1 de Grenadier (2002), o valor de equilíbrio de cada firma i será descrito como $V^i(X, q_i, Q_{-i})$. A estratégia de investimento no EN para cada empresa é caracterizada por um acréscimo incremental de sua produção toda vez que $X(t)$ atingir um gatilho (certo nível de demanda). A equação diferencial ordinária (EDO) do valor da firma $V^i(X, q_i, Q_{-i})$ é dada pela eq. (22). A sua derivação está descrita no Apêndice 4.

$$\frac{1}{2}\sigma^2 X^2 V_{xx}^i + \mu X V_x^i - rV^i + \pi_i(X, q_i, Q_{-i}) = 0 \quad (22)$$

A eq. (22) trata-se de uma perpetuidade, sendo a derivada em relação ao tempo igual a zero ($V_t^i = 0$), que é uma característica dos projetos imobiliários, em que a opção de compra é perpétua e, portanto, não existe data limite para exercício da opção. As condições de contorno são:

- i) Condição de continuidade (*value matching*): no gatilho, o valor da espera (solução da EDO) é igual ao *payoff* de exercício da opção. Ou seja, se $X(t) = X^*(q_i, Q_{-i})$; $V_{q_i}^i(X^*, q_i, Q_{-i}) = I$. Esta é a condição no gatilho ótimo da firma i , que exerce sua opção em X^* , expandindo sua produção em dq_i , investindo Idq ¹¹;

¹¹ A condição de contorno de *value – matching* diz que $V_X^i(X^*, q_i, Q_{-i}) = V_X^i(X^*, q_i + dq, Q_{-i}) - Idq$ é obtida dividindo-se o incremento infinitesimal dq em seguida calcula-se a derivada parcial.

- ii) Condição de suavidade ou (*smooth-pasting*): se $X(t) = X^*(q_i, Q_{-i})$; $V_{q_i}^i(X^*, q_i, Q_{-i}) = 0$ - condição de exercício ótimo da firma i , ou seja, no gatilho ótimo de investir, as derivadas do valor da espera e do *payoff* de exercício também são iguais.
- iii) Condição de continuidade no gatilho dos concorrentes que, no caso simétrico são os mesmos X^* : se $X(t) = X^*(q_i, Q_{-i})$; $V_{q_i}^i(X^*, q_i, Q_{-i}) = 0$, pois $V^i(X^*, q_i, Q_{-i}) = V^i(X^*, q_i, Q_{-i} + dQ_{-i})$. Esta é uma condição de interação estratégica, requerendo que cada firma maximize o seu valor $V^i(X, q^i, Q_{-i})$ considerando as estratégias dos competidores. Entretanto, essa condição não será necessária, conforme Grenadier mostra em sua proposição 2, ampliando assim o conceito de miopia ótima para oligopólios.

A EDO representada pela eq.(22) e as três condições de contorno compõem a proposição 1 de Grenadier, que sumariza o equilíbrio. Considerando tempo contínuo e um cenário de equilíbrio perfeitamente competitivo, Leahy (1993) demonstrou que a política de investimento de cada firma é idêntica à estratégia míope, onde a empresa ignora o efeito que os competidores exercem no valor das opções.

Assim, desenvolve-se a estratégia de exercício como se a firma estivesse sozinha no mercado e possui uma estratégia míope de exercício das opções reais. Com isso, o equilíbrio pode ser estabelecido com apenas duas condições de contorno (continuidade e suavidade).

Denota-se o valor da firma míope por $M^i(X, q_i, Q_{-i})$. Seja o valor marginal da produção da firma míope $m^i(X, q_i, Q_{-i})$ dado pela eq. (23):

$$m^i(X, q_i, Q_{-i}) = \partial M^i(X, q_i, Q_{-i}) / \partial q_i \quad (23)$$

Por simetria, pode-se escrever $X^i(q_i, Q_{-i})^* = X^*(Q)$, pois $q_i = Q/n$ e $Q_{-i} = (n-1)Q/n$. No EN simétrico cada firma exercerá sua opção no gatilho $X^*(Q)$. A EDO do valor da firma míope $M^i(X, q_i, Q_{-i})$ é dada pela eq. (24):

$$\frac{1}{2}\sigma^2 X^2 M_{xx}^i + \mu X M_x^i - r M^i + (Q/n) D(X, Q) = 0 \quad (24)$$

Seja X^{**} o gatilho da firma míope, a condição de contorno de continuidade é satisfeita se $X(t) = X^{**}(q_i, Q_{-i})$; $M_{q_i}^i(X^{**}, q_i, Q_{-i}) = I$. Pelo fato da firma ser míope, ela ignora a competição exercendo a opção no gatilho míope X^{**} equivalente à X^* de V^i (proposição 2 de Grenadier (2002)).

A condição de contorno de suavidade será satisfeita para $X(t) = X^{**}(q_i, Q_{-i})$; $M_{q_i X}^i(X^{**}, q_i, Q_{-i}) = 0$. Pelo fato de ser míope, a firma ignora a competição, não havendo assim condições de contorno de competição. Neste sentido, o valor marginal da produção da firma míope será definido pela derivada parcial de $M_{q_i}^i = m^i(X)$. Neste trabalho, esta equação diferencial foi utilizada com o intuito de se concentrar no caso da estrutura de uma competição perfeita aplicando a miopia ótima de Leahy (1993).

Seja $m(X, Q)$ o valor marginal da firma míope. Pode ser verificado, por um processo semelhante ao adotado no Apêndice I, que a equação de valor é dada pela eq. (25):

$$\frac{1}{2}\sigma^2 X^2 m_{xx} + \alpha X m_x - r m + D(X, Q) + (Q/n) D_Q(X, Q) = 0 \quad (25)$$

A eq. (25) e duas condições de contorno (continuidade e suavidade) no gatilho $X^*(Q)$ representadas pelas eq. (26) e (27) são suficientes para determinar $X^*(Q)$ e $m(X, Q)$:

$$m(X^*(Q), Q) = I \quad (26)$$

$$\frac{\partial m(X^*(Q), Q)}{\partial X} = 0 \quad (27)$$

Os termos dos fluxos de caixa da eq.(25) constituem a parte não homogênea da EDO e compreendem a função demanda modificada. A próxima etapa da tese

tratará de fornecer a solução analítica para a EDO (eq. (25)). O gatilho estratégico é igual ao gatilho “miope” X^* (Proposição 2 de Grenadier).

4.2.2

Solução analítica da Equação Diferencial Ordinária do valor da firma

A equação (25) é composta de duas partes: a homogênea (que terá uma solução geral) e a não homogênea (exigindo uma solução particular). Portanto, a próxima etapa fornece a solução analítica da parte homogênea da EDO e posteriormente, será detalhada a solução particular com suas particularidades a respeito da modelagem dos problemas de opções reais.

A eq. (25) será separada em duas partes, sendo a parte homogênea representada da forma da eq. (28):

$$\frac{1}{2} \sigma^2 X^2 m_{xx} + \mu X m_x - r m = 0 \quad (28)$$

E a parte não homogênea pode ser escrita como mostra a eq.(29):

$$D' = D(X, Q) + (Q/n) D_Q(X, Q) \quad (29)$$

A equação (28) tem solução homogênea e é dada por uma combinação linear das duas soluções:

$$m(X) = A_1 X^{\beta_1} + A_2 X^{\beta_2} \quad (30)$$

Mas, como β_2 é negativo, é necessário que $A_2 = 0$, pois caso contrário quando o choque da demanda X tendesse a zero, o valor da firma tenderia a infinito, o que não tem sentido econômico. Portanto, a equação (30) pode ser simplificada com sua notação alterada para o formato da eq. (31):

$$m(X) = A_1 X^{\beta_1} \quad (31)$$

Onde β_1 é um parâmetro e A é uma constante que, junto com o gatilho X^* , serão obtidos através de duas condições de contorno. Dixit e Pindyck (1994) explicam que para determinar o parâmetro β , é necessário encontrar as raízes da equação

quadrática gerada a partir da substituição da equação (31) e suas derivadas parciais na parte homogênea da equação diferencial ordinária (28), permitindo obter:

$$1/2 \sigma^2 X^2 A \beta (\beta - 1) X^{\beta-2} + \mu X A \beta X^{\beta-1} - r A X^{\beta} \quad (32)$$

Após algumas manipulações algébricas, cancela-se o termo $A X^{\beta}$ e obtém-se a equação característica quadrática da parte homogênea da EDO:

$$1/2 \sigma^2 \beta (\beta - 1)^2 + \mu \beta - r = 0 \quad (33)$$

Reescrevendo a equação (33), obtém-se um formato tradicional para a equação do segundo grau:

$$1/2 \sigma^2 \beta^2 + (\mu + 1/2 \sigma^2) \beta - r = 0 \quad (34)$$

A equação (34) é uma equação quadrática que possui duas raízes para β . Sendo uma equação quadrática, as duas raízes de β são encontradas facilmente através da fórmula para as raízes de uma equação de segundo grau, obtendo-se as raízes:

$$\beta_1 = \frac{1}{2} - \frac{\mu}{\sigma^2} + \sqrt{\frac{2r}{\sigma^2} + \left[\frac{\mu}{\sigma^2} - \frac{1}{2} \right]^2} > 1 \quad (35)$$

$$\beta_2 = \frac{1}{2} - \frac{\mu}{\sigma^2} - \sqrt{\frac{2r}{\sigma^2} + \left[\frac{\mu}{\sigma^2} - \frac{1}{2} \right]^2} < 0 \quad (36)$$

Tendo duas raízes, a solução homogênea é dada por uma combinação linear das duas soluções: $m(X) = A_1 X^{\beta_1} + A_2 X^{\beta_2}$. Mas, como β_2 é negativo, é necessário que A_2 seja igual a zero, pois caso contrário quando o choque da demanda X tendesse a zero, o valor da firma tenderia a infinito, o que não tem sentido econômico.

Ao substituir as equações (35) ou (36) em (34), verifica-se que a equação (31) é solução da parte homogênea da equação (25). Cabe ressaltar que nas equações das raízes aparecem apenas os parâmetros do processo estocástico para o ativo básico. A próxima seção apresenta a solução analítica para o termo não homogêneo da eq. (25).

4.2.3

Solução particular da EDO do valor da firma – modelo com $X(t)$ no intercepto da demanda

Retornando à equação diferencial ordinária dada pela eq. (25), observa-se os termos não homogêneos constituídos pela demanda modificada que exigem encontrar uma solução particular que atenda toda a EDO.

Conforme ressaltado por Dias (2015), não é necessário que a solução particular seja ótima, ela precisa apenas ser uma solução possível que seja atendida pela EDO. Afinal, são as condições de contorno que permitem as condições de otimização. Neste caso, nunca exercer a opção é uma solução particular e o valor da firma seria ter apenas o fluxo de caixa (eq. 28) em perpetuidade.

Assim, substitui-se a eq. e sua derivada parcial em relação à Q nos termos da eq. (29). Em seguida, divide-se por $(r - \alpha)$ - que representa a taxa de desconto líquida do crescimento para o fluxo de caixa em perpetuidade - o termo que possui o choque estocástico multiplicativo e, divide-se por r o termo que não possui $X(t)$.

A solução particular pode ser escrita da forma da expressão (37):

$$B = \frac{aX}{r - \mu} + \frac{bQ(t) \left(\frac{n+1}{n} \right)}{r} \quad (37)$$

O próximo passo é calcular as derivadas parciais $\frac{\partial m}{\partial X}$ e $\frac{\partial^2 m}{\partial X^2}$, em seguida substituir seus resultados na EDO (eq. (25)) a fim de verificar se a solução particular realmente atende toda a EDO. Neste caso, fazendo as devidas substituições, pode-se confirmar que (37) é solução de (25). Os detalhes algébricos encontram-se no Apêndice 8.5.1.

Considerando as condições de contorno de continuidade e suavidade, definidas pelas equações (26) e (27), pode-se estruturar um sistema com duas equações:

$$\begin{cases} A_1 X^{\beta_1} + \frac{aX}{r-\mu} + \frac{bQ\left(\frac{n+1}{n}\right)}{r} = I \\ A_1 \beta_1 X^{\beta_1-1} + \frac{a}{r-\mu} = 0 \end{cases} \quad (38)$$

Resolvendo o sistema, determina-se o termo A_1 e o gatilho $X^*(Q)$. A partir da segunda equação do sistema dado por (38) chega-se à expressão para o termo A_1 em função de X e dos parâmetros, como mostra a equação (39):

$$A_1 = \left(\frac{-a}{(r-\mu)\beta_1} \right) X^{1-\beta_1} \quad (39)$$

Substituindo (39) na segunda equação do sistema dado por (38), obtém-se a equação (40) que determinará a expressão para o gatilho no equilíbrio:

$$\left(\frac{-a}{(r-\mu)\beta_1} X \right) + \left(\frac{aX}{r-\mu} + \frac{bQ\left[\frac{n+1}{n}\right]}{r} \right) = I \quad (40)$$

Por fim, determina-se o gatilho ótimo $X^*(Q)$:

$$X^*(Q) = \left(\frac{\beta_1}{\beta_1-1} \right) \left(\frac{(r-\mu)}{a} \right) \left[\left(\frac{n+1}{n} \right) \frac{b}{r} Q + I \right] \quad (41)$$

O gatilho no equilíbrio de Nash é, portanto, uma função crescente afim em Q e decrescente em n . Ao atingir-se o nível de preço máximo em oligopólio, as firmas adicionam capacidade, exercendo a opção real, numa quantidade tal que o

preço é refletido para baixo, devido à oferta adicional. A eq. (41) permite notar que o gatilho $X^*(Q)$ decresce com o número de firmas no oligopólio (n), pois $b < 0$.

A dinâmica de exercícios das opções quando a demanda X atinge o gatilho X^* pode ser identificada quando todas as n firmas exercem suas opções de expansão e adicionam oferta, de forma que os preços não conseguem superar um nível máximo.

4.2.4

Solução analítica da EDO para o modelo com choque estocástico na inclinação da curva de demanda

Nesta seção, o modelo de oligopólio sob incerteza será desenvolvido considerando um choque multiplicativo na inclinação da curva de demanda, de acordo com a correspondência matemática definida pela eq. (17). A variável estocástica representada por $X(t)$, incorpora um fator de elasticidade (ε) que permite modelar matematicamente a sensibilidade do fator estocástico da demanda, que será representado pela série de preços dos imóveis.

Em termos da elasticidade, diversas são as influências quando se considera a sensibilidade da demanda em relação às variações de preços dos imóveis, renda da população e do preço dos aluguéis, por exemplo. Neste sentido, autores como Pindyck e Rubinfeld (2009), definem a elasticidade como uma medida do quanto uma variável pode ser afetada por outra. Mais especificamente, é um valor que permite informar qual é a variação percentual em uma variável como reação ao aumento de um ponto percentual em outra variável.

Ao incorporar um parâmetro de elasticidade para o choque estocástico, obtém-se uma solução para o gatilho no equilíbrio de Nash que apresenta uma medida de sensibilidade em relação à variação da variável estocástica. Com isso, será demonstrado que, quanto menos sensíveis forem os compradores de imóveis às variações de preços, maior tende a ser o gatilho ótimo no equilíbrio. A partir disso, pode-se afirmar que o modelo aqui desenvolvido apresenta uma contribuição original que possibilitou gerar resultados mais intuitivos do ponto de vista das interpretações econômicas. Isso permite que os tomadores de decisão, ao exercer

suas opções de investimento, observem o quão sensível é a demanda por imóveis em relação às variações de preços e principalmente possam avaliar os gatilhos ótimos de investimento.

Considerando essas informações, para a modelagem da incerteza na demanda, $X(t)$ segue um MGB que é o processo estocástico mais usado na literatura de OR. Na modelagem dos jogos de OR, geralmente a incerteza de mercado está associada à demanda. Aqui, ao contrário de outros trabalhos de Jogos de OR, assume-se a seguinte função demanda estocástica inversa:

$$D(X, Q) = a + bQX^{-\varepsilon} \quad (42)$$

onde $a > 0$ e $b < 0$ para garantir que $D_Q < 0$, e o expoente ε representa uma elasticidade.

A seguir, recalcula-se a eq.(30) a partir da especificação da demanda estocástica linear (eq.). Reescrevendo a equação (29), tem-se a representação geral para os fluxos de caixa não-homogêneos que definem o termo não homogêneo da eq. (25) igual à eq.(43):

$$a + bQX^{-\varepsilon} \left[\frac{n+1}{n} \right] \quad (43)$$

Deve-se encontrar uma solução particular para a equação (29) que atenda toda a EDO. A eq. (43) é mais complicada devido à especificação mais complexa para função de demanda adotada nesta seção. Considerando a modelagem tradicional da literatura de opções reais, pode-se utilizar a representação do valor presente esperado do fluxo de caixa calculado usando uma taxa de desconto ajustada ao risco apropriada. A solução particular de (43) pode ser denotada por:

$$E \left[\int_0^{\infty} e^{-rt} \left\{ a + bQ \left[\frac{n+1}{n} \right] X^{-\varepsilon} \right\} dt \right] \quad (44)$$

A eq. (44) pode ser reescrita da forma:

$$E\left[\int_0^{\infty} e^{-rt}adt\right] + E\left[\int_0^{\infty} e^{-rt}bQ\left[\frac{n+1}{n}\right]X^{-\varepsilon}dt\right] \quad (45)$$

A partir da solução das integrais, a solução particular pode ser dada pela equação do valor presente do fluxo de caixa em perpetuidade (eq.(46)):

$$C = \frac{a}{r} + \frac{bQX^{-\varepsilon}\left[\frac{n+1}{n}\right]}{\left[r + \mu\varepsilon - \left(\sigma^2/2\right)\varepsilon(1+\varepsilon)\right]} \quad (46)$$

De acordo com Dias (2015, p.289), outra maneira de calcular o valor esperado no instante t para a eq. (43) é usar a propriedade da distribuição lognormal, fornecida através do teorema 2.1 de Aitchison e Brown (1957, p.11).

O próximo passo é verificar se a solução particular dada pela eq.(46) atende toda a EDO. Para isso, (46) deve ser substituída como termos não-homogêneos do fluxo de caixa da eq.(25), além das derivadas parciais definidas por (47) e (48):

$$\frac{\partial m}{\partial X} = \frac{bQ(-\varepsilon)X^{(-\varepsilon-1)}\left[\frac{n+1}{n}\right]}{\left[r + \mu\varepsilon - \left(\sigma^2/2\right)\varepsilon(1+\varepsilon)\right]} \quad (47)$$

$$\frac{\partial^2 m}{\partial X^2} = \frac{(\varepsilon^2 + \varepsilon)bQX^{(-\varepsilon-2)}\left[\frac{n+1}{n}\right]}{\left[r + \mu\varepsilon - \left(\sigma^2/2\right)\varepsilon(1+\varepsilon)\right]} \quad (48)$$

Fazendo as devidas substituições e com um esforço algébrico verifica-se que a equação (46) é a solução particular que atende a EDO (25):

$$0,5\sigma^2 X^2 \left[\frac{bQ(\varepsilon^2 + \varepsilon)X^{(-\varepsilon-2)}\left[\frac{n+1}{n}\right]}{r + \mu\varepsilon - 0,5\sigma^2\varepsilon(1+\varepsilon)} \right] + \mu X \left[\frac{bQ(-\varepsilon)X^{(-\varepsilon-1)}\left[\frac{n+1}{n}\right]}{r + \mu\varepsilon - 0,5\sigma^2\varepsilon(1+\varepsilon)} \right] -$$

$$-r \left[\frac{a}{r} + \frac{bQ \left[\frac{n+1}{n} \right] X^{(-\varepsilon)}}{r + \mu\varepsilon - 0,5\sigma^2\varepsilon(1+\varepsilon)} \right] + a + bQ \left[\frac{n+1}{n} \right] X^{(-\varepsilon)} = 0 \quad (49)$$

Com isso, a equação (25) pode ser reescrita no formato completo (homogênea e não homogênea) que permitirá encontrar a solução para $X^*(Q)$ (eq. (50)):

$$\frac{1}{2}\sigma(X)^2 m_{xx} + \mu(X)m_x - rm + C = 0 \quad (50)$$

Observa-se que os três primeiros termos da equação (50) são os mesmos da equação (28) e também formam uma EDO homogênea e parabólica que tem solução analítica idêntica àquela que foi desenvolvida na seção anterior em que foram encontradas duas raízes, dadas pelas eq. (35) e (36).

Considerando essas informações, a próxima etapa de cálculo trata de fornecer a solução analítica considerando a parte não homogênea que foi modificada, em relação ao caso da seção anterior, a partir de um choque multiplicativo na inclinação da curva de demanda linear.

Considerando as condições de contorno de continuidade e suavidade no gatilho X^* , dadas pelas equações (26) e (27), chega-se a um novo sistema com duas equações e duas incógnitas (A_1 e X^*), como mostra a eq.

(51):

$$\left\{ \begin{array}{l} A_1 X^{\beta_1} + \frac{bQX^{-\varepsilon} \left[\frac{n+1}{n} \right]}{\left[r + \mu\varepsilon - (\sigma^2/2) \varepsilon(1+\varepsilon) \right]} = I \\ A_1 \beta_1 X^{(\beta_1-1)} - \varepsilon X^{-1} \left\{ \frac{bQX^{-\varepsilon} \left[\frac{n+1}{n} \right]}{\left[r + \mu\varepsilon - (\sigma^2/2) \varepsilon(1+\varepsilon) \right]} \right\} = 0 \end{array} \right. \quad (51)$$

Resolvendo o sistema, determina-se a constante A_1 e o gatilho $X^*(Q)$:

$$A_1 = \frac{bQ(\varepsilon) \left[\frac{n+1}{n} \right] X^{(-\varepsilon-\beta_1)}}{\left[r + \alpha\varepsilon - (\sigma^2/2) \varepsilon(1+\varepsilon) \right]} \quad (52)$$

Substituindo (52) na primeira equação do sistema dado por

(51), obtém-se:

$$rbQ \left[\frac{n+1}{n} \right] X^{(-\varepsilon)} + a\beta_1 \left[r + \mu\varepsilon - (\sigma^2/2) \varepsilon(1+\varepsilon) \right] + r\beta_1 bQ \left[\frac{n+1}{n} \right] X^{(-\varepsilon)} =$$

$$kr\beta_1 \left[r + \mu\varepsilon - 0,5\sigma^2 \varepsilon(1+\varepsilon) \right]$$

simplificando e rearranjando, tem-se:

$$X^{-\varepsilon} = \frac{\beta_1 (kr - a) \left[r + \mu\varepsilon - 0,5\sigma^2 \varepsilon(1+\varepsilon) \right]}{(\beta_1 + \varepsilon) rbQ \left[\frac{n+1}{n} \right]}$$

Reordenando os termos, chega-se à expressão para o gatilho ótimo em equilíbrio de Nash, representado pela eq. (53):

$$X^*(Q) = \left\{ \left(\frac{\beta_1}{\beta_1 + \varepsilon} \right) \left(\frac{rk - a}{rbQ \left[\frac{n+1}{n} \right]} \right) \left[r + \mu\varepsilon - \left(\sigma^2/2 \right) \varepsilon(1 + \varepsilon) \right] \right\}^{(-1/\varepsilon)} \quad (53)$$

O resultado gerado pela solução analítica deste modelo sob incerteza é importante por permitir a extensão de resultados que possuem solução analítica simplificada dos casos de competição perfeita para um modelo de oligopólio.

Sobre a ideia de Grenadier (2002) de apoiar o equilíbrio de Nash aplicado aos casos de oligopólio, deve-se mencionar o autor Back (2007) que fez uma crítica ao modelo de Grenadier (2002) argumentando sobre a consideração de que a competição perfeita não seria a única forma de equilíbrio para o modelo de oligopólio. Grenadier afirma que a observação de Back (2007) é incorreta já que assume que as firmas são *price-takers* e usa o conceito de equilíbrio de Cournot para apoiar seu modelo de equilíbrio no oligopólio e a solução da EDO simplificada pelo modelo de competição perfeita¹².

Retornando às interpretações intuitivas da eq. (53), no oligopólio, as firmas adicionam capacidade (exercem a opção real) numa quantidade tal que o preço é refletido para baixo, devido à oferta adicional. É possível notar que o gatilho $X^*(Q)$ decresce com o número de firmas no oligopólio (n). Além disso, a conhecida cunha, agora representada pelo primeiro termo entre parêntesis da eq. (53), possui o fator da elasticidade do fator estocástico, fazendo com que o gatilho seja afetado pela sensibilidade da demanda em relação, por exemplo, a determinadas variações percentuais no preço do imóvel.

A dinâmica de exercícios de opções quando a demanda X atinge o gatilho X^* pode ser identificada quando todas as n firmas exercem suas opções de expansão e

¹² Mais detalhes sobre a crítica de Back (2007) e a resposta dada por Grenadier podem ser encontrados em Samanez e Costa (2008).

adicionam oferta para a indústria, de forma que os preços não conseguem superar um nível máximo. Ao exercer a opção estratégica no oligopólio de n -firmas, tem-se um prêmio da opção, que pode ser definido como o VPL em $X^*(Q)$, por unidade de investimento.

5.

Aplicação: mercado imobiliário residencial da cidade do Rio de Janeiro

O mercado imobiliário da cidade do Rio de Janeiro passou por diversas transformações que o levaram a ser considerado o metro quadrado mais caro do Brasil no início da década de 2010. Dentre os fatores que contribuíram para o aquecimento do setor imobiliário do Rio de Janeiro podem ser destacados o cenário político-econômico, a expansão do crédito, o aumento da renda média da população, a implantação das unidades de polícia pacificadora (UPPs) e as expectativas positivas derivadas dos investimentos para a Copa do Mundo de 2014 e Olimpíadas de 2016.

Com os investimentos em infraestrutura, saneamento, mobilidade urbana e construção civil, que visavam preparar a cidade para os jogos olímpicos, a valorização dos imóveis tornou-se crescente a partir de 2010 e o imóvel tornou-se sinônimo de investimento rentável na cidade.

De acordo com o Secovi-Rio (Sindicato das Empresas de Compra, Venda, Locação e Administração de Imóveis e dos Condomínios Residenciais e Comerciais

do Estado do Rio de Janeiro), devido à proximidade com os locais de competição, bairros como Barra da Tijuca, Centro, Jacarepaguá, Maracanã e Tijuca tiveram valorização dos preços de locação dos imóveis de 20% a 152% em um período de seis meses após o pronunciamento do Comitê Olímpico Internacional.

Tradicionalmente, os investimentos em mercados imobiliários caracterizam-se como intensivos em capital e com baixa liquidez, além das fontes de incertezas na demanda, nos preços e custos de construção, o que eleva o risco percebido pelos investidores.

Para estimar os parâmetros do modelo, foram utilizadas séries de valores mensais médios do metro quadrado de apartamentos residenciais de dois quartos, que são o modelo padrão indicado para ser a amostra representativa da realidade do mercado imobiliário da região escolhida para análise. De acordo com o Secovi-Rio (2015), apartamentos de dois quartos são os que possuem maior demanda e oferta e, portanto, maior liquidez dentre as opções do mercado de imóveis residenciais.

Uma das limitações dessas séries históricas de preços de venda dos apartamentos residenciais é que elas não possuem nenhum tipo de equalização dos dados que permitam considerar diferenças de preço entre unidades de mesmo tamanho, mas de diferentes características, tais como, andar, vista, idade, estado de conservação, quadra da praia, rua de grife, vaga de garagem, etc. Esse fato pode fazer com que as estimativas de séries contenham preços que podem ter sido influenciados por algumas dessas características citadas, e consequentemente, não refletir a variação real nos preços.

As séries históricas para os preços de venda, aluguel e condomínio dos imóveis localizados nos 17 bairros pertencentes ao município do Rio de Janeiro têm início em junho de 2009 e término em janeiro de 2016, e foram disponibilizadas pelo Secovi-Rio (<http://www.secovirio.com.br/Produtos-e-Servicos/Pesquisas-e-Indicadores-163>, recuperado em 02 de fevereiro, 2016).

A Tabela 4 mostra os valores nominais médios por metro quadrado de cada bairro que forma o grupo representativo da região da cidade analisada neste trabalho.

Tabela 4 - Valores nominais médios por m² - julho de 2009 a janeiro de 2016

Bairros	Valores Nominais Médios (por m ²)
---------	---

	Preço de Venda (R\$)	Aluguel (R\$/mês)	Condomínio (R\$/mês)
Barra da Tijuca	7.443	30,96	9,78
Botafogo	9.809	38,70	7,28
Centro	5.878	25,62	5,52
Copacabana	10.112	39,67	7,05
Flamengo	9.128	35,07	6,63
Gávea	13.508	46,75	8,40
Ilha do Governador	4.003	16,87	3,82
Ipanema	14.985	59,70	8,66
Jacarepaguá	3.926	15,57	5,53
Jardim Botânico	12.327	44,50	7,95
Lagoa	13.638	48,25	8,84
Laranjeiras	8.646	33,60	6,61
Leblon	16.871	58,38	8,63
Méier	3.686	15,41	5,33
Recreio	5.962	22,95	6,75
Tijuca	5.553	23,49	5,76
Vila Isabel	4.570	20,24	5,32
Média	8.826	33,87	6,93

Fonte: Secovi-Rio

Nesta seção serão aplicadas ferramentas que irão combinar a Teoria dos Jogos com a Teoria das Opções Reais que poderão colaborar com a análise financeira de investimentos no setor imobiliário do Rio de Janeiro, dando suporte aos gestores no processo de tomada de decisão.

Para cada gatilho, foram considerados os choques multiplicativos com a variável representativa definida de acordo com a teoria da demanda e análises econométricas detalhadas no capítulo 4.

Seguindo a literatura sobre modelagem de ativos financeiros, uma das principais características do modelo utilizado neste trabalho é que os choques multiplicativos no intercepto e na inclinação da demanda seguem um MGB. Considerando o PIB real e o preço defasado do metro quadrado do apartamento como as séries representativas dos choques estocásticos, a seguir serão apresentadas as estimativas dos parâmetros, tais como o *drift* e a variância da taxa de crescimento do fluxo de caixa, representadas por μ e σ , respectivamente. A seção 5.1 aborda os procedimentos para modelagem do processo estocástico e para as estimativas dos parâmetros do MGB.

5.1

Estimativa do Movimento Geométrico Browniano (MGB)

Para estimar os parâmetros do modelo com $X(t)$ no intercepto da demanda foi utilizada a série histórica do PIB real mensal. Já para a estimativa dos parâmetros do modelo com $X(t)$ na inclinação da curva de demanda usou-se a série de preços médios deflacionada pelo IPCA, construída a partir da média de preços nominais do conjunto de bairros mostrado na Tabela 4.

Com relação à modelagem do processo estocástico, Dixit e Pindyck (1994) recomendam que a adequação do processo estocástico à evolução da série do ativo analisado seja confirmada através de testes econométricos. Um teste tradicionalmente usado para examinar se a série é não-estacionária é o teste de Dickey Fuller Aumentado (ADF). Contudo, Pindyck (1999) sugere que o teste ADF não é suficiente para determinar a escolha do processo estocástico e defende o teste de razão de variância como uma alternativa. Este teste fornece mais informações a respeito do comportamento da série do que o teste de raiz unitária, ao mensurar o grau em que a variância da série cresce à medida que o número de defasagens aumenta. O teste é descrito pela equação (54):

$$R_k = \frac{1}{k} \frac{\text{Var}(p_{t+k} - p_t)}{\text{Var}(p_{t+1} - p_t)} \quad (54)$$

Para o MGB, a razão das variâncias se aproxima de 1 à medida que k cresce, com variância aumentando linearmente com k . A partir da variação dos *lags* de 2 a 79 dos logaritmos da série de preços deflacionada, os resultados deste teste indicaram que a razão da variância aumentou com o aumento do número de *lags*. Esse comportamento é consistente com um modelo no qual a série do PIB real e dos preços dos imóveis se comportam como um Movimento Geométrico Browniano. A próxima etapa estima os parâmetros do MGB, para cada um dos casos.

Como em Dias (2015), os parâmetros α e β podem ser estimados a partir da regressão linear trivial em tempo discreto com observações consecutivas (eq. (55)).

$$\ln[P(t)] = \Theta + \ln[P_{t-1}] + \varepsilon_t \quad (55)$$

onde ε_t é o erro da regressão e tem distribuição normal e parâmetros $\varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2/N)$, e N representa o número de períodos por ano da observação dos dados, que neste trabalho, foi usado $N=12$. Os parâmetros do MGB foram estimados com as equações (56) e (57).

$$\alpha = N \left\{ E \left[\ln \left[P_t / P_{t-1} \right] \right] + \sigma^2 / 2N \right\} \quad (56)$$

$$\sigma^2 = N \text{Var} \left[\ln \left[P_t / P_{t-1} \right] \right] \quad (57)$$

Na equação de regressão (56) foi assumido que o coeficiente de $\ln(P_{t-1})$ é igual a um, sendo análogo à equação discreta do MGB. A fim de obter a tendência neutra ao risco μ , foi empregada a relação entre o retorno do investimento, o ganho de capital e os dividendos, em que $\rho = \alpha + \delta$ onde ρ representa a taxa de retorno total, α é a taxa de ganho de capital e δ representa a taxa de dividendos.

Para calcular a taxa de retorno total ρ , adicionou-se à taxa de juros livre de risco r o prêmio de risco π , de forma que a equação do retorno total pode ser expressa também na forma $\rho = r + \pi = \alpha + \delta$. A tendência definida pela relação $\alpha - \pi$ é conhecida na literatura de finanças como tendência neutra ao risco μ . Consequentemente o termo $r - \delta$ também pode ser visto como uma tendência neutra ao risco. A taxa de dividendos foi calculada através da relação $\delta = \frac{\text{valor do aluguel} + \text{valor do condomínio}}{\text{valor do imóvel}}$ (Costa & Samanez, 2008). Foi encontrado o valor de 5,54% para os dividendos médios da região analisada. Esse resultado mostra se o proprietário pode obter benefícios ao decidir alugar seu apartamento, para tanto deve-se comparar a taxa de dividendo com outras taxas de rentabilidade de investimentos ou mesmo com a poupança.

5.2 Resultados

5.2.1 Resultados para o modelo de jogos de OR com $X(t)$ no intercepto da demanda

Para determinação dos gatilhos no equilíbrio foi assumida uma função de demanda do tipo linear. Os parâmetros da demanda linear foram estimados através de uma regressão linear que teve como finalidade obter os parâmetros da demanda linear a e b . Eles representam, respectivamente, o intercepto e a inclinação da equação da reta (eq.(17)) sendo, portanto, possível determinar também o valor para o choque inicial $X(t = 0)$, que será importante para identificar o gatilho ótimo de investimento e sua própria trajetória nas simulações de Monte Carlo da demanda.

A partir da modelagem dos processos estocásticos, foram utilizados os parâmetros estimados a partir dos dados do mercado imobiliário carioca, tais como (α) e (σ) (a partir da escolha do PIB real como variável responsável por provocar alterações significativas na demanda por imóveis) foram estimados e seus valores encontrados foram 10,45% a.a. para a tendência e 12,20% de volatilidade. A taxa livre de risco r e a quantidade ofertada inicial $Q(t = 0)$ de cada grupo de bairros são variáveis necessárias para a solução do modelo. A tendência neutra ao risco (μ) foi de 2,85% a.a. A quantidade ofertada é determinada de forma exógena ao modelo, então o valor usado para $Q(t = 0)$ foi 3.513 apartamentos (fonte: Secovi-Rio). Esse valor foi transformado em m², considerando a metragem de 60m² que é o tamanho médio padrão dos apartamentos de dois quartos.

Em relação aos parâmetros da equação de demanda linear, estes foram estimados usando um modelo de regressão linear aplicado na equação . Portanto, foi possível estimar os parâmetros de interesse da demanda necessários para o cálculo do gatilho no equilíbrio de Nash, a saber: $a = 8.848,17$ e $b = - 0,015$. Para as simulações de Monte Carlo para o modelo de oligopólio sob incerteza foi assumido que $\Delta t = 0,05$ e um horizonte temporal de 10 anos.

Pelo fato de projetos reais de investimento no setor imobiliário terem características de longo prazo, torna-se razoável utilizar uma taxa de juros também

de longo prazo. Portanto, a taxa de juros livre de risco (r) utilizada neste trabalho está baseada na taxa de retorno dos títulos soberanos de 10 anos de maturidade do governo brasileiro, atualmente no valor de 10,88% a.a. (fonte: Bloomberg). Para obter a taxa r real, descontou-se a taxa de inflação anual no valor de 2,49%, obtida através do IBGE (Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística).

De posse dessas informações, o valor crítico $X^*(Q)$ que permite definir a estratégia ótima de investimento no equilíbrio, foi obtido através da equação (41). Os valores de preços de venda utilizados nas estimativas dos parâmetros e na aplicação do modelo matemático estão representados por densidade em metros quadrados, conforme discutido anteriormente.

Os valores críticos de $X^*(Q)$ representam o primeiro gatilho que poderá provocar um aumento inicial na oferta de apartamentos a partir da construção de novas unidades. Como forma de simplificar a análise considerou-se que as empresas construtoras ou incorporadoras já possuem o terreno para iniciar a construção.

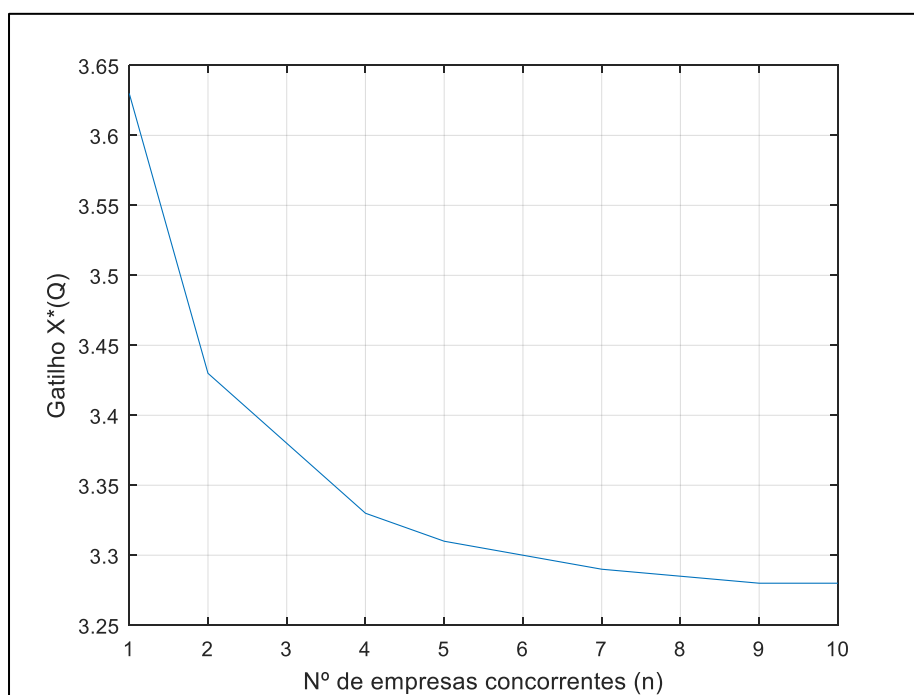
Baseando-se nas informações apresentadas na Tabela 5, considerando o choque médio inicial na demanda, pode-se observar a estratégia ótima de investimento no equilíbrio de Nash em que novas construções deverão ser realizadas quando o gatilho atingir, no equilíbrio, um valor próximo a R\$3,43 por unidade de investimento para o caso de um duopólio.

É possível fazer a mesma análise para as outras estruturas oligopolistas. Por exemplo, no oligopólio formado por 5 empresas rivais a estratégia ótima para investir é algo próximo a R\$3,31 por unidade de investimento e R\$3,28 por unidade de investimento, considerando um oligopólio com 10 empresas concorrentes. Para os casos extremos de monopólio ($n=1$) e n tendendo ao infinito, os valores dos gatilhos ótimos em equilíbrio foram R\$3,63 e R\$1,81, ambos por unidade de investimento.

Tabela 5 - Relação entre $X^*(Q)$ e o número de empresas concorrentes

Nº de empresas	$X^*(Q)$
01	3,63
02	3,43
04	3,33
05	3,31
07	3,29
09	3,28
10	3,28
∞	1,81

Assim, no contexto de investimento no mundo real, o retorno financeiro de uma empresa está ligado às estratégias de investimento de seus concorrentes. Neste sentido, os resultados da Tabela 5 mostram os efeitos da competição na determinação dos gatilhos no equilíbrio onde é possível observar a relação inversa entre os valores críticos e o aumento do número de empresas concorrentes, uma vez que o gatilho, definido pela equação (41), é uma função decrescente de n . Isso pode ser visto como um comportamento da empresa i frente à entrada de um ou mais rivais, em que a opção de adiar torna-se menos valiosa, levando as incorporadoras a exercerem suas opções mais cedo. Tal situação está ilustrada graficamente na Figura 10.

Figura 10 - Comportamento de $X^*(Q)$ versus número de empresas concorrentes

A Figura 10 mostra o comportamento dos gatilhos ótimos no equilíbrio em relação ao número de concorrentes do mercado imobiliário, permitindo enfatizar que as decisões de investimento das empresas são influenciadas pela concorrência estratégica entre as empresas rivais, possibilitando cada empresa avaliar suas vantagens competitivas frente aos seus concorrentes.

O resultado deste modelo que combina OR com a teoria dos jogos revela claramente que o investimento nos mercados competitivos pode ser tratado com um jogo entre as empresas em que, na tomada de decisão, implicitamente elas levam em consideração as reações das outras firmas e reconhecem que suas rivais podem pensar da mesma maneira.

A próxima seção traz as simulações de Monte Carlo para o modelo de jogos de opções com incerteza na demanda mostrando a evolução da demanda e da produção para os casos de monopólio ($n=1$), duopólio ($n=2$) e oligopólio ($n=10$).

5.2.2

As simulações para o modelo de oligopólio sob incerteza – Modelo com choque estocástico no intercepto da demanda

A seguir estão ilustrados os casos particulares do modelo utilizado aplicado ao mercado imobiliário do Rio de Janeiro para as estruturas de monopólio ($n = 1$), duopólio ($n = 2$) e oligopólio ($n = 10$). Conforme foi descrito no capítulo 4, foi necessário assumir a premissa de que o investimento é infinitamente divisível. Isso quer dizer que a empresa i pode adicionar uma capacidade infinitesimal com investimento infinitesimal dI .

Adicionalmente, pode-se apontar uma vantagem do princípio do gatilho míope, baseado na miopia ótima de Leahy (1993). Ele permite aplicar a simulação de Monte Carlo para encontrar as soluções e resolver o modelo, uma vez que o gatilho míope $X^*(Q)$ é conhecido previamente.

A Figura 11, similar ao gráfico gerado por Grenadier (2002), mostra o caminho simulado de $Q(t)$, para uma realização particular do processo de choque, $X(t)$, para

um oligopólio composto por 10 empresas. A estratégia de exercício em equilíbrio de Nash é cada empresa investir sempre que $X(t)$ atingir a função de gatilho superior $X^*(t)$. Vale ressaltar que abaixo do gatilho $X^*(Q)$ nenhum investimento é feito.

Em qualquer ponto, a capacidade do setor imobiliário pode aumentar gradativamente através de novos investimentos. A curva preta é a função do gatilho de exercício no equilíbrio, $X^*(t)$. A curva irregular (vermelha) abaixo da função de gatilho representa a trajetória do termo de choque $X(t)$. A terceira curva (azul) está simulando a oferta $Q(t)$, que aumentará até o ponto em que a demanda $X(t)$ atinge o gatilho $X^*(Q)$. Com isso o novo gatilho passa a ser maior.

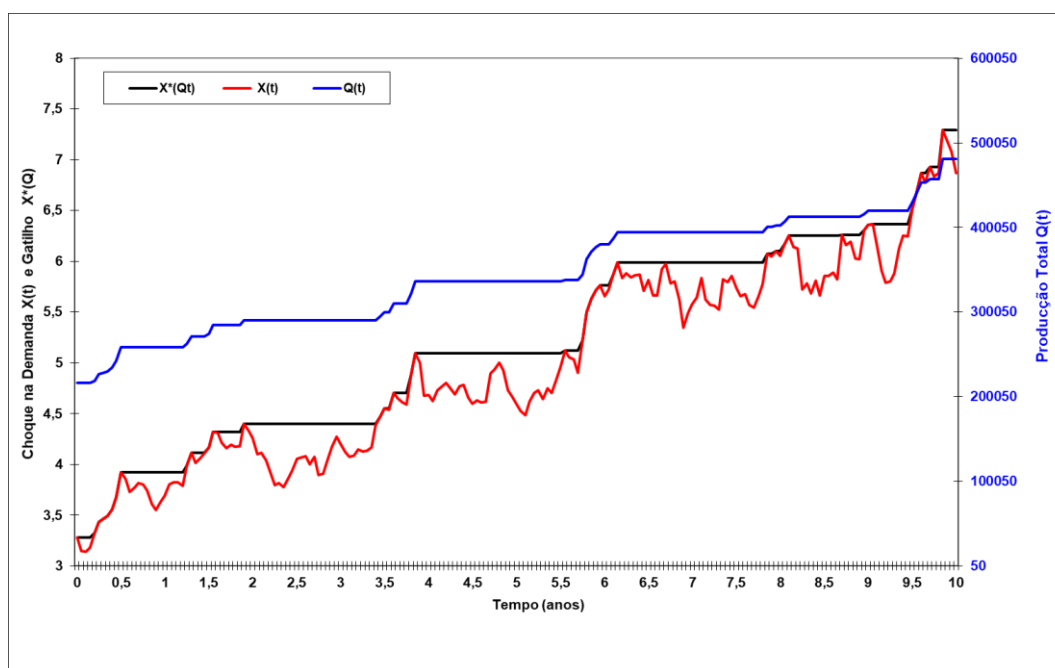


Figura 11 - Amostra do caminho e evolução da demanda para um oligopólio ($n=10$)

No modelo aqui desenvolvido, a adição de capacidade das empresas é proporcional à diferença entre o choque da demanda $X(t)$ e o nível de gatilho ótimo $X^*(Q(t))$. Quando a demanda atinge o gatilho de equilíbrio, as empresas que compõem o oligopólio ($n = 10$ no caso das simulações da Figura 12) exercem suas opções de expansão da capacidade. Tal comportamento das empresas neste oligopólio, faz com que a produção da indústria, em níveis agregados, aumente.

Lembrando que o modelo considera que todas as empresas são iguais, assim como Grenadier (2002), em caso de choque positivo na demanda em t , e, se $X(t) > X^*(Q(t - dt))$, cada empresa expande a capacidade $Q(t) - Q(t-dt)$.

Considerando a simulação para uma trajetória da evolução da demanda, a produção total $Q(t)$ é muito maior para o caso do oligopólio com 10 empresas do que para o caso de duopólio. O caso de monopólio apresenta a menor produção total quando comparado aos oligopólios. Essa situação está ilustrada na Figura 12 que é análoga à análise do modelo inicial de Grenadier (2002), feita por Dias (2016) que se encontra disponível em <http://marcoagd.usuarios.rdc.puc-rio.br/>.

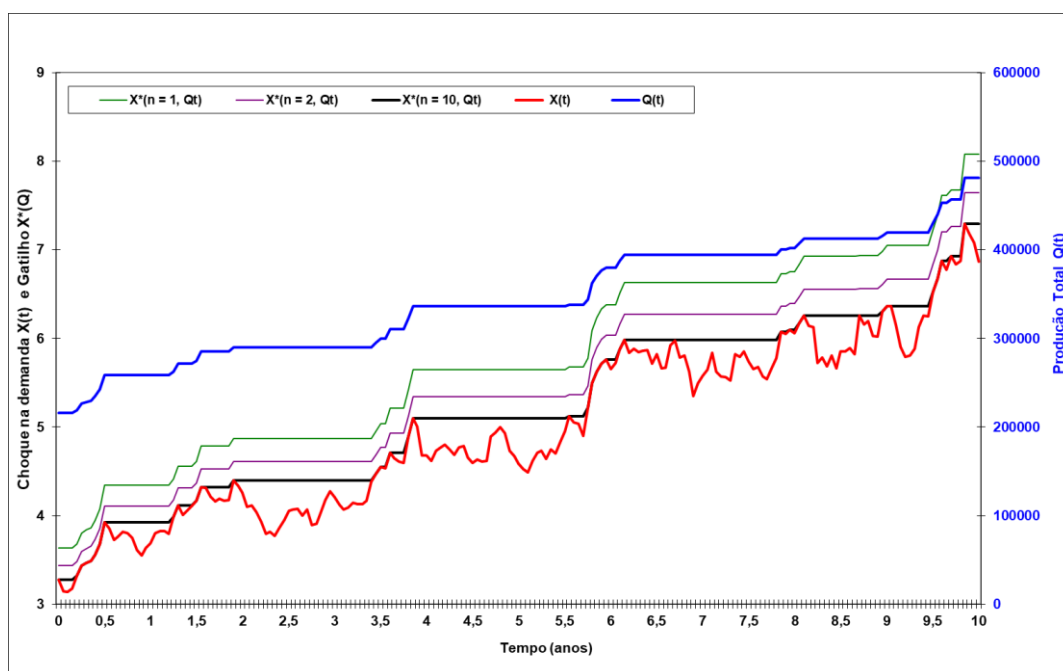


Figura 12 - Produção para oligopólio ($n=10$), comparação de gatilhos para monopólio e duopólio

A partir de uma possível evolução da demanda com a respectiva evolução da produção do oligopólio, pode-se observar a Figura 13, que ilustra a produção total para empresas em monopólio, representada pela linha verde, indicando uma produção menor quando comparada às estruturas em duopólio (linha roxa) e oligopólio (linha azul).

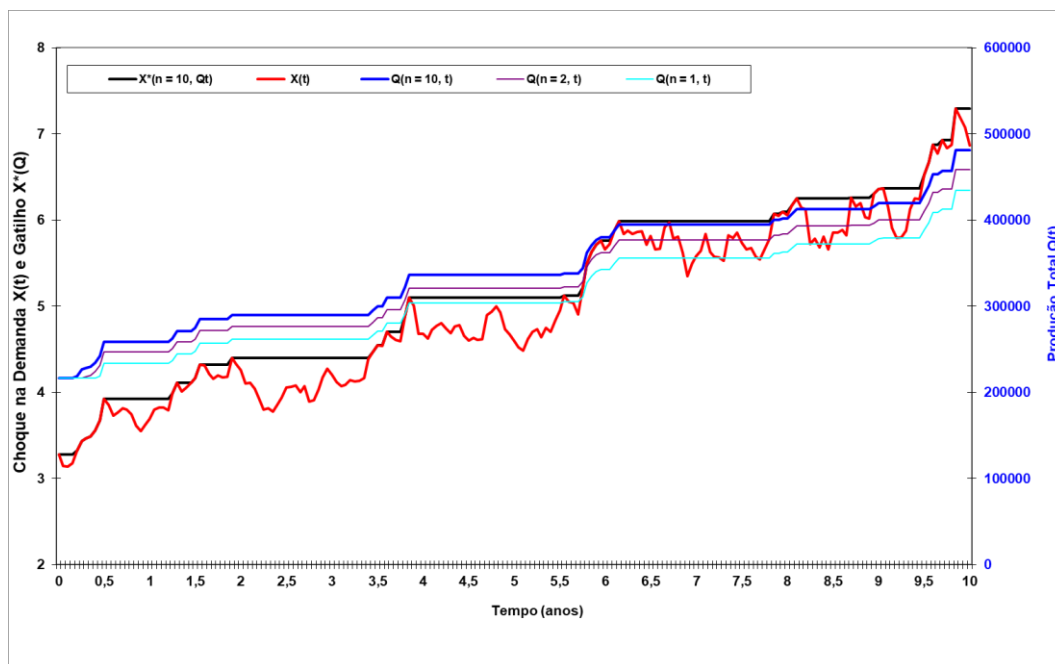


Figura 13 – Produção total para monopólio, duopólio e oligopólio com 10 empresas

5.2.3

Análise de sensibilidade dos parâmetros – modelo com $X(t)$ no intercepto da demanda

De posse dos principais resultados do modelo desenvolvido nesta tese, torna-se importante ilustrar uma comparação entre as variações nos gatilhos ótimos em equilíbrio em relação às diversas variáveis do modelo. Os gatilhos foram recalculados estressando-se os principais parâmetros que aparecem na equação do gatilho (eq.(41)). Para cada um dos casos, as Figuras 13, 14, 15 e 16 ilustram o comportamento dos gatilhos ótimos de investimento no equilíbrio relacionados às variações da taxa de juros livre de risco, dos parâmetros do MGB como volatilidade e tendência e do parâmetro da demanda como o intercepto. Os gatilhos foram recalculados com n fixo igual a 4 empresas, *coeteris paribus*, variando um parâmetro por vez.

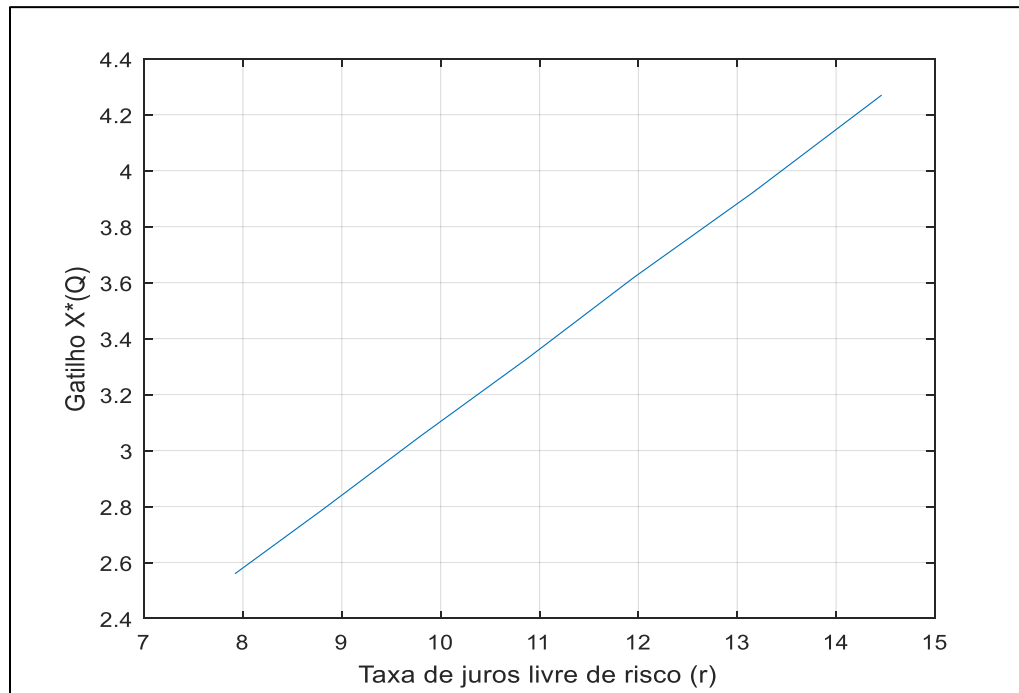


Figura 14 - Sensibilidade da taxa de juros

As variações positivas na taxa de juros livre de risco, representada por r , tornam o gatilho ideal para o investimento em novas construções justificadas em um mercado com lucro maior do que o anterior. Portanto, o gatilho aumenta com as variações de r . Intuitivamente, quando a taxa de juros livre de risco aumenta, o custo de oportunidade do investimento também aumenta. Isso torna o valor da opção de espera mais alto e vice-versa. Portanto, quando r for baixa, mais desenvolvedores tenderão a exercer sua opção para se desenvolver mais cedo. A próxima análise será a sensibilidade do parâmetro da volatilidade do MGB.

A Figura 15 mostra que, quanto maior a volatilidade do MGB, maior o nível de gatilho para ser ótimo o investimento. Retornado à eq. (41), observa-se que o parâmetro da volatilidade afeta positivamente o termo β_1 , provocando variações positivas do gatilho ótimo. Isso faz sentido intuitivo porque a opção de espera torna-se mais valiosa se o valor futuro do ativo for mais incerto.

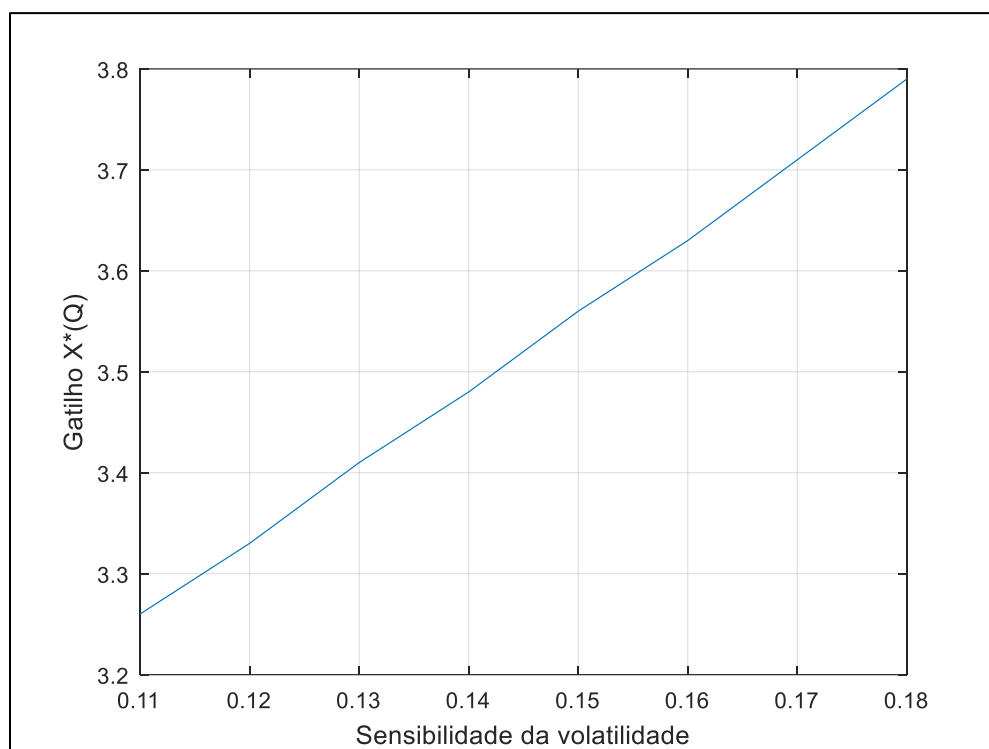


Figura 15 - Sensibilidade da volatilidade

Por fim, a Figura 16 ilustra a sensibilidade do parâmetro da demanda (intercepto), mostrando que alterações positivas no intercepto da demanda linear produzem menores gatilhos ótimos de investimento no equilíbrio de Nash. Uma interpretação intuitiva pode ser derivada do fato de que maiores valores para o intercepto da demanda indicam que os preços aumentaram e, consequentemente, os lucros podem aumentar também. Por outro lado, o aumento do preço provoca redução da demanda por imóveis, alterando assim o gatilho e fazendo que as empresas exerçam suas opções de investimento em níveis de demanda menores.

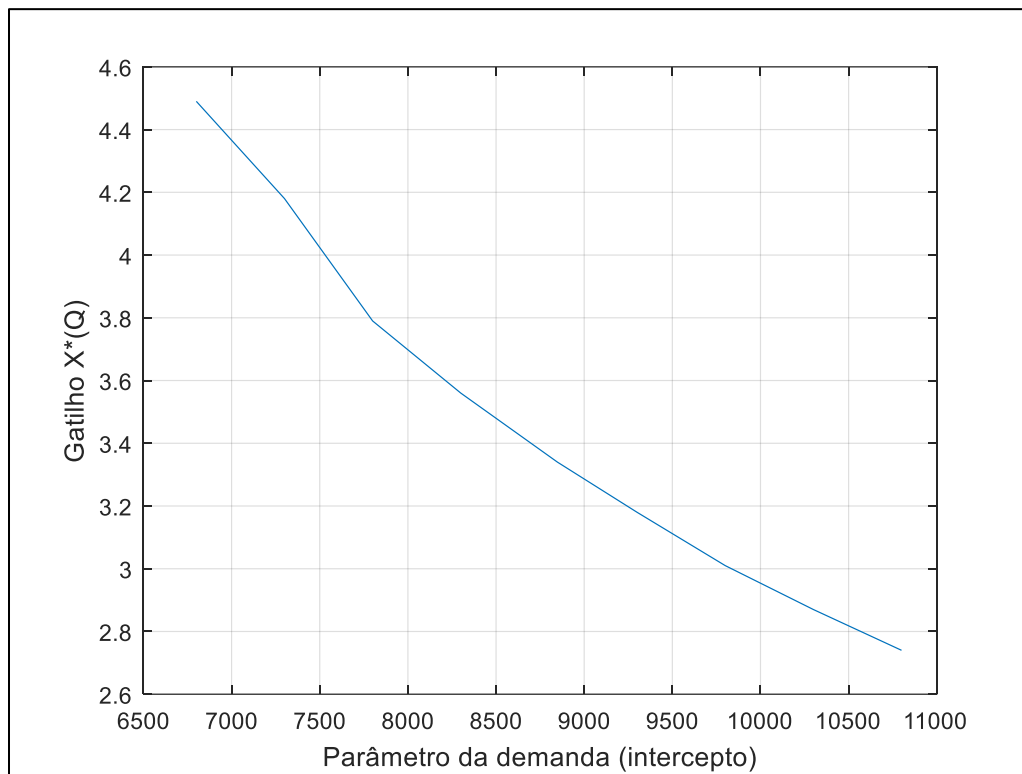


Figura 16 – Sensibilidade do parâmetro da demanda

5.4

Resultados do modelo de Jogos de OR com $X(t)$ na inclinação da curva de demanda

A seguir serão apresentados os resultados para o modelo de oligopólio que considerou, para a especificação para a função de demanda estocástica, um choque multiplicativo que permitiu alterar a inclinação da demanda linear e considerar um parâmetro de elasticidade do fator estocástico da demanda.

Assim como no caso anterior, aqui também é usada modelagem dos processos estocásticos, em que foram utilizados os parâmetros de tendência e volatilidade estimados para o MGB considerado, a partir dos dados do mercado imobiliário carioca. Além dos parâmetros envolvidos na equação da demanda (eq. (18)), a taxa livre de risco, a quantidade ofertada inicial $Q(t=0)$, a elasticidade do processo estocástico, o investimento (I) definido no modelo como uma unidade são variáveis necessárias para a solução do modelo.

A variável escolhida para representar o choque estocástico no intercepto da curva de demanda foi a série de preços dos imóveis. Dessa forma, a ideia central

foi usar a elasticidade do fator estocástico para refletir a sensibilidade da demanda por imóveis a partir de alterações nos preços dos imóveis analisados.

A partir das Equações (56) e (57) pode-se estimar os valores percentuais anuais das estimativas para a tendência de crescimento (α) e para a volatilidade (σ) são 5,51% a.a. e 16,44% a.a, respectivamente. A quantidade ofertada é determinada de forma exógena ao modelo, então o valor usado para $Q(t=0)$ foi 3.513 apartamentos (fonte: Secovi-Rio). Esse valor foi transformado em m², considerando a metragem de 60m² que é o tamanho médio padrão dos apartamentos de dois quartos. A tendência neutra ao risco (μ) estimada foi de 2,85% a.a.

A próxima etapa foi estimar os parâmetros da equação da demanda (eq. (17)). A variável estocástica escolhida foi a série mensal de preços reais dos imóveis com uma defasagem. O primeiro passo foi explicar como $X(t)$ afeta a demanda. Para isso, foi feito o procedimento de identificação de um processo ARIMA através das funções de autocorrelação (FAC) e autocorrelação parcial (FACP). Constatou-se que ela foi declinante na FAC e truncou na ordem 1 na FACP. Com isso, verificou-se que $X(t)$ é um processo autorregressivo de primeira ordem.

Portanto, aplicando o logaritmo em ambos os lados da equação (17), foi possível estimar, através de uma regressão linear, os parâmetros de interesse para o cálculo do gatilho no equilíbrio de Nash, a saber: $a = 9715,23$, $b = -0,031$ e $\varepsilon = 0,97$.

Assim como no caso da seção 5.2.1, como forma de simplificar a análise foi considerado que as empresas construtoras ou incorporadoras já possuem o terreno para iniciar a construção. Os valores críticos de $X^*(Q)$ representam o gatilho ótimo de investimento no equilíbrio de Nash e estão apresentados na Tabela 6.

Tabela 6 – Relação entre $X^*(Q)$ e o número de empresas concorrentes

Nº de empresas	$X^*(Q)$
01	5,24
02	4,74
04	3,92
05	3,77
07	3,58
09	3,47
10	3,44
∞	2,07

Assim, no contexto de investimento no mundo real, o retorno financeiro de uma empresa está ligado às estratégias de investimento de seus concorrentes. Neste sentido, os resultados da Tabela 6 mostram os efeitos da competição na determinação dos gatilhos. No caso de um duopólio ($n=2$), o gatilho ótimo em EN foi de R\$4,74 por unidade de investimento.

Analisando estruturas oligopolistas a partir de 3 empresas, por exemplo, ao considerar 4 empresas concorrentes, o gatilho ótimo de investimento é igual R\$3,92, sendo reduzido para R\$3,44 por unidade de investimento ao incorporar 10 empresas concorrentes no modelo de oligopólio desenvolvido. Para o caso extremo em que o número de empresas tendeu ao infinito, o valor do gatilho ótimo foi de R\$2,07 por unidade de investimento.

O impacto da concorrência sobre os gatilhos ótimos no equilíbrio de Nash está ilustrado na Figura 17 onde é possível visualizar claramente o efeito da concorrência no exercício da opção de investimento em novas construções.

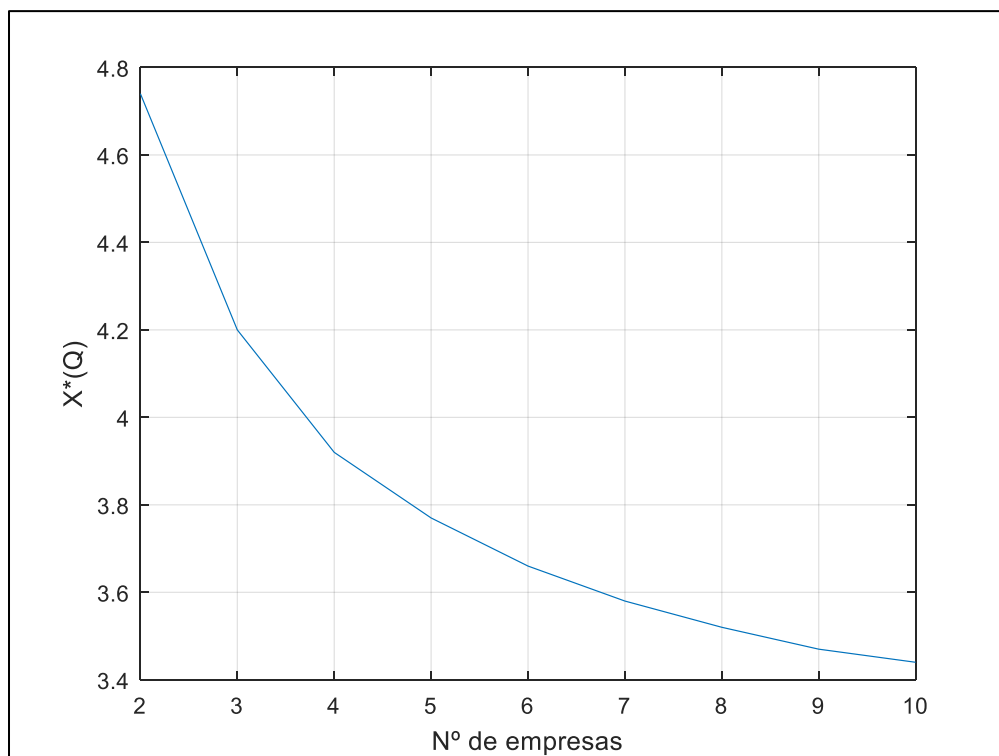


Figura 17 - Gatilhos ótimos x nº de firmas concorrentes

A Figura 17 ilustra a situação em que o gatilho diminui com o aumento da competição, uma vez que $X^*(Q)$, definido pela equação (53), é uma função decrescente de n . Isso pode ser visto como um comportamento da empresa i frente à entrada de um ou mais rivais, em que a opção de adiar torna-se menos valiosa, levando as construtoras a exercerem suas opções mais cedo.

De posse dos principais resultados do modelo desenvolvido nesta seção, torna-se importante ilustrar uma comparação entre as variações nos gatilhos ótimos em equilíbrio em relação às diversas variáveis do modelo. Os gatilhos foram recalculados estressando-se os principais parâmetros que aparecem na equação do gatilho (eq.(53)).

Para cada um dos casos, as Figuras 19 a 21 ilustram o comportamento dos gatilhos ótimos de investimento no equilíbrio relacionados às variações dos parâmetros volatilidade, taxa de juros livre de risco e elasticidade do processo estocástico da demanda. Os gatilhos foram recalculados com n fixo igual a 4 empresas, variando apenas os parâmetros.

A Figura 18 mostra que uma variação positiva na volatilidade do MGB eleva positivamente o valor do gatilho. Tal fato é verificado na equação (53), onde a volatilidade afeta positivamente o último termo da equação bem como termo descrito pela eq. (35), impactando o gatilho na mesma direção.

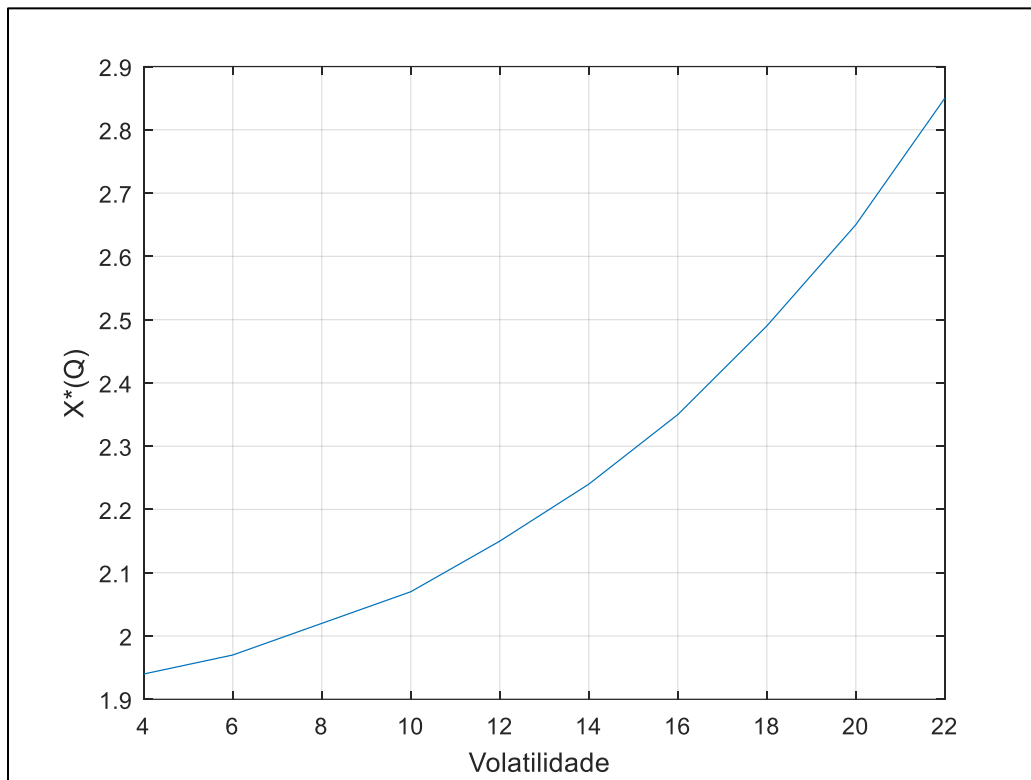


Figura 18 - Sensibilidade da volatilidade

A Figura 19 ilustra a variação do gatilho a partir de alterações na elasticidade do processo estocástico da demanda que compõe a função de demanda utilizada no modelo de oligopólio. A elasticidade denota uma ideia de sensibilidade da demanda em relação às variações do processo $X(t)$. Assim, quanto menos sensíveis são os compradores de imóveis às variações de preços, maior tende a ser o gatilho ótimo no equilíbrio. O modelo mostra-se menos sensível às variações na elasticidade quando ela é maior ou igual a um. Tal fato é consistente com o conceito clássico de elasticidade abordado pela literatura microeconômica.

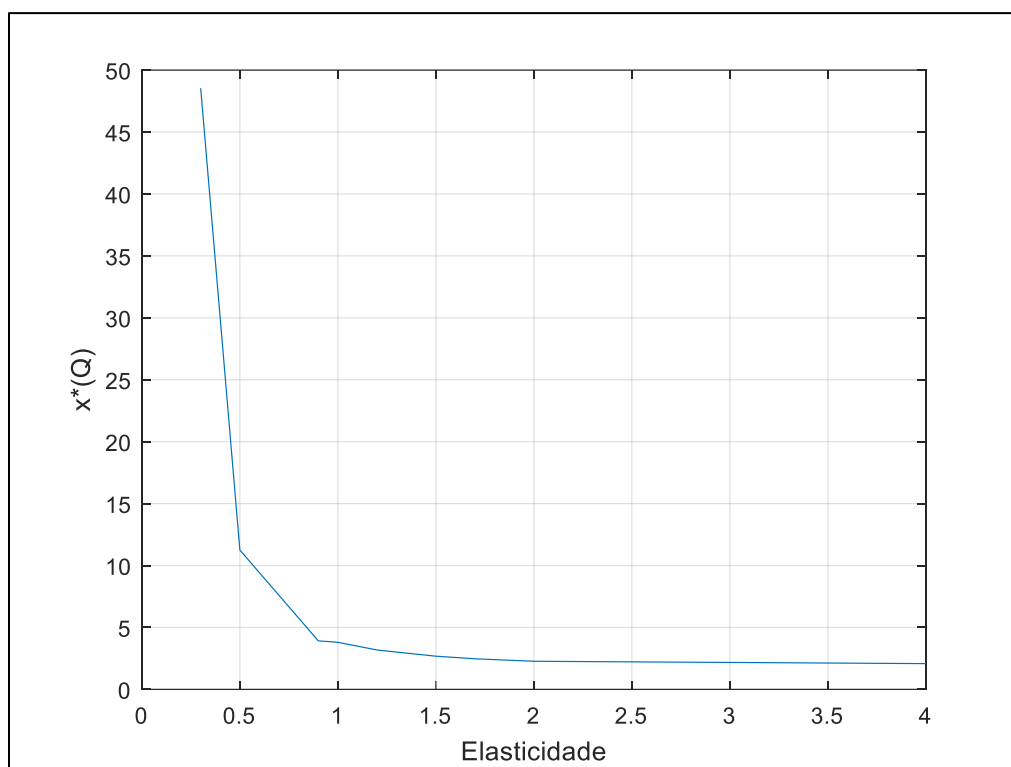


Figura 19 - Sensibilidade da elasticidade

Observa-se através Figura 20 que variações positivas no parâmetro que representa o intercepto da demanda inversa linear afeta negativamente o gatilho ótimo de equilíbrio, provocando queda nos seus valores a medida que aumenta o valor do intercepto. Isso quer dizer que, a partir de aumentos nos preços dos imóveis, os lucros serão impactados positivamente, mantidos constantes os demais parâmetros do modelo, provocando concomitantemente uma redução na demanda, alterando dessa forma o gatilho e levando as empresas a investir em níveis de demanda mais baixos.

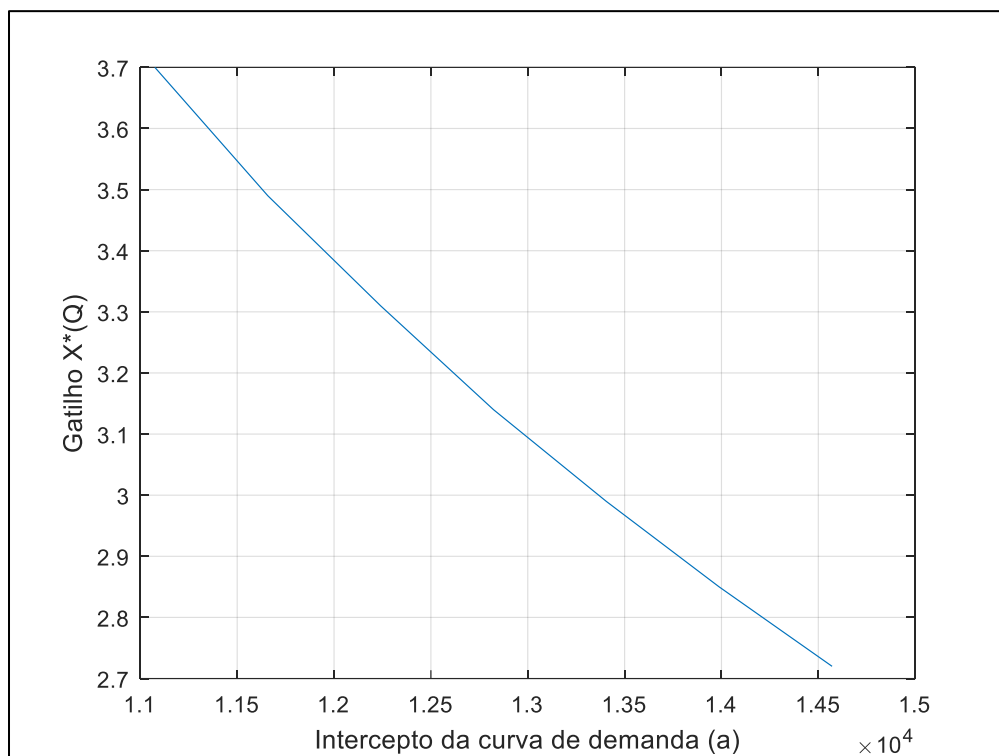


Figura 20 - Sensibilidade do parâmetro da demanda – intercepto

O modelo desenvolvido na tese a partir de uma especificação diferente para a demanda estocástica produziu um gatilho ótimo no equilíbrio de Nash interessante do ponto de vista das interpretações econômicas, fornecendo mais informações a respeito do caminho que os gatilhos podem seguir permitindo às empresas ajustarem sua produção. Além disso, os resultados obtidos neste trabalho podem ser comparados (além do modelo de Grenadier (2002)) ao resultado encontrado por Williams (1993) que compartilha da propriedade geral, demonstrando que há uma queda no valor do gatilho devido ao aumento da competição.

A partir das análises de sensibilidade foi possível perceber que, no modelo desenvolvido nesta tese, o gatilho ótimo é menos sensível às variações dos parâmetros quando comparado aos valores do gatilho encontrado por Grenadier (2002).

Vale a pena ressaltar que Grenadier (2002) utiliza valores arbitrários ou exógenos para os parâmetros, que não necessariamente expressam a realidade do setor imobiliário. Além disso, alterações nos diversos parâmetros do modelo fizeram com que o gatilho ótimo de equilíbrio se comportasse de forma mais

sensível do que os gatilhos calculados nesta tese. O autor usou uma função de demanda do tipo isoelástica com valor para a elasticidade igual a 1,5. Esse valor talvez não reflita a realidade dos mercados imobiliários residenciais. Além disso, ao variar esse parâmetro de elasticidade, mantendo-se constantes os demais parâmetros (tendência e volatilidade do MGB, quantidade ofertada da indústria, número de concorrentes no mercado, o choque inicial, a taxa de juros livre de risco e o nível de investimento), e reduzindo a elasticidade a valores por exemplo iguais ou menores que um, o modelo apresenta inconsistências matemáticas. Além disso, ao estressar-se os demais parâmetros do modelo já citados, estes se mostram bastante sensíveis, alterando sobremaneira o valor dos gatilhos no equilíbrio.

Portanto, conclui-se que a função de demanda linear com choques multiplicativos em seu intercepto e em sua inclinação parece ser a forma mais adequada e mais robusta de obter os gatilhos ótimos no equilíbrio de Nash. Isso pôde ser verificado a partir das análises empíricas onde houve um esforço de fornecer os resultados usando dados reais da realidade do mercado imobiliário carioca. Neste sentido, acredita-se que a contribuição desta tese possa ser original.

6

Conclusões

6.1

Conclusões e principais contribuições da tese

O presente estudo teve como objetivo o de determinar a estratégia ótima de exercício da opção de investimento no equilíbrio de Nash considerando a incerteza na demanda por imóveis em uma região do Rio de Janeiro, combinando a teoria das opções reais com a teoria dos jogos para análise econômica de investimentos em novos projetos no mercado imobiliário, dando suporte ao processo de tomada de decisão por parte dos gestores.

Este trabalho traz contribuições para a literatura (em particular, no contexto das estratégias ótimas de exercício) ao modificar o modelo de Grenadier (2002) a partir de especificações da incerteza na demanda mais adequadas que permitiram interpretações econômicas mais robustas para o mercado imobiliário, mostrando quantitativamente como a concorrência pode impactar nas decisões estratégicas de investimento.

A primeira análise deste trabalho concentrou-se na investigação das inter-relações e nos fatores determinantes dos preços dos imóveis residenciais localizados em uma região da cidade do Rio de Janeiro. Para tanto, foi aplicado um modelo de autorregressão vetorial. Neste contexto, a contribuição foi concentrada nas estratégias de identificação do modelo e da ordenação causal das variáveis selecionadas através de grafos acíclicos direcionados. Usando a teoria dos grafos, a partir da matriz de covariância dos resíduos na forma reduzida, foram identificadas as relações de causalidade contemporânea através dos dados.

As soluções analíticas do modelo de oligopólio sob incerteza permitiram fornecer resultados quantitativos que mostraram o efeito da concorrência na tomada de decisão por parte das empresas construtoras. Ao considerar o modelo com choque estocástico no intercepto da demanda pode-se observar a estratégia ótima de investimento no equilíbrio de Nash em que novas construções deverão ser realizadas quando o gatilho atingir, no equilíbrio, um valor próximo a R\$3,43 por

unidade de investimento para o caso de um duopólio. Já no oligopólio formado por 5 empresas rivais a estratégia ótima para investir foi algo próximo a R\$3,31 por unidade de investimento e R\$3,28 por unidade de investimento, considerando um oligopólio com 10 empresas concorrentes.

Ao considerar-se o modelo com choque multiplicativo no intercepto da demanda e ainda com um fator de elasticidade para o cálculo do gatilho, os resultados encontrados para imóveis localizados em uma região da cidade do Rio de Janeiro indicaram que as estratégias ótimas para novos investimentos em projetos imobiliários é investir no gatilho ótimo em equilíbrio de Nash no valor de R\$4,74 por unidade de investimento ao se considerar um duopólio e no gatilho de R\$3,77 para um oligopólio formado por 5 empresas. Para o caso de um oligopólio com 10 rivais, a estratégia ótima é a de investir no gatilho ótimo igual a R\$3,44 por unidade de investimento.

Tais estratégias foram calculadas e avaliadas no contexto das opções reais e da teoria dos jogos, onde a partir da interseção dessas metodologias, foi demonstrado que as construtoras tenderão a exercer mais cedo suas opções de investimento em novas construções a medida em que o número de concorrentes neste mercado aumenta. Essas estratégias de investimento são importantes para os investidores do mercado imobiliário, uma vez que os resultados indicam que os gatilhos em equilíbrio de Nash permitem aumentos incrementais na construção de imóveis toda vez que o choque na demanda atinge o gatilho ótimo encontrado através das soluções analíticas fornecida nesta tese.

A partir dos resultados obtidos para as estratégias de exercício da opção foi possível comparar oligopólios, em termos de níveis de investimento e produção, mostrando a evolução da demanda para a estrutura em oligopólio, e indicando que a produção total foi maior para o caso de oligopólio com dez empresas concorrentes do que para os duopólios e monopólios.

Os resultados deste trabalho podem ser úteis para os diferentes agentes econômicos do setor imobiliário do Rio de Janeiro. Políticas públicas que incentivem a participação de um maior número de empresas imobiliárias podem contribuir para o aumento da arrecadação de impostos para o Governo do Estado e Prefeitura do Rio de Janeiro, uma vez que os resultados sugerem que o investimento

e a produção de apartamentos residenciais foi maior no oligopólio formado por 10 empresas do que no caso dos monopólios e duopólios.

Para as incorporadoras de imóveis, os resultados indicam que a maior concorrência reduz valor da opção de espera e o gatilho ótimo do investimento, o que leva as empresas a exercerem suas opções mais cedo, aumentando a quantidade de imóveis, com conseqüente redução nos preços. Por outro lado, o investimento imobiliário por parte das empresas mostrou-se bastante sensível às variações da elasticidade da demanda, o que tem também impactos para os compradores e investidores.

Foram calculadas as estratégias de exercício no equilíbrio considerando que as construções seriam imediatas. Para que modelo represente de forma mais consistente o mercado imobiliário residencial pode-se incluir como sugestão de trabalhos futuros, o impacto dos impostos e do tempo de construção, uma vez que uma importante característica dos investimentos imobiliários é o longo período de tempo necessário para serem completadas.

6.2

Limitações da tese e recomendações para trabalhos futuros

Este trabalho apresenta algumas limitações. Em primeiro lugar, pode-se apontar a questão da base de dados utilizada, que se referem a um grupo específico de bairros representativos da região de maior especulação imobiliária residencial da cidade do Rio de Janeiro. Para que as análises possam refletir de forma mais consistente a realidade do setor imobiliário carioca e permitir uma análise econométrica com um número de graus de liberdade razoavelmente maior, seria interessante trabalhar com uma base de dados mais extensa e mais rica em informações.

Além disso, seria importante que as séries de preços permitissem uma equalização dos dados que possibilitasse considerar diferenças de preço entre unidades de mesmo tamanho, mas de diferentes características, tais como, andar, vista, estado de conservação, quadra da praia, rua de grife, vaga de garagem, etc.

Acredita-se que o fato de se incluir tais características, poder-se-ia levar as séries de preços a refletirem a variação real nos preços.

Ainda no contexto estatístico e econométrico, essa tese sugere como recomendação para futuras extensões, o emprego de algoritmos que possam identificar choques exógenos independentes através de restrições de sinais nas funções impulso resposta de modelos VARs estruturais. Para tal esforço, indica-se, por exemplo, métodos bayesianos que permitem estimações consistentes para modelos sobre-identificados que possam empregar metodologias híbridas, como as propostas por Sims e Zha (1998) que, no contexto das variáveis macroeconômicas, foram aplicadas no Brasil recentemente por Lima et al. (2009). Seria interessante analisar choques exógenos da economia que afetam diretamente o mercado imobiliário, por exemplo, choques contracionistas de política monetária, na taxa de câmbio além dos choques de demanda e oferta. Para isso é necessário desenvolver um modelo estocástico dinâmico que forneça os sinais para cada variável desejada.

As recomendações e extensões futuras a respeito da modelagem dos Jogos de Opções Reais, a partir da leitura de diversos artigos e livros para elaborar esta tese, foi possível perceber algumas lacunas em relação aos modelos mais importantes que aplicam jogos de opções. Em primeiro lugar, conforme ressaltado ao longo da tese, há uma quantidade limitada de testes e aplicações empíricas ou calibrações de parâmetros teóricos desenvolvidos em tais modelos. Em segundo lugar, as assimetrias (de custos, por exemplo) poderiam ser identificadas com mais rigor e conseqüentemente medidas. Acredita-se que esses são importantes pontos que poderão permitir melhores discussões para elaborar novos modelos.

O modelo de jogos de OR usado nesta tese considera como hipótese principal a estrutura de jogo mais geral do modelo de Leahy (1993) para concorrência perfeita, que simplificou a modelagem ao mostrar a coincidência entre o valor do gatilho da opção real de um monopolista e o gatilho de entrada de uma empresa em concorrência perfeita, permitindo com apenas duas condições de contorno determinar a estratégia ótima de exercício da opção.

No entanto, o modelo de Leahy (1993) tem a desvantagem de determinar o comportamento ideal de investimento de todos os jogadores do mercado, mas sem especificar o que eles devem fazer no caso de um ou mais jogadores apresentar uma

a vantagem de ser o primeiro (*first-mover advantage*) a iniciar um jogo de investimento sequencial. Essencialmente, esses modelos aconselham as empresas sobre os ajustes que devem realizar ao longo do tempo, assumindo que todas elas reagirão a choques do mercado ao mesmo tempo. Ambas abordagens trazem algumas inconsistências práticas, mas estas são as duas formas mais populares usadas na literatura de jogos de opções reais para tratar a concorrência endogenamente.

Resumidamente, uma sugestão pode ser estender o modelo de Jogos de OR desenvolvido nesta tese para oligopólios assimétricos. Poderá ser realizado um estudo adicional a respeito da simulação de Monte Carlo reportando as médias ao longo do tempo. Por fim, em termos práticos e teóricos, os resultados obtidos nesta tese, para os casos extremos ($n=1$ e n tendendo ao infinito), podem ser comparados com um monopólio simples de um modelo de Opções Reais sem competição e com competição perfeita.

AGUERREVERE, F. L. Equilibrium investment strategies and output price behavior: A real-options approach. **Review of Financial Studies**, v. 16, n. 4, p. 1239-1272, 2003.

_____. Real Options, Product Market Competition, and Asset Returns. **Journal of Finance**, v. 64, n. 2, p. 957-983, 2009.

ANGELOU, G. N.; ECONOMIDES, A. A. A multi-criteria game theory and real-options model for irreversible ICT investment decisions. **Telecommunications Policy**, v. 33, n. 10-11, p. 686-705, 2009.

AITCHISON, J.; BROWN, J. A. C. The Lognormal Distribution - with Special Reference to its Uses in Economics. **Cambridge University Press**, London, 176p., 1957.

ARMADA, M. R.; KRYZANOWSKI, L.; PEREIRA, P. J. Optimal Investment Decisions for Two Positioned Firms Competing in a Duopoly Market with Hidden Competitors. **European Financial Management**, v. 17, n.2, p. 305-330, 2011.

AZEVEDO, A.; PAXSON, D. Developing real option game models. **European Journal of Operational Research**, v. 237, n. 3, p. 909-920, 2014.

BABA, N. Uncertainty, monitoring costs, and private banks lending decisions in a duopolistic loan market: A game-theoretic real options approach. **Monetary and Economic Studies**, 21-46, 2001.

BACK, K. Issues in option exercise games. **Working Paper**, Mays Business School, Texas A&M University, College Station, 2007.

BAFFOE-BONNIE, J. The dynamic impact of macroeconomic aggregates on housing prices and stock of houses: A national and regional analysis. **Journal of Real Estate Finance and Economics**, v. 17, n.2, p. 179-197, 1998.

BIGGS, N.; LLOYD, E.; WILSON, R. **Graph Theory**, 1736-1936, Oxford University Press, p. 1736-1936, 1986.

BALDURSSON, F. M. Irreversible investment under uncertainty in oligopoly. **Journal of Economic Dynamics & Control**, v. 22, n. 4, p. 627-644, 1998.

BLACK, F.; SCHOLES, M. The Pricing of Options and Corporate Liabilities. **Journal of Political Economy**, v. 81, n. 3, p. 637-654, 1973.

BLANCHARD, O. J.; QUAH, D. The Dynamic Effects of Aggregate Demand and Supply Disturbances. **The American Economic Review**, v. 79, n. 4, p. 655-673, 1989.

BLOOMBERG. **Bloomberg Terminal**. Disponível em: <<http://www.bloomberg.com.htm>>. Acesso em 20 jun. 2016.

BOLOW, J. I. & PFLEIDERER, P. A Note on the Effect of Cost Changes on Prices. **Journal of Political Economy**, V. 91, n. 1, p.182-185, 1983.

BOUIS, R.; HUISMAN, K. J. M.; KORT, P. M. Investment in oligopoly under uncertainty: The accordion effect. **International Journal of Industrial Organization**, v. 27, n. 2, p. 320-331, 2009.

BOYER, M.; LASSERRE, P.; MOREAUX, M. A dynamic duopoly investment game without commitment under uncertain market expansion. **International Journal of Industrial Organization**, v. 30, n. 6, p. 663-681, 2012.

CHEN, C.; TZANG, T. D. Interest-Rate Sensitivity of Real Estate Investment Trusts. **Journal of Real Estate Research**, v. 3, n. 3, p. 13-22, 1988.

CHEVALIER-ROIGNANT, B.; TRIGEORGIS, L. **Competitive strategy: Options and games**. Cambridge: Mass: MIT Press, 2011.

CHILDS, P. D.; OTT, S. H.; RIDDIOUGH, T. J. Optimal Valuation of Claims on Noisy Real Assets: Theory and an Application. **Real Estate Economics**, v. 30, n.3, p.415-443, 2002.

COSTA, F. A.; SAMANEZ, C. P. Teoria dos jogos e opções reais: uma aplicação no mercado imobiliário brasileiro. **Revista Brasileira de Economia de Empresas**, v. 8, n.2, p. 57-62, 2008.

COSTA, L. D.; AZEVEDO, F. P.; SAMANEZ, C. P. Investment strategies in the Brazilian industry of aluminum cans: an analysis in the context of real options games. **Revista Brasileira de Gestão de Negócios**, v. 17, n. 57, p. 1246-1263, 2015.

COTTRELL, T.; SICK, G. Real options and follower strategies: the loss of real option value to first- mover advantage. **Engineering Economist**, v. 47, n. 3, p. 232, 2002.

DEAN, A. P.; ARUN, M. Multi- factor competitive internet strategy evaluation: search expansion, portal synergies. **Journal of Modelling in Management**, v. 4, n. 3, p. 249-273, 2009.

DECAMPS, J. P.; MARIOTTI, T.; VILLENEUVE, S. Investment timing under incomplete information. **Mathematics of Operations Research**, v. 30, n. 2, p. 472-500, 2005.

DIAS, M. A. G.; TEIXEIRA, J. P. Continuous-Time option games: Review of models and extensions. **Multinational Finance Journal**, v. 14, n. 3/4, p. 219-254, 2010.

DIAS, M. A. G. **Opções Reais Híbridas com aplicações em Petróleo**. Departamento de Engenharia Industrial, PUC-Rio, Tese de Doutorado. 2005. 509 p.

_____. **Análise de Investimentos com opções reais: Teoria e prática com aplicações em petróleo e em outros setores**. Rio de Janeiro: Interciência, 2015.

_____. Notas de aula do site **Real Options in Petroleum**. Disponível em: http://marcoagd.usuarios.rdc.puc-rio.br/oligopoly_gren.html. Acesso em 08 jan. 2016.

DIXIT, A. K.; PINDYCK, R. S. **Investment under uncertainty**. Princeton University Press, Princeton (USA), 468 p., 1994.

DÉCAMPS, J. P.; MARIOTTI, T. Investment timing and learning externalities. **Journal of Economic Theory**, v. 118, n. 1, p. 80-102, 2004.

ENDERS, W. **Applied Econometrics Time Series**. 4^a. New York: **John Wiley**, 1995.

FINDLEY, D. F. New capabilities and methods of the X-12-ARIMA seasonal-adjustment program. **Journal of Business & Economic Statistics**, v. 16, n. 2, p. 127-152, 1998.

FORTUNATO, G., BRANDAO, L. E. T., ROZENBAUM, S., REBELLO, A. P. Valor da opção de abandono em lançamentos imobiliários residenciais. **RAC-Electronica**, v. 2, n. 3, p. 531, 2008.

FUDENBERG, D.; TIROLE, J. Preemption and rent equalization in the adoption of new technology. **Review of Economic Studies**, v. 52, n. 3, p. 383-401, 1985.

FRIEDMAN, M.. **A Theory of the Consumption Function**. National Bureau of Economic Research, Princeton, New Jersey, 1957.

GARLAPPI, L. Risk premia and preemption in R&D ventures. **Journal of Financial and Quantitative Analysis**, v. 39, n. 4, p. 843-872, 2004.

GÓMEZ, V., & MARAVALL, A. Programs TRAMO (Time series Regression with Arima noise, Missing observations, and Outliers) and SEATS (Signal Extraction in Arima Time Series. Instructions for the User. Working Paper, **Banco de España**. 1996

GONÇALVES, R.; CASTELO, A. M. O investimento e o papel da construção.: **Revista Conjuntura da Construção**. n.1, 2012.

GRAHAM, J. Strategic real options under asymmetric information. **Journal of Economic Dynamics and Control**, v. 35, n. 6, p. 922-934, 2011.

GRANGER, C. W. J. Investigating causal relations by econometric models and cross-spectral methods. **Econometrica**, v. 37, n. 3, p. 414-426, 1969.

GRENADIER, S. R. The strategic exercise of options: Development cascades and overbuilding in real estate markets. **Journal of Finance**, v. 51, n. 5, p. 1653-1679, 1996.

_____. Information revelation through option exercise. **Review of Financial Studies**, v. 12, n. 1, p. 95-129, 1999.

_____. Game choices: The intersection of real options and game theory. **Risk Books**, 2000.

_____. Option exercise games: An application to the equilibrium investment strategies of firms. **Review of Financial Studies**, v. 15, n. 3, p. 691-721, 2002.

_____. An equilibrium analysis of real estate leases. **Journal of Business**, v. 78, n. 4, p. 1173-1213, 2005.

HAMILTON, J. D. **Time Series Analysis**. Princeton University: Princeton University Press., 1994. 799p.

HARRISON, J. M.; TAKSAR, M. I. Instantaneous control of brownian-motion. **Mathematics of Operations Research**, v. 8, n. 3, p. 439-453, 1983.

HOLLAND, A. S.; OTT, S. H.; RIDDIOUGH, T. J. The Role of Uncertainty in Investment: An Examination of Competing Investment Models Using Commercial Real Estate Data. **Real Estate Economics**, v. 28, n. 1, p. 33-64, 2000.

IBGE - Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística. Disponível em: <https://ww2.ibge.gov.br/home/estatistica/indicadores/precos/inpc_ipca/defaultseriesHist.shtm>. Acesso em 18 set. 2016.

JOHNSTON, J.; DINARDO, J. **Econometric Methods**. McGraw Hill Higher Education, 2000. 531p.

HUISMAN, K. Technology investment: A game theoretic real options approach. **Kluwer Academic Publishers**, 2001.

HUISMAN, K. J. M.; KORT, P. M. Strategic technology adoption taking into account future technological improvements: A real options approach. **European Journal of Operational Research**, v. 159, n. 3, p. 705-728, 2004.

KESTER, W. C. Today's options for tomorrow's growth. **Harvard Business Review**, v. 62, n. 2, p. 153-160, 1984.

KLING, J. L.; MCCUE, T. E. Office building investment and the macroeconomy - empirical-evidence, 1973-1985. **Areuea Journal-Journal of the American Real Estate & Urban Economics Association**, v. 15, n. 3, p. 234-255, 1987.

KONG, J. J.; KWOK, Y. K. Real options in strategic investment games between two asymmetric firms. **European Journal of Operational Research**, v. 181, n. 2, p. 967-985, 2007.

KULATILAKA, N.; PEROTTI, E. C. Strategic growth options. **Management Science**, v. 44, n. 8, p. 1021-1031, 1998.

LAMBRECHT, B. M. The impact of debt financing on entry and exit in a duopoly. **Review of Financial Studies**, v. 14, n. 3, p. 765-804, 2001.

LAMBRECHT, B.; PERRAUDIN, W. Real options and preemption under incomplete information. **Journal of Economic Dynamics and Control**, v. 27, n.4, p. 619-643, 2003.

LEAHY, J. V. Investment in Competitive Equilibrium: The Optimality of Myopic Behavior. **Quarterly Journal of Economics**, v. 108, n. 4, p. 1105-1133, 1993.

LEUNG, C. M.; KWOK, Y. K. Patent-investment games under asymmetric information. **European Journal of Operational Research**, v. 223, n. 2, p. 441-451, 2012.

LIMA, E; MAK, A; ALVES, P. "Monetary Policy and Exchange Rate Shocks in Brazil: Sign Restrictions versus A New Hybrid Identification Approach". Artigo apresentado no **XXXI Encontro Brasileiro de Econometria**, 2009.

MARCO, A. F. H. C. Identificação de modelos VAR e causalidade de Granger: uma nota de advertência. **Economia Aplicada**, v. 14, n. 2, p. 251-260, 2010.

MASON, R.; WEEDS, H. Investment, uncertainty and pre-emption. **International Journal of Industrial Organization**, v. 28, n. 3, p. 278-287, 2010.

MELO, M.M. Fatores Macroeconômicos Determinantes do Mercado Imobiliário do Estado do Ceará. **Nexus Econômicos – CME**. Universidade Federal da Bahia. 2011.

MERTON, R. C. Theory of rational option pricing. **Bell Journal of Economics**, v. 4, n. 1, p. 141-183, 1973.

MURTO, P. Exit in duopoly under uncertainty. **RAND Journal of Economics**, v. 35, n. 1, p. 111, 2004.

MURTO, P.; KEPP, J. A game model of irreversible investment under uncertainty. **International Game Theory Review**, v. 04, n. 02, p. 127-140, 2002.

MURTO, P.; NASAKKALA, E.; KEPPO, J. Timing of investments in oligopoly under uncertainty: A framework for numerical analysis. **European Journal of Operational Research**, v. 157, n. 2, p. 486-500, 2004.

NIELSEN, M. J. Competition and irreversible investments. **International Journal of Industrial Organization**, v. 20, n. 5, p. 731-743, 2002.

ODENING, M. Investment under uncertainty— Does competition matter? **Journal of Economic Dynamics and Control**, v. 31, n. 3, p. 994-1014, 2007.

PAWLINA, G.; KORT, P. M. Real Options in an Asymmetric Duopoly: Who Benefits from Your Competitive Disadvantage? **Journal of Economics & Management Strategy**, v. 15, n. 1, p. 1-35, 2006.

PAXSON, D.; PINTO, H. Rivalry under price and quantity uncertainty. **Review of Financial Economics**, v. 14, n. 3, p. 209-224, 2005.

PINDYCK, R. S. The long-run evolution of energy prices. **Energy Journal**, v. 20, n. 2, p. 1-27, 1999.

PINDYCK, R. S.; RUBENFELD, D. L. **Econometric Models and Economic Forecasts**. New York: McGraw-Hill, 1991. 726p.

_____. Microeconomics. seventh edition. **Prentice Hall** . 2009. 647p.

PORTER, M. E. Capital Disadvantage: America's Falling Capital Investment System. **Harvard Business Review**, v. 70, n.5, p. 65-82, 1992.

QUIGG, L. Empirical Testing of Real Option- Pricing Models. **Journal of Finance**, v. 48, n. 2, p. 621-640, 1993.

REISS, A. Investment in innovations and competition: an option pricing approach. **Quarterly Review of Economics and Finance**, v. 38, n. 3, p. 635-650, 1998.

ROCHA, K., SALLES, L., GARCIA, F. A. A., SARDINHA, J. A., & TEIXEIRA, J. P. Real estate and real options — A case study. **Emerging Markets Review**, v.8, n. 1, p. 67-79, 2007.

SANTOS C.H.M.; CRUZ B.O. A Dinâmica dos mercados habitacionais metropolitanos: aspectos teóricos e uma aplicação para a grande São Paulo. Brasília: **Instituto de Pesquisa Econômica Aplicada (IPEA)**, 2000.

SANTOS J.O. et al. Análise do Impacto da Crise do Sub-Prime no Retorno das Ações Ordinárias de Empresas do Setor da Construção Civil – Um Estudo de Caso Confrontando o Desempenho das Empresas Brasileiras e Americanas, **SEMEAD – seminários em administração**, FEA-USP, São Paulo, 2010.

SCHWARZ, G. Estimating the Dimension of a Model. **The Annals of Statistics**, v. 6, n. 2, p. 461-464, 1978.

SECOVI-RIO. Panorama do Mercado Imobiliário do Rio de Janeiro 2013. **Publicações Secovi-Rio. HABITAÇÃO**. Rio de Janeiro 2013.

_____. Panorama do Mercado Imobiliário do Rio de Janeiro 2014. **Publicações Secovi-Rio. HABITAÇÃO**. Rio de Janeiro 2014.

_____. Panorama do Mercado Imobiliário do Rio de Janeiro 2015. **Publicações Secovi-Rio. HABITAÇÃO**. Rio de Janeiro 2015.

SHACKLETON, M. B.; TSEKREKOS, A. E.; WOJAKOWSKI, R. Strategic entry and market leadership in a two- player real options game. **Journal of Banking and Finance**, v. 28, n. 1, p. 179-201, 2004.

SIDDIQUI, A.; TAKASHIMA, R. Capacity switching options under rivalry and uncertainty. **European Journal of Operational Research**, v. 222, n. 3, p. 583-595, 2012.

SIMS, C. A. Macroeconomics and reality. **Econometrica**, v. 48, n. 1, p. 1-48, 1980.

_____. Policy analysis with econometric-models. **Brookings Papers on Economic Activity**, n. 1, p. 107-164, 1982.

_____. Specification, estimation, and analysis of macroeconometric models. **Journal of Money Credit and Banking**, v. 18, n. 1, p. 121-126, 1986.

_____. Are forecasting models usable for policy analysis? **Federal Reserve Bank of Minneapolis Quarterly Review**, p. 1-16, 1986.

SIMS, C. A.; ZHA, T. Bayesian methods for dynamic multivariate models. **International Economic Review**, v. 39, n. 4, p. 949-968, 1998.

SMETS, F. R. Essays on Foreign Direct Investment. (Doctoral Thesis). **Yale University**, New Haven (EUA). 219p, 1993.

SMIT, H. T. J. Infrastructure investment as a real options game: the case of European airport expansion. **Financial Management**, v. 32, n. 4, p. 27, 2003.

SMIT, H. T. J.; ANKUM, L. A. A real options and game-theoretic approach to corporate-investment strategy under competition. **Financial Management**, v. 22, n. 3, p. 241-250, 1993.

SMIT, H. T. J.; TRIGEORGIS, L. Strategic investment: real options and games. New Jersey: **Princeton University Jersey**, 2004.

SPIRITES, P.; GLYMOUR, C.; SCHEINES, R. **Causation, Prediction, and Search**. 2nd edition. MIT Press, 2000.

SUTTON, G. D. Explaining changes in house prices. **BIS Quaterly Review**, p. 46-55. 2002.

THIJSEN, J. J. J. Preemption in a real option game with a first mover advantage and player- specific uncertainty. **Journal of Economic Theory**, v. 145, n. 6, p. 2448-2462, 2010.

THIJSEN, J., HUISMAN, K., & KORT, P. Symmetric equilibrium strategies in game theoretic real option models. **Journal of Mathematical Economics**, v. 48, p. 219–225, 2012.

TIROLE, J. **The Theory of Industrial Organization**. Massachusetts: The MIT Press, 1988. 479p.

TITMAN, S. Urban land prices under uncertainty. **American Economic Review**, v. 75, n. 3, p. 505-514, 1985.

TRIGEORGIS, L. Anticipated competitive entry and early preemptive investment in deferrable projects. **Journal of Economics and Business**, v. 43, n. 2, p. 143-156, 1991.

TSATSARONIS, K.; ZHU, H. What drives housing price dynamics: cross-country evidence: **BIS Quarterly Review**, 2004.

VERSAEVEL, B. Alertness, Leadership, and Nascent Market Dynamics. **Dynamic Games and Applications**, v. 5, n. 4, p. 440-466, 2015.

YAMAZAKI, R. Empirical Testing of Real Option-Pricing Models Using Land Price Index in Japan. **MIT Master in City Planning Thesis**, 2000.

YOSHIDA, J. Effects of Uncertainty on the Investment Decision: An Examination of the Option-Based Investment Model Using Japanese Real Estate. **MIT Center for Real Estate Thesis**, 1999.

WATANABE, T. Real Options and Signaling in Strategic Investment Games: Kyoto University, **Institute of Economic Research**. 809, 2012.

WEYANT, J., & YAO, T. Strategic R&D investment under uncertainty in information technology: Tacit collusion and information time lag. In Presented at the real options conference 2005, Paris, 2005.

WEEDS, H. Strategic Delay in a Real Options Model of R& D Competition. **Review of Economic Studies**, v. 69, n. 3, p. 729-747, 2002.

WILLIAMS, J. Real estate development as an option. **J Real Estate Finan Econ**, v. 4, n. 2, p. 191-208, 1991.

WILLIAMS, J. T. Equilibrium and options on real assets. **Review of Financial Studies**, v. 6, n. 4, p. 825-850, 1993.

8 Apêndices e Anexos

8.1 Apêndice 1

Tabela 7 – Caracterização dos principais modelos pesquisados

Autores		Especificação		Informação do Jogo					Tipo de Jogo de Opção Real										nº de firmas				
	Tempo discreto	Tempo Contínuo	Completa	Incompleta	Perfeita	Imperfeita	Simétrica	Assimétrica	Simultâneo	Sequencial	One-shot	Soma não-zero	Soma zero	Finito	Infinito	Cooperativo	Não Cooperativo	Simétrico Ex-ante	Assimétrico ex-ante	1	2	> 2	Aplicação
Smets (1993)		x	x		x		x		x	x	x	x			x		x	x		x	x	x	Indústria
Smit & Ankum (1993)	x			x		x	x		x	x	x	x			x		x	x				x	Indústria
Williams (1993)		x	x		x		x		x		x	x			x	x	x	x				x	Não especificado
Dixit & Pindyck (1994)		x	x		x		x			x	x	x			x		x	x	x	x	x	x	Mineração
Grenadier (1996)		x	x		x		x		x	x	x	x			x		x	x				x	Adoção de nova tecnologia
Kulatilaka & Perotti (1998)	x			x		x	x		x	x	x	x			x		x		x			x	Bancos
Reiss (1998)		x	x		x			x		x	x	x			x		x	x				x	Não especificado
Grenadier (1999)		x	x			x		x	x	x	x	x			x		x	x				x	Indústria
Lambrecht (1999)		x	x		x	x	x	x		x	x	x			x	x			x			x	Indústria
Grenadier (2000a)		x	x		x	x	x	x	x	x	x	x			x		x	x				x	Não especificado
Grenadier (2000b)		x	x		x		x			x		x					x	x				x	Investimentos em projetos de inovação
Baba (2001)		x	x		x		x			x	x	x					x	x				x	Não especificado
Huisman (2001)		x	x		x		x		x	x	x	x			x		x	x		x	x	x	Não especificado
Lambrecht (2001)		x	x		x		x			x	x	x			x		x		x			x	Patentes e P&D
Cottrell & Sick (2002)		x		x	x		x	x		x	x				x		x	x				x	Indústria

Autores	Especificação		Informação do Jogo					Tipo de Jogo de Opção Real										nº de firmas						
	Tempo discreto	Tempo Contínuo	Completa	Incompleta	Perfeita	Imperfeita	Simétrica	Assimétrica	Simultâneo	Sequencial	One-shot	Soma não-zero	Soma zero	Finito	Infinito	Cooperativo	Não Cooperativo	Simétrico Ex-ante	Assimétrico ex-ante	1	2	> 2	Aplicação	
Grenadier (2002)		x	x		x		x		x	x	x	x			x	x	x				x			Não especificado
Murto & Keppo (2002)		x	x		x		x	x	x		x				x		x	x			x			Mercado Imobiliário
Nielsen (2002)		x	x		x		x		x	x	x	x			x		x	x			x	x		Petróleo e farmacêutica
Weeds (2002)		x	x		x		x			x	x				x		x	x			x	x		Não especificado
Aguerrevere (2003)		x	x		x		x		x	x	x	x			x		x				x			Imóveis, petróleo e farmacêutica
Lambrecht & Perraudin (2003)		x		x	x		x	x		x	x	x			x		x	x					x	Mercado Imobiliário
Smit (2003)	x		x		x		x			x	x	x			x		x	cap. 7,9	cap. 8		x			Inovação
Tsekrekos (2003)		x	x		x		x		x	x	x	x			x		x				x			Inovação
Décamps & Mariotti (2004)		x		x	x		x			x	x				x		x	x	x		x			Patentes
Garlappi (2004)	x		x		x		x			x		x			x		x	x	x	x	x	x		Não especificado
Huisman & Kort (2004)		x	x		x		x			x	x	x			x		x	x	x		x	x		Investimentos em projetos padrão
Murto (2004)		x	x		x		x		x		x	x			x		x	x	x		x			Patentes
Murto et al. (2004)	x		x		x		x	x	x		x	x			x		x				x			Bancos
Shackleton et al. (2004)		x	x		x		x			x	x	x			x		x	x			x			Não especificado
Smit & Trigeorgis (2004)	cap. 4, 5, 6, 7	x	x	cap. 9	x	cap. 7 e 9	x	cap. 7 e 9		x	x	x			x		x	x	x		x			Patentes
Sparla (2004)		x	x		x		x		x	x	x	x			x		x	x			x			Não especificado
Paxson & Pinto (2005)		x	x		x		x			x	x	x			x		x	x	x		x			Telecomunicações
Weyant & Yao (2005)		x	x		x		x		x	x	x	x			x		x		x		x			Não especificado
Pawlina & Kort (2006)		x	x		x		x		x	x	x	x			x		x	x					x	Commodity não armazenável
Wu (2006)		x	x		x		x		x	x		x			x		x				x	x		Software hardware

Autores	Especificação		Informação do Jogo					Tipo de Jogo de Opção Real										nº de firmas					
	Tempo discreto	Tempo Contínuo	Completa	Incompleta	Perfeita	Imperfeita	Simétrica	Assimétrica	Simultâneo	Sequencial	One-shot	Soma não-zero	Soma zero	Finito	Infinito	Cooperativo	Não Cooperativo	Simétrico Ex-ante	Assimétrico ex-ante	1	2	> 2	Aplicação
Hsu & Lambrecht (2007)		x		x		x		x		x	x	x			x		x	x				x	Agricultura
Kong & Kwok (2007)		x	x		x		x		x	x	x	x			x		x	x	x			x	Não especificado
Odening et al. (2007)		x	x		x		x		x	x	x	x			x		x	x				x	Não especificado
Costa e Samanez (2008)		x	x		x		x		x			x			x		x			x			Mercado Imobiliário
Aguerrevere (2009)		x	x		x		x		x	x		x			x		x					x	Não especificado
Dias e Teixeira (2010)		x	x		x		x	x	x			x			x				x			x	Não especificado
Bouis et al.(2009)		x	x		x		x		x	x	x	x			x		x	x	x			x	Não especificado
Paxson & Melmane (2009)		x	x		x		x			x	x	x			x		x	x				x	Investimento em P&D
Mason & Weeds (2010)		x	x		x		x		x	x	x	x			x	x	x	x				x	Não especificado
Thijssen (2010)		x	x		x		x		x	x	x	x			x		x	x				x	P&D infraestrutura pública
Chevalier-Roignant et al.		x	x		x		x		x	x	x	x			x		x	x	x			x	Não especificado
Armada et al. (2011)		x	x		x		x			x	x	x			x		x	x	x	x	x	x	Patentes
Graham (2011)		x		x		x		x		x	x	x			x		x	x				x	Não especificado
Boyer et al. (2012)		x		x	x		x			x	x	x			x		x		x			x	Não especificado
Leung & Kwok (2012)		x		x		x		x	x	x	x	x			x	x	x	x				x	Patentes
Siddiqui & Takashima (2012)		x	x		x		x			x		x			x		x	x				x	P&D
Watanabe (2012)		x		x	x					x	x	x			x		x	x		X	x		P&D
Azevedo & Paxson (2014)		x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x			x	x	x	x	x	x	x	x	Não especificado
Samanez et al. (2015)		x	x		x			x		x		x			x		x	x				x	Indústria de Latas de Alumínio
Versaevel (2015)		X																				x	Não especificado

Fonte: Adaptado de Azevedo e Paxson (2014)

8.2

Apêndice 2 – Ajuste sazonal

A seguir tem-se um exemplo de uma variável, o financiamento habitacional, ajustada pelo X13-ARIMA com auxílio do Rstudio.

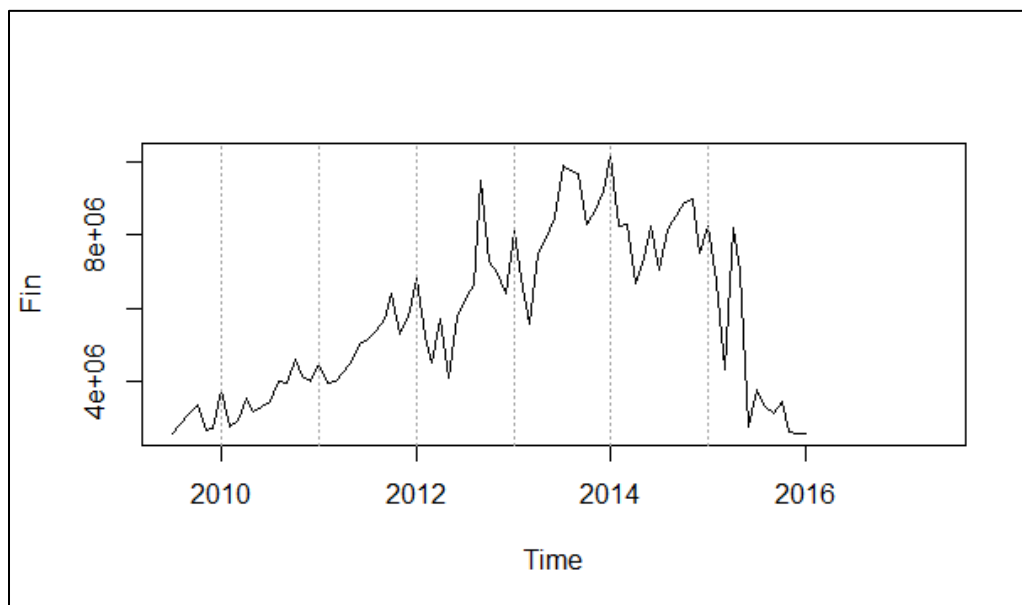


Figura 21 – Série temporal do Financiamento Habitacional sem ajuste

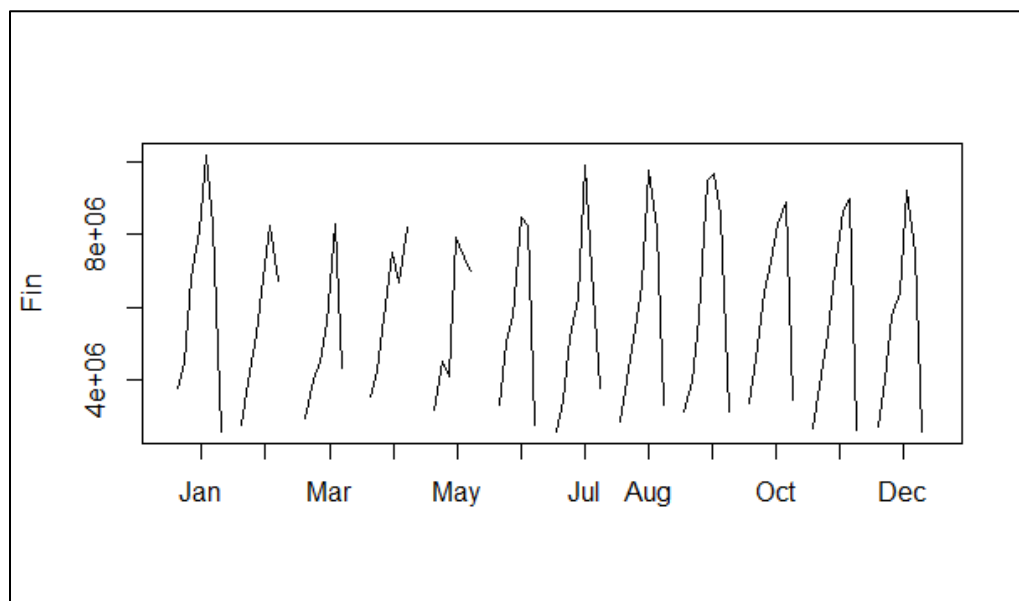


Figura 22 – Month-plot – Financiamento Habitacional

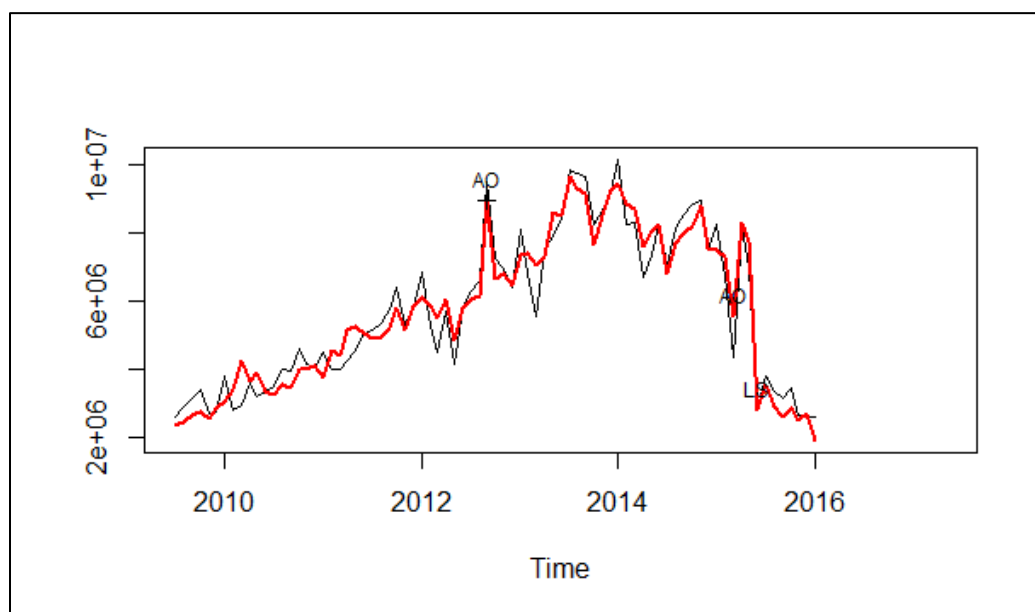


Figura 23 – Financiamento Habitacional com ajuste sazonal

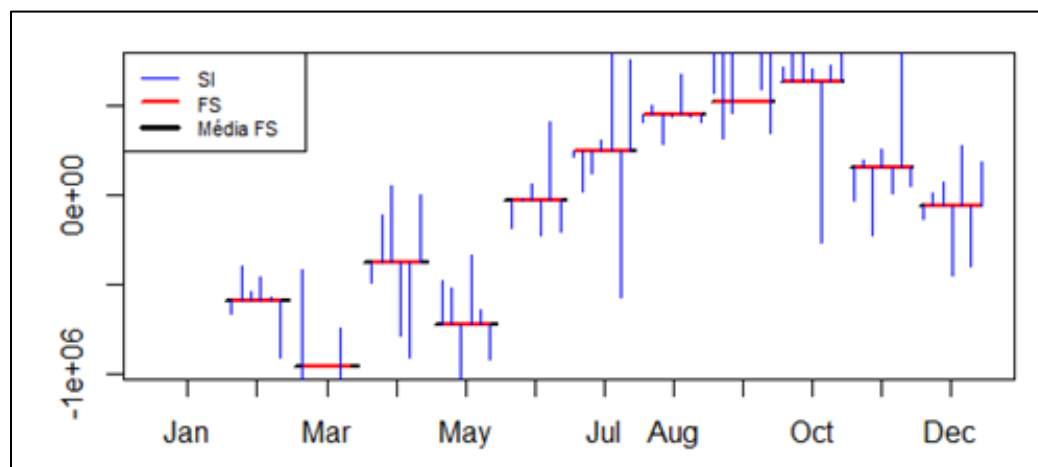


Figura 24 – Componente sazonal irregular por mês

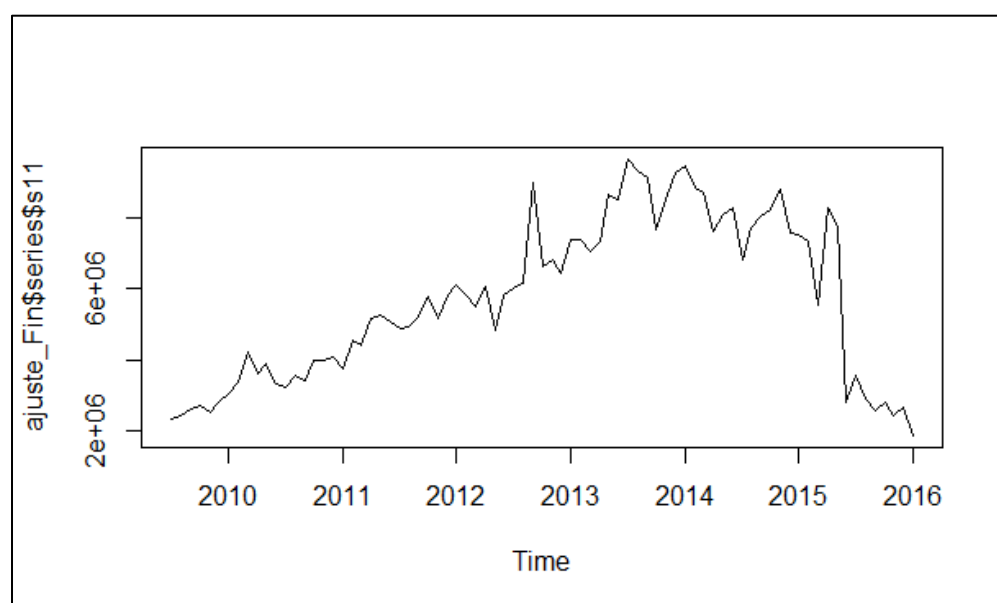


Figura 25 – série do financiamento habitacional ajustada

8.3

Apêndice 3 - Gráficos dos resíduos do modelo autorregressivo

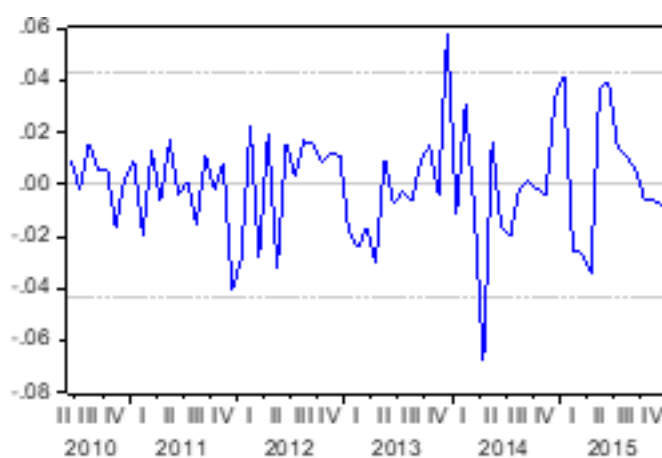


Figura 26 - Resíduos da variável PIB Real

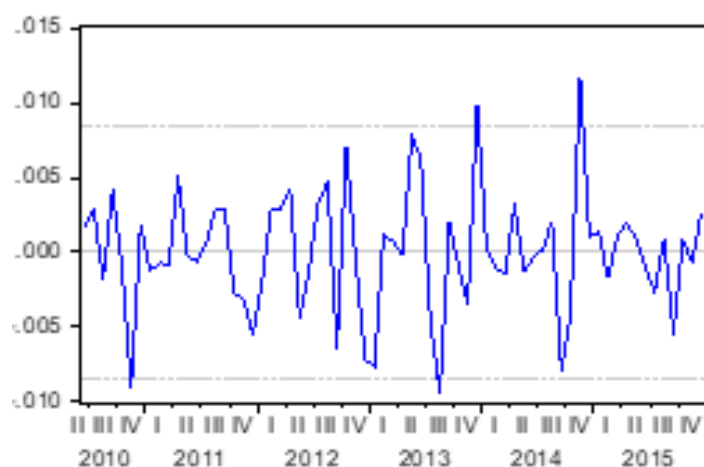


Figura 27 - Resíduos da variável Renda Real

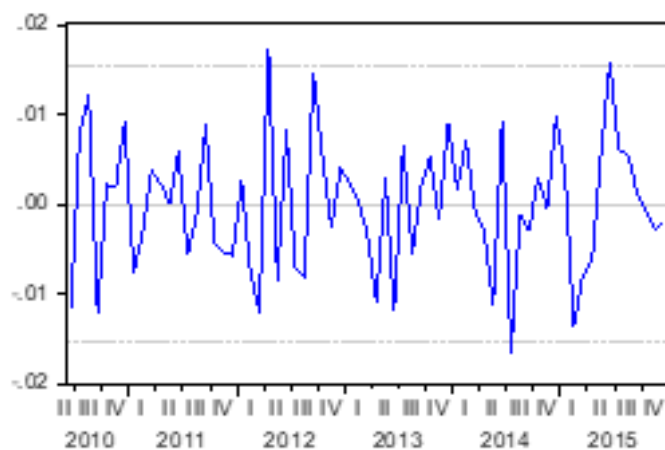


Figura 28 - Resíduos da variável Selic

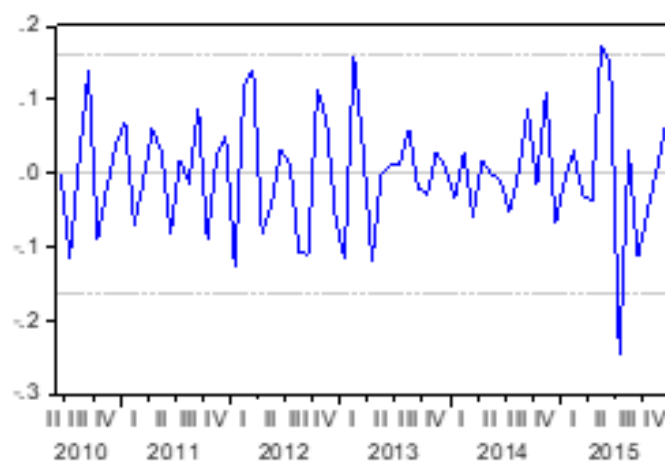


Figura 29 - Resíduos da variável Financiamento Habitacional

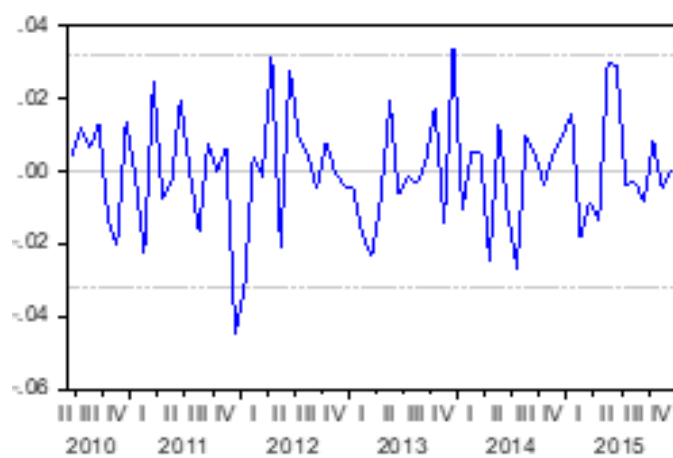


Figura 30 - Resíduos da variável Preço Real do imóvel

8.4

Apêndice 4 - Etapas para obter a equação (22) pelo método do portfólio replicante

Seja $V^i(X, q_i, Q_{-i})$ o valor de equilíbrio para cada firma i com fluxo de lucros $\pi(X, q_i, Q_{-i})$. Monta-se um portfólio replicante para o risco e o retorno da firma V^i de forma que: investe-se \$1 em ativo sem risco e compra-se η unidades de imóveis ao preço X (ηX) com custo $(1 + \eta X)$, mantendo-o por um período de tempo dt .

O retorno deste portfólio será: o valor de \$1 à taxa livre de risco r , ou seja, $dt = rdt$ e ηX investido durante dt que rende $\eta X \delta dt$ (dividendo) mais um ganho de capital ηdx . $X(t)$ varia aleatoriamente seguindo um MGB, portanto:

$$dX = \alpha X dt + \sigma X dz$$

Assim, $\eta dX = \eta \alpha dt + \eta \sigma X dz$. Com isso, o retorno total será:

$$rdt + \eta X \delta dt + \eta dX = (r + \eta(\alpha + \delta)X)dt + \eta \sigma X dz$$

Para obter a taxa de retorno do portfólio, divide-se o retorno total pelo investimento inicial: $\frac{r + \eta X(\alpha + \delta)}{1 + \eta X} dt + \frac{\sigma \eta X}{1 + \eta X} dz$. As notações $V^i(X, q_i, Q_{-i})$ e $\pi(X, q_i, Q_{-i})$ serão alteradas para V^i e $\pi(X, t)$, respectivamente.

Comparando à um investimento na empresa i , tem-se o custo do investimento igual $V^i(X, t)$ e o retorno dado por:

- Dividendo em $dt = \pi(X, t)$ que não tem risco (determinístico)
- Ganho de capital = $dV^i(X, t)$, com risco (estocástico)

Pelo Lema de Itô:

$$dV^i = \left[\alpha X \frac{\partial V^i}{\partial X} + \frac{1}{2} \sigma^2 X^2 \frac{\partial^2 V^i}{\partial X^2} + \frac{\partial V^i}{\partial t} \right] dt + \sigma X \frac{\partial V^i}{\partial X} dz$$

O retorno total será: $\frac{\pi(X,t)dt + dV^i}{V^i(X,t)}$. Substituindo o termo dV^i , separando

a parte determinística da parte estocástica e alterando a notação das derivadas parciais, a expressão para o retorno fica:

$$\frac{\pi(X,t) + \alpha X V_x^i + 1/2 \sigma^2 X^2 V_{xx}^i + V_t^i}{V^i(X,t)} dt + \frac{V_x^i \sigma X}{V^i(X,t)} dz$$

Assim, para que ambos investimentos tenham o mesmo risco, a parcela com risco tem que ser igual nos dois casos: $\frac{\sigma X \eta}{1 + \eta X} dz = \sigma X \frac{\partial V^i}{\partial X} dz$. Portanto:

$$\frac{\sigma X \eta}{1 + \eta X} dz = \sigma X \frac{\partial V^i}{\partial X} dz \text{ e simplificando fica:}$$

$$\frac{X \eta}{1 + \eta X} = \frac{\partial V^i}{\partial X} \quad (\text{A-1})$$

No mercado, os ativos com mesmo risco devem ter o mesmo retorno. Pode-se assim igualar as parcelas dos retornos sem risco:

$$\frac{\pi(X,t) + 1/2 \sigma^2 X^2 V_{xx}^i + \alpha X V_x^i + V_t^i}{V^i(X,t)} dt = \frac{r + \eta(\alpha + \delta)X}{1 + \eta X} \quad (\text{A-2})$$

$$\frac{r + \eta(\alpha + \delta)X}{1 + \eta X} = \frac{r(1 + \eta X - \eta X) + \eta X(\alpha + \delta)}{1 + \eta X} = \frac{r(1 + \eta X) - r\eta X}{1 + \eta X} + \frac{\eta X(\alpha + \delta)}{1 + \eta X}$$

$$\frac{r(1 + \eta X)}{1 + \eta X} - \frac{r\eta X}{1 + \eta X} + \frac{\eta X(\alpha + \delta)}{1 + \eta X} = r \left(1 - \frac{\eta X}{1 + \eta X} \right) + \frac{(\alpha + \delta)\eta X}{1 + \eta X} \quad (\text{A-3})$$

Substituindo (A-1) em (A-3):

$$r \left(1 - \frac{\eta X}{1 + \eta X} \right) + \frac{(\alpha + \delta)\eta X}{1 + \eta X} = r \left(1 - \frac{\eta X}{1 + \eta X} \right) + (\alpha + \delta) \frac{V_{xx}^i}{V^i(X,t)} \text{ e substituindo esse}$$

resultado em (A-2), tem-se:

$$\frac{r + \eta X(\alpha + \delta)}{1 + \eta X} = r \left(1 - \frac{V_X^i X}{V^i(X, t)} \right) + (\alpha + \delta) \frac{V_X^i X}{V^i(X, t)} = \frac{\pi(X, t) + 1/2 \sigma^2 X^2 V_{XX}^i + \alpha X V_X^i + V_t^i}{V^i(X, t)}$$

Reescrevendo e simplificando, chega-se à EDP:

$$1/2 \sigma^2 X^2 V_{XX}^i + (r - \delta) X V_X^i - r V^i + V_t^i + \pi(X, t) = 0 \quad (\text{A-4})$$

Entretanto, para modelos de avaliação de projetos imobiliários, trabalha-se com opções de compra perpétuas, não existindo data limite para exercício da opção. Assim, pode-se considerar $V_t^i = 0$, pois a pura passagem do tempo não afeta o valor de V , que continuaria com um horizonte perpétuo para exercer a opção. Com isso a EDP passa ser uma EDO, em que o termo $r - \delta$ da eq.(A-4) está representado por μ . Retornando à notação $V^i(X, q_i, Q_{-i})$ e $\pi(X, q_i, Q_{-i})$ iniciais, obtém-se a eq. (22):

$$1/2 \sigma^2 X^2 V_{XX}^i + \mu X V_X^i - r V^i + \pi_i(X, q_i, Q_{-i}) = 0 \quad (\text{A-5})$$

8.5

Apêndice 5 – Demonstrações matemáticas

8.5.1

Desenvolvimento algébrico para a solução particular da parte não homogênea (Eq. 25) – demanda com $X(t)$ no intercepto

A partir da Eq. (36), divide-se o termo com choque estocástico $X(t)$ por $r - \mu$ (para o cálculo do fluxo de caixa em perpetuidade) e o termo sem choque multiplicativo divide-se por r :

$$\text{Solução particular: } \frac{aX}{r - \mu} + \frac{rbQ \left[\frac{n+1}{n} \right]}{r}$$

Para verificar se a solução particular atende toda a EDO (eq. (25)) basta calcular as derivadas parciais $\frac{\partial m}{\partial X}$ e $\frac{\partial^2 m}{\partial X^2}$:

$\frac{\partial m}{\partial X} = \frac{a}{r - \mu}$ e $\frac{\partial^2 m}{\partial X^2} = 0$, e assim substitui-se as derivadas parciais na EDO dada pela Eq. (24):

$$0 + \mu X \frac{a}{r - \mu} - \frac{raX}{r - \mu} + \frac{rbQ \left[\frac{n+1}{n} \right]}{r} + aX - bQ \left[\frac{n+1}{n} \right] = 0$$

$$\frac{-(r - \mu)aX}{r - \mu} + bQ \left[\frac{n+1}{n} \right] + aX - bQ \left[\frac{n+1}{n} \right] = 0$$

Portanto, $0 = 0$. Logo, a eq. (36) pode ser usada como solução particular da EDO (eq. (25)).

8.5.2

Desenvolvimento algébrico para a solução particular da parte não homogênea (Eq. 25) – demanda com $X(t)$ na inclinação

A solução particular dada por $\frac{a}{r} + \frac{bQ \left[\frac{n+1}{n} \right] X^{-\varepsilon}}{r + \mu\varepsilon - 0,5\sigma^2\varepsilon(1+\varepsilon)} = C$ descrita pela eq.(45).

Como no caso anterior, para verificar se a solução particular atende toda a EDO (eq. (24)) basta calcular as derivadas parciais $\frac{\partial m}{\partial X}$ e $\frac{\partial^2 m}{\partial X^2}$:

$$\frac{\partial m}{\partial X} = \frac{bQ(-\varepsilon)X^{-\varepsilon-1} \left[\frac{n+1}{n} \right]}{r + \mu\varepsilon - 0,5\sigma^2\varepsilon(1+\varepsilon)}$$

$$\frac{\partial^2 m}{\partial X^2} = \frac{bQ(\varepsilon^2 + \varepsilon)X^{-\varepsilon-2} \left[\frac{n+1}{n} \right]}{r + \mu\varepsilon - 0,5\sigma^2\varepsilon(1+\varepsilon)}$$

Em seguida, substitui-se as derivadas parciais na EDO dada pela Eq. (24):

$$\begin{aligned} & 0,5\sigma^2 X^2 \left[\frac{bQ(\varepsilon^2 + \varepsilon)X^{(-\varepsilon-2)} \left[\frac{n+1}{n} \right]}{r + \mu\varepsilon - 0,5\sigma^2\varepsilon(1+\varepsilon)} \right] + \mu X \left[\frac{bQ(-\varepsilon)X^{(-\varepsilon-1)} \left[\frac{n+1}{n} \right]}{r + \mu\varepsilon - 0,5\sigma^2\varepsilon(1+\varepsilon)} \right] - \\ & - r \left[\frac{a}{r} + \frac{bQ \left[\frac{n+1}{n} \right] X^{(-\varepsilon)}}{r + \mu\varepsilon - 0,5\sigma^2\varepsilon(1+\varepsilon)} \right] + \mu + bQ \left[\frac{n+1}{n} \right] X^{(-\varepsilon)} = 0 \end{aligned}$$

Com mais algum esforço algébrico, obtém-se:

$$\frac{0,5\sigma^2 bQ(\varepsilon^2 + \varepsilon)X^{(-\varepsilon)} \left[\frac{n+1}{n} \right]}{r + \mu\varepsilon - 0,5\sigma^2\varepsilon(1+\varepsilon)} + \frac{\mu bQ(-\varepsilon) \left[\frac{n+1}{n} \right] X^{(-\varepsilon)}}{r + \mu\varepsilon - 0,5\sigma^2\varepsilon(1+\varepsilon)} -$$

$$-a - \frac{rbQX^{(-\varepsilon)} \left[\frac{n+1}{n} \right]}{r + \mu\varepsilon - 0,5\sigma^2\varepsilon(1+\varepsilon)} + a + bQX^{(-\varepsilon)} \left[\frac{n+1}{n} \right] = 0$$

Colocando o termo $bQX^{(-\varepsilon)} \left[\frac{n+1}{n} \right]$ em evidência:

$$\frac{bQX^{(-\varepsilon)} \left[\frac{n+1}{n} \right] (0,5\sigma^2(\varepsilon^2 + \varepsilon) - \mu\varepsilon - r)}{r + \mu\varepsilon - 0,5\sigma^2\varepsilon(1+\varepsilon)} + bQX^{(-\varepsilon)} \left[\frac{n+1}{n} \right] = 0$$

Algebrando, verifica-se que a solução particular definida pela eq. (45):

$$(0,5\sigma^2(\varepsilon^2 + \varepsilon) - \mu\varepsilon - r) \left(bQ \left[\frac{n+1}{n} \right] X^{-\varepsilon} \right) + (r + \mu\varepsilon - 0,5\sigma^2(\varepsilon^2 + \varepsilon)) \left(bQ \left[\frac{n+1}{n} \right] X^{\varepsilon} \right)$$

$$\left((0,5\sigma^2(\varepsilon^2 + \varepsilon)) \left(bQ \left[\frac{n+1}{n} \right] X^{-\varepsilon} \right) - \mu\varepsilon \left(bQ \left[\frac{n+1}{n} \right] X^{-\varepsilon} \right) - r \left(bQ \left[\frac{n+1}{n} \right] X^{-\varepsilon} \right) \right) +$$

$$+ r \left(bQ \left[\frac{n+1}{n} \right] X^{-\varepsilon} \right) + \mu\varepsilon \left(bQ \left[\frac{n+1}{n} \right] X^{-\varepsilon} \right) - (0,5\sigma^2(\varepsilon^2 + \varepsilon)) \left(bQ \left[\frac{n+1}{n} \right] X^{-\varepsilon} \right) = 0$$

Verifica-se que $0 = 0$. Portanto, a eq. (36) pode ser usada como solução particular da EDO (eq. (25))

8.2

Anexo 1 – Proposições do modelo extraídas de Grenadier (2002)

Proposição 1: O valor de cada firma em equilíbrio é denotado por $V^i(X, q_i, Q_{-i})$ e a estratégia de investimento no equilíbrio é caracterizada por um aumento incremental na produção total sempre que $X(t)$ atinge a função do gatilho dada por $\bar{X}(q_i, Q_{-i})$. As funções $V^i(X, q_i, Q_{-i})$ e $\bar{X}(q_i, Q_{-i})$ são soluções da equação diferencial:

$$0 = \frac{1}{2} \sigma^2 X^2 V_{XX}^i + \mu X V_X^i - r V^i + \pi_i(X, q_i, Q_{-i})$$

Sujeita às condições de contorno:

$$\frac{\partial V^i}{\partial q_i} [\bar{X}(q_i, Q_{-i}, q_i, Q_{-i})] = I$$

$$\frac{\partial^2 V^i}{\partial q_i \partial X} [\bar{X}(q_i, Q_{-i}, q_i, Q_{-i})] = 0$$

$$\frac{\partial V^i}{\partial Q_{-i}} [\bar{X}(q_i, Q_{-i}, q_i, Q_{-i})] = 0$$

Logo, $\bar{X}(q_i, Q_{-i})$ é o gatilho ótimo para a firma míope em que o exercício da opção dos competidores é ignorado. A solução para o problema míope pode ser resolvida pelos métodos de apreçamento de opções tradicionais, conforme discutido no capítulo 6 desta tese.

Proposição 2: A estratégia em equilíbrio de Nash simétrico descrita na proposição 1 é caracterizada por cada firma aumentando a produção quando $X(t)$ atinge o gatilho míope dado pela função $X^m(q_i, Q_{-i})$, ou seja $\bar{X}(q_i, Q_{-i}) = X^m(q_i, Q_{-i})$ ¹³.

Proposição 3: No equilíbrio de Nash simétrico, cada firma vai exercer sua opção de investimento no momento em que $X(t)$ atinge o gatilho $X^*(Q)$. O valor do investimento marginal da firma míope é representado por

¹³ A prova desta proposição pode ser encontrada com mais detalhes em Grenadier (2002).

$m(X, Q) \equiv m^i\left(X, \frac{1}{n}Q, \frac{n-1}{n}Q\right)$. $X^*(Q)$ e $m(X, Q)$ são determinados conjuntamente pela equação diferencial (eq. (25) aqui reescrita):

$$0 = \frac{1}{2} \sigma(X)^2 m_{XX} + \mu(X) m_X - rm + D(X, Q) + \frac{Q}{n} D_Q(X, Q)$$

Sujeita às condições de contorno de continuidade e de suavidade:

$$m[X^*(Q), Q] = I$$

$$\frac{\partial m}{\partial X}[X^*(Q), Q] = 0$$

Diferenciando a equação (25) em relação a q_i ou Q_i obtém-se a EDO e suas condições de contorno:

$$0 = \frac{1}{2} \sigma^2 X^2 m_{XX}^i + \mu X m_X^i - r m^i + \frac{\partial \pi_X^i(X, q_i, Q_{-i})}{\partial q_i}$$

Sujeita a:

$$m^i[X^m(q_i, Q_{-i}), q_i, Q_{-i}] = I$$

$$\frac{\partial m^i}{\partial X}[X^m(q_i, Q_{-i}), q_i, Q_{-i}] = 0$$

No equilíbrio simétrico, o valor marginal da opção comum pode ser escrito como

apenas uma função de X e Q , definindo o conjunto $m(X, Q) \equiv m^i\left(X, \frac{1}{n}Q, \frac{n-1}{n}Q\right)$

e o gatilho de equilíbrio como $X^*(Q) = X^m\left(\frac{Q}{n}, \frac{n-1}{n}Q\right)$. Neste sentido,

$m(X, Q)$ e $X^*(Q)$ satisfazem a EDO e as condições de contorno delineadas pela proposição 3.

8.2

Anexo 2 - Teoria dos Jogos – principais conceitos

O presente anexo traz os principais conceitos da Teoria dos Jogos usados para as caracterizações dos modelos de jogos de opções reais e também utilizados na estrutura da Tabela 7. Tais conceitos foram extraídos de Azevedo e Paxson (2014).

- Informação completa/ incompleta: um jogo de investimento com informações completas significa que os jogadores possuem informações ou conhecimento sobre outras empresas ou jogadores e estas informações estão disponíveis para todos os participantes, ou seja, cada jogador conhece seus próprios *payoffs*, as estratégias disponíveis e também tem informações sobre os *payoffs* e as estratégias disponíveis para outros jogadores.
- Jogo de informação perfeita / imperfeita: informações completas e perfeitas são conceitos diferentes. Informações completas referem-se a um estado de conhecimento sobre a estrutura do jogo e função objetivo dos jogadores, sem necessariamente ter conhecimento sobre as ações destes jogadores. A distinção entre informações incompletas e imperfeitas pode ser vista com algo semântico. Por exemplo, em jogos de investimento em P&D, as empresas podem ter informações "incompletas" sobre a qualidade ou sobre o sucesso do esforço de pesquisa de cada um e informações "imperfeitas" sobre o quanto seus rivais investiram em P&D. É válido lembrar do clássico exemplo do conhecido jogo Dilema dos Prisioneiros em que os prisioneiros têm informações completas sobre os *payoffs* e sobre as estratégias disponíveis do outro jogador, mas não têm conhecimento a respeito da ação do outro jogador.
- Jogo de informações simétricas/assimétricas: a informação simétrica significa que todos os jogadores que participam do jogo compartilham a mesma informação sobre o jogo, ou seja, não há jogadores com informações mais ou menos, melhores ou piores do que outros jogadores.
- Jogo simétrico / assimétrico *ex-ante*: para o contexto dos trabalhos abordados na revisão de literatura da tese, quando as empresas são simétricas *ex-ante*, isso significa que, antes do início do jogo, são simétricas

sobre todos os parâmetros do jogo de investimento, como sua competência para realizar o projeto de investimento, o acesso ao crédito e financiamentos para o projeto, o acesso as tecnologias e todos os parâmetros do modelo de jogo de opção real, isto é, o custo do investimento, a incerteza sobre as receitas futuras, etc.

- Jogo *one-shot* (“único”) / *large* (“grande”): para simplificar, um jogo de “grandes” opções reais é definido na literatura como um jogo onde os jogadores têm duas ou mais opções para investir. Já o jogo de opção real “*one-shot*” pode ser visto como um jogo que termina quando a opção de “investir” é exercida. Na teoria dos jogos, no entanto, um jogo *large* pode ser um jogo com muitos jogadores, com uma ou várias estratégias disponíveis para cada jogador; um jogo com um jogador com várias estratégias disponíveis; ou um jogo com um jogador que possui uma estratégia disponível, mas que pode ser exercida várias vezes. Em geral, os trabalhos encontrados para a revisão da literatura da tese, assumem que os modelos de jogos de opções reais, onde os investidores têm apenas uma opção para investir são “*one-shot*”.
- Jogo soma-zero / *winner-takes-all*: um jogo de soma zero é um jogo em que o ganho / perda dos jogadores é exatamente equilibrado pela perda / ganho do outro jogador. Em um jogo *winner-takes-all*, não há *payoff* para o vencedor. Traduzindo isso para um jogo de investimento do tipo líder / seguidor com vantagem do primeiro movimento, significa que não há *payoff* (receitas) para a empresa que investe em segundo lugar.
- Jogo de monopólio contra a natureza: as decisões de investimento em monopólios também podem ser modeladas como um jogo de um jogador contra a natureza.
- Jogo Sequencial / Simultâneo: Um jogo sequencial é um jogo onde um ou vários jogadores se movem (investem) iniciando um jogo sequencial. Um jogo simultâneo é um jogo onde pelo menos dois jogadores investem ao mesmo tempo. A maioria dos modelos de jogos de opções reais são derivados para os mercados em duopólio (dois jogadores).
- Jogo cooperativo / não cooperativo: em jogos não cooperativos presume-se que os jogadores não podem fazer um acordo vinculativo, ou seja, cada

resultado cooperativo deve ser sustentado pelas estratégias de equilíbrio de Nash. Nos jogos cooperativos, as empresas não têm escolha senão cooperar.

- Jogo de liderança endógena/exógena: em modelos de opções reais, movimentos sequenciais são permitidos e a liderança no investimento geralmente é definida de maneira exógena. Uma das vantagens dos modelos de duopólio, em comparação com oligopólios e concorrência perfeita, é que eles permitem modelar os jogos de investimentos sequenciais com mais facilidade e determinar limites de investimento explícitos para cada jogador.