

### 3. O Método dos Elementos Finitos Aplicado a Análise Não-Linear

#### 3.1. Introdução

Neste capítulo, faz-se uma breve apresentação do Método dos Elementos Finitos e dos conceitos aplicáveis para elaboração e aplicação em análises não-lineares. Discute-se a introdução de elementos de interpolação, o tratamento necessário para consideração das características do concreto armado, estratégias de solução adequadas a problemas de natureza não-linear e os critérios de convergência necessários. Todos os conceitos apresentados neste capítulo, mesmo que resumidamente, fazem parte das modificações implementadas no programa FEPARCS e são de extrema importância para compreensão do trabalho desenvolvido nos capítulos 4 e 5.

#### 3.2. Método dos Elementos Finitos

O método dos Elementos Finitos (MEF) é um processo numérico próprio da era da informática, sendo muito utilizado para análise de problemas da mecânica e engenharia em geral. No caso específico de estruturas de concreto armado, desde a década de sessenta, com o trabalho pioneiro de Ngo & Scordelis (1967), essa técnica tem sido uma importante ferramenta de análise.

O MEF, baseado no método de Rayleigh-Ritz, prevê a divisão do domínio de integração, tornando o meio originalmente contínuo em discreto através da divisão em pequenas áreas denominadas Elementos Finitos.

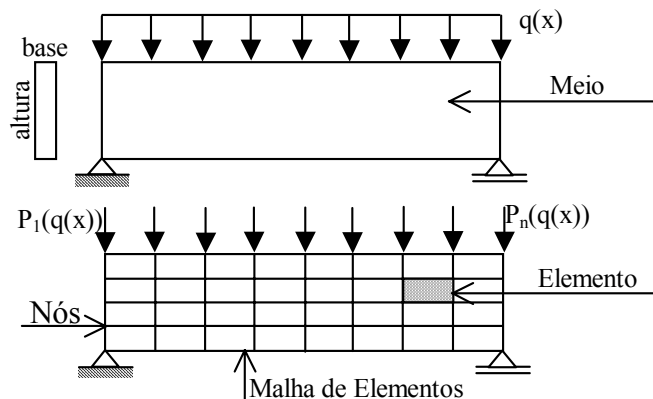


Figura 3. 1 – Divisão do domínio de integração em pequenas áreas denominadas Elementos Finitos.

O número de divisões do domínio é diretamente proporcional à precisão e aproximação do resultado obtido com a realidade do modelo, sendo esta divisão do domínio chamada de malha de elementos finitos e as interseções de nós. Neste caso, ao invés de se procurar uma função admissível para todo o modelo ou domínio, as funções admissíveis são definidas no domínio de cada elemento finito.

Para cada elemento  $i$  é associado um funcional  $\Pi_i$ , que junto aos outros elementos formam o funcional  $\Pi$  de todo o domínio:

$$\Pi = \sum_{i=1}^n \Pi_i, \quad [3.1]$$

onde para cada elemento  $i$ , forma-se uma função aproximadora,  $v$ , através de variáveis,  $a_j$  referidas aos nós do elemento e por funções de forma  $\phi_j$ . Sendo  $j$  o número dos nós que compõe o elemento:

$$v = \sum_{j=1}^m a_j \phi_j \quad [3.2]$$

Desta forma, o funcional passa a ser expresso por:

$$\Pi(a_j) = \sum_{i=1}^n \Pi_i(a_j) \quad [3.3]$$

A condição de estacionaridade gera um sistema de equações algébricas lineares, tal como:

$$\delta \Pi(a_j) = \sum \delta \Pi_i(a_j) = \sum \sum \frac{\partial \Pi_i(a_j)}{\partial a_j} = 0 \quad [3.4]$$

A solução do sistema de equações formado pela expressão anterior fornece os valores dos parâmetros nodais  $a_j$ , que podem ser deslocamentos, forças internas, ou ambos, dependendo da formulação que se utiliza.

No caso de descrever-se o campo de deslocamentos por funções aproximadoras e empregar-se o princípio da mínima energia potencial, as incógnitas são as componentes dos deslocamentos nodais, e o processo é denominado de método dos elementos finitos modelo dos deslocamentos, ou método dos elementos finitos modelo da rigidez. Utilizando-se outra formulação, pode-se descrever o campo de tensões ou esforços internos nodais por funções aproximadoras e empregar-se o princípio da mínima energia complementar, as incógnitas são tensões ou esforços internos nodais, e o método dos elementos

finitos é denominado de método dos elementos finitos modelo das forças, ou método dos elementos finitos modelo da flexibilidade.

No presente trabalho e na análise empregada pelo programa FEPARCS, a formulação do método dos elementos finitos utiliza a composição do campo de deslocamentos através de funções aproximadoras, onde os deslocamentos são tomados como variáveis independentes, típico em um problema de análise de tensões.

### 3.2.1.

#### Método dos Elementos Finitos – Modelo da Rigidez

Na mecânica, a solução dos sistemas estruturais pode ser baseada nas parcelas referentes à energia de deformação e ao trabalho realizado, sempre em função de ações externas implementadas ao sistema. Sendo assim, ao associar-se um funcional  $\Pi$  a um domínio, na verdade associa-se um funcional, uma função que depende de outra função, que representa a energia potencial total do sistema analisado.

O funcional que representa a energia potencial total para uma solução apropriada ao tipo Rayleigh-Ritz, é representado por:

$$\Pi_p = U + \Omega, \quad [3.5]$$

onde:

$\Pi_p$  – energia potencial total do sistema;

$U$  – energia de deformação da estrutura;

$\Omega$  – energia Potencial das ações externas ao sistema.

A energia de deformação da estrutura corresponde ao trabalho realizado em função de tensão e, conseqüente deformação, no material que compõe os elementos estruturais. Desta forma, pode-se definir um cubo infinitesimal de material da estrutura, e obter:

$$dU_o = \sigma_x \cdot d\varepsilon_x + \sigma_y \cdot d\varepsilon_y + \sigma_z \cdot d\varepsilon_z + \tau_{xy} \cdot d_{xy} + \tau_{yz} \cdot d_{yz} + \tau_{zx} \cdot d_{zx}, \quad [3.6]$$

Que também pode ser representado por:

$$\frac{\partial U_o}{\partial \varepsilon} = \{\sigma\} = [E]\{\varepsilon\} - [E]\{\varepsilon_o\} + \{\sigma_o\}. \quad [3.7]$$

Sendo  $U_o$  a energia de deformação por unidade de volume,  $\{\varepsilon\}$  o vetor de deformações,  $\{\varepsilon_o\}$  o vetor de deformações iniciais,  $[E]$  a matriz constitutiva e

$\{\sigma_o\}$  o vetor de tensões iniciais, através do tratamento matemático adequado das expressões anteriores, obtém-se:

$$U_o = \frac{1}{2} \{\varepsilon\}^T [E] \{\varepsilon\} - \{\varepsilon\}^T [E] \{\varepsilon_o\} + \{\varepsilon\} \{\sigma_o\} \quad [3.8]$$

A energia de deformação da estrutura é calculada através da relação:

$$U = \int_V U_o dV \quad [3.9]$$

onde  $dV$  é o volume infinitesimal de material da estrutura.

Substituindo a expressão [3.8] em [3.9], chega-se a expressão final para a energia de deformação da estrutura:

$$U = \int_V \left( \frac{1}{2} \{\varepsilon\}^T [E] \{\varepsilon\} - \{\varepsilon\}^T [E] \{\varepsilon_o\} + \{\varepsilon\}^T \{\sigma_o\} \right) dV \quad [3.10]$$

Utilizando-se os conceitos de discretização e interpolação por elementos finitos para os graus de liberdade, tem-se:

$$\{\bar{u}\} = [N] \{u_L\} \quad [3.11]$$

onde:

$\{u\}$  - campo de deslocamentos dos nós;

$[N]$  - funções de interpolação de deslocamentos para o tipo de elemento finito utilizado;

$\{u_L\}$  - deslocamentos nodais do elemento.

Desta forma:

$$\{\varepsilon\} = [\partial] \{u\} \Rightarrow \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \{\varepsilon\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \\ [\partial] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ \{u\} \end{Bmatrix} \quad [3.12]$$

que gera:

$$\{\varepsilon\} = [B] \{u_L\} \Rightarrow \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \{\varepsilon\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_{1,x} & 0 & \dots & N_{n,x} & 0 \\ 0 & N_{1,y} & \dots & 0 & N_{n,y} \\ N_{1,y} & N_{1,x} & \dots & N_{1,y} & N_{n,x} \\ [B] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \dots \\ u_n \\ v_n \\ \{u\} \end{Bmatrix} \quad [3.13]$$

onde:

$[B] = [\partial]\{N\}$  é a Matriz que relaciona deformações e deslocamentos, e  $[\partial]$  é a matriz de operadores diferenciais, que gera através das expressões de interpolação do elemento finito utilizado-se  $u = \sum_{i=1}^{nós} N_i \cdot u_i$  e  $v = \sum_{i=1}^{nós} N_i \cdot v_i$ , demonstradas na seção seguinte.

O potencial correspondente às ações externas  $\Omega$ , refere-se ao trabalho realizado pelas forças concentradas e/ou momentos aplicados se a estrutura recuperasse sua configuração original. Desta forma, tem-se:

$$\Omega = -F_x u - F_y v = -\{u\}^T \{R_{ext}\} \quad [3.14]$$

onde:

$\{u\}$  – vetor de deslocamentos associados aos graus de liberdade globais da estrutura;

$R_{ext}$  – vetor de forças externas nodais.

Substituindo-se a expressão [3.13] em [3.10], seu produto em [3.5], e, também a expressão [3.14] em [3.5] obtém-se:

$$\Pi_P = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{nelem} \{u_L\}_n^T [k]_n \{u_L\}_n - \{u\}^T \{R_{ext}\} \quad [3.15]$$

onde:

$\{u_L\}_n$  – vetor de deslocamentos nodais do elemento n;

$[k]_n = [B]_n^T [C]_n [B]_n$  – matriz de rigidez do elemento n.

Executando-se o somatório na expressão [3.15], obtém-se:

$$\Pi_P = \frac{1}{2} \{u\}^T [K] \{u\} - \{u\}^T \{R_{ext}\} \quad [3.16]$$

onde,

$$[K] = \sum_{n=1}^{nelem} [k]_n \quad [3.17]$$

sendo  $[K]$  a matriz rigidez global da estrutura.

Aplicando-se o princípio da energia potencial estacionária, mencionado anteriormente, tem-se:

$\delta \Pi_P = 0$  que é o princípio da energia potencial estacionária, utilizado em [3.16]:

$$\{\delta u\}^T [K] \{u\} - \{\delta u\}^T \{R_{ext}\} = 0 \quad [3.18]$$

De [3.15], obtém-se:

$$[K]\{u\} - \{R_{ext}\} = \{0\} \quad [3.19]$$

que também pode ser escrito na forma:

$$\{\Delta Q\} = \{R_{ext}\} - \{F_{int}\} = \{0\} \quad [3.20]$$

com  $\{F_{int}\} = [K]\{u\}$ , sendo o vetor de forças internas ou equilibrantes, e,

$\{\Delta Q\}$  é o vetor das forças desbalanceadas.

Solucionando-se o sistema representado pela expressão [3.19] obtém-se o vetor de deslocamentos nodais  $\{u\}$ , com o qual pode-se calcular:

- As deformações implementadas  $\{\varepsilon\} = [B]\{u_L\}$ ;
- As tensões decorrentes das deformações  $\{\sigma\} = [E]\{\varepsilon\}$ .

### 3.2.2. Elementos Finitos Bidimensionais Planos

Quando se deseja analisar o comportamento mecânico de uma estrutura utilizando-se o método dos elementos finitos, é de extrema importância a escolha adequada do campo de deslocamentos a ser empregado para definir o melhor tipo de elemento finito a ser utilizado. Dentre as possibilidades podem ser citados elementos bidimensionais com dois graus de liberdade por nó, elementos de casca possuindo de três a nove graus de liberdade por nó e elementos não planos com três graus de liberdade por nó.

Ao analisar-se pelo método dos elementos finitos uma placa de espessura 'e', composta por um determinado material, solicitada por forças externas  $P_x$  e  $P_y$  atuando em seu plano médio, este pode ser discretizado por elementos de formas e funções aproximadoras diferentes. Esta variação de elementos e sua adequação, dependem da forma que se deseja dar a malha composta por estes.

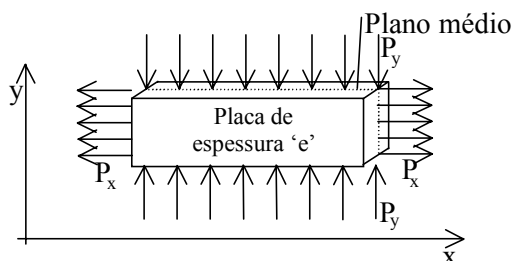


Figura 3. 2 – Placa de espessura 'e' solicitada por forças externas atuando em seu plano médio.

Os elementos mais utilizados são os retangulares com quatro e oito nós e os triangulares com três e seis nós, onde o sistema de coordenadas cartesianas é

convertido em um sistema de coordenadas naturais. A utilização de funções baseadas em coordenadas naturais na construção de elementos finitos, compõe a chamada formulação isoparamétrica.

De acordo com o elemento utilizado por esta versão do programa FEPARCS, serão analisados apenas os elementos isoparamétricos retangulares com quatro e oito nós.

## Elemento Isoparamétrico Q4

O elemento Q4 é composto por quatro nós, situados nas arestas do elemento, e define um campo retangular, ou quadrado, de interpolação linear, ou seja, todos os valores intermediários aos atribuídos aos nós, terão sua posição definida dentro do elemento através de funções interpoladoras do primeiro grau.

Os valores atribuídos a estes nós podem ser deslocamentos, tensões e deformações, sendo utilizadas as mesmas funções de interpolação para todos os casos.

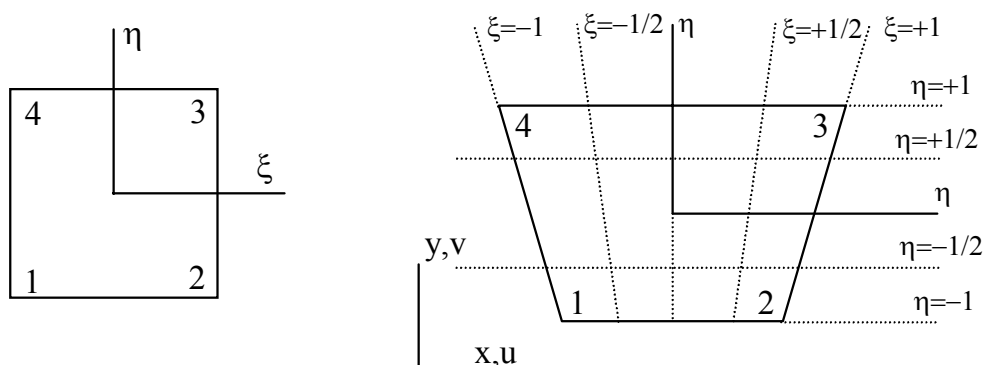


Figura 3.3 – a) Elem. isoparamétrico Q4 no espaço  $\xi\eta$ ; b) Elem. isoparamétrico Q4 no espaço  $xy$

Trabalhando-se com elementos bidimensionais e cada um dos nós possuindo dois graus de liberdade, tem-se oito possibilidades de valores diferentes, sendo então os deslocamentos  $u$  e  $v$  aproximados por polinômios completos do primeiro grau em  $x$  e  $y$ :

$$u(x,y) = d_1 + d_2x + d_3y + d_4xy \quad e \quad v(x,y) = d_5 + d_6x + d_7y + d_8xy$$

As expressões acima podem ser colocadas em função de coordenadas naturais  $\xi = x/a$  e  $\eta = y/b$ . Resolvendo as mesmas para:  $\xi = -1$  e  $\eta = -1$ ,  $\xi = +1$  e  $\eta = -1$ ,  $\xi = +1$  e  $\eta = +1$  e  $\xi = -1$  e  $\eta = +1$ , e, explicitando as funções aproximadoras em relação aos deslocamentos nodais, com objetivo de:

$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^4 N_i \cdot u_i \quad \text{e} \quad \mathbf{v} = \sum_{i=1}^4 N_i \cdot v_i,$$

tem-se:

$$N_1 = \left(1 - \frac{x}{l}\right) \left(1 - \frac{y}{h}\right) \xrightarrow{\text{transf.coord.}} N_1 = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{x}{a}\right) \left(1 - \frac{y}{b}\right) \xrightarrow{\xi = \frac{x}{a}; \eta = \frac{y}{b}} N_1 = \frac{1}{4} (1 - \xi)(1 - \eta)$$

$$N_2 = \left(1 - \frac{y}{h}\right) \frac{x}{l} \xrightarrow{\text{transf.coord.}} N_2 = \frac{1}{4} \left(1 + \frac{x}{a}\right) \left(1 - \frac{y}{b}\right) \xrightarrow{\xi = \frac{x}{a}; \eta = \frac{y}{b}} N_2 = \frac{1}{4} (1 + \xi)(1 - \eta)$$

$$N_3 = \frac{xy}{lh} \xrightarrow{\text{transf.coord.}} N_3 = \frac{1}{4} \left(1 + \frac{x}{a}\right) \left(1 + \frac{y}{b}\right) \xrightarrow{\xi = \frac{x}{a}; \eta = \frac{y}{b}} N_3 = \frac{1}{4} (1 + \xi)(1 + \eta)$$

$$N_4 = \left(1 - \frac{x}{l}\right) \frac{y}{h} \xrightarrow{\text{transf.coord.}} N_4 = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{x}{a}\right) \left(1 + \frac{y}{b}\right) \xrightarrow{\xi = \frac{x}{a}; \eta = \frac{y}{b}} N_4 = \frac{1}{4} (1 - \xi)(1 + \eta)$$

Que compõe a matriz  $[\mathbf{N}] = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix}$  e

de acordo com o exposto no início desta seção:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \dots \\ u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \end{Bmatrix} \Rightarrow$$



$$\Rightarrow \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_{1,x} & 0 & N_{2,x} & 0 & N_{3,x} & 0 & N_{4,x} & 0 \\ 0 & N_{1,y} & 0 & N_{2,y} & 0 & N_{3,y} & 0 & N_{4,y} \\ N_{1,x} & N_{1,y} & N_{2,x} & N_{2,y} & N_{3,x} & N_{3,y} & N_{4,x} & N_{4,y} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \dots \\ u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix}$$

Onde, introduzindo-se o conceito da matriz do Jacobiano [J]:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{Bmatrix} = [J] \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{Bmatrix}$$

Se  $|J|$  é o determinante do Jacobiano, tem-se um fator de escala de área para o mapeamento que leva do espaço paramétrico para o espaço cartesiano.

Utilizando este conceito e de acordo com a expressão [3.15], obtém-se:

$$[k] = \int_V [B]^T [E][B] dV = \iint [B]^T [E][B] t dx dy = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B]^T [E][B] t |J| d\xi d\eta$$

Onde [k] é a matriz de rigidez do elemento isoparamétrico Q4, e t é a espessura da placa representada pelo elemento finito.

### Elemento Isoparamétrico Q8

O elemento Q8 é composto por oito nós, sendo quatro situados nas arestas do elemento e mais quatro em seus pontos médios, e define um campo retangular, ou quadrado, de interpolação quadrática. Todos os valores intermediários aos atribuídos aos nós, terão sua posição definida, dentro do elemento, através de funções intepoladoras do segundo grau. Como no elemento Q4, os valores atribuídos a estes nós podem ser deslocamentos, tensões e deformações, sendo utilizadas as mesmas funções de interpolação para todos os casos.

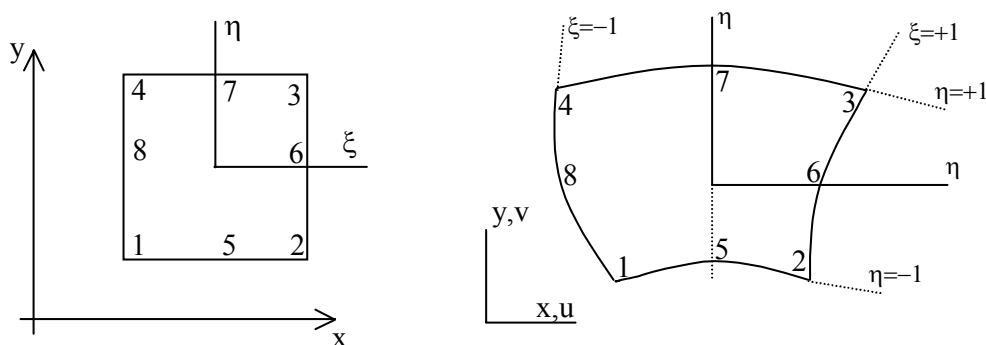


Figura 3. 4 – a) Elem. isoparamétrico Q8 no espaço  $\xi\eta$ ; b) Elem. isoparamétrico Q8 no espaço  $xy$ .

Trabalhando-se com elementos bidimensionais e cada um dos nós possuindo dois graus de liberdade, obtém-se dezesseis possibilidades de valores diferentes, sendo então os deslocamentos  $u$  e  $v$  aproximados por polinômios do segundo grau em  $x$  e  $y$ .

$$u(x,y) = d_1 + d_2x + d_3y + d_4x^2 + d_5xy + d_6y^2 + d_7x^2y + d_8xy^2$$

$$v(x,y) = d_9 + d_{10}x + d_{11}y + d_{12}x^2 + d_{13}xy + d_{14}y^2 + d_{15}x^2y + d_{16}xy^2$$

Fazendo as expressões acima em função de coordenadas naturais  $\xi = x/a$  e  $\eta = y/b$ , resolvendo para:  $\xi = -1$  e  $\eta = -1$ ,  $\xi = +1$  e  $\eta = -1$ ,  $\xi = +1$  e  $\eta = +1$ ,  $\xi = -1$  e  $\eta = +1$ ,  $\xi = 0$  e  $\eta = -1$ ,  $\xi = +1$  e  $\eta = 0$ ,  $\xi = 0$  e  $\eta = +1$  e  $\xi = -1$  e  $\eta = 0$ , e, explicitando as funções aproximadoras em relação aos deslocamentos nodais, com objetivo de:

$$u = \sum_{i=1}^{\text{nós}} N_i \cdot u_i \quad \text{e} \quad v = \sum_{i=1}^{\text{nós}} N_i \cdot v_i$$

obtém-se:

$$N_1 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta) - \frac{1}{2}(N_8 + N_5)$$

$$N_5 = \frac{1}{2}(1-\xi^2)(1-\eta)$$

$$N_2 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta) - \frac{1}{2}(N_5 + N_6)$$

$$N_6 = \frac{1}{2}(1+\xi)(1-\eta^2)$$

$$N_3 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta) - \frac{1}{2}(N_6 + N_7)$$

$$N_7 = \frac{1}{2}(1-\xi^2)(1+\eta)$$

$$N_4 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta) + \frac{1}{2}(N_7 + N_8)$$

$$N_8 = \frac{1}{2}(1-\xi)(1-\eta^2)$$

Sendo a formulação para montagem da matriz rigidez do elemento, semelhante ao procedimento apresentado para o elemento isoparamétrico Q4.

### 3.2.3. Considerações Sobre o MEF e Não-Linearidade

A abordagem feita até a seção anterior descreve o Método dos Elementos Finitos para um modelo de material isotrópico e de comportamento linear. Contudo, implementando-se uma relação constitutiva não-linear entre as tensões e as deformações, caso do concreto armado, o vetor das forças internas passa a depender não linearmente do vetor de deslocamentos  $\{u\}$ , logo a equação  $\Delta Q(u) = \{R_{ext}\} - \{F_{int}\} = 0$ , apresentada na seção 3.1.1, será não linear, tornando necessária a implementação de uma solução incremental e iterativa (Crisfield,1991).

Analisando estruturas de concreto armado, pode-se observar que as não-linearidades a serem implementadas no método surgem, principalmente, através de fissuração, esmagamento, perda de encaixe do agregado e escoamento do aço. Apresentando um comportamento progressivo e vinculado ao carregamento implementado na estrutura, é necessário que a solução seja obtida aplicando-se incrementos de carga, para possibilitar uma boa aproximação do comportamento real.

De acordo com o exposto anteriormente, constata-se a existência de dois pontos fundamentais na análise de estruturas de concreto armado pelo método dos elementos finitos:

1. Um modelo constitutivo capaz de descrever as não-linearidades do concreto e do aço;
2. Um método eficiente para solução incremental e iterativa das equações de equilíbrio.

Nas seções seguintes serão apresentados o modelo constitutivo referente ao concreto armado e os tipos de solução incremental implementados no programa FEPARCS.

### 3.3. Modelos Adotados Originalmente

Na análise não-linear de estruturas em concreto armado por elementos finitos é fundamental um modelo constitutivo capaz de representar as não-linearidades do material de forma que o comportamento da formação e

propagação de fissuras, esmagamento e perda de encaixe de agregados sejam descritos realisticamente ao longo da história de carregamento da estrutura.

### 3.3.1.

#### Modelo Constitutivo Hipoelástico Para o Concreto Simples

De acordo com o modelo hipoelástico ortotrópico, originalmente desenvolvido por Elwi & Murray (1979), define-se um modelo constitutivo para concreto na forma de uma equação incremental “tensão x deformação”, sendo os parâmetros dos materiais atualizados através de relações “tensão x deformação uniaxial equivalente” introduzidas por Darwin & Pecknold (1977). Para simular e descrever as características de resistência do concreto sob estados multiaxiais de tensão e deformação, o modelo utiliza o conceito das superfícies de ruptura de Willam & Warkne (1974) utilizando cinco parâmetros.

As principais características deste modelo são:

- O material é ortotrópico, com os eixos de ortotropia seguindo os eixos de deformações principais;
- Desacoplamento entre tensões normais e deformações cisalhantes;
- Dependência das tensões às trajetórias de equilíbrio;
- Reversibilidade incremental dos estados de tensão e de deformação.

#### 3.3.1.1.

##### Relação Constitutiva Incremental

As relações incrementais constitutivas são dadas por:

$$\{d\sigma\} = [C]\{d\varepsilon\} \quad [3.21]$$

sendo  $\{d\sigma\}$  o vetor de tensões incrementais,  $\{d\varepsilon\}$  o vetor de deformações incrementais e  $[C]$  a matriz constitutiva incremental.

De acordo com Darwin & Pecnold (1977), para o estado plano de tensões, a matriz constitutiva hipoelástica  $[C]$  é dada em função de seis constantes independentes ( $E_1$ ,  $E_2$ ,  $\mu_{12}$ ,  $\mu_{13}$ ,  $\mu_{23}$ ,  $G_{12}$ ), e assume a forma:

$$[C] = \frac{1}{\phi} \begin{bmatrix} E_1(1-\mu_{32}^2) & \sqrt{(E_1 E_2)}(\mu_{13}\mu_{32} + \mu_{12}) & 0 \\ & E_2(1-\mu_{13}^2) & 0 \\ \text{Simétrico} & & G_{12}\phi \end{bmatrix} \quad [3.22]$$

onde:

$$\mu_{12}^2 = \mu_{21}^2 = \nu_{12} \nu_{21}$$

$$\mu_{23}^2 = \mu_{32}^2 = \nu_{23} \nu_{32}$$

$$\mu_{13}^2 = \mu_{31}^2 = \nu_{13} \nu_{31}$$

$$\phi = 1 - \mu_{12}^2 - \mu_{23}^2 - \mu_{13}^2 - 2 \mu_{12} \mu_{23} \mu_{13}$$

$E_1$  e  $E_2$  são os módulos de elasticidade longitudinal de acordo com os eixos principais de ortotropia,  $G_{12}$  é o módulo de elasticidade transversal do material dado em relação aos eixos ortotrópicos 1 e 2, e  $\nu_{ij}$  são os coeficientes de Poisson em relação aos eixos de ortotropia  $i$  e  $j$ .

### 3.3.1.2.

#### Deformação Uniaxial Equivalente

Deve-se então incorporar o conceito de deformação uniaxial equivalente de modo a tornar possível a derivação dos parâmetros correntes dos materiais em função do nível de tensão corrente. Ou seja:

$$d\varepsilon_{iu} = \frac{d\sigma_i}{dE_i}, \quad i = 1, 2, 3 \quad [3.23]$$

sendo que  $d\varepsilon_{ie}$ , corresponde fisicamente, ao incremento de deformação que o material exibiria se submetido a um incremento de tensão  $d\sigma_i$ , com as outras tensões iguais a zero.

Integrando a expressão anterior:

$$\varepsilon_{iu} = \int \frac{d\sigma_i}{E_i}, \quad i = 1, 2, 3 \quad [3.24]$$

sendo  $\varepsilon_{iu}$  a deformação uniaxial equivalente total, para as direções  $i$ , pela integração da expressão [3.23] ao longo da trajetória de carregamento. O que pode ser interpretado no modelo utilizado, que para um ponto qualquer do material faz-se seguir e coincidir os eixos de ortotropia com os eixos das deformações principais até a fissuração. Desta maneira,  $\varepsilon_{iu}$  não provê a história de deformação em uma direção fixa  $i$ , mas na direção “continuamente modificada” do eixo de ortotropia  $i$  (Chen & Salieb, 1982).

## Relação “Tensão x Deformação” Uniaxial Equivalente Para Compressão

A relação uniaxial “tensão x deformação” para a compressão implementada no modelo desenvolvido por Elwi & Murray (1979), segue a relação de Saenz (1964) que interpola os dados do concreto. Esta relação em termos de deformação uniaxial equivalente assume a seguinte forma:

$$\sigma_i = \frac{E_o \cdot \varepsilon_{iu}}{1 + \left( \frac{E_o}{E_s} - 2 \right) \frac{\varepsilon_{iu}}{\varepsilon_{ic}} + \left( \frac{\varepsilon_{iu}}{\varepsilon_{ic}} \right)^2} \quad [3.25]$$

Sendo  $E_o$  o módulo de elasticidade inicial,  $E_s$  o módulo de elasticidade secante dado por:

$$E_s = \frac{\sigma_{ic}}{\varepsilon_{ic}} \quad [3.26]$$

onde,  $\sigma_{ic}$  é a tensão máxima, associada a direção  $i$ , que ocorre para um estado corrente de tensões principais,  $\varepsilon_{ic}$  é a correspondente deformação uniaxial equivalente.

O módulo de elasticidade incremental pode ser definido como:

$$E_i = \frac{d\sigma}{d\varepsilon} \quad [3.27]$$

Efetuada-se a derivação, tem-se:

$$E_i = \frac{E_o \left[ 1 - \left( \frac{\varepsilon_{iu}}{\varepsilon_{ic}} \right)^2 \right]}{\left[ 1 + \left( \frac{E_o}{E_s} - 2 \right) \frac{\varepsilon_{iu}}{\varepsilon_{ic}} + \left( \frac{\varepsilon_{iu}}{\varepsilon_{ic}} \right)^2 \right]^2} \quad [3.28]$$

A curva “tensão x deformação” uniaxial equivalente para a compressão é descrita em termos de suas componentes no ponto crítico ( $\sigma_{cu}$ ,  $\varepsilon_{cu}$ ) que corresponde a ( $\sigma_{ic}$ ,  $\varepsilon_{ic}$ ) e dos módulos de elasticidade inicial  $E_o$  e secante  $E_s$ . A análise de comportamento do material implementado no modelo pode se dividida em três etapas:

- Trecho de curva ascendente do gráfico, onde o material resiste plenamente às ações introduzidas no sistema e deve ser considerado intacto e praticamente elástico;

- Trecho de curva descendente do gráfico, onde se indica que existe esmagamento parcial, com o material ainda apresentando uma reserva de resistência, e módulo de elasticidade representado por seu valor secante;
- Atendida a deformação  $\epsilon_{cf}$  o material é considerado rompido por esmagamento, não havendo mais qualquer reserva de resistência em termos de tensão.

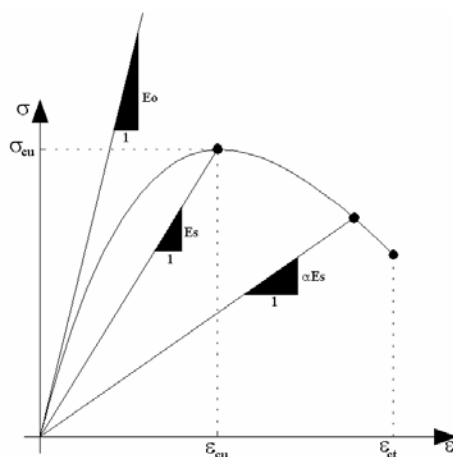


Figura 3. 5 – Relação “tensão x deformação” uniaxial para compressão do concreto

### Relação “Tensão x Deformação” Uniaxial Equivalente Para Tração e “Tensão x Distorção”

A relação “tensão x deformação” uniaxial equivalente para tração e cisalhamento são representados em sua parte ascendente do gráfico pela mesma expressão da relação para compressão, que é equação de Saenz.

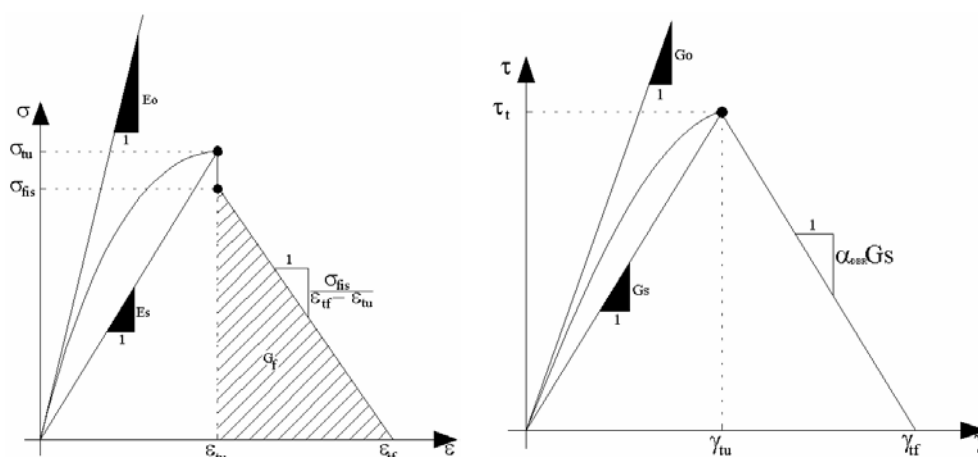


Figura 3. 6 – Relação “tensão x deformação” uniaxial para tração e “tensão x distorção” respectivamente.

Em sua parte descendente considera-se um modelo simplificado com o comportamento descrito por seguimentos lineares, onde as curvas são descritas em termos dos módulos de elasticidade inicial  $E_0$  e secante  $E_s$ , e dos valores correspondentes a tensão máxima,  $(\sigma_{tu}, \varepsilon_{tu})$  para tração e  $(\tau_{cu}, \gamma_{cu})$  para cisalhamento. Além destes pontos, há ainda aqueles referentes a ruptura,  $(\sigma_{tf}, \varepsilon_{tf})$  para tração e  $(\tau_{cf}, \gamma_{cf})$  para cisalhamento. Para tração considera-se ainda o valor  $\sigma_{fis}$  correspondente a  $\varepsilon_{tu}$ , sendo  $\sigma_{fis}$  um parâmetro de entrada podendo assumir o valor de  $0,20\sigma_{tu}$  a  $\sigma_{tu}$  (Elwi, 1990). Este ponto de descontinuidade é para simular a perda instantânea de parte da resistência à tração devida a energia consumida durante a formação brusca da fissura. Incorporando-se no modelo a energia de fratura  $G_f$ , definida como sendo a energia por unidade de área consumida na formação e propagação das microfissuras. O segmento reto da parte descendente é descrito em função de  $G_f$ ,  $\sigma_{fis}$ ,  $\varepsilon_{tu}$  e  $\varepsilon_{tf}$ , e serve para indicar o grau de redução de tensão com a propagação das microfissuras.

Assim como na análise da curva de compressão, a análise de comportamento do material implementado no modelo para tração e cisalhamento pode se dividida em três etapas:

- Trecho de curva ascendente do gráfico, onde o material resiste plenamente as ações introduzidas no sistema e deve ser considerado intacto e praticamente elástico;
- Trecho onde o material apresenta-se fissurado para tração e com perda gradual do encaixe do agregado para o cisalhamento;
- Por fim o material não apresenta mais resistência mecânica quando experimenta fissuras largas à tração e perda de encaixe do agregado ao cisalhamento.

Na parte pós-pico os módulos de elasticidade longitudinal e transversal também são representados por seus valores secantes.

O fator  $\alpha_{DBR}$  para a curva de cisalhamento x distorção é para indicar o grau de redução gradual do efeito de engrenamento do agregado.



### 3.3.1.3. Coeficiente de Poisson

Para implementação da relação incremental “tensão x deformação” é necessário determinar, além dos módulos de elasticidade longitudinais e transversais, o coeficiente de Poisson.

De acordo com resultados obtidos em ensaios de compressão uniaxial realizados por Kupfer et al (1969) e após ajustes das curvas experimentais pelo método dos mínimos quadrados, Elwi & Murray (1979) representam o coeficiente de Poisson em função da deformação uniaxial equivalente  $\varepsilon_{iu}$ , como segue:

$$v_i = v_{0i} \left[ 1,0 + 1,3763 \frac{\varepsilon_{iu}}{\varepsilon_{ic}} - 5,360 \left( \frac{\varepsilon_{iu}}{\varepsilon_{ic}} \right)^2 + 8,586 \left( \frac{\varepsilon_{iu}}{\varepsilon_{ic}} \right)^3 \right] \quad [3.29]$$

onde,  $v_{0i}$  e  $v_i$  são coeficientes de Poisson inicial e corrente e  $\varepsilon_{ic}$  é a deformação correspondente ao ponto de tensão máxima.

### 3.3.1.4. Superfície de Ruptura de Willam-Warnke

Para obtenção da relação “tensão x deformação” uniaxial equivalente são necessários os valores de  $\sigma_{ic}$  e  $\varepsilon_{ic}$  correspondentes ao ponto crítico da curva, sendo estes parâmetros modificados de acordo com o estado de tensões corrente, o que gera a necessidade da aplicação de critérios de ruptura convenientes.

Para obtenção dos valores de  $\sigma_{ic}$  define-se uma superfície de ruptura no espaço das tensões, da qual possa ser gerada uma superfície análoga no espaço das deformações uniaxiais para se obter os valores de  $\varepsilon_{ic}$ . A superfície de Willam-Warnke (1974) é descrita no espaço das tensões ou deformações principais em termos dos invariantes de tensão ou deformação. Trata-se de um critério de ruptura de cinco parâmetros obtidos através de dados experimentais.

O modelo constitutivo de Elwi & Murray (1979) utiliza a formulação proposta por Willam-Warnke (1974), tendo, de acordo com Simões (1998), como principais características:

- Sua construção requer cinco parâmetros envolvendo invariantes de tensão e deformação do material utilizado. São estes:

Espaço das tensões:

$f'_c$  - Resistência uniaxial à compressão do concreto;

$f_t'$  - Resistência uniaxial à tração do concreto ;

$f_{cb}$  - Resistência biaxial à compressão para uma razão entre as tensões principais de 1;

$(-\xi_1, \rho_1)$  - Ponto qualquer sobre o meridiano de tração – normalizado com respeito a  $f_c'$  – para altos valores de tensão hidrostática ;

$(-\xi_2, \rho_2)$  - Ponto qualquer sobre o meridiano de compressão – normalizado com respeito a  $f_c'$  – para altos valores de tensão hidrostática.

Espaço das deformações:

$\varepsilon_c$  - deformação correspondente a  $f_c'$ ;

$\kappa_t$  - deformação correspondente a  $f_t'$ ;

$\kappa_{cb}$  - deformação correspondente à  $f_{bc}'$  em uma das direções de carregamento;

$(-\beta_1, \lambda_1)$  - Ponto qualquer sobre o meridiano de tração – normalizado com respeito a  $\varepsilon_c$  – para altos valores de deformação hidrostática;

$(-\beta_2, \lambda_2)$  - Ponto qualquer sobre o meridiano de tração – normalizado com respeito a  $\varepsilon_c$  – para altos valores de deformação hidrostática;

Sendo os três primeiros parâmetros utilizados para descrever os meridianos de compressão e tração, e os outros dois para descrever a seção transversal da superfície;

- Possui seção desviadora não-circular, composta por trechos de elipse a cada 120°, e seus meridianos descritos por parábolas do 2° grau;
- É válida para todas as combinações tensão / deformação em compressão e tração, e possui relatos de boas aproximações com resultados experimentais;
- É suave, possuindo um único gradiente em cada ponto (derivada contínua);
- Tem convexidade garantida tanto nos planos desviadores, quanto ao longo dos meridianos, desde que algumas condições básicas sejam satisfeitas (Chen,1992).

De acordo com o mencionado, pode-se definir a superfície de ruptura no espaço das tensões, empregada neste trabalho, por:

$$f(\sigma_m, \tau_m, \theta) = 0 \quad [3.30]$$

sendo  $\sigma_m$  e  $\tau_m$  as tensões normal e cisalhante médias,  $\theta$  o ângulo de similaridade, onde estas grandezas são constituídas através das tensões principais  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  e  $\sigma_3$  compondo as funções:

$$\sigma_m = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} \quad [3.31]$$

$$\tau_m = \frac{1}{\sqrt{15}} \left[ (\sigma_1^2 - \sigma_2^2)^2 + (\sigma_2^2 - \sigma_3^2)^2 + (\sigma_1^2 - \sigma_3^2)^2 \right]^{\frac{1}{2}}, \quad [3.32]$$

$$\cos \theta = \frac{2\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3}{\sqrt{2} \left[ \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2} \right]^{\frac{1}{2}}} : 0^\circ \leq \theta \leq 60^\circ \quad [3.33]$$

sendo  $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ .

Definido um espaço tridimensional de tensões em função das grandezas adimensionais  $\sigma_1 / f'_c$ ,  $\sigma_2 / f'_c$  e  $\sigma_3 / f'_c$  para descrever a superfície de ruptura no espaço das tensões, esta forma-se no entorno do eixo hidrostático. Perpendicularmente a este eixo, definido por  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ , tem-se o plano desviador, definido pelo invariante adimensional  $\rho$ , e posicionado ao longo do eixo hidrostático pelo também invariante adimensional  $\xi$ .

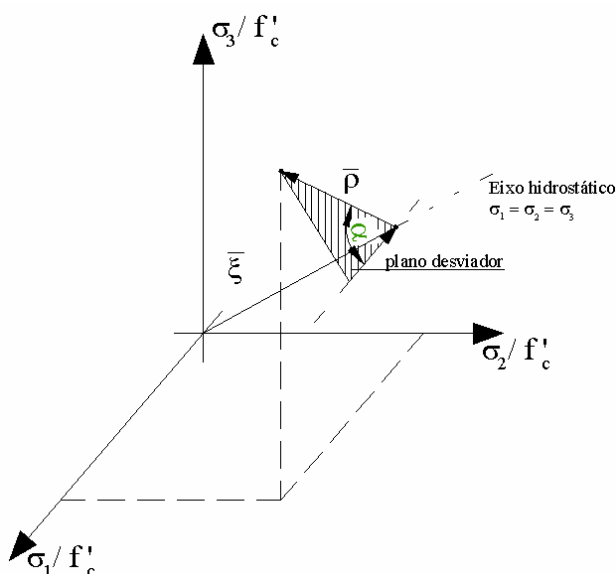


Figura 3. 7 – Espaço tridimensional de tensões, eixo hidrostático e plano desviador.

Os invariantes  $\rho$  e  $\xi$  são definidos a partir das expressões [3.31] e [3.32], e são expressos por:

$$\bar{\xi} = \sqrt{3} \frac{\sigma_m}{f'_c} \tag{3.34}$$

$$\bar{\rho}^2 = 5 \left( \frac{\tau_m}{f'_c} \right)^2 \tag{3.35}$$

Nota-se que ao compor as possibilidades para um valor constante de  $\xi$ , contido no plano desviador, se formará em função de  $\rho$  um contorno composto por três trechos de elipse definidos a cada 120°, que é chamado de seção desviadora, sendo que para análise, esta seção só necessita ser descrita no intervalo de  $0^\circ < \theta < 60^\circ$ . O contorno desta seção é expresso por:

$$\bar{\rho}(\bar{\xi}, \theta) = \frac{2\bar{\rho}_c(\bar{\rho}_c^2 - \bar{\rho}_t^2)\cos\theta + \bar{\rho}_c(2\bar{\rho}_t - \bar{\rho}_c)\sqrt{4(\bar{\rho}_c^2 - \bar{\rho}_t^2)\cos^2\theta + 5\bar{\rho}_t^2 - 4\bar{\rho}_t\bar{\rho}_c}}{4(\bar{\rho}_c^2 - \bar{\rho}_t^2)\cos^2\theta + (\bar{\rho}_c - 2\bar{\rho}_t)^2} \tag{3.36}$$

onde  $\rho_c$  e  $\rho_t$  são os raios máximo para  $\theta = 0^\circ$  e mínimo para  $\theta = 60^\circ$  da seção desviadora, para um determinado valor de  $\xi$ .

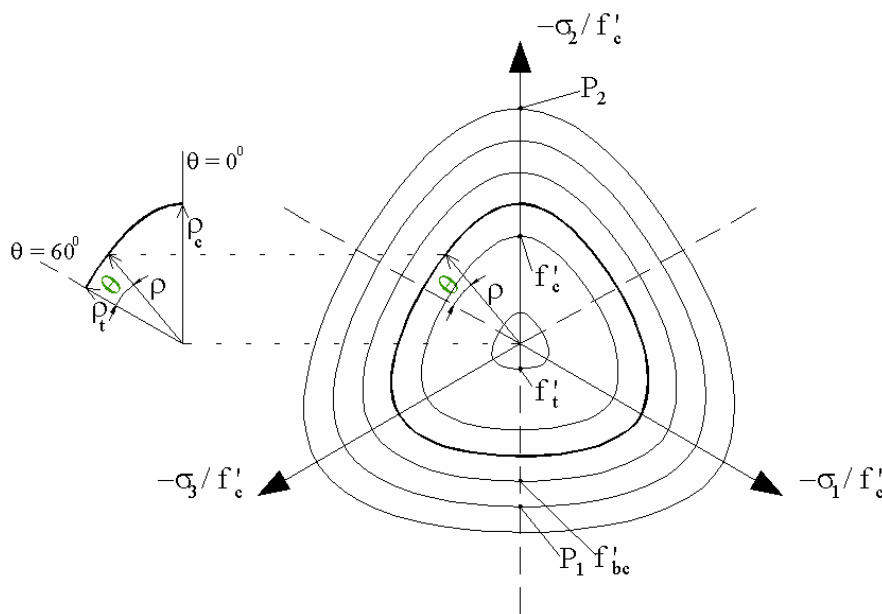


Figura 3. 8 – Superfície de Willam-Warnke: seção desviadora.

Os parâmetros  $\rho_c$  e  $\rho_t$  variam de acordo a tensão hidrostática, o que gera alterações na seção desviadora ao longo do eixo hidrostático, produzindo meridianos de tração e compressão, ou seções meridionais.

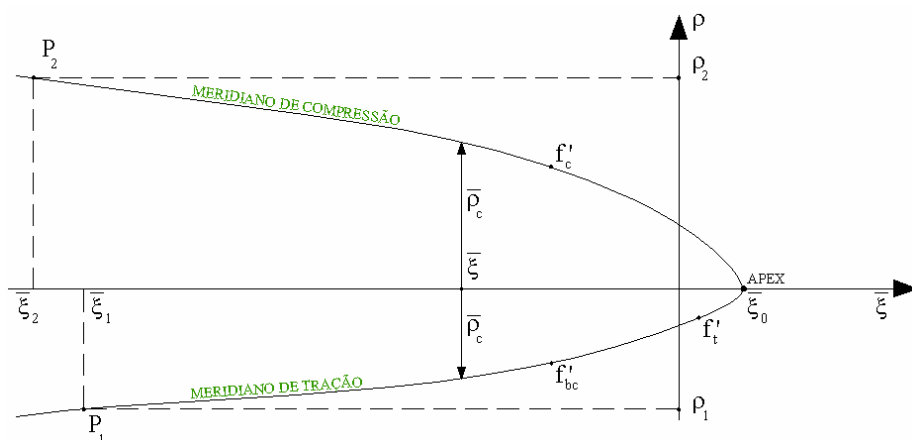


Figura 3. 9 – Superfície de Willam-Warnke: Seção meridional.

Estes meridianos são descritos por parábolas do 2º grau, e são construídos a partir dos cinco invariantes de tensão e deformação do material utilizado, mencionados no início da seção, e podem ser expressos por:

$$\rho_t(\bar{\xi}) = a_0 + a_1\bar{\xi} + a_2\bar{\xi}^2 \quad [3.37]$$

$$\rho_c(\bar{\xi}) = b_0 + b_1\bar{\xi} + b_2\bar{\xi}^2 \quad [3.38]$$

sendo,

$$a_0 = \frac{2}{3}\alpha_{bc}a_1 - \frac{4}{9}\alpha_{bc}^2 a_2 + \sqrt{\frac{2}{15}}\alpha_{bc} \quad [3.39]$$

$$a_1 = \frac{1}{3}(2\alpha_{bc} - \alpha_t)a_2 + \sqrt{\frac{6}{5}} \frac{\alpha_t - \alpha_{bc}}{2\alpha_{bc} + \alpha_t} \quad [3.40]$$

$$a_2 = \frac{\sqrt{\frac{6}{5}}\bar{\xi}_1(\alpha_t - \alpha_{bc}) - \sqrt{\frac{6}{5}}\alpha_t\alpha_{bc} + \bar{\rho}_1(2\alpha_{bc} + \alpha_t)}{(2\alpha_{bc} + \alpha_t)(\bar{\xi}_1^2 - \frac{2}{3}\alpha_{bc}\bar{\xi}_1 + \frac{1}{3}\alpha_t\bar{\xi} - \frac{2}{9}\alpha_t\alpha_{bc})} \quad [3.41]$$

$$b_0 = -\bar{\xi}_0 b_1 - \bar{\xi}_0 b_2 \quad [3.42]$$

$$b_1 = \left(\bar{\xi}_2 + \frac{1}{3}\right)b_2 + \frac{\sqrt{\frac{6}{5}} - 3\bar{\rho}_2}{3\bar{\xi}_2 - 1} \quad [3.43]$$

$$b_2 = \frac{\bar{\rho}_2 \left( \bar{\xi}_0 + \frac{1}{3} \right) - \sqrt{\frac{2}{15}} (\bar{\xi}_0 + \bar{\xi}_2)}{\left( \bar{\xi}_0 + \bar{\xi}_2 \right) \left( \bar{\xi}_2 - \frac{1}{3} \right) \left( \bar{\xi}_0 + \frac{1}{3} \right)} \quad [3.44]$$

os coeficientes da parábola do 2º grau, e

$$\bar{\xi}_0 = \frac{a_1 - \sqrt{a_1^2 - 4a_0a_2}}{2a_2} \quad [3.45]$$

o vértice comum das parábolas ou apex da superfície.

A definição da superfície de Willam-Warnke (1974) em termos das deformações uniaxiais equivalentes possui expressões análogas.

### 3.3.2.

#### Modelo Elasto-Plástico Multilinear Para Armadura Inicial

Originalmente foi utilizado para se descrever o comportamento das armações de reforço transversal e longitudinal o modelo elasto-plástico multilinear, onde os elementos de armadura podem ser interpolados linearmente ou de forma quadrática, e podem ficar de forma arbitrária no interior do elemento de concreto (Elwi & Hrudey, 1989; Pinto, 1982).

Esta curva, Figura 3.10, é descrita em função dos pontos  $(\sigma_i, \varepsilon_i)$ , obtidos através de ensaios do material utilizado nos reforços ou, na ausência destes, através de curvas correspondentes existentes na literatura.

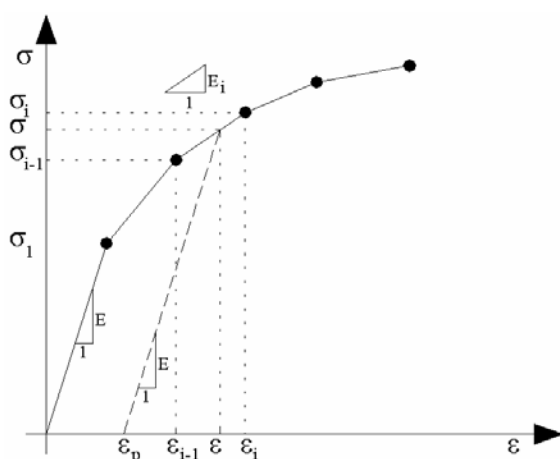


Figura 3. 10 – Relação “tensão x deformação” que descreve o comportamento do material utilizado nos reforços.

A relação constitutiva é dada por:

$$\sigma = \sigma_{i-1} + E_i (\varepsilon - \varepsilon_{i-1}) \quad [3.46]$$

onde,  $\sigma_{i-1}$  e  $\varepsilon_{i-1}$  são os valores prescritos da tensão e da deformação, e  $E_i$  é o módulo de elasticidade secante dado por:

$$E_i = \frac{\sigma_i - \sigma_{i-1}}{\varepsilon_i - \varepsilon_{i-1}} \quad [3.47]$$

No caso de descarregamento a relação assume um comportamento linear da forma:

$$\sigma = E (\varepsilon - \varepsilon_p), \quad [3.48]$$

onde,  $\sigma$  e  $\varepsilon$  são a tensão e deformação total e  $\varepsilon_p$  é a deformação plástica acumulada.

Este modelo é bastante flexível, pois permite a descrição de uma grande variedade de comportamentos, já que os pontos obtidos no ensaio do aço entram como *input* para a descrição da curva.

### 3.3.3. Modelo Elasto-Plástico Multilinear Modificado Para o Reforço

De acordo com o modelo implementado no programa FEPARCS, descreve-se o comportamento das armações de reforço transversal e longitudinal utilizando cinco pontos do comportamento “tensão x deformação”, incluindo a origem, para que seja descrito o comportamento do material utilizado na análise.

Neste trabalho adapta-se a formatação de entrada para dados de reforço fazendo-se com que o programa administre e introduza reforços no sistema estrutural, tanto antes do início do cálculo como também após um número determinado de “steps” do tipo de análise não-linear utilizada.

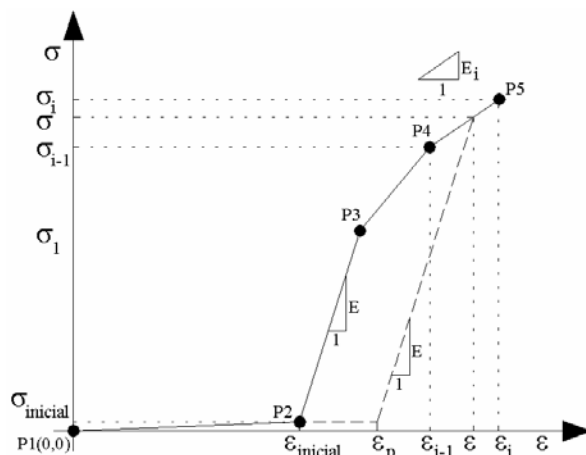


Figura 3. 11 – Relação “tensão x deformação” que descreve o material dos reforços inseridos durante o cálculo.

Assim, a curva “tensão x deformação” modificada, Figura 3.11, como a original, é descrita em função dos pontos  $(\sigma_i, \varepsilon_i)$ , sendo o ponto dois correspondente à origem real do sistema, e de acordo com o estado de tensões atuante em cada elemento de reforço.

A relação constitutiva é dada por:

$$\sigma = \sigma_{i-1} + E_i (\varepsilon - \varepsilon_{i-1}) - E_{inicial} \varepsilon_{inicial} \quad [3.49]$$

onde,  $E_{inicial}$  e  $\varepsilon_{inicial}$  são, respectivamente, o módulo de elasticidade e a deformação do elemento analisado no momento da ativação do reforço,  $\sigma_{i-1}$  e  $\varepsilon_{i-1}$  são os valores prescritos da tensão e da deformação e  $E_i$  é o módulo de elasticidade secante dado por:

$$E_i = \frac{\sigma_i - \sigma_{i-1}}{\varepsilon_i - \varepsilon_{i-1}} \quad [3.50]$$

No caso de descarregamento a relação assume um comportamento linear da forma:

$$\sigma = E_2 (\varepsilon - \varepsilon_p - \varepsilon_{inicial}) \quad [3.51]$$

onde,  $\sigma$  e  $\varepsilon$  são a tensão e deformação total e  $\varepsilon_p$  é a deformação plástica acumulada.

### 3.4.

## Estratégias De Solução Para Análise Não-Linear

### 3.4.1.

#### O Método de Newton-Raphson

O método de Newton-Raphson é uma estratégia muito utilizada na solução de problemas que envolvem equações de equilíbrio não-lineares, sendo o método implementado através da aproximação da trajetória de equilíbrio da estrutura por tangentes à mesma, até a obtenção da convergência.

A formulação do método permite dois tipos de abordagens: através de controle de deslocamentos, e através do controle de carga. O controle de deslocamentos é feito através da definição de incrementos pelo analista e os incrementos de carga correspondentes obtidos por processo iterativo, e o controle de cargas é feito através da definição prévia de incrementos pelo analista e os deslocamentos correspondentes obtidos por processo iterativo. Neste trabalho e nos programas desenvolvidos, toda a formulação e comentários sobre o método de Newton-Raphson dizem respeito à formulação baseada em controle de carga.



O método consiste em obter o incremento de deslocamento  $\{\Delta u\}^{i-1}$ , para uma iteração típica de um passo de solução  $a \Rightarrow b$ , através de sucessivas aproximações da forma,

$$[K_T]^{i-1} \{\Delta u\}^i = \{\Delta Q\}^{i-1} \quad [3.52]$$

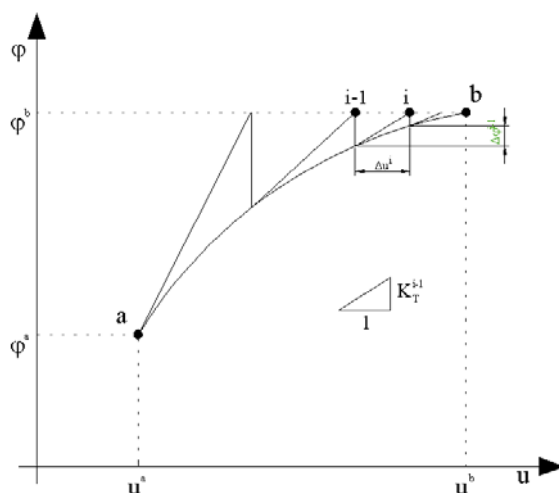


Figura 3. 12 – Representação gráfica do Método de Newton-Raphson standard.

sendo  $[K_T]^{i-1}$  a matriz de rigidez tangente na iteração  $i-1$ ,  $\{\Delta u\}^i$  é uma correção do vetor de deslocamento corrente  $u$ , e  $\{\Delta Q\}^{i-1}$  é o vetor de forças não equilibradas dada por:

$$\{\Delta Q\}^{i-1} = \phi^b \{R_o\} - \{F_{int}\} \quad [3.53]$$

com  $\{R_o\}$  sendo o vetor das cargas de referência,  $\{F_{int}\}^{i-1}$  é o vetor das forças internas na iteração  $i-1$ , e  $\phi^b$  é o fator de carga associado ao passo de solução  $a \Rightarrow b$ .

Ao final de cada iteração, calculado o vetor de incrementos de deslocamento  $\{\Delta u\}^i$ , o mesmo é utilizado para corrigir o vetor de deslocamento total  $\{u\}^i$ , ou seja,

$$\{u\}^i = \{u\}^{i-1} + \{\Delta u\}^i \quad [3.54]$$

Sendo que, as equações acima estão sujeitas às seguintes condições iniciais:

$$[K_T]^o = [K_T]^a \quad [3.55]$$

$$\{F_{int}\}^o = \{F_{int}\}^a \quad [3.56]$$

$$\{u\}^o = \{u\}^a \quad [3.57]$$

De acordo com a expressão [3.52] e o exposto na Figura 3.12, tem-se que a matriz de rigidez é atualizada a cada iteração, caracterizando o método de

Newton-Raphson padrão ou standard. De acordo com o procedimento para atualização da matriz de rigidez, a técnica de Newton-Raphson admite duas variações:

- Método de Newton-Raphson modificado (MNRm), onde a matriz de rigidez é atualizada apenas no início de cada passo de carga, reduzindo a expressão [3.52] à forma:

$$[K_T]^a \{\Delta u\}^i = \{\Delta Q\}^{i-1} \quad [3.58]$$

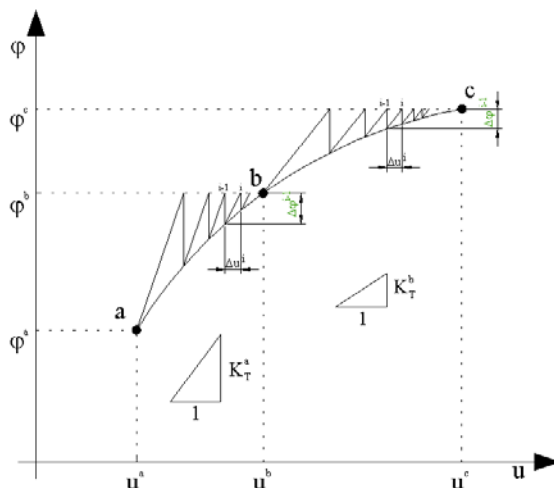


Figura 3. 13 – Representação gráfica do Método de Newton-Raphson modificado.

- Método de Newton-Raphson com rigidez inicial(MNRi), onde a matriz de rigidez, previamente calculada, é utilizada em todos os passos de carga subseqüentes, reduzindo a expressão [3.52] à forma:

$$[K_T]^0 \{\Delta u\}^i = \{\Delta Q\}^{i-1} \quad [3.59]$$

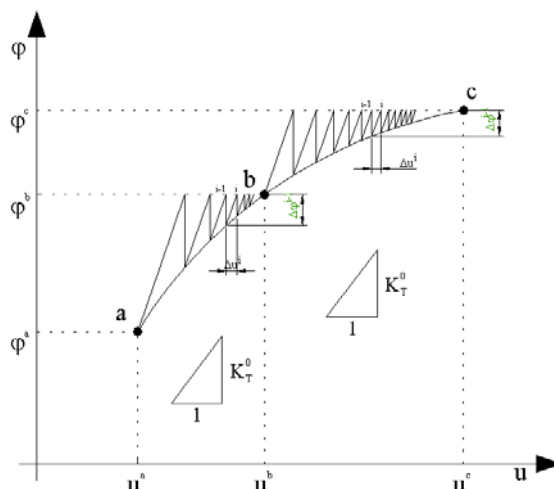


Figura 3. 14 – Representação gráfica do Método de Newton-Raphson rigidez inicial.

A vantagem em se utilizar o Método de Newton-Raphson com rigidez inicial (MNRi) e o Método de Newton-Raphson modificado (MNRm), está no menor esforço computacional associado a cada iteração executada, não necessitando-se calcular, reduzir e armazenar a matriz rigidez da estrutura ao final de cada uma destas etapas. Contudo, o Método de Newton-Raphson standard conduz a uma convergência mais rápida ao ponto de equilíbrio.

Mesmo sendo amplamente aplicável, o Método de Newton-Raphson possui limitações e só pode ser aplicado com sucesso enquanto a matriz de rigidez do sistema permanece positiva e definida, o que, em geral, ocorre no trecho ascendente da curva “carga x deslocamento“ (Simões, 1998). Sendo assim, a aplicação da estratégia a problemas que envolvem ponto-limite não permite que a trajetória de equilíbrio do sistema seja seguida completamente (Napoleão, 1994).

Desta forma, ao aplicar-se o MNRs para problemas de ponto limite, sempre acontecerá de a matriz de rigidez  $[K]$  tender a se singularizar nas proximidades deste ponto em sua trajetória ascendente. Mesmo ao se aplicar MNRi ou MNRm, manipulando-se a matriz de rigidez  $[K]$  para que não atinja a singularidade, o fato de os incrementos serem controlados pelo analista gera dificuldade em se situar o equilíbrio para as forças desequilibradas.

Deve-se portanto, buscar outros métodos de solução, para que associado com o método de Newton-Raphson seja possível detectar e ultrapassar o ponto limite.

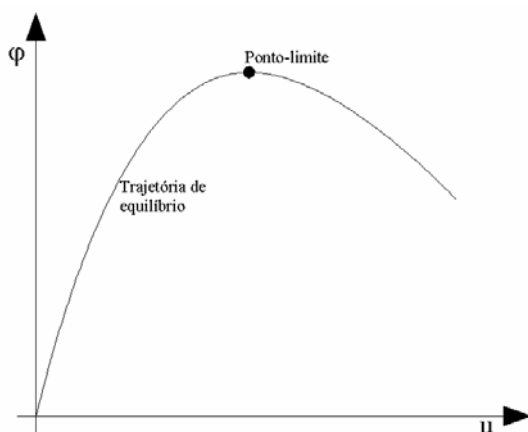


Figura 3. 15 – Típica trajetória de equilíbrio com ponto-limite para o caso unidimensional.

### 3.4.2. O Método do Comprimento de Arco

Esta técnica caracteriza-se por apresentar um controle concomitante de carga e deslocamento, através do conceito do comprimento de arco (Simões, 1998). Sendo assim, surgem duas incógnitas: o incremento do fator de carga  $\Delta\varphi$  e o vetor de incrementos de deslocamento  $\{\Delta u\}$ . Em cada passo de solução, as trajetórias de iteração são perpendiculares aos arcos, que por sua vez podem ser aproximados por tangentes à trajetória de equilíbrio, nos pontos iniciais destes passos, conforme (Ramm, 1981).

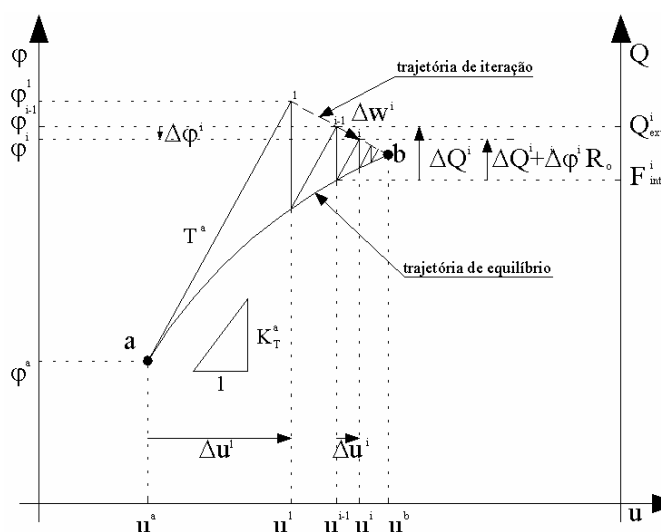


Figura 3. 16 – Representação gráfica do Método do Comprimento de Arco com processo iterativo do tipo Newton-Raphson modificado para um caso unidimensional.

Trata-se de um método muito eficiente, pois ao definir-se um comprimento de arco finito, na forma de equação de restrição, determina-se a existência de uma relação única entre o comprimento de arco, o fator de carga e a norma de incremento de deslocamentos.

O método do comprimento de arco com o processo de iteração tipo Newton-Raphson modificado (Ramm, 1981) é ilustrado graficamente para um passo de solução  $a \rightarrow b$ , em um problema não-linear, onde, objetiva-se encontrar o ponto de equilíbrio 'b' a partir de 'a', sobre a trajetória de equilíbrio, na forma “carga x deslocamento” de uma estrutura qualquer.

Considerando-se uma iteração típica  $i \rightarrow j$ , o vetor iteração  $\{\Delta w\}^j$  é ortogonal ao vetor comprimento de arco  $\{A\}^A$ , sendo que o último tem a direção da matriz

de rigidez tangente  $[K_T]^A$  da estrutura no ponto 'a'. Como componentes do vetor comprimento de arco, tem-se:

$$\langle T \rangle^a : (\{\Delta u\}^i; \Delta \varphi^1) \quad [3.60]$$

sendo  $\{\Delta u\}^1$  o primeiro vetor de incrementos de deslocamento do passo de solução  $a \rightarrow b$ , e  $\Delta \varphi$  o primeiro incremento do fator de carga no referido passo.

Como componentes do vetor de iteração, tem-se:

$$\langle \Delta w \rangle^i : (\{\Delta u\}^i; \Delta \varphi^i) \quad [3.61]$$

sendo  $\{\Delta u\}^i$  correspondente aos incrementos de deslocamento associados a iteração  $i$ , e  $\Delta \varphi^i$  correspondente ao incremento do fator de carga nesta iteração. Pode-se impor a condição de ortogonalidade, o que implica o produto escalar entre o vetor comprimento de arco  $\{T\}^a$  transposto e o vetor iteração ser nulo, ou seja:

$$\langle T \rangle^a \cdot \{\Delta w\}^i = 0 \quad [3.62]$$

portanto,

$$\langle \Delta u \rangle^1 \langle \Delta u \rangle^i + \Delta \varphi^1 \Delta \varphi^i = 0; \quad i=2,3,\dots \quad [3.63]$$

As equações de equilíbrio para  $i$ -ésima iteração podem ser escritas como:

$$[K_T]^a \{\Delta u\}^i = \Delta \varphi^i \{R_o\} + \{\Delta Q\}^{i-1} \quad [3.64]$$

onde  $\{R_o\}$  é o vetor de cargas de referência e  $\{\Delta Q\}^{i-1}$  é o vetor de cargas não equilibradas ao final da iteração  $i-1$ , dado por:

$$\{\Delta Q\}^{i-1} = \{R_{ext}\}^{i-1} - \{F_{int}\}^i \quad [3.65]$$

sendo,  $\{R_{ext}\}^{i-1}$  o vetor das forças externas e  $\{F_{int}\}^{i-1}$  o vetor de forças nodais internas, ao final da iteração  $i$ , este último é obtido através da integração das tensões. O vetor  $\{R_{ext}\}$  deve ser escrito em função do fator de carga  $\varphi^{i-1}$ , atualizado ao final da iteração anterior, e do vetor cargas de referência  $\{R_o\}$ , constante, através da relação:

$$\{R_{ext}\}^{i-1} = \varphi^{i-1} \{R_o\} \quad [3.66]$$

Colocando-se em forma matricial as expressões [3.63] e [3.64], que formam um sistema de ordem  $n+1$ , equivalendo  $n$  ao número de graus de liberdade da estrutura, tem-se:

$$\begin{bmatrix} [K_T]^a & -\{R_o\} \\ (\Delta u)^l & \Delta \phi^l \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\Delta u\}^{i-1} \\ \Delta \phi^i \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{\Delta Q\}^{i-1} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad [3.67]$$

Pode-se notar que a resolução acima, mesmo que a matriz de rigidez  $[K_T]^a$  seja singular, gera um sistema de equações com solução não-trivial, o que representa uma grande vantagem para solução de problemas com ponto limite.

Contudo, existe o problema de a matriz rigidez não ser simétrica, o que torna desaconselhável, em termos práticos, a resolução do sistema. Afim de contornar este problema, Welssels (1977) propôs uma alternativa que consistiu em dividir o vetor de incremento de deslocamentos  $\{\Delta u\}^i$  em duas parcelas,  $\{\Delta u_Q\}^i$  e  $\{\Delta u_R\}^i$ , ou seja:

$$\{\Delta w\}^i = (\{\Delta u_R\}^i; 0) + (\Delta \phi^i \{\Delta u_{R_o}\}^i; \Delta \phi^i) \quad [3.68]$$

onde, tais parcelas são obtidas pela resolução dos sistemas:

$$[K_T]^a \{\Delta u_Q\}^i = \{\Delta Q\}^{i-1} \quad [3.69]$$

$$[K_T]^a \{\Delta u_R\}^i = \{R_o\}$$

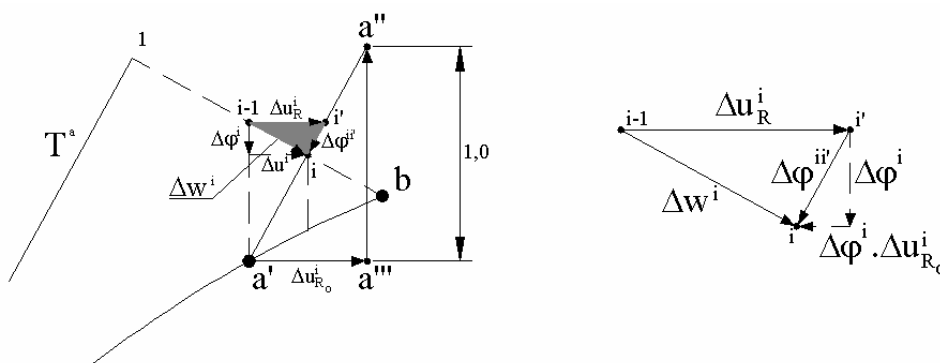


Figura 3. 17 – Decomposição do vetor  $\{\Delta w\}^i$  segundo Welssels (1977).

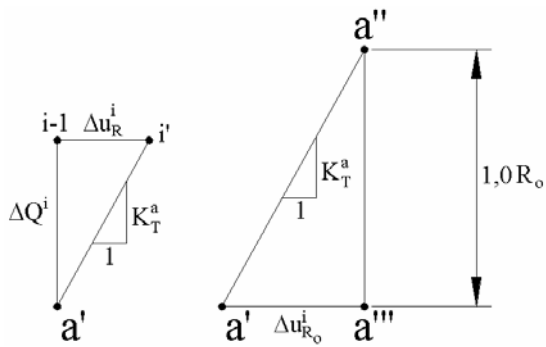


Figura 3. 18 – Representação gráfica dos sistemas de equações, caso unidimensional, da decomposição de Welssels (1977).

Implementando-se mais uma vez o conceito de ortogonalidade dado pela expressão [3.62], obtém-se:

$$\langle \Delta u \rangle^1 \{ \Delta u_Q \}^{i-1} + \Delta \varphi^i \langle \Delta u \rangle^1 \{ \Delta u_R \}^i + \Delta \varphi^i \Delta \varphi^1 = 0, \quad [3.70]$$

de onde se pode-se obter o incremento do fator de carga, colocando-o em evidência na expressão acima:

$$\Delta \varphi^i = - \frac{\langle \Delta u \rangle^1 \{ \Delta u_Q \}^i}{\langle \Delta u \rangle^1 \{ \Delta u_R \}^i + \Delta \varphi^1} \quad [3.71]$$

### 3.4.3. Critérios de Convergência

Com objetivo de limitar os processos iterativos descritos neste item, são estabelecidos dois critérios de convergência: um para deslocamentos e outro para forças.

O critério de convergência para deslocamentos deve obedecer a relação:

$$\frac{\| \{ \Delta u \}^i \|}{\left\| \sum_{j=1}^i \{ \Delta u \}^j \right\|} \leq u_{Tol} \quad [3.72]$$

onde o numerador é a norma euclidiana do incremento de deslocamento correspondente a iteração  $i$ , ao passo que o denominador é a norma euclidiana do incremento de deslocamento acumulado, desde a primeira iteração até a  $i$ -ésima iteração. Esta relação deve ser menor ou igual a tolerância arbitrada pelo analista para deslocamentos  $u_{Tol}$ .

O critério de convergência para forças deve obedecer a relação:

$$\frac{\| \{ \Delta Q \}^i \|}{\| (\varphi^i - \varphi^a) \{ R_o \} \|} \leq Q_{Tol} \quad [3.73]$$

onde o numerador é a norma euclidiana do incremento da carga não equilibrada correspondente a iteração  $i$ , ao passo que o denominador é a norma euclidiana do incremento de força do passo de solução. Esta relação deve ser menor ou igual a tolerância arbitrada pelo analista para forças  $Q_{Tol}$ .