



**Felipe Rodrigo Gomes S de Oliveira**

**Um Modelo de Macro-Finanças para a Curva  
de Juros no Brasil**

**Dissertação de Mestrado**

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção de grau de Mestre pelo Programa de Pós-Graduação em Macroeconomia e Finanças do Departamento de Economia do Centro de Ciências Sociais da PUC-Rio.

Orientador: Prof. Pablo Hector Seuanez Salgado

Rio de Janeiro  
Junho de 2017



**Felipe Rodrigo Gomes S de Oliveira**

**Um Modelo de Macro-Finanças para a Curva  
de Juros no Brasil**

**Dissertação de Mestrado**

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção de grau de Mestre pelo Programa de Pós-Graduação em Macroeconomia e Finanças do Departamento de Economia do Centro de Ciências Sociais da PUC-Rio. Aprovado pela Comissão Examinadora abaixo assinada.

**Prof. Pablo Hector Seuanez Salgado**  
Orientador  
Departamento de Economia - PUC-Rio

**Prof. Marcelo Cunha Medeiros**  
Departamento de Economia - PUC-Rio

**Prof<sup>a</sup>. Priscilla Burity**  
Banco BTG Pactual S/A

**Prof.<sup>a</sup> Mônica Herz**  
Coordenadora do Centro de Ciências Sociais - PUC-Rio

Rio de Janeiro, 06 de junho de 2017

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, do autor e do orientador.

## Felipe Rodrigo Gomes S de Oliveira

Graduou-se em Ciências Econômicas pela Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ) em 2010.

### Ficha Catalográfica

Oliveira, Felipe Rodrigo Gomes S de

Um modelo de macro-finanças para a curva de juros no Brasil / Felipe Rodrigo Gomes S de Oliveira ; orientador: Pablo Hector Seuanez Salgado. – 2017.

47 f. : il. color. ; 30 cm

Dissertação (mestrado)–Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Economia, 2017.

Inclui bibliografia

1. Economia – Teses. 2. Modelo afim de estrutura a termo de taxa de juros. 3. Curva de juros. 4. Prêmio de risco. I. Seuanez Salgado, Pablo Hector. II. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Economia. III. Título.

CDD: 330

## Agradecimentos

Primeiramente, gostaria de agradecer aos meus pais, Edna e Jorge Henrique, e à minha irmã, Denise Raquel, por todo o apoio e ajuda em todos os momentos, pela motivação em estudar e por não me deixar desistir.

Ao meu orientador, Pablo Salgado, pelo aprendizado e pela orientação passada ao longo desse trabalho, sem o qual eu não teria chegado aqui.

Aos demais professores do Departamento de Economia da PUC-Rio pela troca de conhecimento ao longo de todo o curso. Aos colegas de turma, pela parceria nos trabalhos de grupo e nos estudos para as provas, além dos bons momentos passados durante esse período.

À Fundação de Assistência e Previdência Social do BNDES - FAPES, por prover uma estrutura que possibilitou conciliar meus estudos com minhas tarefas profissionais, em especial aos colegas que lá conheci, João Gustavo Savignon, Fernando Barbosa e André Kano.

## Resumo

Oliveira, Felipe Rodrigo Gomes S de; Salgado, Pablo Hector Seuanez. **Um modelo de macro-finanças para a curva de juros no Brasil**. Rio de Janeiro, 2017. 47p. Dissertação de Mestrado – Departamento de Economia, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Neste trabalho, eu busco replicar o modelo somente com taxas de juros exposto em Rudebusch e Wu (2004) para a Estrutura a Termo de Taxa de Juros no Brasil, visando extrair dois fatores latentes que expliquem a curva de juros brasileira. O modelo faz parte da família dos modelos afins de estrutura a termo, sem arbitragem, com os fatores sendo extraídos através de uma função de máxima verossimilhança e obtidos via Filtro de Kalman. Posteriormente, eu busco uma relação do preço do risco associado a cada choque do vetor de estados com um ativo de risco - medido aqui através do IBOVESPA.

### Palavras-chave

Modelo Afim de Estrutura a Termo de Taxa de Juros; Curva de Juros; Prêmio de Risco.

## **Abstract**

Oliveira, Felipe Rodrigo Gomes S de; Salgado, Pablo Hector Seuanez (Advisor). **A Macro-Finance Model for the Brazilian Yield Curve**. Rio de Janeiro, 2017. 47p. Dissertação de Mestrado – Departamento de Economia, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

This paper seeks to replicate the yields-only model present in Rudebusch e Wu (2004) for the Brazilian yield curve, aiming to extract two latent factors that explain all the Brazilian yield curve. The model belongs to the family of the no-arbitrage affine models, with the factors being extracted through a maximum likelihood function, with Kalman Filter. Then, the risk price of the state vector is compared with a risk asset.

## **Keywords**

Affine Term Structure Model; Yield Curve; Risk Premium.

## Sumário

1. Introdução .....	12
2. Base de Dados e Contextualização histórica .....	14
2.1. Base de Dados.....	14
2.2. A economia brasileira entre 2007 e 2016.....	14
3. Modelo com variáveis latentes .....	17
3.1. Modelo afim de estrutura a termo.....	17
3.2. Estimação do Modelo.....	20
3.2.1. Filtro de Kalman .....	21
3.2.2. Máxima Verossimilhança .....	22
3.3. Projeção das taxas de juros .....	25
3.3.1. Projeção dentro da amostra .....	25
3.3.2. Avaliação fora da amostra.....	28
4. Preço de risco da ETTJ.....	32
4.1. Preço do risco e Ativos de risco .....	32
4.1.1. Teoria dos Mercados Eficientes – TME .....	32
4.1.2. Retorno da bolsa e preço do risco .....	34
5. Conclusão .....	36
Referências bibliográficas .....	38
Apêndice 1: Derivação do modelo descrito no Capítulo 3.....	40
Apêndice 2: Código utilizado no MATLAB.....	43

## Lista de figuras

2.1. Comparação Selic meta e Expectativa IPCA .....	15
3.1. 1º Componente Principal e Nível da ETTJ .....	19
3.2. 2º Componente Principal e Inclinação da ETTJ .....	20
3.3. Evolução dos fatores latentes .....	23
3.4. Level e Nível da ETTJ .....	24
3.5. Slope e Inclinação da ETTJ.....	24
3.6. Taxa de curto prazo .....	26
3.7. Taxa de médio prazo.....	26
3.8. Taxa de longo prazo.....	27
3.9. Fator level e Expectativa de inflação .....	28
3.10. Taxa de curto prazo com projeção fora da amostra .....	29
3.11. Taxa de médio prazo com projeção fora da amostra .....	29
3.12. Taxa de longo prazo com projeção fora da amostra .....	30

## Lista de tabelas

3.1. Análise dos Componentes Principais .....	19
3.2. Parâmetros Estimados .....	23
3.3. Erro Quadrático Médio dos Modelos .....	31
4.1. Teste ADF .....	34
4.2. IBOVESPA e Preço do risco level .....	34
4.3. IBOVESPA e Preço do risco slope .....	35

*Meu pai costumava dizer: Não aumente sua voz, melhore o seu argumento.*

**Desmond Tutu**, Prêmio Nobel da Paz

## **Lista de Abreviaturas**

BCB – Banco Central do Brasil

BM&FBOVESPA – Bolsa de Valores, Mercadorias e Futuro do Estado de São Paulo

ETTJ – Estrutura a Termo de Taxa de Juros

IBGE – Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística

IBOVESPA – Índice da BM&FBOVESPA

IPCA – Índice de Preços ao Consumidor Amplo

Selic – Sistema Especial de Liquidação e Custódia

TME – Teoria dos Mercados Eficientes

VAR – Vetor Auto-regressivo

# 1. Introdução

A estrutura a termo das taxas de juros (ETTJ) desempenha papel importante dentro de uma economia. Como indicado em Silveira (2005), ela informa o custo do dinheiro ao longo de diversas maturidades. A ETTJ também é importante para observar como uma alteração na taxa básica de juros por um banco central deverá se propagar para a economia, pois a transmissão das decisões do banco central tende a afetar os diferentes tipos de agentes econômicos em horizontes diversos de tempo, conforme Minella e Souza-Sobrinho (1999), tornando importante projetar a curva de juros.

Para a modelagem de curva de juros, se destacam os trabalhos propostos em Nelson e Siegel (1987) e Diebold e Li (2006), que modelam a ETTJ através de parâmetros exponenciais para a extração de três fatores latentes, associados a nível, inclinação e curvatura da curva de juros. Outro trabalho que se destaca nessa área é o Ang e Piazzesi (2003), da família dos modelos afins de estrutura a termo, onde as taxas de juros são funções lineares das variáveis latentes.

Dentro da literatura brasileira, diversos trabalhos para modelagem da curva de juros foram realizados. O trabalho de Silveira (2005) explora um modelo novo-keynesiano, visando projetar a curva de juros incluindo variáveis macroeconômicas. O exposto por Matsumura e Moreira (2006) busca mostrar a relação entre variáveis macroeconômicas e a estrutura a termo de taxas de juros no Brasil através de um modelo onde há a hipótese de não arbitragem. Em Vereda, Lopes e Fukuda (2008), os autores buscam avaliar o ganho gerado pela adição de variáveis macroeconômicas para realizar projeções de longo prazo na ETTJ. Outro trabalho interessante dentro da modelagem afim é o de Pinheiro, Almeida e Vicente (2007) que busca modelar a curva de cupom cambial no Brasil.

Neste trabalho, eu busco replicar o que foi proposto por Rudebusch e Wu (2004) para a curva de juros brasileira, com o modelo ali exposto pertencente à família dos modelos afins. Contudo, busco replicar o modelo que possui somente variáveis latentes, extraíndo tais fatores pelo método de máxima verossimilhança a partir do Filtro de Kalman. Como nos trabalhos acima mencionados, o modelo

aqui proposto pressupõe ausência de arbitragem entre as diversas maturidades, com as taxas de juros sendo funções lineares dos fatores latentes, como o visto em Duffie e Kan (1996) e Litterman e Scheinkman (1991). Com isso, seguindo esses modelos, quase todos os movimentos na curva de juros podem ser capturados através destes fatores não observáveis.

Com a hipótese de ausência de arbitragem, cria-se uma estreita relação entre as taxas de curto prazo e a de longo prazo. Isso significa que, em um mundo onde os agentes são neutros ao risco, não deve haver ganhos entre um indivíduo que detiver um título de longo prazo até o seu vencimento e outro que for comprando títulos curtos e renovando a cada período até o prazo do título longo, implicando que a taxa longa representa a média das expectativas das taxas curtas futuras até a maturidade do título longo. Já em um mundo com agentes avessos ao risco, a taxa longa passa a ser uma média ajustada ao risco das expectativas futuras da taxa de curto prazo.

Importante salientar que o modelo afim aqui proposto somente utiliza informações extraídas da estrutura a termo das taxas de juros, o que limita qualquer interpretação econômica que se atribua às variáveis latentes.

Eu começo o trabalho apresentando os dados que foram utilizados e faço uma breve contextualização histórica do período analisado. No segundo capítulo, eu apresento o modelo afim para a curva de juros brasileira somente com variáveis latentes, com projeções dentro e fora da amostra, e posterior comparação às taxas efetivas.

No terceiro capítulo, eu realizo um exercício relacionando os preços de risco dos fatores não observáveis e um ativo de risco (IBOVESPA), com resultados interessantes, indicando que um aumento do prêmio de risco no presente pode representar um retorno maior, em média, do ativo de risco no futuro. Finalmente, encerro com uma breve conclusão dos resultados obtidos.

## **2. Base de Dados e Contextualização histórica**

### **2.1. Base de Dados**

Para a elaboração do presente trabalho, eu utilizo as taxas de Swap DI-Pré negociadas na BM&FBOVESPA, que são taxas de juros com diversas maturidades e vencimentos genéricos. Essa é uma taxa cotada como *zero-coupon bond* e tem como base uma maturidade fixa  $n$  (em dias). Os vencimentos escolhidos foram 30, 90, 180, 360, 720, 1080, 1800, 3600 e 5580 dias, por se entender que eles poderiam replicar bem a parte curta, média e longa da Estrutura a Termo de Taxa de Juros do Brasil.

Este tipo de taxa foi utilizada para não haver a necessidade de se ajustar qualquer resultado em função da *duration* dos títulos, pois um *zero-coupon bond* tem a *duration* igual ao seu prazo.

As séries foram obtidas na Bloomberg. As taxas coletadas foram as de fechamento do último dia útil de cada mês. O período analisado neste trabalho vai de fevereiro/2007 a dezembro/2016, tendo em vista a disponibilidade de todos os dados ocorrer somente a partir do segundo mês de 2007.

No capítulo 4, o retorno mensal do IBOVESPA será usado como uma *proxy* do ativo de risco para a comparação dos preços do risco extraídos do modelo.

### **2.2. A economia brasileira entre 2007 e 2016**

Na segunda metade da década de 2000, a economia brasileira atravessava um momento de consolidação do regime de Metas de Inflação, com queda consistente da taxa Selic, inflação se situando dentro do intervalo da meta, com centro em 4,5% ao ano, e forte crescimento econômico. Além disso, o ajuste observado nas contas públicas – com a geração de superávit primário significativo – contribuiu para a obtenção do grau de investimento pelo Brasil das principais agências de classificação de risco mundiais. Essa melhora no *rating* brasileiro

ocorreu mesmo num ambiente de estresse internacional gerado pela crise de 2008/09, iniciada no mercado imobiliário norte-americano e que se espalhou pelos mercados financeiros globais.

No começo da década seguinte, as políticas monetárias nas diversas economias globais se encontravam ultra-acomodatócias, visando combater os efeitos adversos da crise acima citada. Não de outra forma, o Brasil experimentava uma política monetária também expansionista, com a taxa Selic, principal instrumento de política monetária do Banco Central do Brasil (BCB), sendo reduzida ao seu menor patamar histórico (7,25% ao ano), mesmo com as expectativas inflacionárias, medidas pela expectativa do IPCA 12 meses à frente, não estando ancoradas no centro da meta de inflação (4,5%), conforme pode ser observado no Gráfico 2.1.

Figura 2.1: Comparação Selic meta e Expectativa IPCA



Fonte: BCB. Elaboração própria.

Em meados de 2013, o então presidente do Federal Reserve, banco central dos EUA, sinalizou uma possível redução dos estímulos monetários, levando a uma subida das taxas de juros nos mercados financeiros globais, com o mercado de juros brasileiro não sendo uma exceção. Adicionalmente, como a inflação se

encontrava acima do centro da meta e as expectativas inflacionárias estavam desancoradas, o BCB iniciou um ciclo de elevação da taxa básica, que durou de meados de 2013, até o início de 2016, com uma pausa próximo das eleições das presidenciais de 2014, com a taxa Selic alcançando 14,25% ao ano no final do ciclo.

No ano de 2015 e no começo de 2016, o mercado financeiro local, e, por conseguinte, o mercado dos juros futuros, foi impactado pela correção dos preços relativos (preços livres versus preços administrados e preços domésticos versus preços internacionais) que elevou a inflação mesmo num ambiente de forte recessão econômica. Além disso, os preços dos ativos financeiros se ajustaram ao ambiente de piora acentuada das contas públicas, culminando com a perda do grau de investimento pelo país das principais agências de classificação de risco a partir de setembro/2015.

Também contribuiu para essa piora do ambiente interno a crise política instaurada no final de 2015, que paralisou o governo e resultou no processo de *impeachment* da então presidente, sendo finalizado em setembro/2016.

Após o *impeachment*, e com a assunção da nova equipe econômica, houve uma melhora nas expectativas e percepção de risco dos agentes, com queda da inflação e das expectativas inflacionárias, permitindo o início do ciclo de redução de juros por parte do Banco Central a partir de outubro/2016.

### 3. Modelo com variáveis latentes

#### 3.1. Modelo afim de estrutura a termo

O modelo que eu tento replicar neste trabalho considera somente variáveis latentes, ou seja, eu busco explicar a evolução das taxas de juros somente por fatores não observáveis nos dados. Neste sentido, é proposta a replicação de um modelo padrão de estrutura a termo como o que consta em Rudebusch e Wu (2004) para o caso brasileiro baseado na premissa de que não há oportunidades de arbitragem entre os títulos das diversas maturidades. Esse modelo introduz a especificação de precificação de título afim, sem arbitragem.

Como no artigo em referência, o modelo de estrutura a termo possui três equações básicas. A primeira é a equação de transição, com o vetor de variáveis de estado seguindo um processo gaussiano VAR(1):

$$F_t = \rho F_{t-1} + \Sigma \epsilon_t \quad (3-1)$$

Na equação (3.1) acima,  $F$  é o vetor de estados de dimensão  $2 \times 1$ ,  $\rho$  é uma matriz triangular inferior de dimensão  $2 \times 2$ ,  $\Sigma$  é diagonal de ordem dois, e os choques  $\epsilon$  são independentes e identicamente distribuídos (i.i.d.) -  $N(0, I_2)$ . A segunda equação define a taxa de juros de curto prazo  $i_t$  como uma função linear das variáveis latentes, com uma constante:

$$i_t = \delta_0 + L_t + S_t = \delta_0 + \delta'_1 F_t \quad (3-2)$$

Assim como no artigo utilizado como referência deste trabalho, a equação (3.2) implica em coeficientes unitários dos dois fatores na taxa de juros de um período, em função da normalização destes fatores não observáveis, sem perda de generalidade. Finalmente, seguindo o artigo de referência, que se baseou em Constantinides (1992), Dai e Singleton (2000), Dai e Singleton (2002), Duffee (2002), dentre outros, o preço do risco associado com os choques do vetor de estados ( $\epsilon_t$ ) é definido como uma função linear do estado da economia:

$$\Lambda_t = \lambda_0 + \lambda_1 F_t \quad (3-3)$$

Em conjunto, a equação de transição (3.1), a equação da taxa de curto prazo (3.2) e os preços dos riscos (3.3) formam um modelo afim gaussiano de estrutura a termo com duas variáveis latentes, em tempo discreto, com imposição de ausência de arbitragem. Seguindo esta estrutura, o logaritmo do preço de um título com maturidade  $j$  ( $b_{j,t}$ ) pode ser representado como uma função linear dos fatores latentes:

$$\ln(b_{j,t}) = A_j + B'_j F_t \quad (3-4)$$

Na equação (3.4) acima, os coeficientes  $A_j$  e  $B_j$  são recursivamente definidos<sup>1</sup> por:

$$A_1 = -\delta_0, \quad B_1 = -\delta_1; \quad (3-5)$$

$$A_{i+1} = A_i + B'_i(-\Sigma\lambda_0) + \frac{1}{\tau} B'_i \Sigma \Sigma' B_i + A_1 \quad (3-6)$$

$$B_{j+1} = B'_j(\rho - \Sigma\lambda_1) + B_1; \quad j = 1, 2, \dots, J \quad (3-7)$$

Com esta precificação dos títulos, a taxa até o vencimento (*yield to maturity* - YTM) composta continuamente ( $i_{j,t}$ ) de um título *zero-coupon* com maturidade  $j$  vai seguir a seguinte função linear:

$$i_{j,t} = \frac{-\ln(b_{j,t})}{j} = \bar{A}_j + \bar{B}_j F_t. \quad (3-8)$$

Na equação (3.8) acima, tem-se que  $\bar{A}_j = \frac{-A_j}{j}$  e  $\bar{B}_j = \frac{-B_j}{j}$ .

Seguindo o artigo de referência, para um conjunto de taxas de títulos observadas, a função de verossimilhança deste modelo pode ser calculada na forma fechada, com o modelo podendo ser estimado por máxima verossimilhança. Dessa forma, eu utilizo a estimação por máxima verossimilhança baseada no filtro de Kalman.

Importante salientar que, assim como no artigo de referência, este trabalho possui mais maturidades de títulos do que fatores latentes, implicando na

---

<sup>1</sup> A derivação completa destes coeficientes está disposta no Apêndice 1, no final deste trabalho.

necessidade de estimação por erro de medida *i.i.d.* das taxas dos títulos de todos os vencimentos dispostos nesse trabalho.

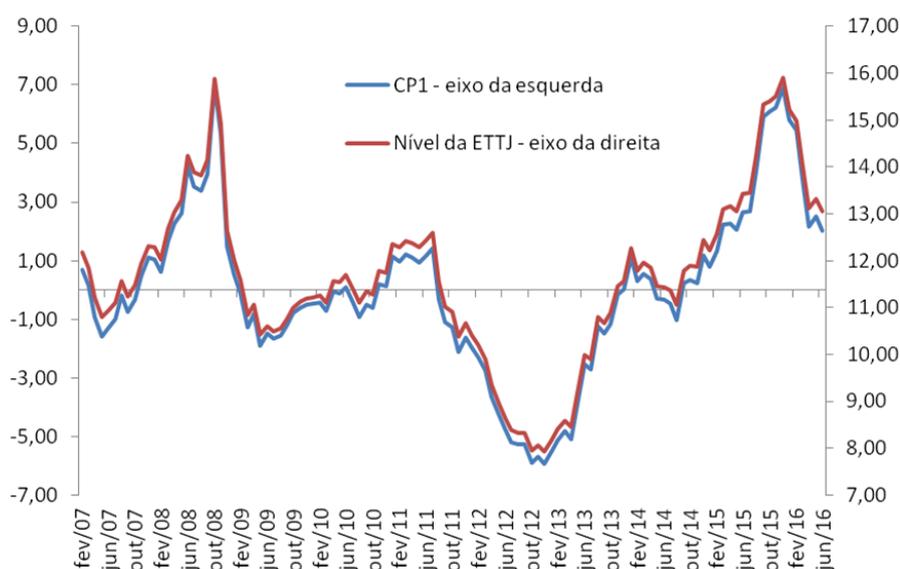
Como em Rudebusch e Wu (2004), o modelo aqui apresentado utiliza duas variáveis latentes. Uma análise via componentes principais, como o sugerido por Cochrane (2001), mostra que a utilização de dois fatores latentes explica cerca de 99% da variância das taxas de juros, conforme pode ser visto na Tabela 3.1.

Tabela 3.1: Análise dos Componentes Principais

	CP1	CP2	CP3	CP4	CP5	CP6
<b>Autovalores</b>	7,9564	0,9142	0,1116	0,0116	0,0024	0,0008
<b>Variância explicada</b>	0,8840	0,1016	0,0126	0,0013	0,0003	0,0001
<b>Variância acumulada</b>	0,8840	0,9856	0,9983	0,9995	0,9998	0,9999

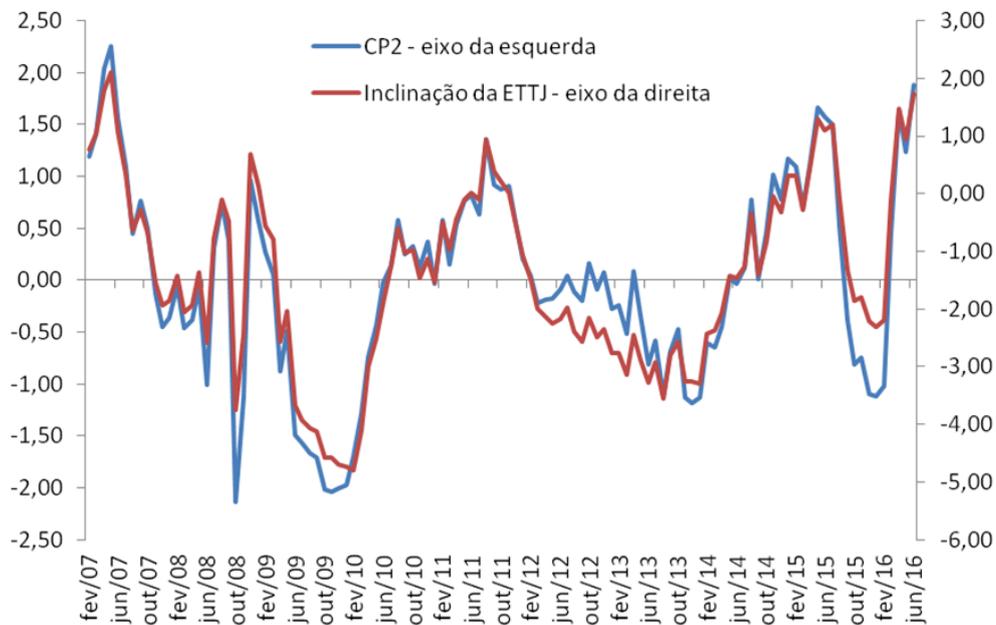
Os resultados se mostram similares aos obtidos por Litterman e Scheinkman (1991), indicando que o primeiro componente principal é um componente de nível, enquanto o segundo se refere à inclinação. O gráfico 3.1 mostra a relação entre o primeiro componente principal e a média das taxas de juros, *proxy* para o nível da ETTJ, enquanto o gráfico 3.2 apresenta a relação entre o segundo componente principal e a inclinação da curva de juros.

Figura 3.1: 1º Componente Principal e Nível da ETTJ



Fonte: Bloomberg. Elaboração própria.

Figura 3.2: 2º Componente Principal e Inclinação da ETTJ



Fonte: Bloomberg. Elaboração própria.

Um resultado interessante do modelo estimado é que o fator latente  $L_t$ , doravante chamado de *level* possui boa aderência à média das taxas, indicando que esse fator pode ser associado ao nível da estrutura a termo. Já o fator  $S_t$ , que será chamado de *slope*, quando comparado à evolução da diferença entre a taxa de Swap Pré-DI de 5580 dias e a de 30 dias possui uma aderência satisfatória, podendo este fator ser comparado à inclinação da ETTJ.

### 3.2. Estimação do Modelo

Como mencionado na seção anterior, a estimação utilizada neste trabalho é a de máxima verossimilhança baseada no Filtro de Kalman, seguindo o proposto em Sousha (2005) e Silveira (2005). Nesta modelagem, está sendo utilizado um modelo gaussiano, o que é bem adequado para a classe de estimadores lineares, sendo os estimadores consistentes e eficientes, como pode ser visto em Bollerslev e Wooldridge (1992). Além disso, se consegue evitar a hipótese usual de que apenas algumas taxas, selecionadas de forma arbitrária, são medidas com erro. Assim, pode se supor que todas as taxas são medidas com erro e deixar que o

próprio modelo estime esses erros de medida. As propostas de Chen e Scott (1993) e de Sims (2002) também contribuem para a resolução do modelo proposto neste trabalho.

### 3.2.1. Filtro de Kalman

Como especificado anteriormente, é assumido neste trabalho que os fatores latentes seguem um processo gaussiano VAR(1), com erros de estimação sendo *i.i.d.* O modelo em espaço de estado é definido pela equação de estado (3.1) e pela equação de transição (3.2). O valor inicial de  $F_0$  é definido pela sua média incondicional e  $\Sigma_{0|0}$  é definido como a matriz de covariância incondicional do vetor de estados  $F_t$ , seguindo as equações abaixo:

$$Cov(F_t) = \rho Cov(F_t)\rho' + \Sigma\Sigma'$$

$$\Sigma_{0|0} = \rho\Sigma_{0|0}\rho' + \Sigma\Sigma'$$

Com a especificação aqui proposta para o VAR, a matriz de covariância incondicional é dada por  $vec(\Sigma_{0|0}) = \rho vec(\Sigma_{0|0})\rho' + vec(\Sigma\Sigma')$  que pode ser reescrita como  $vec(\Sigma_{0|0}) = (I - \rho\otimes\rho')vec(\Sigma\Sigma')$ .

Dadas as condições iniciais, o passo seguinte é fazer a predição. Nesse sentido, o filtro de Kalman irá simular o vetor das variáveis latentes para, em seguida, estimar a taxa de juros, seguindo a lei de movimento estipulada na equação (3.2).

Para fazer a predição  $t = 1, \dots, T$ , o modelo segue:

$$F_{t|t-1} = \rho F_{t-1|t-1}$$

$$\Sigma_{t|t-1} = \rho\Sigma_{t-1|t-1}\rho' + \Sigma\Sigma'$$

$$\eta_{t|t-1} = i_t - i_{t|t-1} = i_t - A - BF_{t|t-1}$$

$$f_{t|t-1} = B\Sigma_{t|t-1}B' + \sigma^2I$$

Por ser um modelo que "aprende" à medida que se adicionam novos valores observados, o filtro reavalua as simulações feitas e estima novos valores para os fatores latentes. Isso é feito através da atualização dos parâmetros da

equação de estado (2.1), gerando o chamado ganho ótimo de Kalman ( $K_t$ ), que segue:

$$K_t = \Sigma_{t|t-1} B f_{t|t-1} \quad (3-9)$$

A atualização do vetor de estados é feita através de  $F_{t|t} = F_{t|t-1} + K_t \eta_{t|t-1}$ .

Para a avaliação de cada priori gerada pelo filtro, se avalia o estimador de máxima verossimilhança ( $\Theta$ ) através da função indicada na subseção a seguir.

### 3.2.2. Máxima Verossimilhança

Esta subseção apresenta a função de verossimilhança que eu utilizo neste trabalho, que é uma tentativa de replicação da que foi utilizada por Rudebusch e Wu (2004) para o modelo somente com variáveis latentes. Ela vai ser uma função dos parâmetros  $\rho$ ,  $\Sigma$  e  $\Lambda$  presentes nas equações (3.1), (3.2) e (3.3).

A função de verossimilhança é definida como:

$$\begin{aligned} l(\Theta) &= -\frac{1}{2} \sum \ln((2\pi)^n |f_{t|t-1}|) - \frac{1}{2} \sum \eta'_{t|t-1} f_{t|t-1}^{-1} \eta_{t|t-1} \quad (3-10) \\ &= -\frac{nT}{2} \ln(2\pi) - \frac{1}{2} \sum \eta'_{t|t-1} f_{t|t-1}^{-1} \eta_{t|t-1} \end{aligned}$$

A otimização da função foi realizada no programa MATLAB e, para o leitor mais interessado, a programação utilizada está disponível no apêndice 2, permitindo descobrir os parâmetros das matrizes  $\rho$ ,  $\Sigma$  e  $\lambda$  para a projeção da variável  $i_t^{(n)}$ .

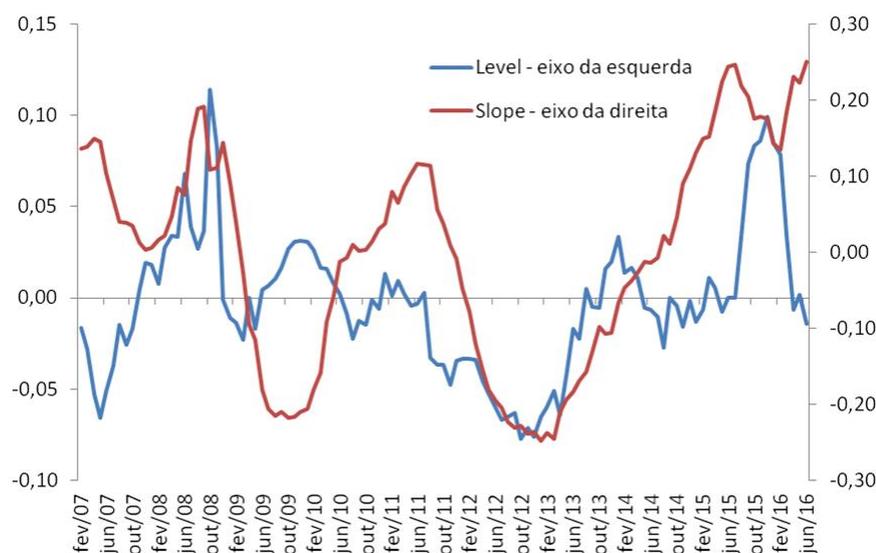
A tabela 3.2 apresenta as estimativas dos parâmetros do modelo<sup>2</sup>.

Tabela 3.2: Parâmetros Estimados

Vetor de Estados ( $\rho$ )				
	$L_{t-1}$		$S_{t-1}$	
$L_t$	0,9969	(0,0496)		
$S_t$	0,2068	(0,0742)	0,9237	(0,0200)
Preço do Risco ( $\lambda$ )				
	$L_t$		$S_t$	
$\lambda_0$	-0,0609	(0,1307)	-11,6946	(0,0033)
$\lambda_{1,L}$	-0,0792	(0,0112)	-16,9148	(0,0419)
$\lambda_{1,S}$	1,1426	(0,0010)	-5,0471	(0,0036)
Desvio-Padrão ( $\Sigma$ )				
	$L_t$		$S_t$	
$\sigma$	0,0007	(0,0002)	0,0007	(0,0002)

O gráfico 3.3 apresenta a evolução dos fatores latentes, obtidos pelo modelo. Os gráficos 3.4 e 3.5 comparam os fatores latentes *level* e *slope* com o nível e a inclinação da curva de juros, respectivamente, indicando boa aderência dos fatores latentes.

Figura 3.3: Evolução dos fatores latentes



Fonte e Elaboração própria.

<sup>2</sup> Os erros padrão dos parâmetros estão entre parênteses.

Figura 3.4: Level e Nível da ETTJ

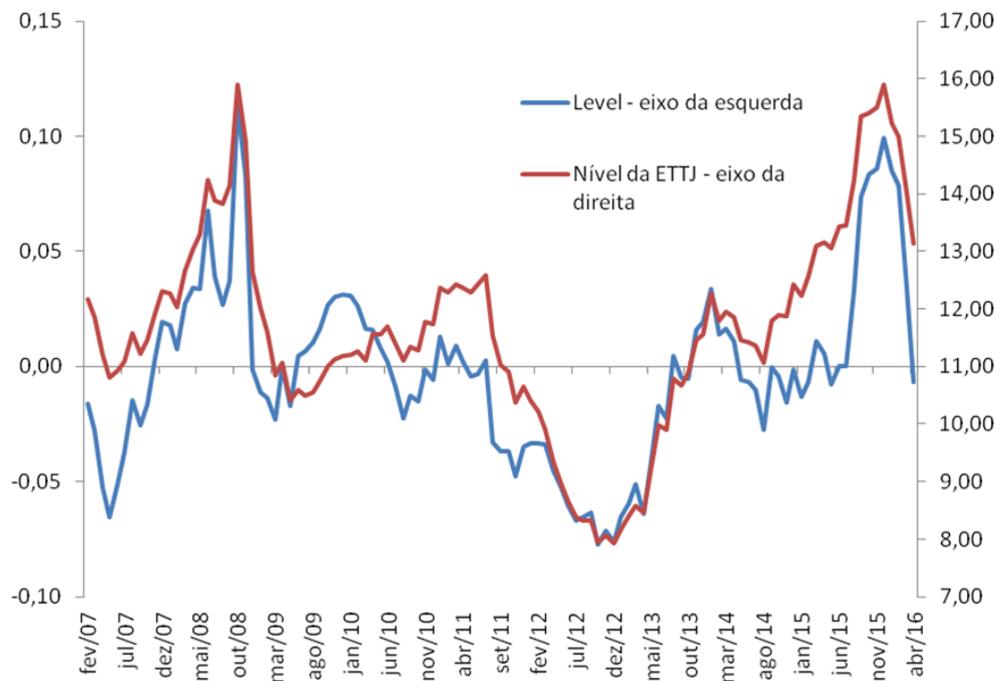


Figura 3.5: Slope e Inclinação da ETTJ



Fonte e Elaboração própria.

### **3.3. Projeção das taxas de juros**

Nesta seção, serão apresentados os resultados obtidos pelo modelo com variáveis latentes e sua comparação com os números efetivamente observados. Para aferir a acurácia do modelo para previsões fora da amostra, será considerado o período de fevereiro de 2007 até junho de 2016 como sendo a janela de estimação e os meses de julho a dezembro de 2016 para a projeção fora da amostra. Além disso, serão comparados os resultados obtidos pelo modelo com o passeio aleatório para avaliar se há ganhos na projeção das taxas de juros através do modelo proposto neste trabalho.

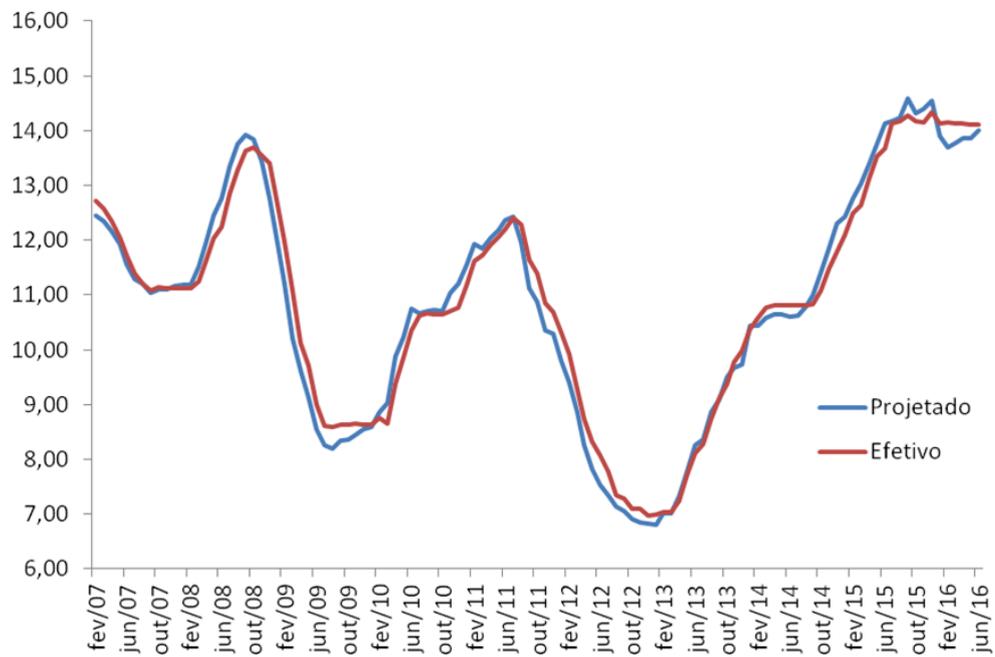
#### **3.3.1. Projeção dentro da amostra**

A partir das projeções dos fatores latentes, e dos demais parâmetros, a equação (3.8) permite que se projete as taxas de juros para as diversas maturidades.

Sendo assim, nesta subseção, são apresentados graficamente as evoluções das taxas de juros obtidas pelo modelo e sua comparação com o que foi efetivamente observado.

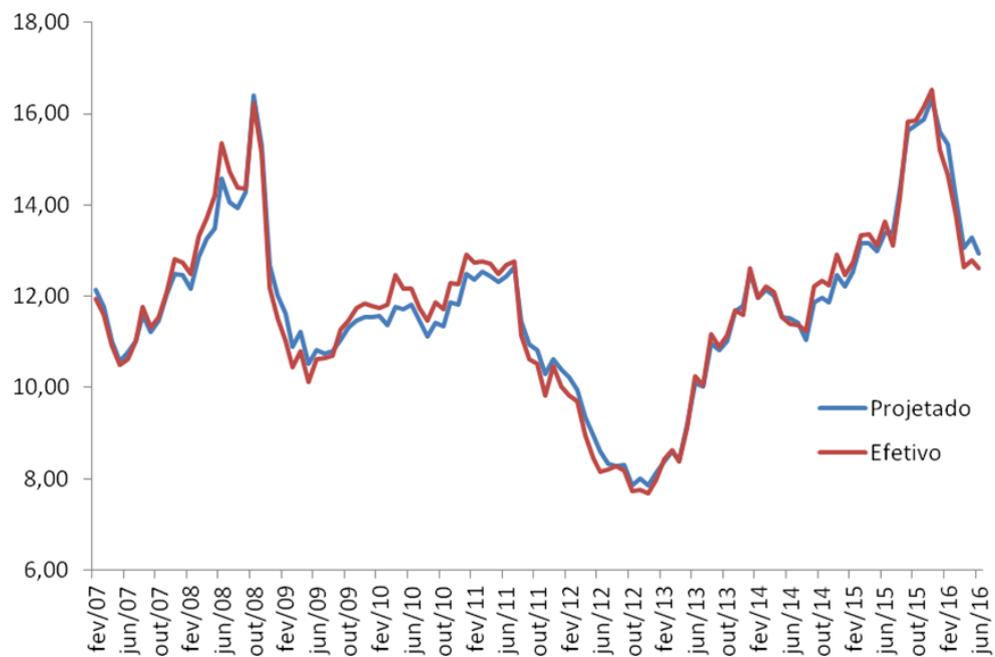
Com relação à projeção dentro da amostra e sua comparação com os valores efetivamente observados das *yields*, eu apresento nos gráficos 3.6, 3.7 e 3.8, respectivamente, a taxa de curto prazo, aqui considerada como a taxa de swap de 30 dias, a de médio prazo, exemplificada pelo contrato de swap de 720 dias e, por fim, a de longo prazo sendo representada pelo contrato de 5580 dias (por ser o contrato de maior maturidade).

Figura 3.6: Taxa de curto prazo



Fonte: BCB. Elaboração própria.

Figura 3.7: Taxa de médio prazo



Fonte: Bloomberg. Elaboração própria.

Figura 3.8: Taxa de longo prazo

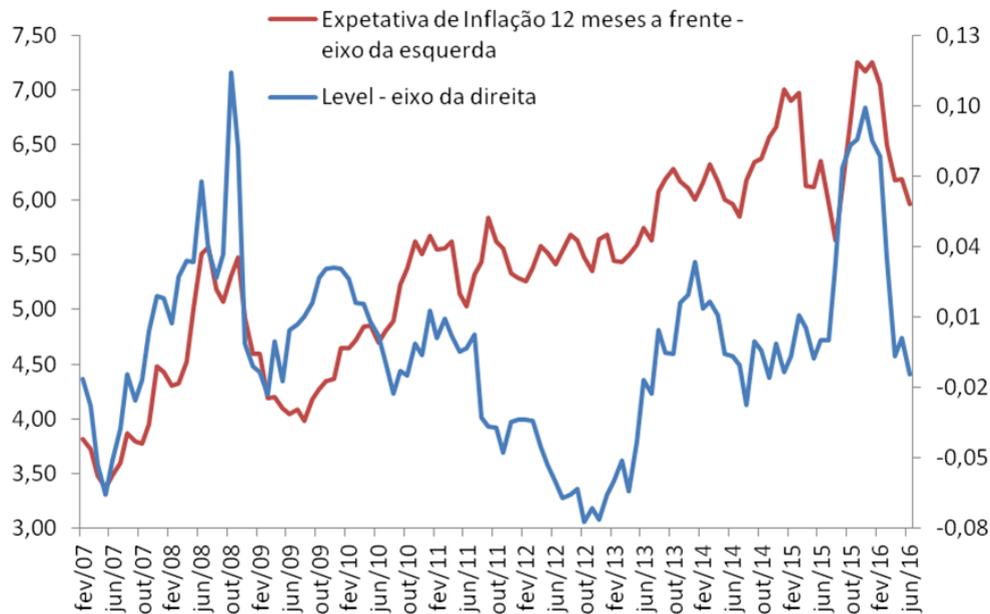


Fonte: Bloomberg. Elaboração própria.

Além da relação com o nível da ETTJ, o fator latente *level* se mostra aderente à expectativa de inflação 12 meses à frente. A correlação entre as duas séries na amostra deste trabalho é positiva, embora baixa (24,5%). Contudo, eu testo a correlação entre as séries excluindo o período de agosto/2011 a março/2013, período onde a taxa Selic foi reduzida até o seu patamar mínimo e mantido nesse nível, mesmo com as expectativas inflacionárias não estando ancoradas. Dessa forma, eu avalio a correlação das séries em dois momentos, de fevereiro/2007 a julho/2011 e de abril/2013 a dezembro/2016. Os resultados que eu encontro são mais interessantes. Na primeira janela, a correlação entre as séries é de 52,2%, enquanto na segunda é de 63,2%.

O gráfico 3.9 mostra esta relação entre essas duas variáveis, algo já esperado, tendo em vista que quando as expectativas de inflação desancoram, se espera que o Banco Central eleve a taxa Selic, afetando toda a curva de juros.

Figura 3.9: Fator level e Expectativa de inflação



Fonte: BCB. Elaboração própria.

### 3.3.2. Avaliação fora da amostra

Como mencionado anteriormente, para a projeção fora da amostra, foram utilizados os meses de julho/2016 a dezembro/2016. Como o modelo aqui proposto é um VAR(1), para se fazer a projeção dos fatores latentes fora da amostra basta utilizar a equação (3.1), pois, como  $E_t[F_{t+1}] = E_t[\rho F_t] + E_t[\Sigma \epsilon_{t+1}]$ , e  $E_t[\Sigma \epsilon_{t+1}] = 0$  pode-se achar o valor esperado do vetor de estados para vários períodos à frente. Com isso, eu projeto os valores das taxas de juros para os diversos vencimentos e os comparo com os dados efetivamente observados.

Os gráficos 3.10, 3.11 e 3.12 mostram a evolução das projeções fora da amostra estimada pelo modelo e compara com o que foi efetivamente observado para as taxas de curto, médio e longo prazo, respectivamente.

Figura 3.10: Taxa de curto prazo com projeção fora da amostra

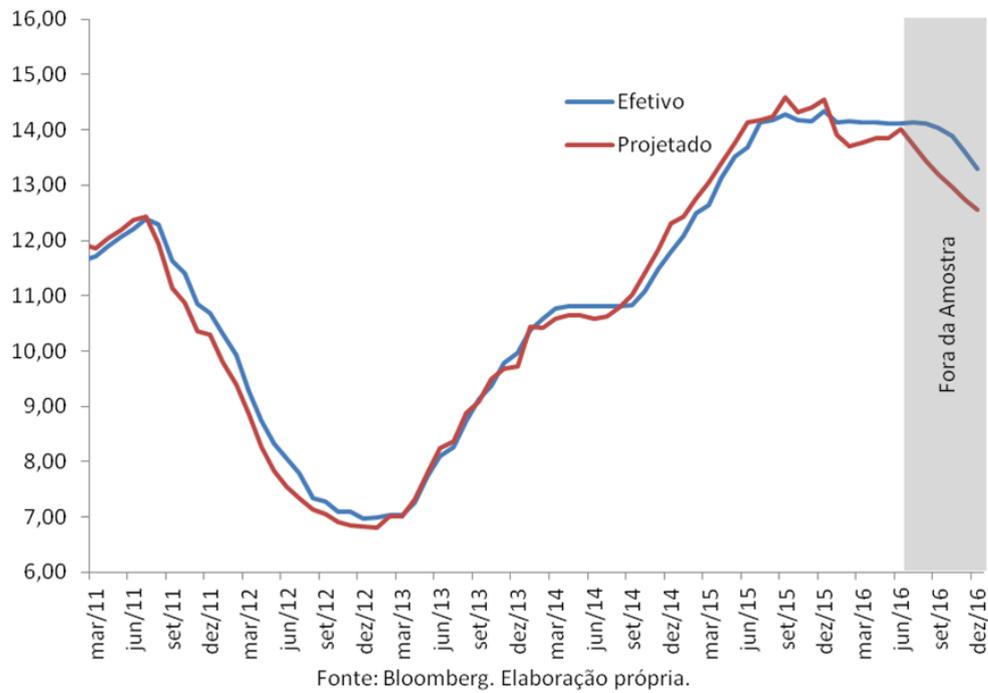


Figura 3.11: Taxa de médio prazo com projeção fora da amostra

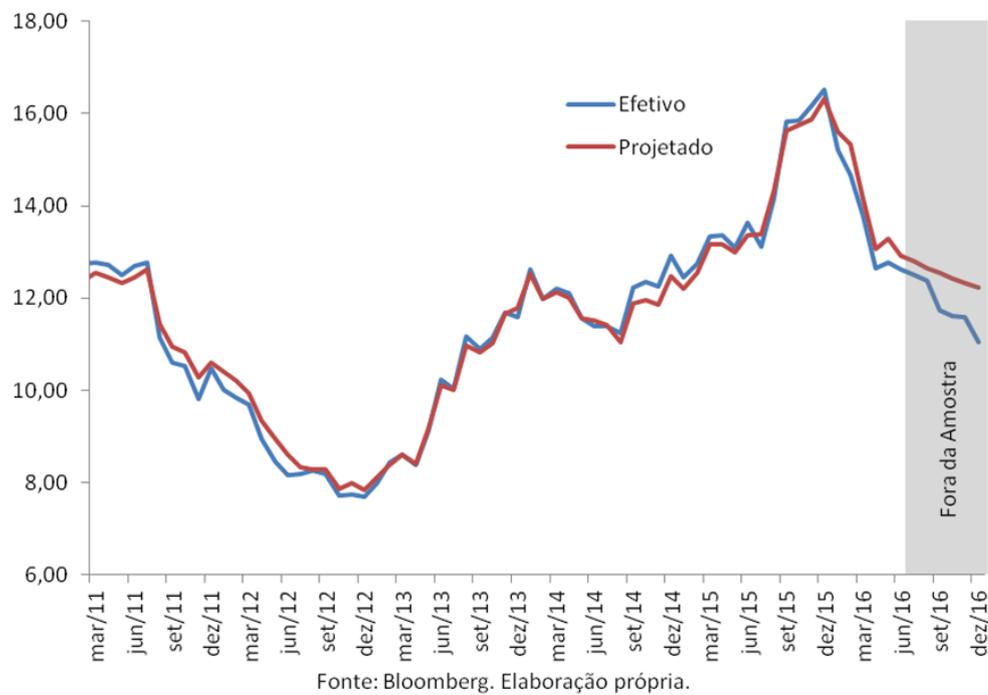
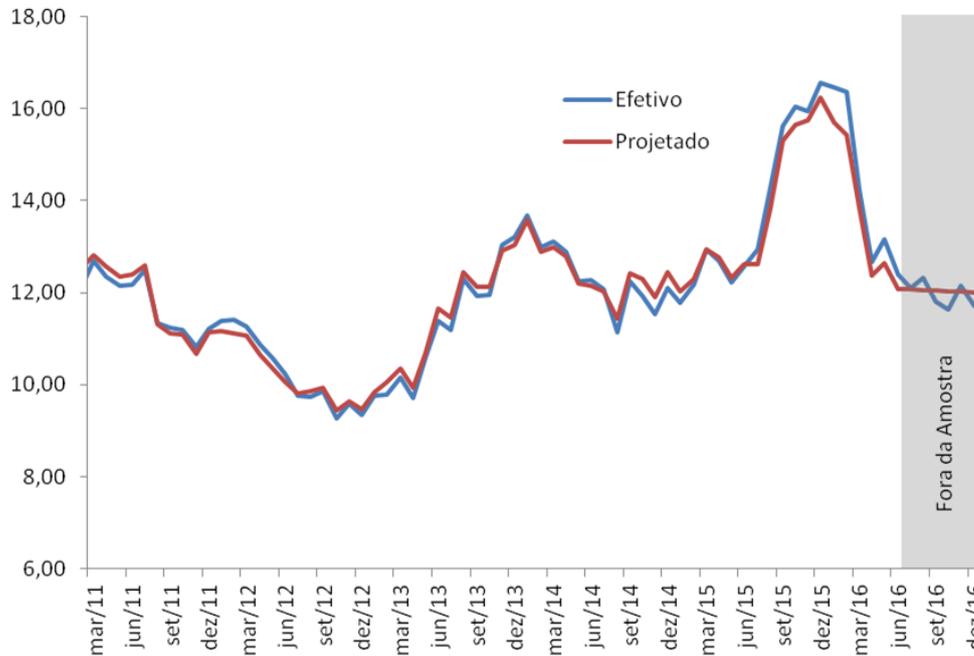


Figura 3.12: Taxa de médio prazo com projeção fora da amostra



Fonte: Bloomberg. Elaboração própria.

Notadamente há um descasamento entre as projeções fora da amostra e as taxas de juros efetivamente observadas. Isso se deve à limitação que este tipo de modelo possui, tendo em vista que eu utilizo somente duas variáveis latentes para explicar toda a curva de juros. Com isso, acabo excluindo a relação que as taxas de juros possuem com o resto da economia, como, por exemplo, a relação dos juros com a inflação e o hiato do produto, sugerida por Taylor (1993). Dessa forma, os choques  $\epsilon$  passa a ter grande relevância na evolução das taxas de juros.

Tendo em vista esta discrepância nas projeções, eu faço uma comparação do modelo proposto neste trabalho contra um modelo de passeio aleatório. A métrica utilizada para tal avaliação é o Erro Quadrático Médio (EQM), medida que faz a média do quadrado dos desvios entre o modelo proposto e o efetivamente observado.

A tabela 3.3 apresenta os resultados do EQM gerados por cada modelo, indicando horizontes onde o modelo apresenta menor EQM em relação ao passeio aleatório e vice-versa. Além disso, é importante ressaltar que, num momento onde a taxa básica esteja sendo mantida inalterada, a taxa de curto prazo tende a

permanecer em patamares próximos, o que favorece o modelo de passeio aleatório frente a um modelo que só possui variáveis latentes, reforçando a necessidade de um modelo de curva de juros que acrescente variáveis macroeconômicas para a sua estimação.

Tabela 3.3: Erro Quadrático Médio dos Modelos

<b>Swap Pré - DI</b>	<b>Modelo Afim</b>	<b>Passeio Aleatório</b>
30 dias	0,58	0,03
90 dias	0,41	0,06
180 dias	0,17	0,10
360 dias	0,15	0,14
720 dias	0,56	0,13
1080 dias	0,52	0,10
1800 dias	0,29	0,12
3600 dias	0,10	0,14
5580 dias	0,07	0,15

## 4. Preço de risco da ETTJ

Neste capítulo, eu busco identificar a relação que pode existir entre os preços dos riscos dos fatores latentes e os ativos de riscos, que neste trabalho terá como *proxy* a série de retornos mensais do IBOVESPA.

### 4.1. Preço do risco e Ativos de risco

A ideia deste exercício é verificar se mudanças na percepção de risco dos agentes no presente afetam o retorno do IBOVESPA no futuro. Como mencionado anteriormente, a evolução do preço do risco do vetor de estados pode ser calculada pelo proposto na equação (2.3). Nela, podem ser extraídos o preço do risco do fator *level* e o do fator *slope*. A partir daí, eu avalio como se dá a relação entre o preço do risco de cada fator latente no presente e o retorno da bolsa no futuro.

Deve-se destacar que o exercício aqui proposto busca seguir a ideia presente em Cochrane e Piazzesi (2002) de relacionar o retorno de ações com títulos soberanos (*bonds*), embora aqui eu faça a regressão do retorno do IBOVESPA contra o preço do risco dos fatores latentes, e não contra as taxas de juros geradas pelos fatores latentes, como o feito naquela publicação.

#### 4.1.1. Teoria dos Mercados Eficientes – TME

Para a realização do exercício aqui proposto, cabe uma breve revisão sobre a Teoria dos Mercados Eficientes.

Segundo Malkiel e Fama (1970), se os preços dos ativos sempre refletirem toda a informação disponível, o mercado será eficiente. Nesse sentido, tem-se que o retorno de um ativo em  $t + 1$ , supondo que ele não pague dividendos, é o seu prêmio de risco ( $\phi$ ) - que contém toda a informação disponível sobre o ativo no instante  $t$  - mais um choque exógeno em  $t + 1$  ( $\epsilon_{t+1}$ ). Dito de outra forma, o retorno do ativo seguirá a seguinte lei de movimento:

$$R_{t+1|t} = \phi_t + \epsilon_{t+1} \quad (4-1)$$

Em equilíbrio, o retorno esperado do ativo deverá convergir para o seu valor fundamental que é constante ao longo do tempo, gerando um prêmio por exposição ao risco desse ativo também constante, isto é:

$$E[R_{t+1}|f_t] = \phi \quad (4-2)$$

Outra maneira possível de se avaliar a previsibilidade dos retornos é testar a seguinte regressão:

$$R_{t+k} = \alpha + \beta x_t + \epsilon_{t+k} \quad (4-3)$$

Na equação (4.3) acima,  $R_{t+k}$  é o retorno esperado entre os períodos  $t$  e  $t + k$  e  $x_t$  é uma variável que se observa no período  $t$ . Com isso, tem-se que:  $E[R_{t+1}|x_t] = \alpha + \beta x_t$ , diferente do exposto pela equação (4.2) - pois deveria apontar  $\beta = 0$ .

Contudo, assumindo a hipótese semiforte da TME<sup>3</sup>, onde o conjunto informacional dos agentes ( $f_t$ ) é formado por informações públicas, a equação (4.3) pode ser usada, com o retorno a longo prazo se tornando previsível.

Nesse sentido, a TME vai indicar que os retornos ajustados a risco são aleatórios e que  $\beta = 0$  deve ocorrer quando o risco for constante ao longo do tempo. Com isso, a equação (4.3) indica que quanto maior for o risco no presente, maior deverá ser o retorno esperado a frente para compensar este risco.

Partindo desta lógica, o exercício que eu faço neste capítulo busca mostrar a regressão do retorno do IBOVESPA no futuro frente aos preços do risco dos fatores latentes no presente, seguindo a equação (4.3).

---

<sup>3</sup> Resumidamente, existem três formas da Teoria dos Mercados Eficientes, onde as diferenças se encontram no conjunto informacional dos investidores ( $f_t$ ): (i) a fraca, onde  $f_t$  é formado apenas por preços e retornos passados; (ii) a semi-forte, onde  $f_t$  é formado por quaisquer informações públicas; e (iii) a forte, onde  $f_t$  é composto por quaisquer informações públicas ou privadas.

#### 4.1.2. Retorno da bolsa e preço do risco

Primeiramente, eu avalio se as séries de retornos mensais do IBOVESPA e dos preços do risco das variáveis latentes são estacionárias, através do teste ADF (Dickey-Fuller Aumentado), onde o resultado aponta a rejeição da hipótese de presença de raiz unitária para a série de retornos do IBOVESPA e presença de raiz unitária para as séries de preço do risco, como pode ser visto na tabela 4.1.

Tabela 4.1: Teste ADF

	<b>Estatística t</b>	<b>p-valor</b>
<b>IBOVESPA</b>	-8,9806	0,0000
<b>Risk Level</b>	-1,4351	0,1404
<b>Risk Slope</b>	0,1678	0,7330

Dessa forma, eu estimo uma regressão entre o retorno do IBOVESPA e os preços dos riscos das variáveis latentes em diferença para corrigir a presença de raiz unitária.

Eu começo estimando uma regressão entre o retorno do IBOVESPA e a defasagem do preço do risco do fator *level* em diferença. A tabela 4.2 mostra um resumo dos resultados obtidos. A série se mostra estatisticamente significativa a 1% e um  $R^2$  de 5,9%. O coeficiente da regressão mostra sinal positivo, indicando que um aumento na percepção de risco dos agentes no presente leva, em média, a um aumento no retorno do IBOVESPA no futuro.

Tabela 4.2: IBOVESPA e Preço do risco *level*

<b>Variável Dependente: IBOVESPA</b>			
	<b>Coeficiente</b>	<b>Estatística t</b>	<b>p-valor</b>
<b>D(Risk Level(-1))</b>	3,4004	2,6208	0,0100
<b>Constante</b>	0,4862	0,7838	0,4348

O mesmo ocorre quando estimo a regressão entre o retorno da bolsa e a variação do preço do risco *slope*, com a série sendo estatisticamente significativa a 5% e um  $R^2$  de 5,0%, e o coeficiente com sinal positivo. A tabela 4.3 mostra um resumo dos resultados obtidos.

Tabela 4.3: IBOVESPA e Preço do risco *slope*

<b>Variável Dependente: IBOVESPA</b>			
	<b>Coefficiente</b>	<b>Estatística t</b>	<b>p-valor</b>
<b>D(Risk Slope(-1))</b>	9,7502	2,3948	0,0183
<b>Constante</b>	0,4776	0,7662	0,4452

Estes resultados se mostram em linha com o indicado na subseção anterior, pois, num ambiente de maior percepção de risco dos agentes no presente, eles irão demandar um maior retorno esperado para incorrer no risco do ativo arriscado. Dessa forma, se espera que os mesmos reduzam suas alocações nessa classe de ativos, considerada arriscada. Tal movimento leva a uma queda nos preços das ações, fazendo com que a bolsa fique mais barata.

Com isso, o menor preço das ações no período  $t$  enseja num maior retorno esperado no futuro (período  $t + 1$ ), tendo em vista que não há mudança no valor futuro esperado dos ativos de risco (o valor fundamental, a princípio, não se altera, não afetando o fluxo de caixa futuro esperado).

Outro detalhe importante já esperado se refere ao baixo  $R^2$  das duas regressões realizadas, porque o retorno esperado de ações está sujeito a choques exógenos que podem afetar o fluxo de caixa projetado para essas ações e/ou a taxa de desconto desses fluxos e, conseqüentemente, o seu retorno esperado.

## 5. Conclusão

Neste trabalho eu busquei utilizar um modelo afim de estrutura a termo de taxa de juros para a economia brasileira com base, principalmente, no trabalho desenvolvido por Rudebusch e Wu (2004) para modelar a curva de juros no período entre fevereiro/2007 e dezembro/2016, período marcado por dois momentos bastantes distintos da economia brasileira. O primeiro com a consolidação da queda das taxas de juros, com contas fiscais sendo ajustadas, e o segundo com inflação elevada, recessão econômica, desajuste fiscal e perda do grau de investimento.

O modelo buscou replicar a curva de juros através de dois fatores latentes, como no artigo usado de referência para este trabalho, dentre outros (como SOUSHA (2005) e Silveira (2005)), considerando a não existência de arbitragem entre as taxas de juros dos diversos vencimentos. A estimação utilizada é a de máxima verossimilhança baseada no Filtro de Kalman.

Os resultados encontrados se mostraram interessantes, com boa aderência entre as taxas projetadas e as efetivamente observadas. Contudo, para fazer projeções fora da amostra, os resultados comparados a um passeio aleatório não foram conclusivos. Enquanto para alguns vencimentos houve ganho em relação ao passeio aleatório, as projeções para os outros vencimentos mostraram maior erro quadrático médio.

Uma possível limitação que esse tipo de modelo possui é o fato de ele utilizar somente duas variáveis não observáveis para explicar toda a curva de juros brasileira, não levando em consideração a relação das taxas de juros com o restante da economia, como, por exemplo, a relação entre a taxa de juros e o hiato do produto e a inflação, como sugerido por Clarida, Gali e Gertler (1998) e outros. Uma evolução para este tipo de modelo, que boa parte da bibliografia deste trabalho já sugere, é o acréscimo de variáveis macroeconômicas para explicar as taxas de juros, principalmente, inflação e hiato do produto, além de um prêmio de risco.

Finalmente, a partir do modelo aqui proposto, eu realizei um exercício relacionando o preço do risco das variáveis latentes e um ativo de risco, no caso o IBOVESPA. Os resultados se mostraram interessantes e dentro do esperado, indicando que um aumento do preço do risco no presente pode apontar para um maior retorno esperado da bolsa no futuro, isto é, quando os ajustes do valor presente das ações se dão por uma maior percepção de risco, sem alterações no valor esperado dos seus fluxos de caixa futuro, o retorno esperado no futuro deverá ser maior.

Importante salientar que o  $R^2$  das duas regressões realizadas se mostrou baixo, o que já se esperava, tendo em vista que o retorno esperado de ações está sujeito a choques exógenos que podem afetar o fluxo de caixa projetado para essas ações ou a taxa de desconto desses fluxos e, conseqüentemente, o seu retorno esperado.

## Referências Bibliográficas

ANG, A.; PIAZZESI, M. **A no-arbitrage vector autoregression of term structure dynamics with macroeconomic and latent variables.** Journal of Monetary economics, 50(4):745–787, 2003.

BACKUS, D.; FORESI, S.; TELMER, C. **Discrete-time models of bond pricing.** Technical report, National bureau of economic research, 1998.

BOLLERSLEV, T.; WOOLDRIDGE, J. M. **Quasi-maximum likelihood estimation and inference in dynamic models with time-varying covariances.** Econometric reviews, 11(2):143–172, 1992.

CHEN, R.-R.; SCOTT, L. **Maximum likelihood estimation for a multifactor equilibrium model of the term structure of interest rates.** The Journal of Fixed Income, 3(3):14–31, 1993.

CLARIDA, R.; GALI, J.; GERTLER, M. **Monetary policy rules in practice: some international evidence.** european economic review, 42(6):1033–1067, 1998.

COCHRANE, J. H. **Asset pricing, 2001,** 2001.

COCHRANE, J. H.; PIAZZESI, M. **Bond risk premia.** Technical report, National Bureau of Economic Research, 2002.

CONSTANTINIDES, G. M. **A theory of the nominal term structure of interest rates.** Review of Financial Studies, 5(4):531–552, 1992.

DAI, Q.; SINGLETON, K. J. **Expectation puzzles, time-varying risk premia, and affine models of the term structure.** Journal of financial Economics, 63(3):415–441, 2002.

DAI, Q.; SINGLETON, K. J. **Specification analysis of affine term structure models.** The Journal of Finance, 55(5):1943–1978, 2000.

DIEBOLD, F. X.; LI, C. **Forecasting the term structure of government bond yields.** Journal of econometrics, 130(2):337–364, 2006.

DUFFEE, G. R. **Term premia and interest rate forecasts in affine models.** The Journal of Finance, 57(1):405–443, 2002.

DUFFIE, D.; KAN, R. **A yield-factor model of interest rates.** Mathematical finance, 6(4):379–406, 1996.

LITTERMAN, R. B.; SCHEINKMAN, J. **Common factors affecting bond returns.** The Journal of Fixed Income, 1(1):54–61, 1991.

MALKIEL, B. G.; FAMA, E. F. **Efficient capital markets: A review of theory and empirical work.** The journal of Finance, 25(2):383–417, 1970.

MATSUMURA, M.; MOREIRA, A. **Effect of macro shocks over the brazilian yield curve with no arbitrage models.** Texto para Discussão, 1210, 2006.

MINELLA, A.; SOUZA-SOBRINHO, N. **Canais monetários no brasil sob a ótica de um modelo semiestrutural.** BCB, Dez Anos de Metas Para Inflação, 2009, 1999.

NELSON, C. R.; SIEGEL, A. F. **Parsimonious modeling of yield curves.** Journal of business, p. 473–489, 1987.

PINHEIRO, F.; ALMEIDA, C.; VICENTE, J. **Um modelo de fatores latentes com variáveis macroeconômicas para a curva de cupom cambial.** Revista Brasileira de Finanças, 5(1), 2007.

RUDEBUSCH, G. D.; WU, T. **A macro-finance model of the term structure, monetary policy, and the economy!** 2004.

SILVEIRA, M. A. C. D. **Modelo fatorial linear macroeconômico de estrutura a termo da taxa de juros: aplicação para a economia brasileira.** 2005.

SIMS, C. A. **Solving linear rational expectations models.** Computational economics, 20(1):1–20, 2002.

SOUSHA, S.. **Estrutura a termo da taxa de juros e dinâmica macroeconômica no brasil. 2005.** Dissertação (Mestrado em Economia) -Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2005.

TAYLOR, J. B. **Discretion versus policy rules in practice.** In: CARNEGIE-ROCHESTER CONFERENCE SERIES ON PUBLIC POLICY, volumen 39, p. 195–214. Elsevier, 1993.

VEREDA, L.; LOPES, H.; FUKUDA, R. **Estimating var models for the term structure of interest rates.** Insurance: Mathematics and Economics, 42(2):548–559, 2008.

## Apêndice 1 - Derivação do modelo descrito no Capítulo 3

A teoria de finanças sustenta que, na hipótese de ausência de arbitragem, o preço de um ativo financeiro  $S$  qualquer é dado pela relação  $P_t^{(j)} = E_t[M_{t+1}P_{t+1}^{(j-1)}]$ , onde  $P_t$  é o preço do ativo  $S$  no período  $t$ ,  $M_{t+1}$  é o fator de desconto estocástico (FDE) e  $P_t$  é o preço de  $S$  no tempo  $t + 1$ . A título de simplificação, será considerado que o ativo  $S$  paga um rendimento de 1 unidade no seu vencimento, fazendo com que  $P_{t+1} = 1$ . Nesse sentido, temos que o preço de  $S$  passa a ser:

$$P_t^{(j)} = \exp(-i_t) = E_t[M_{t+1}] \quad (\text{A-1})$$

Na equação acima,  $i_t$  é a taxa de juros de curto prazo, medida na frequência de capitalização contínua. Com isso, temos que o FDE se relaciona com a taxa de juros de curto prazo e com o preço do risco percebido pelo mercado através de:

$$M_{t+1} = \exp\left(-i_t - \frac{1}{2}\Lambda'_t\Lambda_t - \Sigma\epsilon_t\right) \quad (\text{A-2})$$

Como não há arbitragem neste tipo de modelo, podemos derivar uma relação recursiva das equações acima, o que gera:

$$\begin{aligned} P_t^{(j)} &= E_t[M_{t+1}] = E_t[M_{t+1}M_{t+2}P_{t+2}^{(j-2)}] \\ &= E_t[M_{t+1}M_{t+2} \dots M_{t+n}P_{t+j}^{(0)}] \\ &= E_t\left[\exp\left(-\sum_{j=0}^{j-1}\left(i_{t+j} + \frac{1}{2}\Lambda'_{t+j}\Lambda_{t+j} + \Lambda'_{t+j}\Sigma\epsilon_{t+1+j}\right)\right)\right] \\ &= E_t[\exp(A_j + B'_jF_t)] = E_t[\exp(-ji_{t,j})] \\ &= E_t^Q\left[\exp\left(\sum_{j=0}^{j-1}i_{t+j}\right)\right] \end{aligned} \quad (\text{A-3})$$

Onde  $E^Q$  representa a expectativa da medida de probabilidade neutra ao risco, cuja dinâmica do vetor de estados  $F_t$  é caracterizada pelo vetor neutro ao risco de constantes e pela matriz neutra ao risco do auto-regressivo:

$$\kappa^Q = \kappa - \Sigma\lambda_0$$

$$\rho^Q = \rho - \Sigma\lambda_1$$

Dado que a representação do risco segue  $\Lambda_t = \lambda_0 + \lambda_1 F_t$ , a lei de movimento do vetor de estados pode ser descrita como:

$$\begin{aligned} F_t &= \kappa^Q + \rho^Q F_{t-1} + \Sigma\Lambda_t + \Sigma\epsilon_t \\ &= (\kappa^Q + \Sigma\lambda_0) + (\rho^Q \Sigma\lambda_1) F_{t-1} + \Sigma\epsilon_t \\ F_t &= \rho F_{t-1} + \Sigma\epsilon_t \end{aligned} \quad (\text{A-4})$$

Portanto, tem-se que  $(\kappa^Q + \Sigma\lambda_0) = 0$ .

A função afim das variáveis de estado para as taxas de juros seguem o seguinte processo:

$$\begin{aligned} \ln(P_t^j) &= A_j + B'_j F_t \\ i_{t,t+j} &= \frac{-1}{j} (A_j + B'_j F_t) = \bar{A}_j + \bar{B}'_j F_t \end{aligned} \quad (\text{A-5})$$

Onde os coeficientes seguem as seguintes equações diferenciais:

$$\begin{aligned} \bar{A}_j &= \bar{A}_{j-1} + \bar{B}'_{j-1} (-\Sigma\lambda_0) + \frac{1}{2} \bar{B}'_{j-1} \Sigma \Sigma' \bar{B}'_{j-1} + \bar{A}_1 \\ \bar{B}'_j &= \bar{B}'_{j-1} (\rho - \Sigma\lambda_1) + \bar{B}'_1 \end{aligned} \quad (\text{A-6})$$

Para  $j = 2, \dots$ , fazendo com que (A.6) combine com (3.6) e (3.7). Interessante salientar que estas equações podem ser derivadas de uma equação de precificação de kernel:

$$\begin{aligned} P_t^{(j+1)} &= E_t [M_{t+1} P_{t+1}^{(j)}] \\ &= E_t \left[ \exp \left( -i_t - \frac{1}{2} \Lambda'_t \Sigma \Lambda_t - \Lambda'_t \epsilon_{t+1} \right) \exp(A_j + B'_j F_t) \right] \\ &= \exp \left( -i_t - \frac{1}{2} \Lambda'_t \Sigma \Lambda_t + A_j \right) E_t \left[ \exp(-\Lambda'_t \epsilon_{t+1} + B'_j F_t) \right] \\ &= \exp \left( -\delta_0 - \delta'_1 F_t - \frac{1}{2} \Lambda'_t \Sigma \Lambda_t + A_j \right) E_t \left[ \exp \left( -\Lambda'_t \epsilon_{t+1} + B'_j (\rho F_t + \epsilon_{t+1}) \right) \right] \end{aligned} \quad (\text{A-7})$$

$$\begin{aligned}
&= \exp\left(-\delta_0 - \delta'_1 F_t - \frac{1}{2} \Lambda'_t \Sigma \Lambda_t + A_j \right. \\
&\quad \left. + B'_j (\rho F_t)\right) E_t \left[ \exp\left(-\Lambda'_t \epsilon_{t+1} + B'_j (\epsilon_{t+1})\right) \right] \\
&= \exp\left(-\delta_0 + A_j + (B'_j \rho - \lambda'_1) F_t - \frac{1}{2} \Lambda'_t \Sigma \Lambda_t\right) E_t \left[ \exp\left(-\Lambda'_t + B'_j\right) \epsilon_{t+1} \right] \\
&= \exp\left(-\delta_0 + A_j + (B'_j \rho - \lambda'_1) F_t - \frac{1}{2} \Lambda'_t \Sigma \Lambda_t\right) \exp\left(E_t \left[ (-\Lambda'_t + B'_j) \epsilon_{t+1} \right] \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} \text{var} \left( (-\Lambda'_t + B'_j) \epsilon_{t+1} \right) \right) \\
&= \exp\left(-\delta_0 + A_j + (B'_j \rho - \lambda'_1) F_t \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{2} \Lambda'_t \Sigma \Lambda_t\right) \exp\left(\frac{1}{2} \text{var} \left( (-\Lambda'_t + B'_j) \epsilon_{t+1} \right) \right) \\
&= \exp\left(-\delta_0 + A_j + (B'_j \rho - \lambda'_1) F_t \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{2} \Lambda'_t \Sigma \Lambda_t\right) \exp\left(\frac{1}{2} E_t \left[ (-\Lambda'_t + B'_j) \epsilon_{t+1} \epsilon'_{t+1} (-\Lambda_t + B_j) \epsilon_{t+1} \right] \right) \\
&= \exp\left(-\delta_0 + A_j + (B'_j \rho - \lambda'_1) F_t \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{2} \Lambda'_t \Sigma \Lambda_t\right) \exp\left(\frac{1}{2} \left[ \Lambda'_t \Lambda_t - 2B'_j \Lambda_t + B'_j B_j \right] \right) \\
&= \exp\left(-\delta_0 + A_j + (B'_j \rho - \lambda'_1) F_t - B'_j \Sigma \Lambda_t + \frac{1}{2} B'_j B_j\right) \\
&= \exp\left(-\delta_0 + A_j + (B'_j \rho - \lambda'_1) F_t - B'_j (\lambda_0 + \lambda'_1 F_t) + \frac{1}{2} B'_j \Sigma B_j\right) \\
&= \exp\left(-\delta_0 + A_j + B'_j \lambda_0 + \frac{1}{2} B'_j \Sigma B_j + (B'_j \rho - B'_j \lambda_1 - \lambda'_1) F_t\right) \\
P_t &= \exp\left(A_1 + A_j + B'_j \lambda_0 + \frac{1}{2} B'_j \Sigma B_j + (B'_j \rho - B'_j \lambda_1 - B'_1) F_t\right)
\end{aligned}$$

Podemos observar que o logaritmo natural desta última igualdade equivale à definição da variável observável  $i_{t,j}$ .

## Apêndice 2

### Código utilizado no MATLAB

A seguir, eu apresento o código utilizado no programa MATLAB.

```
clear all;
%A. DATA PREPARATION AND MODEL SPECIFICATION
% Define path and load data fdata=xlsread(Base de Dados); % yield
data
% Set global some parameters and intermediate result for global using or
% the purpose of checking.
global yy FF Ffor yn maturity K k F1 Fu;
global um aa0 bb0 AA1 BB1;
global mu rho crp del0 del1 lam1 ;
global sigmatlagbigBftlagFiniset;
% Define yield structure used in the estimation
yname = ['m01';'m03';'m06';'y01';'y02';'y03';'y05';'y10';'y15'];
maturity = [ 1; 3; 6; 12; 24; 36; 60; 120; 186];
colnumber = 2:1:10;
% Define PARAMETERS
wholesample = 1; % 1: estimate whole sample; 0: rolling estimation t=120
crp = 0; % 1: constant risk price; 0: time varying risk price
yn = size(yname,1); % number of yields
Roll=1; %Rolling estimation.
length = 111; % data length
K = 2; % number of factors
lam1 = zeros(K,K); % preset time varying risk prices to zeros.
yield= fdata(1:length,1:9);
% B. ESTIMATION
wholesample == 1;
START = 1;
LAST = length;
FT = 1;
% MAIN LOOP: estimation
k=1;
while k <= FT;
```

```

%:::: 1. DEFINE DATA to be used for yields and states
yy = yield(START+(k-1)*Roll:LAST+k-1, :);
yy = yy';
mu = [0;0];
del0 = mean(yy(1,:)); %short rate equation intercept.
del1 = [1; 1];
%:::: 2. Set starting value for MLE.
rho11 = 0.8545; rho12 = 0; rho21 = -0.0271; rho22 = 0.9075;
sigma11 = (1 - rho112) . var(yy(1, :));
sigma22 = (1 - rho222) . var(yy(1, :));
sig = std(yy(:, 1));
lam01 = -1.9768; lam02 = 13.4697;
lam111 = -0.0405; lam112 = 1.0694;
lam121 = -0.0684; lam122 = -0.1982;
bigthet = [rho11 rho21 rho22 sigma11 sigma22 sig lam01
lam02 lam111 lam112 lam121 lam122]';
%:::: 3. MLE (maximize likelihood estimation)
warning off all;
% set options.
if k < 2;
options =
optimset('Display','iter','MaxIter',1e+005,'MaxFunEvals',1e+7,'TolX',1e-
10 );
else
options = optimset('MaxIter',0.2*(1e+005),'MaxFunEvals',1e+6,'TolX',1e-
10 );
end;
% likelihood maximisation, call likelihood function.
% estimated parameter values:
thetstar = fminsearch('apendice2llfn', bigthet, options);
function [llfn, latentes ] = apendice2llfn(bigthet)
% define variables and parameters
global yy FF Ffor yn maturity K k F1 Fu;
global um aa0 bb0 AA1 BB1;
global mu rho crp del0 del1 lam1;
global sigmatlagbigBftlagFiniset;
% bigt = length(yy);
bigt = size(yy,2) ;
% 1. Receive initial value of parameters.
rho = [ bigthet(1) 0; bigthet(2) bigthet(3) ];

```

```

sigma = [ bighet(4) 0; 0 bighet(5) ];
sig = bighet(6);
lam0 = [bighet(7); bighet(8)];
if crp == 0;
lam1 = [ bighet(9) bighet(11); bighet(10) bighet(12) ];
end;
% 2. Calculate the PDE of coefficients for yields with all maturity on
% the supposed measurement equations;
% Factor loading matrix AA, BB for yields up to 186 yields
AA0 = zeros(1, 186);
BB0 = zeros(K, 186);
AA0(1) = - del0; aa0 = -AA0;
BB0(:,1) = - del1; bb0 = -BB0;
for i = 2 : 186;
AA0(i) = AA0(i-1)+BB0(:, i-1)' .(mu-sigma.lam0)+0.5.BB0(
, i - 1)' . sigma . sigma' . BB0(:, i - 1) - del0;
BB0(:, i) = BB0(:, i - 1)' . (rho - sigma . lam1) - del1' ;
aa0(i) = - AA0(i)./i;
bb0(:,i) = - BB0(:,i)./i;
end;
% 3. Define measurement equation for available yields in our data set.
AA1 = aa0(maturity)';
BB1 = bb0(:, maturity)';
% 4. Calculate log likelihood function of our system. And panelise
possible
% constraint violations.
% initial log likelihood function with Kalman Filter
llfn = -0.5*yn*(bigt-1)*log(2*pi);
DD = eye(K);
bigB = [AA1 BB1];
if k == 1; Fini = zeros(K,1); else Fini = Finiset; end;
% 1) Initial values of F and sigma, the unconditional cov matrix of F
Ftt = Fini;
inter = eye(K2) - kron(rho, rho' );
DsigmaD = DD*sigma*DD';
vecsigma = inter(K2) . DsigmaD(:);
sigmatt = reshape(vecsigma,K,K);
latentes = zeros(K, size(yy,2));
for t = 1:bigt;

```

```

Ftlag = rho . Ftt;
sigmatlag = rho . sigmatt . rho' + DD . sigma . DD' ;
itatlag = yy(:, t) - AA1 - BB1 . Ftlag;
ftlag = BB1 . sigmatlag . BB1' + sig2 . eye(yn);
% likelihood function:
if t>1;
llfn = llfn - 0.5*log(det(ftlag)) - 0.5 . itatlag' . (ftlag(yn)) . itatlag;
end
% updating:
Kalg = sigmatlag . BB1' . (ftlag(yn));%Kalmangain
Ftt = Ftlag + Kalg . itatlag;
if t == 1;
F1 = Ftt;
end;
sigmatt = sigmatlag - Kalg . BB1 . sigmatlag;
latentes(:,t) = Ftt;
%Fu(t,:)=Ftt;
end;
Ffor = [1; Ftt(1 : K, :)];
llfn = -llfn;
if sigma < 0;
llfn = real(llfn) + 1e8;
end
if abs(imag(llfn)) > 0
llfn = real(llfn) + 1e8;
end
% correponding likelihood:
[fstar, historia] = apendice2llfn(thetstar)
% collect results for each period:
thetall(:,k)= thetstar;
fstarall(k) = fstar;
Finiset = F1;
k
%:::: 4. Control result, either repeat the estimation with another initial
value or accept the estimate and
% move forward.
if k>1
fdiff = fstar-fstarall(k-1);
if fdiff > 20;

```

```
k=k; thetstar = [thetstar(1:6,:) zeros(size(thetstar,1)-6,1)];
else
k=k+1;
end;
else
k = k+1;
end;
% save intermediate results to file
fname = [cd,Resultados,num2str(crp)];
save(fname, 'thetall', 'fstarall');
end; % end k
% END MAIN LOOP: rolling estimation
% C. SAVE ESTIMATE FOR LATER ANALYSIS
fname = [cd,Resultados,num2str(crp)];
save(fname, 'thetall', 'fstarall');
```