



Carlos Nacienceno Meza López

**Métodos probabilísticos aplicados
na análise da estabilidade
de taludes em solo**

Dissertação de Mestrado

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil do Departamento de Engenharia Civil e Ambiental da PUC-Rio.

Orientador: Prof. Celso Romanel

Rio de Janeiro
Agosto de 2017



Carlos Nacianceno Meza López

**Métodos probabilísticos aplicados
na análise da estabilidade
de taludes em solo**

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil do Departamento de Engenharia Civil e Ambiental da PUC-Rio. Aprovada pela Comissão Examinadora abaixo assinada.

Prof. Celso Romanel

Orientador

Departamento de Engenharia Civil e Ambiental – PUC-Rio

Prof. Pedricto Rocha Filho

Departamento de Engenharia Civil e Ambiental – PUC-Rio

Prof^a. Bernadete Ragoni Danziger

Universidade do Estado do Rio de Janeiro - UERJ

Prof. Márcio da Silveira Carvalho

Coordenador Setorial do
Centro Técnico Científico - PUC-Rio

Rio de Janeiro, 14 de agosto de 2017

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, do autor e do orientador.

Carlos Nacianceno Meza López

Graduou-se em Engenharia Mecatrônica pela Universidad Nacional de Ingeniería UNI Lima - Perú, em 2013. Em 2014 ingressou no curso de Mestrado em Engenharia Civil, da Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, na área de Geotecnia, desenvolvendo investigações na linha de pesquisa de Geomecânica Computacional.

Ficha Catalográfica

Meza López, Carlos Nacianceno.

Métodos probabilísticos aplicados na análise da estabilidade de taludes em solo / Carlos Nacianceno Meza López; orientador: Celso Romanel. – 2017,

v., 131 f.: il. (color); 30 cm

Dissertação (Mestrado) – Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, 2017.

Inclui referências bibliográficas

1. Engenharia Civil – Teses. 2. Estabilidade de taludes. 3. Métodos probabilísticos. 4. Métodos determinísticos. 5. Métodos numéricos. I. Romanel, Celso. II. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Engenharia Civil e Ambiental. III. Título.

CDD: 624

Dedico este trabalho a meus amados pais Marlene e Carlos, a minhas irmãs Jimena e Juliana e também ao meu querido avô, Nacienceno (in memoriam), cujo carinho e dedicação à minha formação permitiram o meu sucesso.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus, por iluminar os meus pensamentos nas ocasiões em que as incertezas pairavam sobre mim, dando-me sabedoria e serenidade para que fosse mantido o foco nos objetivos traçados, a fim de trilhar o caminho certo a ser seguido no decorrer desta longa jornada de aquisição de conhecimentos.

Ao professor Celso Romanel, por sua disposição, ideias, sugestões e críticas, as quais levaram o bom andamento deste trabalho.

Aos professores do setor de Geotecnia do Departamento de Engenharia Civil e Ambiental da PUC-Rio, pelo ensino acadêmico e motivação dada ao longo do curso de Mestrado.

Aos professores, Bernadete e Pedricto, membros da Comissão Examinadora, pelas sugestões neste trabalho.

Dedico este trabalho aos meus pais Marlene e Carlos pelo apoio, amor, dedicação, exemplo e boa educação. As minhas irmãs Jimena e Juliana, as minhas primas Rocío e Juana. Obrigado a todos vocês, pelo grande apoio, carinho e compreensão durante esta etapa de estudo.

Ao meu querido cunhado Nithson Noreña, pelo seu apoio neste trabalho e pelo seu constante apoio moral.

Aos colegas da PUC-Rio, pela ajuda acadêmica, pessoal e pelos momentos de convívio. E em especial a: Rafael López, Lizardo Glorioso e Celso Salvador

À Rita de Cassia pelo constante apoio e preocupação.

Ao Brasil, à CAPES e à PUC-Rio, pelos auxílios concedidos, sem os quais este trabalho não poderia ter sido realizado.

Resumo

Meza López, Carlos Nacianceno; Romanel, Celso. **Métodos probabilísticos aplicados na análise da estabilidade de taludes em solo**. Rio de Janeiro, 2017. 131p. Dissertação de Mestrado - Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Comumente as análises de estabilidade de taludes são realizadas mediante métodos determinísticos, os quais visam o cálculo de um fator de segurança único assumindo os valores dos parâmetros de resistência como representativos e fixos. Estes métodos não conseguem avaliar as incertezas existentes nas propriedades do solo e tampouco indicam a proporção de influência que tem cada parâmetro de resistência no valor do fator de segurança. Os métodos probabilísticos, com base nas teorias de probabilidade, confiabilidade e estatística, permitem estimar a influência dessas incertezas nos cálculos determinísticos, com a possibilidade de prever mais amplamente o risco de insucesso associado a um projeto geotécnico de estabilidade de taludes. O presente trabalho estuda a aplicação de três métodos probabilísticos (Monte Carlo, Hipercubo Latino e Estimativas Pontuais Alternativas) na avaliação de estabilidade de taludes, com auxílio de métodos de equilíbrio limite no cálculo do fator de segurança. Com objetivo de inferir o impacto das variáveis aleatórias nas estimativas de probabilidade e confiabilidade, bem como da importância de uma quantificação adequada dos valores de desvio padrão, são realizadas comparações dos resultados obtidos com métodos probabilísticos e determinísticos (método das fatias, método dos elementos finitos) discutindo as principais vantagens, dificuldades e limitações nas aplicações dos mesmos em problemas de estabilidade de taludes de solo.

Palavras-chave

Estabilidade de taludes; métodos probabilísticos; métodos determinísticos; métodos numéricos.

Abstract

Meza López, Carlos Nacienceno; Romanel, Celso (Advisor). **Probabilistic methods applied to soil slope stability analysis**. Rio de Janeiro, 2017. 131p. Dissertação de Mestrado - Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Slope stability analyses are usually carried out using deterministic methods, which aim the calculation of a single safety factor assuming the values of the shear strength parameters as representative and fixed. These methods fail to assess the uncertainties in soil properties and do not indicate the proportion of influence that each resistance parameter has on the final value of the safety factor. The probabilistic methods, based on probability, reliability and statistical theories, allow the estimation of the influence of these uncertainties on the deterministic calculations, with the possibility to broadly predict the risk of failure associated with a geotechnical slope stability project. This dissertation studies the application of three probabilistic methods (Monte Carlo, Latin Hypercube, and Alternative Point Estimates) in the evaluation of slope stability, with aid of limit equilibrium methods for the calculation of safety factors. In order to infer the impact of random variables on the estimates of probability and reliability, as well as the importance of an adequate quantification of the standard deviation values, comparisons are made among the results obtained with probabilistic and deterministic methods (limit equilibrium method, finite element method), discussing the main advantages, difficulties and limitations in their application to soil slope stability problems.

Keywords

Slope stability; probabilistic methods; deterministic methods; numerical methods.

Sumário

1 Introdução	20
1.1. Motivação da pesquisa	20
1.2. Diferenças entre as abordagens probabilística e determinística	22
1.3. Objetivos da pesquisa	24
1.4. Organização da dissertação	24
2 Fundamentos básicos de análise probabilística	25
2.1. Introdução	25
2.2. Variável aleatória	25
2.3. Funções de probabilidade	26
2.3.1. Função densidade de probabilidade (FDP)	26
2.3.2. Função de distribuição acumulada (FDA)	27
2.4. Medidas estatísticas	28
2.4.1. Média μ ou valor esperado $E[X]$	28
2.4.2. Variância $V[X]$	28
2.4.3. Desvio padrão σ	29
2.4.4. Coeficiente de variação	30
2.4.5. Correlação de variáveis aleatórias	30
2.5. Funções de densidade de probabilidade	31
2.5.1. Função densidade de probabilidade normal	31
2.5.2. Função densidade de probabilidade log-normal	32
2.6. Tratamento estatístico de dados	34
2.6.1. Análise gráfica da amostra	35
2.6.2. Análise matemática da amostra	36
2.7. Distribuição dos dados da amostragem	37
2.7.1. Distribuição da amostragem da média com σ conhecido	38
2.7.2. Distribuição de Student	39
2.8. Inferências sobre a média	40

2.9. Inferências sobre o desvio padrão	42
3 Métodos probabilísticos	43
3.1. Introdução	43
3.2. Método de Monte Carlo (MMC)	44
3.3. Método Hipercubo Latino (MHL)	47
3.3.1. Amostragem	47
3.3.2. Agrupamento	48
3.4. Método de Estimativas Pontuais (MEP)	49
3.4.1. Função de uma variável	50
3.5. Método das Estimativas Pontuais Alternativas (MEPA)	54
3.5.1. Função de uma variável	54
3.6. Métodos de estimativa de desvios padrão	60
3.6.1. Determinação direta com base em resultados de ensaios	61
3.6.2. Estimativa com base em valores publicados na literatura	61
3.6.3. A regra dos três desvios padrão	64
3.6.4. O gráfico da regra dos três desvios padrão	65
3.7. Análise de confiabilidade	67
3.7.1. Margem de segurança e fator de segurança	67
3.7.2. Probabilidade de ruptura e o índice de confiabilidade	68
3.7.3. Probabilidade de ruptura considerando a distribuição normal	70
3.7.4. Probabilidade de ruptura aceitável na análise de confiabilidade	71
3.8. Análise de sensibilidade	72
4 Exemplos de aplicação	75
4.1. Talude de Solo homogêneo	75
4.1.1. Fator de segurança por método de equilíbrio limite	76
4.1.2. Fator de segurança pelo método dos elementos finitos	76
4.1.3. Análise por métodos probabilísticos	78
4.2. Talude estratificado	89
4.2.1. Análise por método de equilíbrio limite	89
4.2.2. Análise pelo método dos elementos finitos	90
4.2.3. Análise por método probabilístico	91
4.3. Talude subaquático em argila mole	95

4.3.1. Análise por método de equilíbrio limite	98
4.3.2. Análise pelo método dos elementos finitos	98
4.3.3. Análise por método probabilístico	100
4.4. Dique da Baía James	108
4.4.1. Análise por método de equilíbrio limite	109
4.4.2. Análise pelo método dos elementos finitos	110
4.4.3. Análise por método probabilístico	111
5 Conclusões e Sugestões	119
5.1. Conclusões	119
5.2. Sugestões para trabalhos futuros	120
6 Referências bibliográficas	121

Lista de figuras

Figura 1.1: Fontes de incertezas nas estimativas das propriedades do solo adaptado de Phoon e Kulhawy (1999a).	21
Figura 2.1: Exemplo de função densidade de probabilidade (FDP)	26
Figura 2.2: Exemplo de função de distribuição acumulada (FDA)	27
Figura 2.3: Função distribuição acumulada normal com diferentes valores de desvio padrão, para $FS = 1.5$.	30
Figura 2.4: Função densidade de probabilidade normal de média 14 e diferentes valores de desvio padrão.	32
Figura 2.5: Função densidade de probabilidade log-normal de média 14 e diferentes valores de desvio padrão.	33
Figura 2.6: Função densidade de probabilidade (FDP) normal e log-normal.	34
Figura 2.7: Função distribuição acumulada (FDA) normal e log-normal.	34
Figura 2.8: Histograma de 500 dados com ajuste de distribuição Normal	35
Figura 2.9: Histograma de 500 dados com ajuste de distribuição LogNormal	36
Figura 3.1: Função de densidade de probabilidade do fator de segurança FS , para dois cenários.	44
Figura 3.2: Geração de números aleatórios com função de distribuição acumulada normal pelo método de Monte Carlo.	45
Figura 3.3: Fluxograma na aplicação do método de Monte Carlo para análise probabilística da estabilidade de taludes (Wang et al., 2011).	46
Figura 3.4: Geração de números aleatórios com função de distribuição acumulada normal pelo método de Hipercubo Latino.	48
Figura 3.5: Concentrações da função densidade de probabilidade (adaptado de Rosenblueth, 1981).	51
Figura 3.6: Distribuição de probabilidade pelo MEP	53

$$p_x(x) = (n+1)(1-x)^n$$

Figura 3.7: Distribuição de probabilidade triangular pelo MEP (adaptado de Rosenblueth, 1981)	53
Figura 3.8: a) Distribuição de probabilidades gama pelo MEP b) Distribuição log-normal pelo MEP (Adaptado de Rosenblueth, 1981).	54
Figura 3.9: Número de avaliações de FS , exigido por vários métodos probabilísticos (adaptado de Fredlund e Fredlund, 2011).	60
Figura 3.10: Variação da resistência não drenada com a profundidade para a argila da Baía de São Francisco (Duncan and Buchignani, 1973).	66
Figura 3.11: Envoltórias em resistência ao cisalhamento de ensaios triaxiais CU em argilito da barragem Los Vaqueros (Duncan 2000).	67
Figura 3.12: a) Distribuição de capacidade C e demanda D , considerados como variáveis aleatórias; b) distribuição da margem de segurança MS considerada como variável aleatória.	69
Figura 3.13: Probabilidade de ruptura , P_f , versus o índice de confiabilidade β , para uma distribuição normal. (Adaptado de Christian et al.,1994).	70
Figura 3.14: Diagrama de evento probabilístico do tipo tornado (adaptado de Fredlund e Fredlund, 2011).	74
Figura 4.1: Seção transversal do talude homogêneo (metros).	75
Figura 4.2: Potencial superfície de ruptura circular obtida pelo método das fatias de Spencer com fator de segurança $FS = 1,339$.	76
Figura 4.3: Malha deformada de elementos finitos do talude de solo homogêneo	77
Figura 4.4: Potencial superfície de ruptura com $FS = 1,33$, para o talude de solo homogêneo.	78
Figura 4.5: Localização da potencial superfície de ruptura do talude de solo homogêneo.	78
Figura 4.6: Distribuição normal do fator de segurança FS determinados pelo Método de Monte Carlo considerando 50.000 amostras.	80
Figura 4.7: Coeficiente de correlação 0,8727 entre FS e c .	81
Figura 4.8: Coeficiente de correlação 0,4084 entre FS e ϕ .	81
Figura 4.9: Coeficiente de correlação -0,221 entre FS e γ .	81

Figura 4.10: Coeficiente de correlação -0,1419 entre FS e r_u .	82
Figura 4.11: Distribuição normal do fator de segurança determinados pelo Método Hipercubo Latino considerando 10.000 amostras.	83
Figura 4.12: Coeficiente de correlação 0,8757 entre FS e c .	83
Figura 4.13: Coeficiente de correlação 0,4198 entre FS e ϕ .	83
Figura 4.14: Coeficiente de correlação -0,2143 entre FS e γ .	84
Figura 4.15: Coeficiente de correlação -0,1348 entre FS e r_u .	84
Figura 4.16: Distribuição normal do FS determinados pelo Método das Estimativas Pontuais Alternativas.	85
Figura 4.17: Diagrama tornado probabilístico para o talude de solo homogêneo.	85
Figura 4.18: Localização da potencial superfície de ruptura obtidas por diferentes métodos.	86
Figura 4.19: P_f versus COV Normalizado para os métodos probabilísticos de Monte Carlo, Hipercubo Latino e Estimativas Pontuais Alternativas com distribuição lognormal do fator de segurança FS .	87
Figura 4.20: Probabilidade de falha P_f versus Índice de confiabilidade β	88
Figura 4.21: P_f vs COV normalizado para diferentes ângulos de inclinação do talude.	88
Figura 4.22: Geometria do talude estratificado formado por duas camadas de solo.	89
Figura 4.23: Potencial superfície de ruptura obtida pelo método de Spencer com $FS = 1,66$.	90
Figura 4.24: Aspecto da malha de elementos finitos deformada.	90
Figura 4.25: Posição da potencial superfície de ruptura obtida pelo método dos elementos finitos com fator de segurança $FS = 1,648$.	91
Figura 4.26: Distribuição logNormal do FS com $\mu = 1,808$; $\sigma = 0,3936$; $P_f = 2,268$ %; $\beta = 2,6458$.	92
Figura 4.27: Coeficiente de correlação 0,9395 entre FS e S_u da argila.	92
Figura 4.28: Distribuição logNormal do FS com $\mu = 1,805$; $\sigma = 0,3833$; $P_f = 2,243$ %; $\beta = 2,781$.	93

Figura 4.29: Coeficiente de correlação 0,9135 entre FS e S_u da argila.	93
Figura 4.30: Localização da potencial superfície de ruptura pelo método de equilíbrio limite (MEL), método dos elementos finitos (MEF) e método probabilístico (MP).	94
Figura 4.31: Distribuição logNormal do fator de segurança $\mu = 1,80$; $\sigma = 0,2925$; $P_f = 0,16\%$; $\beta = 3,586$.	95
Figura 4.32: Seção transversal do talude antes e após a ocorrência da ruptura.	96
Figura 4.33: Variação com a profundidade da resistência não drenada S_u da argila mole da baía de São Francisco (Duncan and Buchignani, 1973): resultados de ensaios de laboratório (UU) e de campo (ensaio de palheta)	97
Figura 4.34: Talude subaquático na argila mole da baía de São Francisco - Duncan e Buchignani (1973); Duncan (2000).	97
Figura 4.35: Posição da potencial superfície de ruptura obtida pelo método de Spencer com fator de segurança $FS = 1,171$.	98
Figura 4.36: Malha deformada de elementos finitos considerando o modelo constitutivo de Mohr - Coulomb.	99
Figura 4.37: Malha deformada de elementos finitos considerando o modelo constitutivo Soft – Soil.	99
Figura 4.38: Posição da potencial superfície de ruptura obtida pelo método dos elementos finitos com fator de segurança $FS = 1,180$.	99
Figura 4.39: Comprimento do início da potencial superfície de ruptura obtida pelo método dos elementos finitos com fator de segurança $FS = 1,180$.	100
Figura 4.40: Variação com a profundidade da resistência não drenada mínima, média e máxima.	101
Figura 4.41: Distribuição logNormal do FS com $\mu = 1,183$; $\sigma = 0,2165$; $P_f = 18,068\%$; $\beta = 0,899$.	102
Figura 4.42: Coeficiente de correlação 0,0533 entre o FS e a S_u da camada 1.	102
Figura 4.43: Coeficiente de correlação 0,1302 entre o FS e a S_u da camada 2.	102

Figura 4.44: Coeficiente de correlação 0,2098 entre o FS e a S_u da camada 3.	103
Figura 4.45: Coeficiente de correlação 0,71 entre o FS e a S_u da camada 4.	103
Figura 4.46: Coeficiente de correlação -0,0022 entre o FS e a S_u da camada 5.	103
Figura 4.47: Distribuição lognormal do FS $\mu = 1,180$; $\sigma = 0,2184$; $P_f = 17,89\%$; $\beta = 0,895$.	104
Figura 4.48: Coeficiente de correlação 0,039 entre o FS e a S_u da camada 1.	104
Figura 4.49: Coeficiente de correlação 0,1248 entre o FS e a S_u da camada 2.	105
Figura 4.50: Coeficiente de correlação 0,1977 entre o FS e a S_u da camada 3.	105
Figura 4.51: Coeficiente de correlação 0,7125 entre o FS e a S_u da camada 4.	105
Figura 4.52: Coeficiente de correlação 0,0006 entre o FS e a S_u da subcamada 5.	106
Figura 4.53: Distribuição lognormal do FS com $\mu = 1,18$; $\sigma = 0,1613$; $PF = 15,46\%$; $\beta = 1,13$.	106
Figura 4.54: Diagrama tornado probabilístico indicando a sensibilidade da variação dos parâmetros geotécnicos das camadas de argila.	107
Figura 4.55: Localização da potencial superfície de ruptura pelos métodos MEL, MEF e MP.	108
Figura 4.56: Seção transversal do dique da Baía James.	108
Figura 4.57: Posição da potencial superfície de ruptura circular obtida pelo método de Spencer com fator de segurança $FS = 1,461$, para o dique da Baía James.	109
Figura 4.58: Posição da potencial superfície de ruptura não circular obtida pelo método de Spencer com fator de segurança $FS = 1,158$, para o dique da Baía James.	109
Figura 4.59: Malha deformada de elementos finitos do dique da Baía James, considerando o modelo constitutivo de Mohr - Coulomb.	110

Figura 4.60: Posição da potencial superfície de ruptura obtida pelo método dos elementos finitos com fator de segurança $FS = 1,24$, para o dique da Baía James.	110
Figura 4.61: Distribuição Normal do FS com $\mu = 1,161$; $\sigma = 0,187$; $P_f = 19,40\%$; $\beta = 0,862$.	112
Figura 4.62: Coeficiente de correlação $0,041$ entre o FS e o ϕ da camada de enchimento.	112
Figura 4.63: Coeficiente de correlação $0,14$ entre o FS e a S_u da argila crosta.	113
Figura 4.64: Coeficiente de correlação $0,269$ entre o FS e a S_u da argila marinha.	113
Figura 4.65: Coeficiente de correlação $0,907$ entre o FS e a S_u da argila lacustre.	113
Figura 4.66: Distribuição Normal do FS $\mu = 1,16$; $\sigma = 0,18$; $P_f = 19,93\%$; $\beta = 0,85$.	114
Figura 4.67: Coeficiente de correlação $0,038$ entre o FS e o ϕ da camada de enchimento.	114
Figura 4.68: Coeficiente de correlação $0,13$ entre o FS e a S_u da argila crosta.	115
Figura 4.69: Coeficiente de correlação $0,267$ entre o FS e a S_u da argila marinha.	115
Figura 4.70: Coeficiente de correlação $0,906$ entre o FS e a S_u da argila lacustre.	115
Figura 4.71: Distribuição Normal do FS com $\mu = 1,160$; $\sigma = 0,165$; $P_f = 17,02\%$; $\beta = 0,90$.	116
Figura 4.72: Diagrama Tornado probabilístico indicando a sensibilidade da variação das propriedades geotécnicas das camadas de argila.	117
Figura 4.73: Localização da potencial superfície de ruptura não circular no dique da Baía James pelo (MP) e (MEF).	118

Lista de tabelas

Tabela 3.1: Valores típicos para o coeficiente de variação COV (adaptado de Lacasse e Nadim, 1996).	62
Tabela 3.2: Valores típicos para o coeficiente de variação COV, Duncan (2000).	63
Tabela 3.3: Valores estimados e medidos de $C_c/(1+e)$ e coeficiente de variação COV, para a argila da Baía de São Francisco.	64
Tabela 3.4: Probabilidade de ruptura aceitável na análise de estabilidade de taludes (Adaptado de Santamarina <i>et al.</i> , 1992).	72
Tabela 4.1: Parâmetros geotécnicos do maciço de solo homogêneo.	75
Tabela 4.2: Parâmetros geotécnicos e estatísticos do solo homogêneo	79
Tabela 4.3: Resultados numéricos do Método das Estimativas Pontuais Alternativas.	86
Tabela 4.4: Resumo dos resultados determinados por métodos probabilísticos.	86
Tabela 4.5: Valores dos parâmetros geotécnicos para diferentes COVs.	87
Tabela 4.6: Propriedades geotécnicas e coeficiente de variação COVs das camadas de solo.	89
Tabela 4.7: Resumo dos resultados das análises probabilísticas.	95
Tabela 4.8: Valores médios dos parâmetros geotécnicos.	98
Tabela 4.9: Valores médios, coeficiente de variação e função densidade de probabilidade dos parâmetros geotécnicos.	100
Tabela 4.10: Resultados numéricos obtidos pelo MEPA.	107
Tabela 4.11: Resumo de resultados obtidos com métodos probabilísticos.	108
Tabela 4.12: Valores das propriedades geotécnicas dos materiais no dique	109

Tabela 4.13: Valores médios, coeficiente de variação e função densidade de probabilidade dos parâmetros geotécnicos para o dique da Baía James.	111
Tabela 4.14: Resultados numéricos obtidos pelo MEPA, para o dique da Baía James.	117
Tabela 4.15: Resumo de resultados obtidos com métodos probabilísticos.	118

“ O mundo está nas mãos daqueles que têm a coragem de sonhar e de correr o risco de viver seus sonhos”.

Paulo Coelho

1 Introdução

1.1. Motivação da pesquisa

Na prática da engenharia geotécnica, as análises de estabilidade de taludes são tradicionalmente feitas mediante métodos determinísticos, que utilizam valor único para cada variável considerada no processo de cálculo, de modo que o resultado da análise é também expresso por um valor único, conhecido como fator de segurança (*FS*), que indica se o talude está em condições de equilíbrio estável seguro ou próximo do colapso.

A seleção de valores médios representativos do comportamento de solos requer a execução de ensaios de campo ou laboratório, cuja confiabilidade dos resultados depende da localização dos pontos de exploração, número de amostras, métodos de amostragem, métodos de execução de ensaios, interpretação dos resultados incluindo possibilidade de erros instrumentais e humanos, etc. Dado o nível de incertezas, pode-se afirmar que uma abordagem determinística em princípio é incapaz de fornecer resultados plenamente confiáveis, principalmente se o fator de segurança (*FS*) calculado estiver próximo das condições de instabilidade do equilíbrio.

É bem conhecido que as propriedades dos solos naturais são inerentemente variáveis de um local para outro, mesmo em um depósito relativamente homogêneo, devido à natureza complexa do processo de deposição geológica e da história de carregamento. Vanmarcke (1977a) identificou a *variabilidade inerente do solo* como uma das três principais fontes de incerteza na modelagem do perfil do solo. As outras duas são as *incertezas estatísticas*, devido ao número limitado de dados de amostragem, e os *erros de medição*, que surgem de equipamentos e procedimentos de ensaio. Phoon e Kulhawy (1999a) complementaram esta identificação incluindo ainda a *transformação de incertezas*, quando o comportamento do solo real é transformado em um modelo constitutivo teórico.

Estas fontes de incertezas afetam as estimativas das propriedades do solo nas análises geotécnicas como mostrado na Figura 1.1; em consequência, as análises são sempre associadas com certo nível de incerteza e risco.

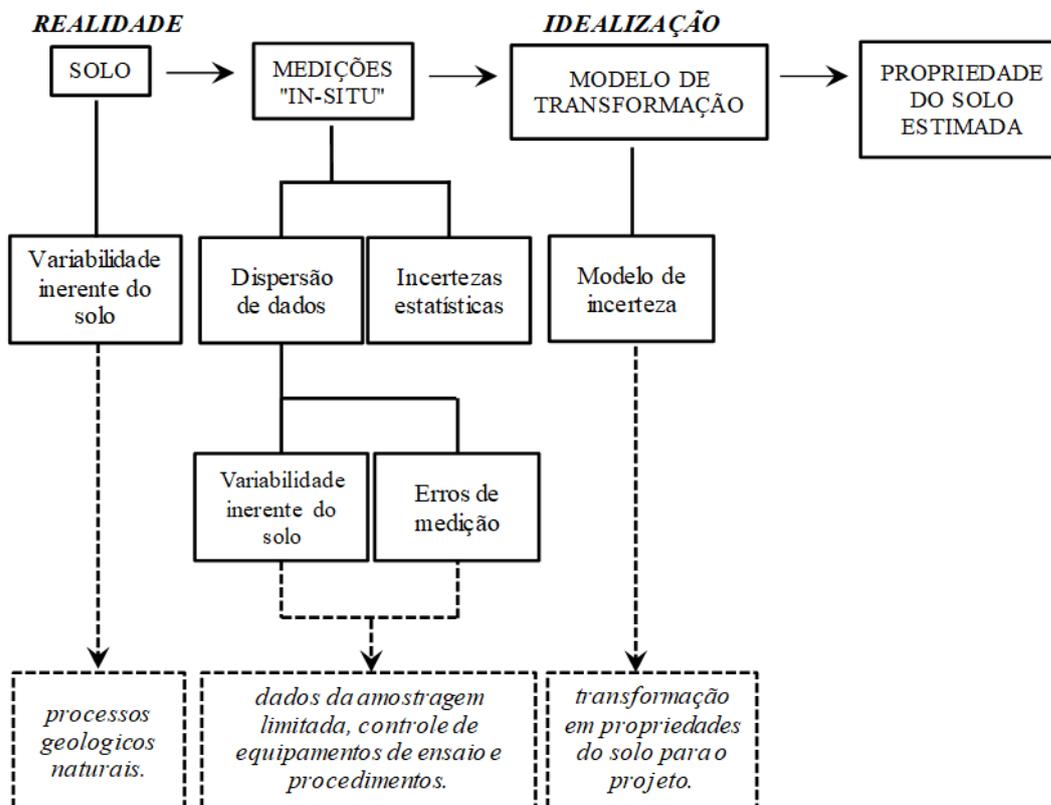


Figura 1.1: Fontes de incertezas nas estimativas das propriedades do solo adaptado de Phoon e Kulhawy (1999a).

Einstein e Baecher (1982) afirmaram que “ao pensar sobre fontes de incerteza na geologia da engenharia, constata-se o fato de que a incerteza é inevitável. Procura-se reduzi-la tanto quanto possível, mas deve-se finalmente entender que a questão não é ter que enfrentar as incertezas, mas sim como”.

Uma abordagem alternativa é a utilização de métodos probabilísticos que oferecem um tratamento sistemático das incertezas correspondentes às propriedades dos materiais envolvidos. Os parâmetros geotécnicos podem ser considerados como variáveis aleatórias, cada qual com determinada distribuição de probabilidades em vez de valores fixos e constantes, e a análise da estabilidade de taludes é quantificada por meio da probabilidade de ruptura (P_f) e de um índice de confiabilidade (β).

1.2.

Diferenças entre as abordagens probabilística e determinística

Os conceitos da modelagem determinística e probabilística são significativamente diferentes. Na modelagem determinística, os dados disponíveis são estimados usualmente por julgamento, com a suposição de que o erro entre o valor real desconhecido e a estimativa seja igual a zero. Quando se trata em ciências da Terra as informações das propriedades dos materiais tendem a ser variáveis e os dados disponíveis normalmente são esparsos, o que não justifica a hipótese empregada em métodos determinísticos.

Em contrapartida a modelagem probabilística reconhece as incertezas nos parâmetros de entrada e nos modelos de previsão. Os parâmetros de entrada são tratados como variáveis aleatórias; cada parâmetro pode assumir qualquer valor dentro de um intervalo admitido, com uma dada probabilidade de ocorrência deduzida a partir dos dados disponíveis. Como os parâmetros de entrada são considerados variáveis, o desempenho previsto também será variável, obtendo-se um intervalo de resultados possíveis com as suas respectivas probabilidades. A incerteza nos modelos de previsão também pode ser incorporada na análise; conseqüentemente, a modelagem probabilística reflete o conhecimento imperfeito da realidade.

Nas últimas décadas, modelos determinísticos como os de Bishop, Spencer, Morgenstern-Price e Janbu foram amplamente empregados e tornou-se prática comum na comunidade geotécnica a determinação de fatores de segurança (*FS*) com base nestes métodos de equilíbrio limite. Se o *FS* calculado for maior ou igual a determinado valor admissível, então o talude é considerado seguro; caso contrário, o projeto deve ser modificado para se atingir um *FS* adequado. Obviamente, o *FS* calculado depende dos parâmetros de entrada selecionados, do modo de ruptura estimado, da confiabilidade das suposições e da acurácia dos métodos de análise escolhidos. Portanto, não existe um valor único do *FS* para um dado talude de solo; possivelmente diferentes engenheiros adotarão diferentes parâmetros, suposições e métodos de análise, dependendo de seu julgamento, experiência e conhecimento. Como os fatores de segurança (*FS*) calculados não serão iguais, o significado real de *FS* deixa também de ser claro.

Morgenstern (2000) realizou um estudo sobre a acurácia da previsão de desempenho na engenharia geotécnica. Ele classificou as previsões em excelente, boa, aceitável, pobre e má, dependendo da proximidade do desempenho previsto com o desempenho real observado em campo. Previsões entre 25% e 50% da resposta correta foram classificadas como pobres e aquelas com diferenças superiores a 50% classificadas como más. Morgenstern (2000) examinou algumas competições internacionais de previsão de desempenho: um aterro de rodovia experimental no MIT, um aterro de rodovia experimental de Muar, uma sapata sobre areia e uma estaca de aço cravada. As previsões pobres ou más chegaram a 70%, 55%, 90% e 87% do número total de previsões para os quatro casos investigados, que dispunham de grande quantidade de dados e apesar dos cuidados nas análises submetidas pelos vários competidores. Embora estes resultados possam aparentar chocantes, eles refletem na realidade o impacto significativo das incertezas na confiabilidade das previsões geotécnicas.

A prática convencional de taludes considera a incerteza por meio da adoção de parâmetros e projetos conservadores. Normalmente o processo é altamente subjetivo e leva para um grau de conservadorismo desconhecido. Como resultado, El-Ramly (2001) reportou que não foram raros os casos de ruptura de taludes considerados seguros, estudados por Bjerrum (1974), Janbu et al. (1977), Skempton (1977, 1985) e Seed et al. (1990). Deve-se mencionar que a prática convencional tem a vantagem de estar apoiada sobre uma ampla base de experiências em décadas de prática, mas pode-se argumentar que tal experiência deveria ser utilizada no estabelecimento de práticas mais racionais.

A análise probabilística de estabilidade de taludes normalmente é executada com o uso de métodos de equilíbrio limite considerando a variação dos parâmetros de projeto. Assim, os métodos de análise probabilística de estabilidade de taludes são baseados nos mesmos princípios dos métodos determinísticos. Contudo, apresentam a vantagem de serem capazes de considerar quantitativamente as diversas origens de incerteza, auxiliam no entendimento das principais origens de risco, melhoram o julgamento de engenharia e permitem uma comparação racional entre a confiabilidade de projetos alternativos, melhorando o processo de tomada de decisão.

1.3. Objetivos da pesquisa

O objetivo principal da dissertação é discutir a aplicação da abordagem probabilística na análise da estabilidade de taludes em solo comparando resultados obtidos com métodos determinísticos usualmente empregados na engenharia geotécnica para cálculo do fator de segurança, por meio de formulações analíticas (método das fatias) ou aproximações numéricas (método dos elementos finitos). Uma comparação entre os próprios métodos probabilísticos empregados (Monte Carlo, Hipercubo Latino, Estimativas Pontuais Alternativas) também é feita buscando destacar suas vantagens e limitações, sob pontos de vista de precisão, esforço computacional e versatilidade.

1.4. Organização da dissertação

No capítulo 1 é apresentada a motivação e objetivos principais da pesquisa, como também são destacadas as principais diferenças entre as abordagens probabilística e determinística na análise da estabilidade de taludes em solo.

O capítulo 2 é reservado para a introdução de conceitos básicos de análise probabilística enquanto que o capítulo 3 apresenta a formulação dos métodos probabilísticos utilizados nesta pesquisa para investigação da estabilidade de taludes, discutindo aspectos importantes na aplicação dos mesmos como as técnicas de estimativa de desvios padrão de variáveis aleatórias. Outros aspectos relacionados com análise de confiabilidade e análise de sensibilidade também são discutidos neste capítulo.

O capítulo 4 apresenta alguns exemplos mostrando, discutindo e comparando os resultados de análises de estabilidade por métodos determinísticos e probabilísticos, enquanto que o capítulo 5 é dedicado para as conclusões do presente trabalho e sugestões para futuras pesquisas neste tema.

2

Fundamentos básicos de análise probabilística

2.1.

Introdução

Esse capítulo tem por finalidade apresentar de forma resumida, os conceitos básicos de probabilidade e estatística necessários para a compreensão das metodologias de análise de probabilidade comumente utilizadas em problemas geotécnicos. Esses conceitos são apresentados em maiores detalhes em livros sobre probabilidade e estatística, como os escritos por Miller e Freund (1975), Beacher e Christian (2003) e Montgomery e Runger (2014).

2.2.

Variável aleatória

A análise probabilística pode ser entendida como o estudo da previsão do comportamento de uma determinada experiência ou simulação. Entende-se por experiência um processo aleatório, em geral um processo físico, que é controlado total ou parcialmente por um mecanismo de causalidade, de chance, de sorte ou azar.

A variável que assume valores diferentes em cada experiência é denominada variável aleatória, que pode ser considerada discreta, quando assume apenas certos valores específicos, ou contínua, quando pode assumir qualquer valor dentro de um intervalo.

Em uma experiência o conjunto de todas as possíveis respostas é denominado de espaço amostral. Em geral, o espaço amostral é dito discreto se possui um número finito de elementos. Se os elementos de um espaço amostral constituem um contínuo (por exemplo, todos os pontos de uma reta ou plano), o espaço amostral é chamado de contínuo. A caracterização de um espaço amostral em discreto ou contínuo é determinada através do tipo de variável aleatória em questão.

2.3. Funções de probabilidade

As funções de densidade de probabilidade e de distribuição acumulada são comumente usadas na engenharia para descrever sistemas físicos. Sendo X uma variável aleatória contínua, o comportamento probabilístico de um fenômeno aleatório dependente de X pode ser descrito por funções matemáticas chamadas de função densidade de probabilidade (FDP) e função de distribuição acumulada (FDA).

2.3.1. Função densidade de probabilidade (FDP)

A função densidade de probabilidade $f(x)$ descreve a forma da curva de distribuição da probabilidade de ocorrência de cada valor da variável aleatória X . A probabilidade de X situada entre os valores a e b é calculada como a integral de $f(x)$ avaliada entre os extremos a e b . A Figura 2.1 mostra uma curva descrita por uma função densidade de probabilidade (FDP).

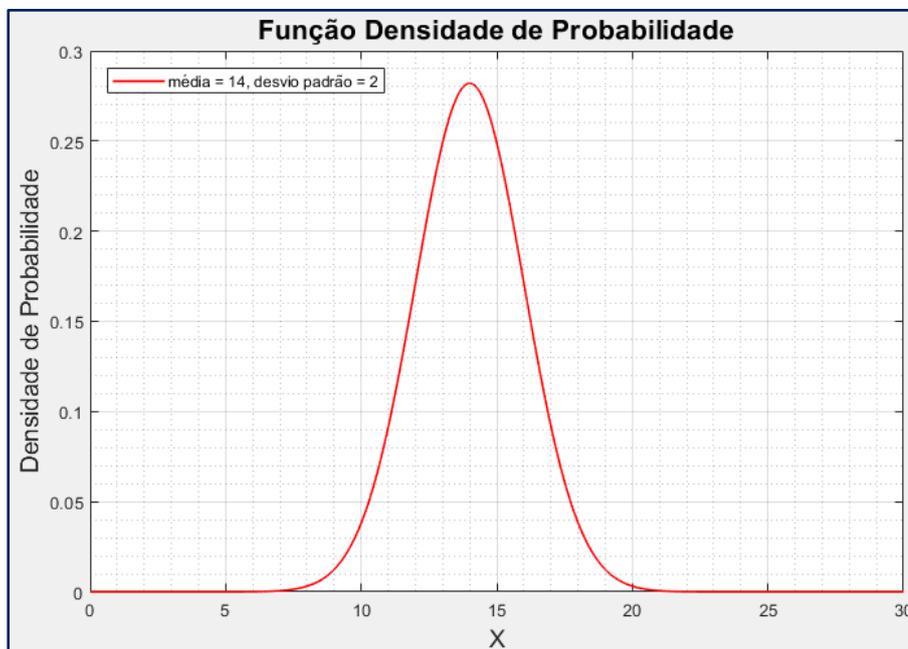


Figura 2.1: Exemplo de função densidade de probabilidade (FDP)

Para uma variável aleatória contínua X , a função de densidade de probabilidade exibe as seguintes características: $f(x) \geq 0$, $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$ e

$P(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx$. Dentre as formas mais usuais de FDP podem ser citadas as distribuições de probabilidade normal ou gaussiana, lognormal, gamma e beta.

2.3.2. Função de distribuição acumulada (FDA)

Para uma estimativa da probabilidade da ocorrência da variável aleatória X ser menor ou igual a determinado valor x , utiliza-se a função de distribuição acumulada (FDA). A Figura 2.2 mostra uma curva descrita por uma função de distribuição acumulada (FDA), e definida por:

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(u)du \quad (2.1)$$

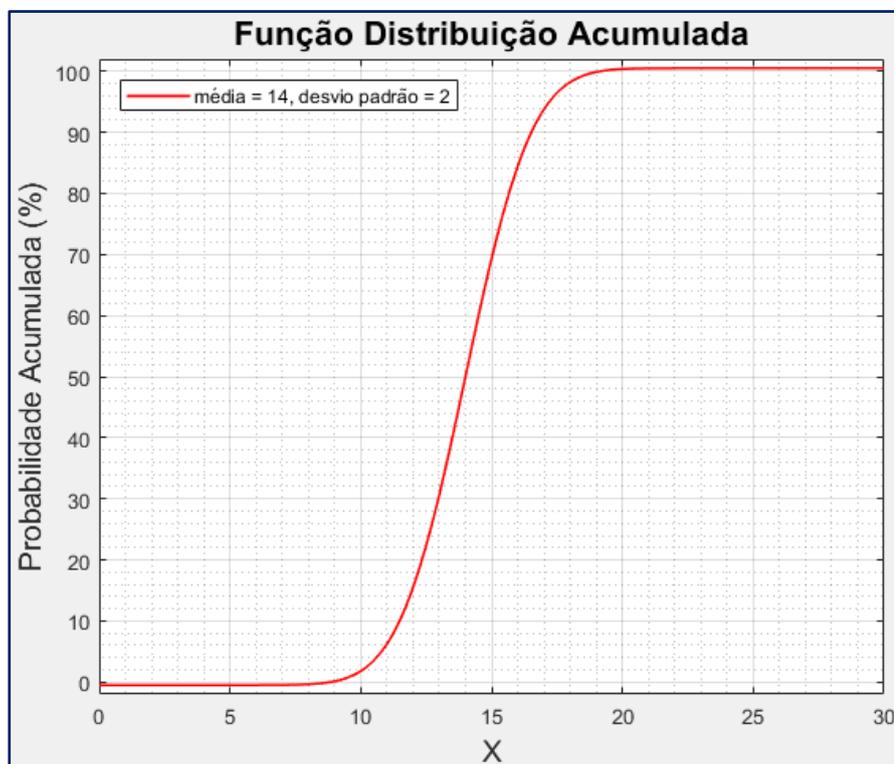


Figura 2.2: Exemplo de função de distribuição acumulada (FDA)

A estimativa da probabilidade de ocorrência da variável aleatória X em certo intervalo $[a, b]$, é dada por:

$$F(x) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx \quad (2.2)$$

2.4. Medidas estatísticas

Para descrever uma variável aleatória contínua são usadas as seguintes medidas estatísticas:

2.4.1. Média μ ou valor esperado $E[X]$

A localização da distribuição é dada pela média μ ou valor esperado $E[X]$ da função densidade de probabilidade (FDP), da variável aleatória contínua X definida por:

$$\mu_x = E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx \quad (2.3)$$

Onde μ é definido como o primeiro momento de um sistema contínuo de massa $f(x)$, disposto sobre uma linha reta e distante x da origem. Conclui-se, portanto, que a Equação (2.3) determina o centro de massa da densidade de probabilidades (primeiro momento probabilístico).

2.4.2. Variância $V[X]$

Dada uma variável aleatória contínua X , com função densidade de probabilidade $f(x)$, uma estimativa da dispersão ou incerteza dos dados em relação ao valor médio é obtida com o segundo momento probabilístico da variável aleatória X em relação à média, denominado variância $V[X]$ e definida por:

$$V[X] = E[(X - \mu_X)^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu_X)^2 f(x) dx \quad (2.4)$$

Onde $V[X]$ = variância da variável aleatória X e μ_X = média da variável aleatória X .

Nota-se da Equação (2.4) que a definição da variância de uma distribuição de probabilidade é análoga ao momento de inércia definido na Mecânica.

2.4.3. Desvio padrão σ

Uma medida mais concreta da dispersão dos valores de uma variável aleatória X é dada pelo desvio padrão σ . Matematicamente é definido como a raiz quadrada positiva da variância, sendo fisicamente análogo ao raio de giração de um sistema $f(x)$.

$$\sigma_X = \sqrt{V[X]} = \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu_X)^2 f(x) dx} \quad (2.5)$$

Onde σ_X = desvio padrão de X , μ_X = valor médio ou esperado de X e $V[X]$ = variância de X .

O terceiro momento probabilístico é usado para descrever a simetria ou assimetria da distribuição de probabilidades, enquanto que o quarto momento probabilístico descreve a curtose ou “falta de pico” da função densidade de probabilidade. O conhecimento da forma exata da função só é possível mediante o conhecimento de todos os momentos probabilísticos. Na Figura 2.3 ilustra-se o efeito do desvio padrão sobre a probabilidade de ruptura (P_f) para um fator de segurança $FS = 1,50$.

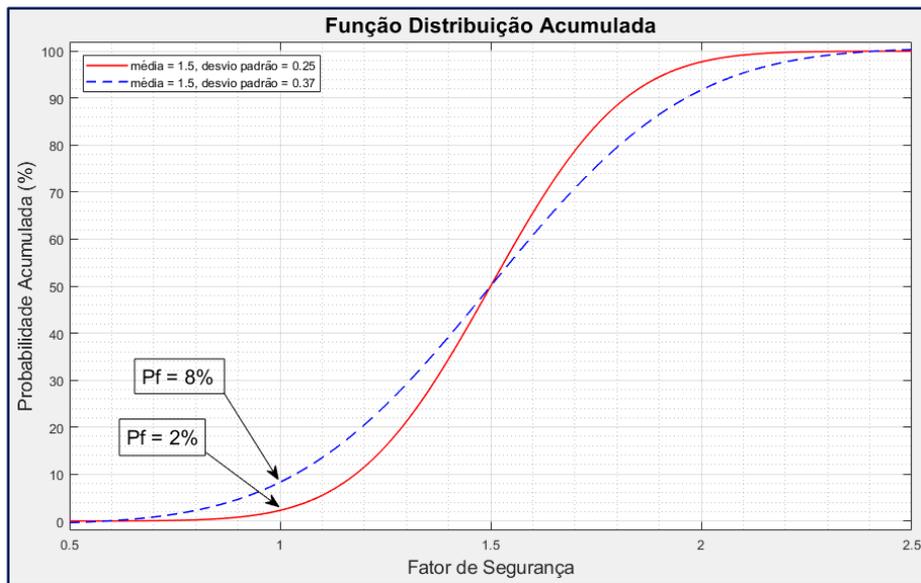


Figura 2.3: Função distribuição acumulada normal com diferentes valores de desvio padrão, para $FS = 1.5$.

2.4.4. Coeficiente de variação

O coeficiente de variação COV também é uma medida de dispersão dos valores da variável aleatória X , sendo obtido pela razão entre o desvio padrão e o valor esperado de uma variável aleatória que, para fins práticos, pode ser tomada como a média:

$$COV[X] = \frac{\sigma_X}{\mu_X} \quad (2.6)$$

Onde $COV[X]$ = coeficiente de variação da variável aleatória X , σ_X = desvio padrão da variável aleatória X e μ_X = valor médio ou esperado da variável aleatória X .

2.4.5. Correlação de variáveis aleatórias

Caso duas variáveis aleatórias X e Y sejam dependentes entre si, então são consideradas correlatas com correlação medida pela covariância (C_v) entre elas. A covariância entre duas variáveis aleatórias é definida como:

$$Cv[X, Y] = E[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)] \quad (2.7)$$

O coeficiente de correlação (ρ_{XY}) é obtido mediante a normalização da covariância pelo desvio padrão das variáveis aleatórias X e Y, ou seja,

$$\rho_{XY} = \frac{Cv[X, Y]}{\sigma_X \sigma_Y} \quad (2.8)$$

O coeficiente de correlação é delimitado por $-1 \leq \rho_{XY} \leq +1$, onde $\rho_{XY} = \pm 1$ indica uma perfeita correlação entre as variáveis X e Y (positiva ou negativa), enquanto $\rho_{XY} = 0$ indica que as duas variáveis aleatórias X e Y são independentes.

2.5. Funções de densidade de probabilidade

2.5.1. Função densidade de probabilidade normal

Conhecida também como função de densidade de probabilidade gaussiana, possui como característica a simetria da distribuição. A notação $N(\mu, \sigma^2)$ é usada para denotar a função de distribuição de probabilidade normal, matematicamente descrita por:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad (2.9)$$

Devido ao fato da Equação (2.9) não poder ser integrada analiticamente entre um intervalo qualquer, as probabilidades relacionadas à distribuição normal são obtidas por integração numérica, com resultados dispostos em forma de tabelas específicas, padronizadas para uma função densidade de probabilidade normal com

média $\mu=0$ e desvio padrão $\sigma=1$. A Figura 2.4 apresenta a função de probabilidade normal.

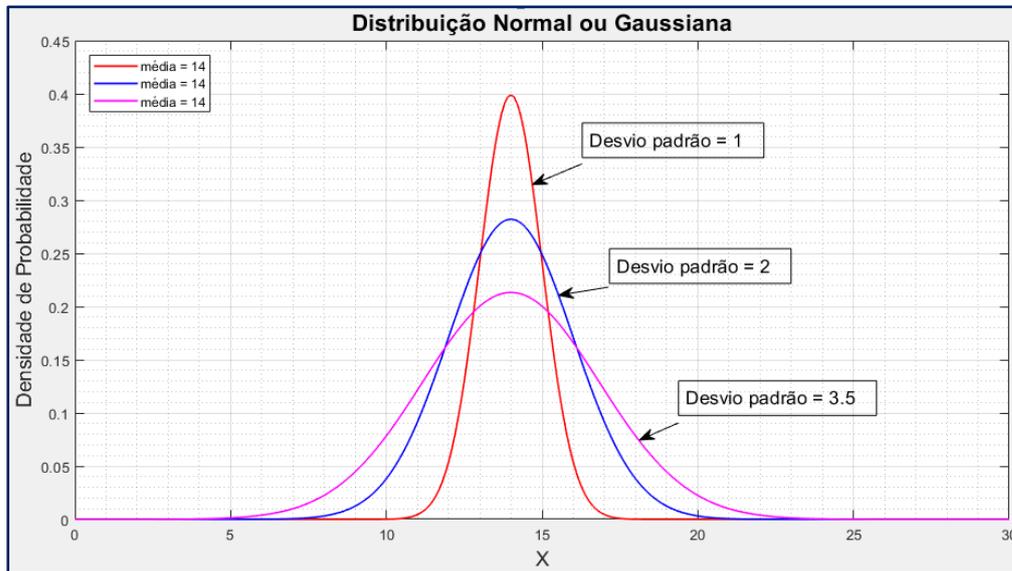


Figura 2.4: Função densidade de probabilidade normal de média 14 e diferentes valores de desvio padrão.

Substituindo na Equação (2.9) os valores $\mu=0$ e $\sigma=1$, a probabilidade de uma variável aleatória Z ser menor ou igual a z é escrita como:

$$F(z) = P(Z \leq z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z e^{-\frac{u^2}{2}} du \quad (2.10)$$

Onde Z é a variável aleatória assim padronizada:

$$Z = \frac{X - \mu_X}{\sigma_X} \quad (2.11)$$

2.5.2. Função densidade de probabilidade log-normal

A função de densidade de probabilidade log-normal (Figura 2.5) ocorre na prática sempre que o logaritmo de uma variável aleatória apresentar a forma de uma distribuição normal. Uma característica deste tipo de distribuição é o fato desta ser sempre positiva.

Dada a variável aleatória W com função densidade de probabilidade normal, com média θ e variância ω^2 , então $X = \exp(W)$ é a variável aleatória log-normal, com função de densidade de probabilidade definida por:

$$f(x) = \frac{1}{x\omega\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln x - \theta)^2}{2\omega^2}} \quad (2.12)$$

Onde $E[X] = e^{\theta + \frac{\omega^2}{2}}$ e $V[X] = e^{2\theta + \omega^2} (e^{\omega^2} - 1)$

A probabilidade de uma variável aleatória X , com função densidade de probabilidade log-normal, ocorrer entre um intervalo $[a, b]$ é dada por:

$$P(X \leq x) = F(b) - F(a) = \int_a^b \frac{1}{x\omega\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln x - \theta)^2}{2\omega^2}} dx \quad (2.13)$$

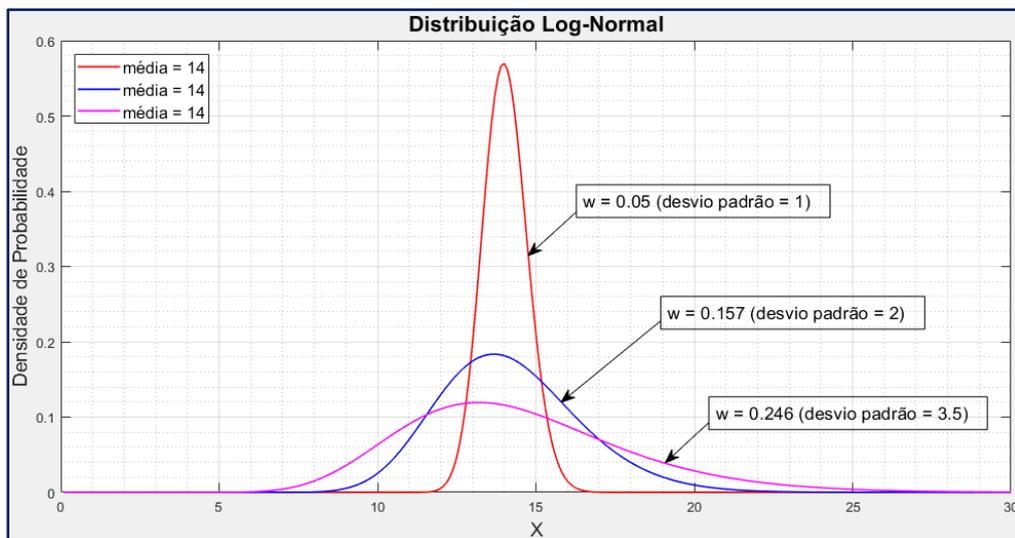


Figura 2.5: Função densidade de probabilidade log-normal de média 14 e diferentes valores de desvio padrão.

Nas Figuras 2.6 e 2.7 é mostrada uma comparação entre as distribuições normal e lognormal das funções densidade de probabilidade (FDP) e de distribuição acumulada (FDA).

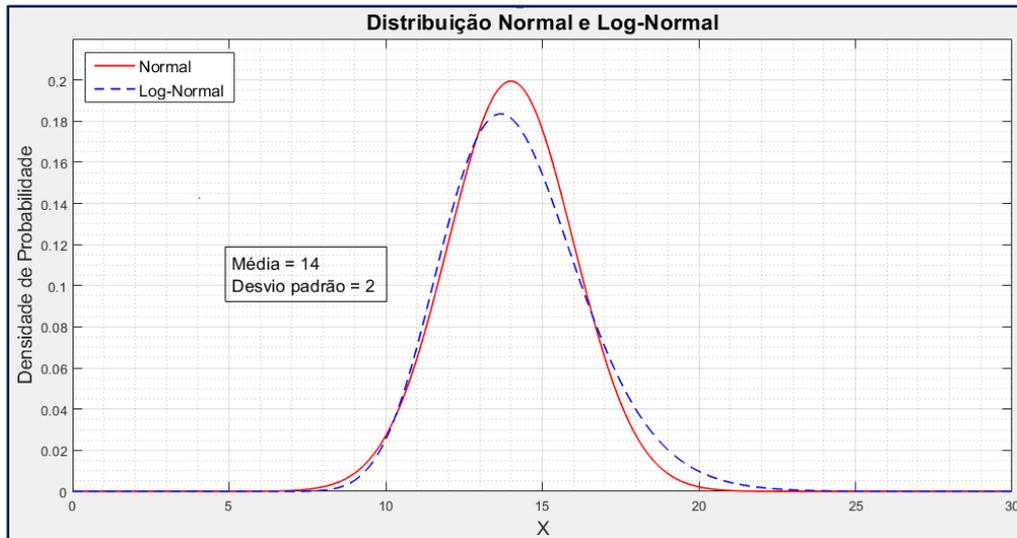


Figura 2.6: Função densidade de probabilidade (FDP) normal e log-normal.

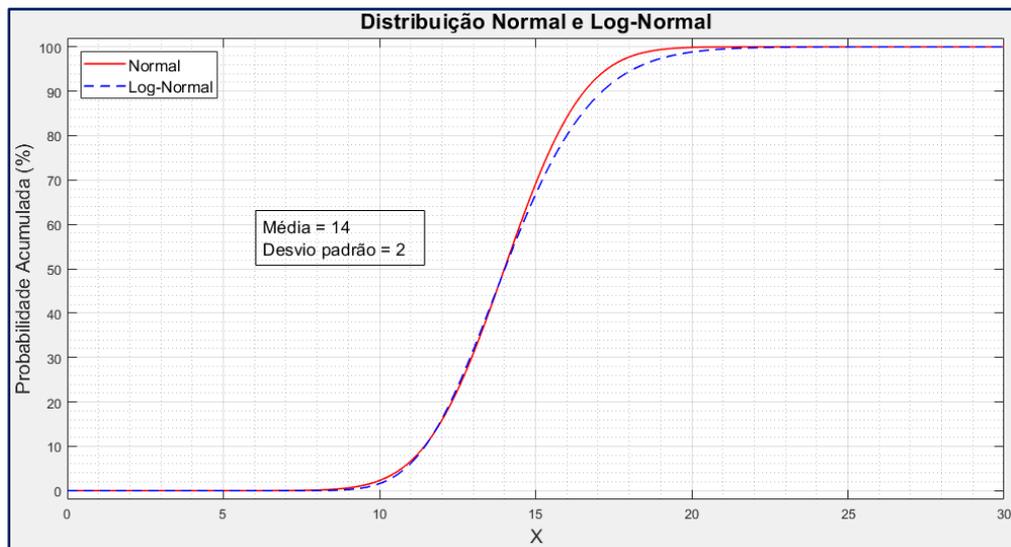


Figura 2.7: Função distribuição acumulada (FDA) normal e log-normal.

2.6. Tratamento estatístico de dados

O tratamento estatístico está relacionado com a análise de uma coleção de observações, denominada amostra ou conjunto amostral, que visa caracterizar um fenômeno aleatório de interesse, mas não prever o comportamento do fenômeno em si (análise probabilística).

O tratamento do conjunto amostral pode ser realizado com base em análises gráfica ou matemática. A análise gráfica compreende a classificação da variável

aleatória segundo a frequência de valores assumidos e a montagem de um gráfico frequência vs valores, denominado histograma (Figura 2.8 e 2.9). A análise matemática do conjunto amostral é realizada através da determinação de parâmetros estatísticos que visam caracterizar a distribuição.

2.6.1. Análise gráfica da amostra

Dado um histograma (Figura 2.8 e 2.9), o comportamento de uma variável aleatória X em uma amostra pode ser caracterizado pela função de frequência $h(x)$, compreendida como uma função matemática que descreve a frequência de valores assumidos pela variável aleatória no âmbito amostral, ou seja, é a função que melhor caracteriza a forma do histograma da variável aleatória. A função de frequência é análoga à função de densidade de probabilidade $f(x)$ da população correspondente, embora conceitualmente tenham interpretações diferentes. A população da variável aleatória possui uma função densidade de probabilidade $f(x)$ definida, mas caso sejam realizadas diversas amostragens desta mesma população, pode-se encontrar diversas funções de frequência $h(x)$ diferentes.

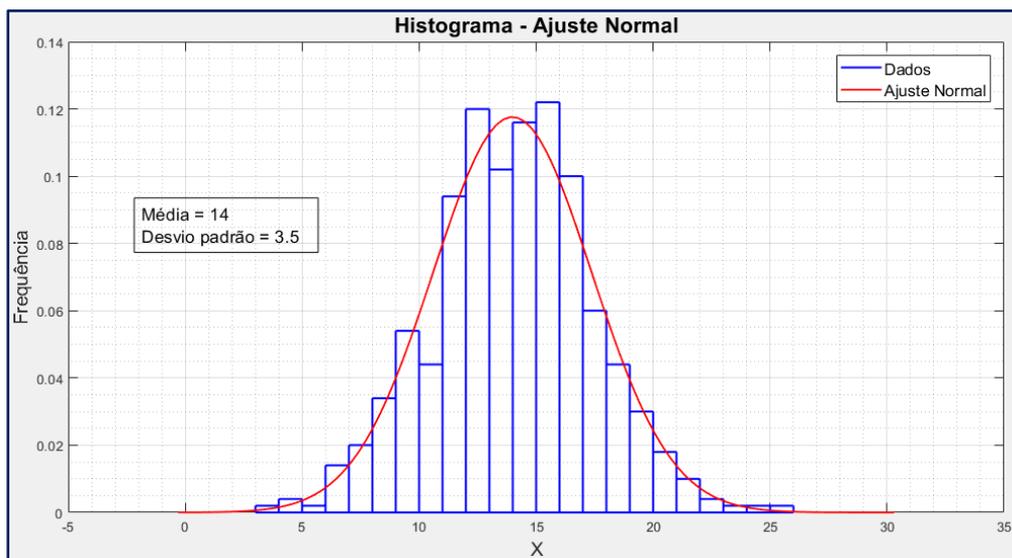


Figura 2.8: Histograma de 500 dados com ajuste de distribuição Normal

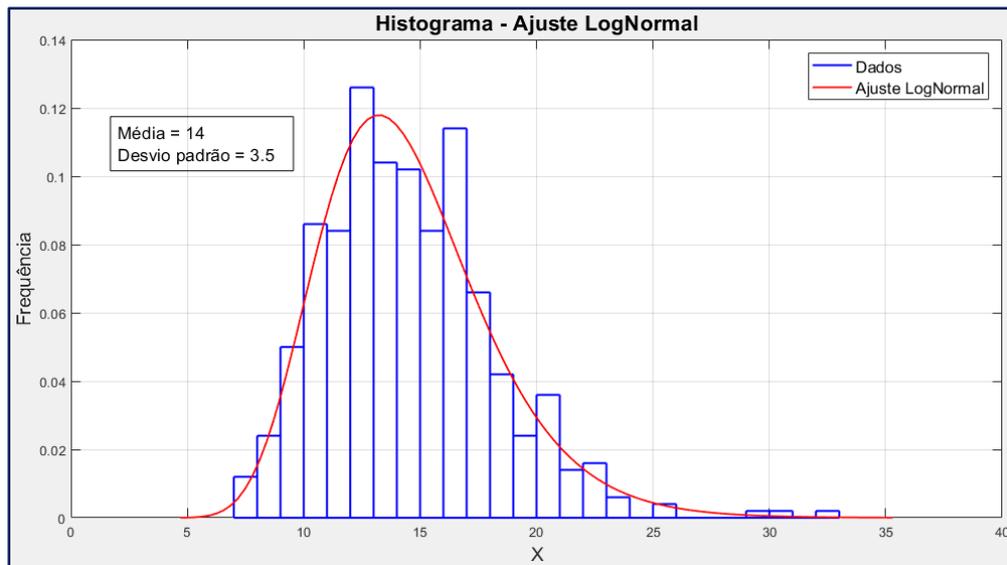


Figura 2.9: Histograma de 500 dados com ajuste de distribuição LogNormal

Um complemento da análise gráfica é a definição da função de frequência acumulada $H(x)$, análoga à função de distribuição acumulada $F(x)$. Em termos matemáticos, escreve-se:

$$H(x) = \sum_{y \leq x} h(y) \quad (2.14)$$

Onde x e y são variáveis discretas. A função de frequência acumulada pode ser interpretada como a soma das frequências relativas de todos os valores menores ou iguais a x .

2.6.2. Análise matemática da amostra

Os parâmetros mais comumente utilizados são a média, variância e desvio padrão amostral. A média amostral de uma variável aleatória X é definida por:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad (2.15)$$

Deve-se notar a diferença entre a média amostral e a média da distribuição de probabilidade μ . Enquanto a primeira relaciona os valores de um determinado conjunto de observações, a segunda indica a média de toda a população do fenômeno aleatório.

A variância amostral s^2 relaciona-se com os quadrados dos desvios da variável X em relação à média amostral \bar{x} , matematicamente :

$$s^2 = \sum_{i=1}^n \frac{(x_i - \bar{x})^2}{n-1} \quad (2.16)$$

Enquanto que o desvio padrão amostral s é definido como a raiz quadrada da variância. Outro parâmetro muito utilizado é o coeficiente de variação da amostra, $COV(X)$, que representa o desvio padrão amostral como porcentagem da média,

$$COV(X) = \frac{s}{\bar{x}} \quad (2.17)$$

2.7. Distribuição dos dados da amostragem

A população de um fenômeno aleatório é geralmente descrita pelas distribuições de seus valores, sendo comumente referidas em termos de sua distribuição, no caso de uma população finita, ou densidade, no caso de população infinita.

Se uma população é muito grande ou infinita, torna-se praticamente impossível a observação de todos os seus valores. Portanto, faz-se necessária a utilização de amostras (partes da população) para inferir, a partir dos resultados amostrais, o comportamento da população como um todo.

Para assegurar que uma amostra seja representativa da população da qual é obtida, e permitir a aplicação da teoria de probabilidades, é necessário que a amostra possa ser considerada aleatória.

Um conjunto de observações $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ constitui uma amostra aleatória de tamanho n , de uma população finita de tamanho N , se cada conjunto de n elementos da população tiver a mesma probabilidade de ser selecionado.

Portanto, conclui-se que o objetivo do estudo das distribuições da amostragem é inferir sobre os parâmetros da população, como a média μ e o desvio padrão σ , a partir dos parâmetros estocásticos da amostragem aleatória, como a média amostral \bar{x} e o desvio padrão amostral s .

2.7.1. Distribuição da amostragem da média com σ conhecido

Considere uma amostra aleatória de tamanho n obtida de uma população que possui média μ e variância σ^2 . Então X é o valor de uma variável aleatória cuja distribuição tem a média igual a μ ; em termos matemáticos,

$$\mu_{\bar{x}} = \mu \quad (2.18)$$

Para amostras provenientes de populações infinitas, a variância desta distribuição é expressa por:

$$\sigma_{\bar{x}}^2 = \frac{\sigma^2}{n} \quad (2.19)$$

Enquanto que para amostras obtidas de populações finitas de tamanho N a variância é definida como:

$$\sigma_{\bar{x}}^2 = \frac{\sigma^2}{n} \left(\frac{N-n}{N-1} \right) \quad (2.20)$$

Observa-se na Equação (2.20) que o fator $(N-n/N-1)$, conhecido como fator de correção de população finita, varia sempre entre 0 e 1 para amostras que não constituam uma porção substancial da população.

A confiabilidade da média amostral como uma estimativa de μ é geralmente medida através do desvio padrão da média,

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad (2.21)$$

Quanto menor o valor do desvio padrão da média $\sigma_{\bar{x}}$, mais próxima será a distribuição de \bar{x} da distribuição da população. Nota-se, contudo, que $\sigma_{\bar{x}}$ decresce na proporção da raiz quadrada de n , sendo necessário quadruplicar o tamanho da amostra para reduzir à metade o valor de $\sigma_{\bar{x}}$.

Para melhor compreensão do comportamento populacional a partir de amostragens, utiliza-se o conceito do teorema de limite central. Considere que \bar{x} é a média de uma amostra aleatória de tamanho n , obtida de uma população que possui média μ , variância σ^2 e média padronizada definida por:

$$z = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \quad (2.22)$$

A média padronizada é o valor de uma variável aleatória cuja função de distribuição se assemelha à função normal padronizada, quando n tende a infinito. Ou seja, a função de distribuição acumulada $F(x)$ de z satisfaz a seguinte condição:

$$\lim F_n(x) = \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz \quad (2.23)$$

2.7.2. Distribuição de Student

A aplicação da teoria apresentada em 2.7.1 requer o conhecimento prévio do desvio padrão σ da população. Caso a amostragem seja grande, pode-se aproximar o desvio padrão da população pelo desvio padrão amostral. Caso contrário, muito

pouco pode ser dito sobre a distribuição da amostragem, a não ser admitir que a amostra advém de uma população com distribuição normal.

Sendo a média de uma amostra aleatória de tamanho n obtida de uma distribuição normal de média μ e variância σ^2 , define-se t como sendo o valor de uma variável aleatória que possui distribuição t (distribuição de Student) com parâmetro $\nu = n-1$, designado de número de graus de liberdade.

Matematicamente, a variável t é definida por:

$$t = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}} \quad (2.24)$$

Do mesmo modo que a distribuição normal padronizada, a distribuição t possui média igual à zero. Contudo, a sua variância depende do número de graus de liberdade (indicado por ν), fazendo com que esta possua valores maiores que a unidade.

Devido ao fato da variância depender de ν , esta somente assumirá valores próximos da unidade quando o número de observações tenderem ao infinito. Miller e Freund (1985) observaram que a distribuição normal padronizada fornece uma boa aproximação na distribuição t para amostras com mais de 30 elementos.

2.8. Inferências sobre a média

Designa-se por estimativa pontual a escolha de uma estatística, isto é, um simples número obtido de uma amostra de dados, na qual o seu valor é razoavelmente idêntico ao parâmetro que se propõe estimar.

Pode-se definir uma estatística \hat{O} como sendo um estimador não tendencioso, somente no caso da média da distribuição da amostragem do estimador ser igual à média da população O .

A eficiência da estimativa entre estatísticas não tendenciosas é quantificada através da variância da distribuição de amostragem.

O erro E da estimativa pode ser entendido como a diferença entre o estimador e a quantidade que se supõe estar estimado. Matematicamente, escreve-se:

$$E = |\bar{x} - \mu| \quad (2.25)$$

Para amostras grandes ($n > 30$) e rearranjando a equação (2.24), o erro máximo da estimativa pode ser expresso por:

$$E = z_c \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad (2.26)$$

Onde z_c é uma variável padronizada com grau de confiança c . Caso seja necessário estimar μ por meio da média de uma amostra aleatória grande ($n > 30$), pode-se assegurar com um grau de confiança c que o erro E será no máximo igual ao valor fornecido pela Equação (2.25).

Através da Equação (2.26) pode-se determinar o tamanho de amostra necessário para se obter um determinado grau de precisão na estimativa do parâmetro desejado. Em termos matemáticos temos:

$$n = \left(\frac{z_c \sigma}{E} \right)^2 \quad (2.27)$$

Observa-se que a utilização da Equação (2.27) somente é possível com conhecimento do grau de confiança c , do erro E e do desvio padrão σ . Para o valor de σ utiliza-se geralmente uma estimativa baseada em dados preliminares.

O exposto acima pode também ser aplicado nas amostras reduzidas ($n < 30$) bastando, para isto, a substituição nas Equações (2.26) e (2.27) da variável padronizada z_c pela variável t_c da distribuição t e a variância da população pela variância amostral.

Devido ao fato das estimativas pontuais não poderem coincidir com as quantidades que se pretende estimar, é mais útil definir um intervalo de confiança, isto é, um intervalo no qual pode ser assegurado, com certo grau de segurança, que o parâmetro em consideração está incluído.

Para amostras pequenas, o intervalo de confiança para μ é dado por:

$$(\bar{x} - t_c) \frac{s}{\sqrt{n}} < \mu < (\bar{x} + t_c) \frac{s}{\sqrt{n}} \quad (2.28)$$

Onde s é o desvio padrão amostral. Pode-se interpretar a Equação (2.28) como um intervalo de confiança para a média da população possuindo grau de confiança c , com limites de confiança estabelecidos por $(x_c \pm t_c)(s/\sqrt{n})$.

2.9. Inferências sobre o desvio padrão

Segundo Miller e Freund (1985), embora a variância amostral seja um estimador não tendencioso de σ^2 , o desvio padrão amostral, quando não dividido por $\sqrt{n-1}$, é um estimador tendencioso para σ . Na prática, segundo Miller e Freund (1985), pode-se utilizar o desvio padrão amostral como aproximação de σ para grandes amostragens, onde os erros devido a tendências (*bias*) tendem a ser mínimos.

Considerando que o tamanho da amostra é grande e que a distribuição da amostragem do desvio padrão amostral pode ser aproximada por uma distribuição normal com média μ e desvio padrão $\sigma/\sqrt{2n}$, então o intervalo de confiança para o desvio padrão da população é dada por:

$$\frac{s}{1 + \frac{z_c}{\sqrt{2n}}} < \sigma < \frac{s}{1 - \frac{z_c}{\sqrt{2n}}} \quad (2.29)$$

3 Métodos probabilísticos

3.1. Introdução

Os métodos probabilísticos são metodologias eficientes para análise de estabilidade de taludes baseada em índices de confiabilidade e na análise de sensibilidade. Abordagens probabilísticas na análise de estabilidade de taludes têm sido amplamente consideradas nas últimas décadas por Ang e Tang (1975), Vanmarcke (1977), Whitman (1983), Harr (1987), Christian et al. (1992), Becker (1996a e 1996b), Whitman (2000), Duncan (2000), entre outros.

As incertezas associadas às variáveis de entrada, como a resistência ao cisalhamento e as propriedades hidráulicas, resultam em incerteza no fator de segurança FS , quantificadas por uma probabilidade de ruptura (P_f) e um índice de confiabilidade (β).

As duas funções de densidade de probabilidade apresentadas na Figura 3.1 incorporam incertezas na avaliação da estabilidade de um talude de solo. Do ponto de vista determinístico tradicional, um talude com um fator de segurança esperado $E[FS] = 1,5$ é considerado mais seguro do que um talude com $E[FS] = 1,2$, mas os dois cenários apresentados na Figura 3.1 mostram que a função densidade de probabilidade com maior $E[FS]$ tem maior probabilidade de falha. Portanto, $E[FS]$ sozinho pode fornecer informações incompletas ou mesmo errôneas da condição de estabilidade de um talude.

Basicamente, os métodos para quantificação de confiabilidade diferem entre si em relação ao tipo de avaliação (global ou local) e aos procedimentos matemáticos empregados na avaliação dos momentos probabilísticos da variável aleatória fator de segurança FS , dentre os quais os métodos de Monte Carlo, Hipercubo Latino e Estimativas Pontuais Alternativas apresentadas a seguir:

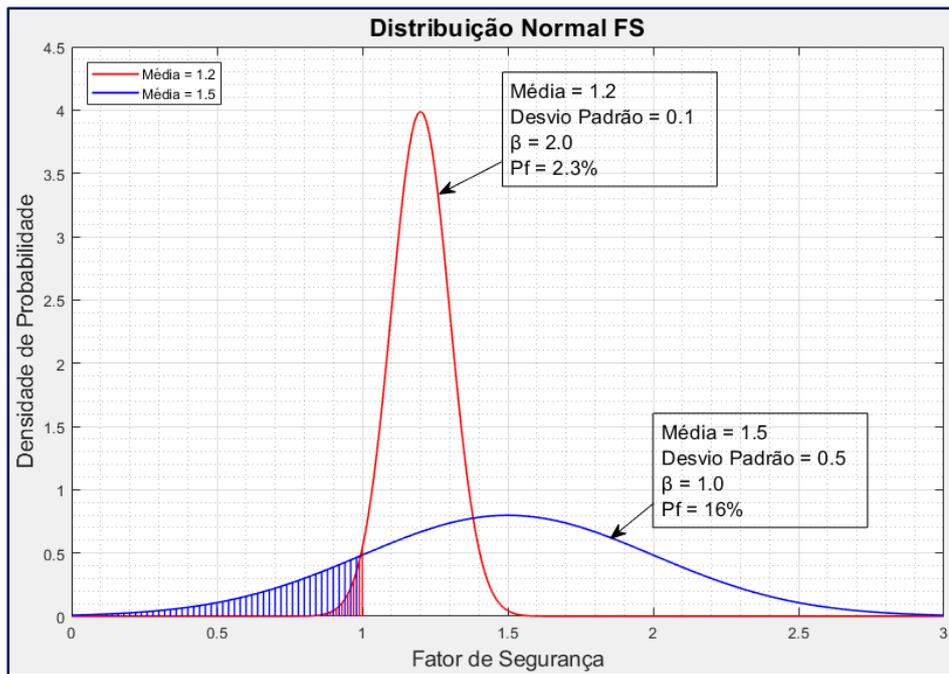


Figura 3.1: Função de densidade de probabilidade do fator de segurança FS , para dois cenários.

3.2. Método de Monte Carlo (MMC)

De acordo com Harr (1987), o método de Monte Carlo (MMC) foi desenvolvido pela primeira vez por Hammersley e Handscomb (1964). Vários conjuntos de valores de n variáveis aleatórias de entrada $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ devem ser gerados aleatoriamente, usando geradores de números aleatórios que produzem a função de densidade de probabilidade selecionada (Figura 3.2). Cada conjunto gerado aleatoriamente deve ser empregado para calcular uma realização do fator de segurança $FS(X)$. O conjunto das realizações de $FS(X)$ são então utilizadas para definir a função de densidade de probabilidade de $FS(X)$, conforme o fluxograma apresentado na Figura 3.3 na aplicação do método de Monte Carlo em análise probabilística da estabilidade de taludes.

O método de simulação de Monte Carlo requer um grande número de realizações (isto é, avaliações de FS). Teoricamente quanto maior o número de realizações na simulação, mais precisa será a resposta final. Harr (1987) apresentou a seguinte equação para o número de simulações de Monte Carlo necessárias para obter uma precisão específica:

$$N = \left[\frac{d^2}{4\varepsilon^2} \right]^m \quad (3.1)$$

Onde N = número de realizações necessárias, d = coeficiente de confiança para a distribuição normal, ε = erro máximo permitido pelo sistema, igual ao complemento do nível de confiança, m = número de variáveis aleatórias de entrada.

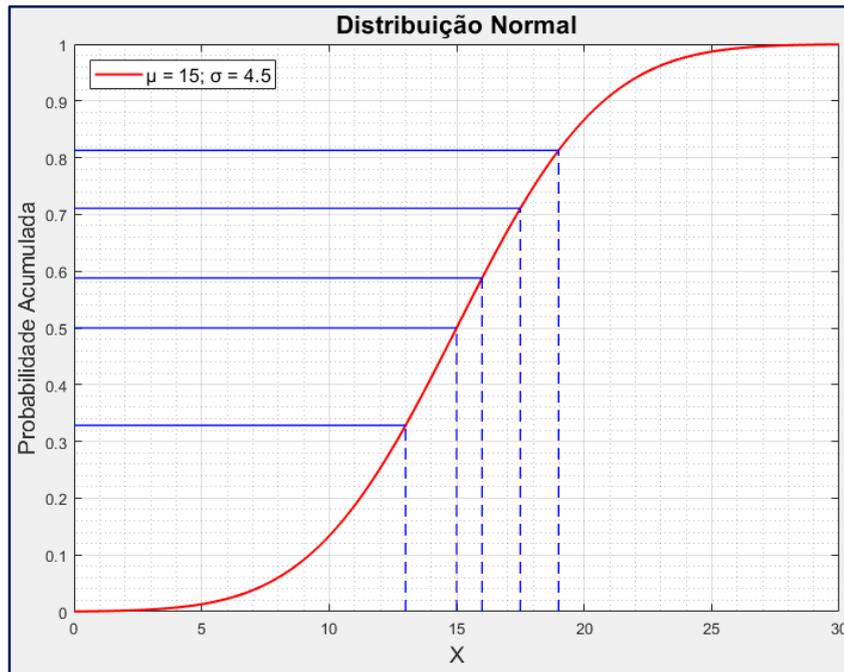


Figura 3.2: Geração de números aleatórios com função de distribuição acumulada normal pelo método de Monte Carlo.

Matematicamente, a simulação de Monte Carlo pode ser resumida com a seguinte equação:

$$P_f = P(F) \approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N I[\min_{\omega} FS_{\omega}(x_i) < 1] \equiv P_F^{MCS} \quad (3.2)$$

Onde P_f = probabilidade de ruptura; N = número total de realizações; ω = superfície potencial de ruptura; FS_{ω} = fator de segurança da superfície potencial de ruptura na realização x_i ; $\min_{\omega} FS_{\omega}(x_i)$ = fator de segurança mínimo da

superfície potencial de ruptura; $I[\cdot]$ = função indicadora: se $\min_{\omega} FS_{\omega}(x_i) < 1$, então $I[\min_{\omega} FS_{\omega}(x_i)] = 1$; caso contrário, $I[\min_{\omega} FS_{\omega}(x_i)] = 0$.

Hahn e Shapiro (1967) mencionaram que o método de Monte Carlo tem uma interpretação que o faz mais intuitivo do que outros métodos disponíveis. Além disso, o método de Monte Carlo é flexível e pode acomodar diferentes funções de densidade de probabilidade e variáveis aleatórias correlacionadas.

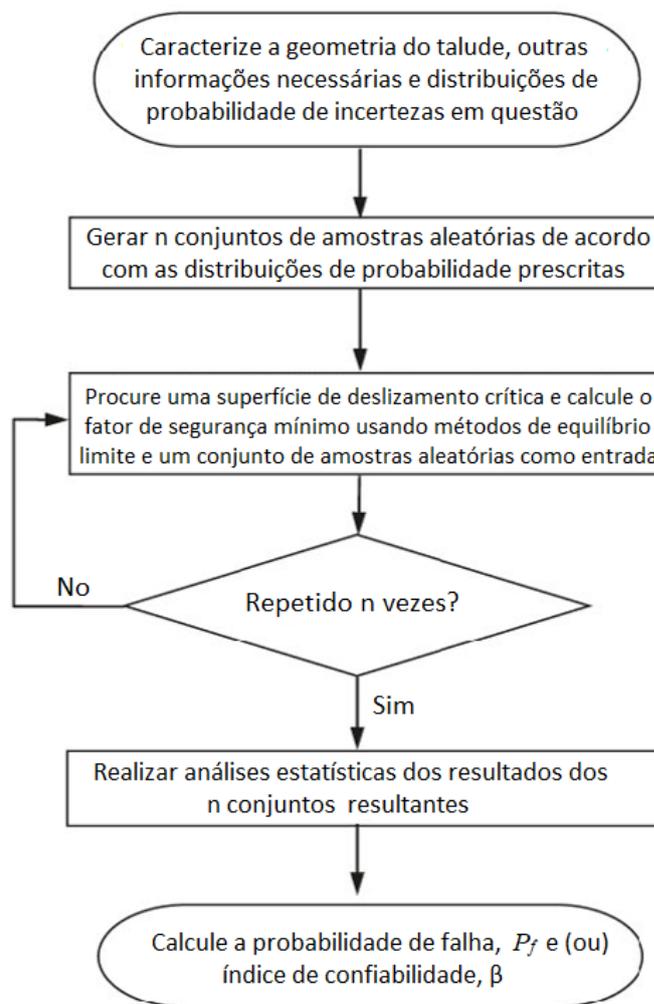


Figura 3.3: Fluxograma na aplicação do método de Monte Carlo para análise probabilística da estabilidade de taludes (Wang et al., 2011).

Infelizmente, o grande número de realizações necessárias limita sua aplicabilidade prática. Por exemplo, uma simulação de Monte Carlo com 99% de confiança requer 16.641 realizações se o problema tiver uma variável aleatória (Harr, 1987). Se o problema tiver m variáveis, o número aumenta geometricamente,

de acordo com a potência m . Por outro lado, é indiscutível que tais números devem ser ponderados, considerando que a velocidade de processamento de microcomputadores aumentou significativamente nas últimas décadas.

3.3. Método Hipercubo Latino (MHL)

O método do Hipercubo Latino é baseado na técnica de amostragem “estratificada” com seleção aleatória em cada extrato. Este método fornece uma amostragem mais suave das distribuições de probabilidades e resultados comparáveis ao método de Monte Carlo, porém com menor número de realizações. Tipicamente, uma análise usando 1.000 amostras obtidas pelo método de Hipercubo Latino produzirá resultados comparáveis para uma análise com 5.000 amostras com o método de Monte Carlo.

3.3.1. Amostragem

A amostragem de Hipercubo Latino é uma forma de amostragem estratificada que pode ser aplicada a problemas de múltiplas variáveis aleatórias. Uma amostragem de Hipercubo Latino pode ser incorporada em um modelo de Monte Carlo com bastante facilidade e operar com variáveis aleatórias seguindo qualquer distribuição de probabilidades. Na realização da amostragem estratificada, a probabilidade acumulada (1 ou 100%) é dividida em segmentos, um para cada iteração da simulação de Monte Carlo. Uma probabilidade é escolhida aleatoriamente em cada segmento usando uma distribuição uniforme e, em seguida, mapeada para o valor representativo correto da distribuição real da variável.

A figura 3.4 mostra a geração de números aleatórios, com uma distribuição de probabilidade normal no método Hipercubo Latino.

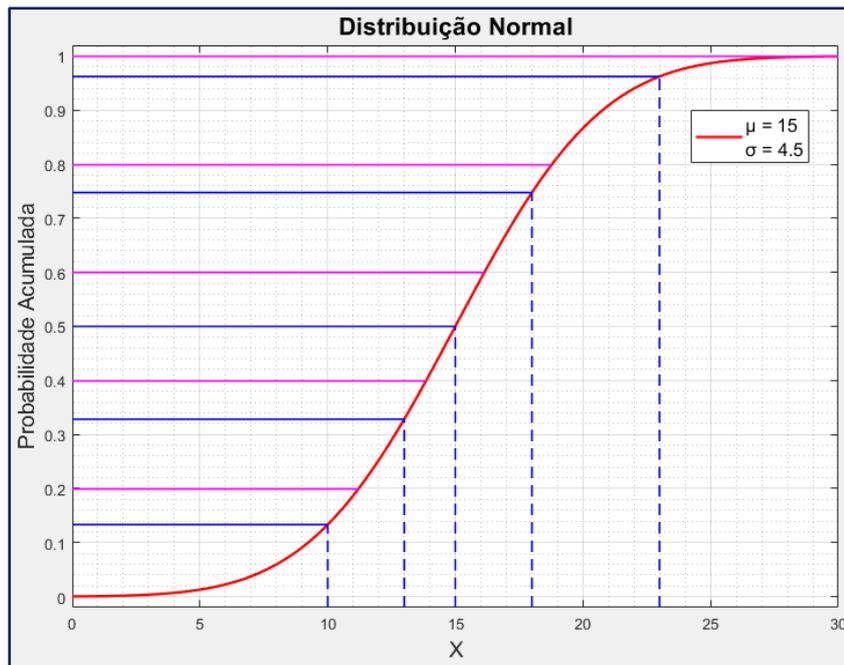


Figura 3.4: Geração de números aleatórios com função de distribuição acumulada normal pelo método de Hipercubo Latino.

Numa simulação com 500 interações, a distribuição de probabilidade acumulada é dividida em 500 segmentos, cada um representando 0,2% da distribuição acumulada total. Para o primeiro segmento, uma probabilidade é aleatoriamente escolhida entre 0% e 0,2%; para o segundo segmento, entre 0,2% e 0,4% e assim por diante. Cada probabilidade é usada para calcular o valor da variável aleatória com base na distribuição de probabilidades selecionada.

$P(X \leq x) = n$, onde n é o ponto aleatório no segmento. Como isto é feito é diferente para cada distribuição, mas é geralmente apenas questão de inverter a função de probabilidade para determinar o valor de x .

3.3.2. Agrupamento

Uma vez que cada variável tenha sido amostrada usando esse método, um agrupamento das variáveis aleatórias é selecionado para cada cálculo da simulação de Monte Carlo. A seleção uniforme independente é feita com cada um dos valores das variáveis geradas. Cada valor deve ser usado somente uma vez. Uma das grandes vantagens é que as amostras aleatórias são obtidas uma por vez, impossibilitando que haja repetições durante a amostragem.

3.4. Método de Estimativas Pontuais (MEP)

O método das estimativas pontuais (MEP) refere-se à categoria de métodos probabilísticos para o cálculo dos momentos probabilísticos de uma função de variáveis aleatórias que são baseadas no cálculo do $FS(X)$ de valores pré-determinados de X . Esses valores pré-determinados de X são combinados com os correspondentes "pesos" ou probabilidades discretas. A maioria das abordagens MEP é baseada em duas estimativas pontuais (ou seja, dois valores para cada x_i), mas na literatura podem ser encontradas referências com estimativas pontuais de terceira ordem ou superior (Harr, 1987).

Apresenta-se a seguir o Método de Estimativas Pontuais (Rosenblueth, 1981), um procedimento simples para computar os três primeiros momentos probabilísticos de uma função de variáveis aleatórias. No caso de única variável, estima-se a variável e suas funções em dois pontos, em vez de em um único ponto como em abordagens determinísticas.

Seja $Y = Y(X)$, onde X representa a variável aleatória. Quando não interessa a distribuição de probabilidade de Y , mas apenas uma aproximação dos seus primeiros momentos, é possível então ignorar a função de densidade de probabilidade com a solução, portanto, sendo independente da função de densidade de probabilidades atribuída a X . Desde que $Y(X)$ seja suficientemente suave na vizinhança de X , na medida em que a dispersão de X não seja muito grande, uma distribuição fictícia de X deve seguir o critério da simplicidade que, no caso, consiste em assumir que a função densidade de probabilidade de X está completamente concentrada no valor esperado de X . A análise corresponde a uma estimativa pontual de Y onde X é igual à expectativa (ou valor esperado) de X , tão simples quanto uma análise determinística. Assim obtém-se uma aproximação de primeira ordem para a estimativa de Y que, muitas vezes, será excessivamente crua. Se, ao invés de uma, forem usadas duas concentrações iguais a 0,5 cada, colocadas simetricamente em relação às expectativas do X , pode-se calcular os dois primeiros momentos de X e estimar Y com uma aproximação de segunda ordem do valor esperado. Se a condição de simetria for omitida, têm-se parâmetros suficientes para determinar os três primeiros momentos de X e obter uma aproximação de terceira ordem para a estimativa de Y . No texto seguinte, desenvolve-se a última

abordagem, considerando resultados de concentrações simétricas em relação à expectativa de X como um caso particular.

3.4.1. Função de uma variável

Seja uma função real $Y = Y(X)$ da variável aleatória real X (as letras maiúsculas são usadas para variáveis aleatórias e as minúsculas correspondentes indicam valores dessas variáveis).

O momento de ordem i em relação à origem é definido genericamente como:

$$M_i(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^i p_X(x) dx \quad i = 1, 2, \dots \quad (3.3)$$

Onde $p_X(x)$ é a função de densidade de probabilidade de X avaliada em $X = x$. Alternativamente, o momento central é escrito como:

$$M'_i(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \bar{x})^i p_X(x) dx \quad i = 1, 2, \dots \quad (3.4)$$

Onde \bar{x} indica a expectativa de X ou $M_1(X)$. Resulta da equação (3.3) que o momento de ordem zero é:

$$M_0(X) = \int_{-\infty}^{\infty} p_X(x) dx = 1 \quad (3.5)$$

E o primeiro momento central $M'_1(X)$ é sempre nulo. $M'_2(X)$ é conhecido como a variância de X e é normalmente designado σ^2 , enquanto que $M'_3(X)$ define a assimetria de X em relação à média. Para distribuições simétricas, $M'_3(X)$ é nulo e o mesmo vale para todos os demais momentos centrais de ordem ímpar.

O interesse é obter expressões para a expectativa (μ), o desvio padrão (σ) e o coeficiente de assimetria (v) que sejam independentes da distribuição de probabilidades de X . Para esse fim, atribui-se uma distribuição arbitrária com quatro parâmetros, de modo a obter as respectivas expressões para os momentos de ordem zero e os três primeiros momentos de X . Uma função particularmente simples que

satisfaz este requisito consiste em duas concentrações, P_1 e P_2 , da função densidade de probabilidade $p_X(x)$ em $X = x_1$ e x_2 ,

$$p_X(x) = P_1\delta(x-x_1) + P_2\delta(x-x_2) \quad (3.6)$$

Onde $\delta(\cdot)$ é a função delta (ou função de Dirac) da variável (\cdot) . Esta distribuição é representada esquematicamente na Figura 3.5.

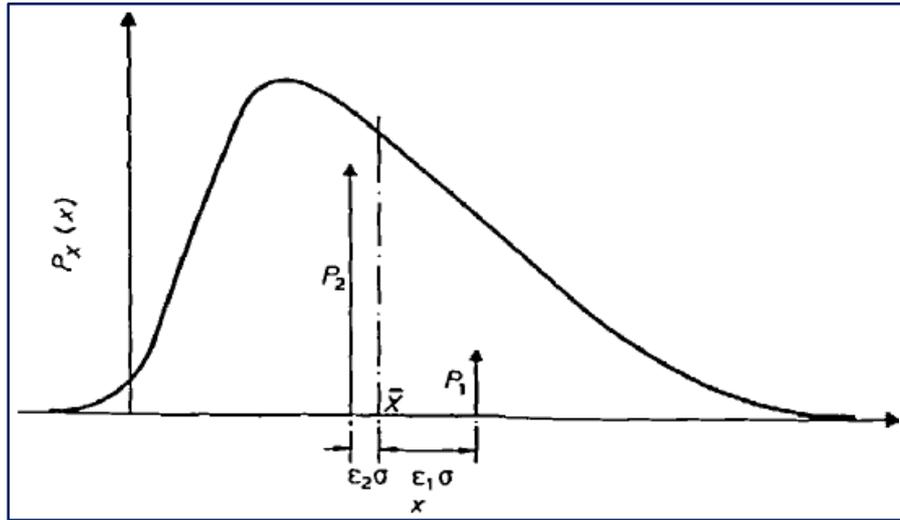


Figura 3.5: Concentrações da função densidade de probabilidade (adaptado de Rosenblueth, 1981).

Definindo $\xi_i = (x_i - \bar{x})/\sigma$, para $i = 1, 2$, as quatro expressões procuradas são as seguintes:

$$\begin{aligned} 1 &= P_1 + P_2 \\ 0 &= \xi_1 P_1 - \xi_2 P_2 \\ 1 &= \xi_1^2 P_1 + \xi_2^2 P_2 \\ \nu &= \xi_1^3 P_1 + \xi_2^3 P_2 \end{aligned} \quad (3.7)$$

Cuja solução resulta em

$$\xi_1 = \frac{\nu}{2} + \sqrt{1 + \left(\frac{\nu}{2}\right)^2} \quad (3.8)$$

$$\xi_2 = \xi_1 - \nu \quad (3.9)$$

$$P_1 = \frac{\xi_2}{\xi_1 + \xi_2} \quad (3.10)$$

$$P_2 = 1 - P_1 \quad (3.11)$$

Considerando $Y_i = y(x_i)$, os primeiros três momentos centrais de Y são:

$$0 = (y_1 - \bar{Y})P_1 + (y_2 - \bar{Y})P_2 \quad (3.12)$$

$$\sigma_Y^2 = (y_1 - \bar{Y})^2 P_1 + (y_2 - \bar{Y})^2 P_2 \quad (3.13)$$

$$\nu_Y \sigma_Y^2 = (y_1 - \bar{Y})^3 P_1 + (y_2 - \bar{Y})^3 P_2 \quad (3.14)$$

Das Equações (3.11) a (3.14) então se determina:

$$\bar{Y} \doteq P_1 y_1 + P_2 y_2 \quad (3.15)$$

$$\sigma_Y \doteq \sqrt{P_1 P_2} |y_1 - y_2| \quad (3.16)$$

$$\nu_Y \sigma_Y \doteq (P_2 - P_1)(y_1 - y_2) \quad (3.17)$$

Onde \doteq significa igual, exceto para termos de ordem superior. As Figuras 3.6 a 3.8 mostram a variação de Y em função da expectativa X , coeficiente de variação $COV = \sigma / \bar{X}$ e coeficiente de assimetria v .

Quando um dos momentos centrais de X é desconhecido, o número de equações simultâneas é reduzido para três, podendo-se atribuir arbitrariamente o valor de um dos quatro parâmetros da distribuição de X . Por outro lado, quando $v = 0$ as expressões obtidas tornam-se ainda mais simples, sendo expressas por:

$$\xi_1 = \xi_2 = 1 \quad (3.18)$$

$$P_1 = P_2 = \frac{1}{2} \quad (3.19)$$

$$\bar{Y} \doteq \frac{1}{2} (y_1 + y_2) \quad (3.20)$$

$$\sigma_Y \doteq \frac{1}{2} |y_1 - y_2| \quad (3.21)$$

Determinando-se:

$$V_Y = \frac{|y_1 - y_2|}{y_1 + y_2} \quad (3.22)$$

As equações são utilizadas quando v é desconhecido, zero ou considerado insignificante.

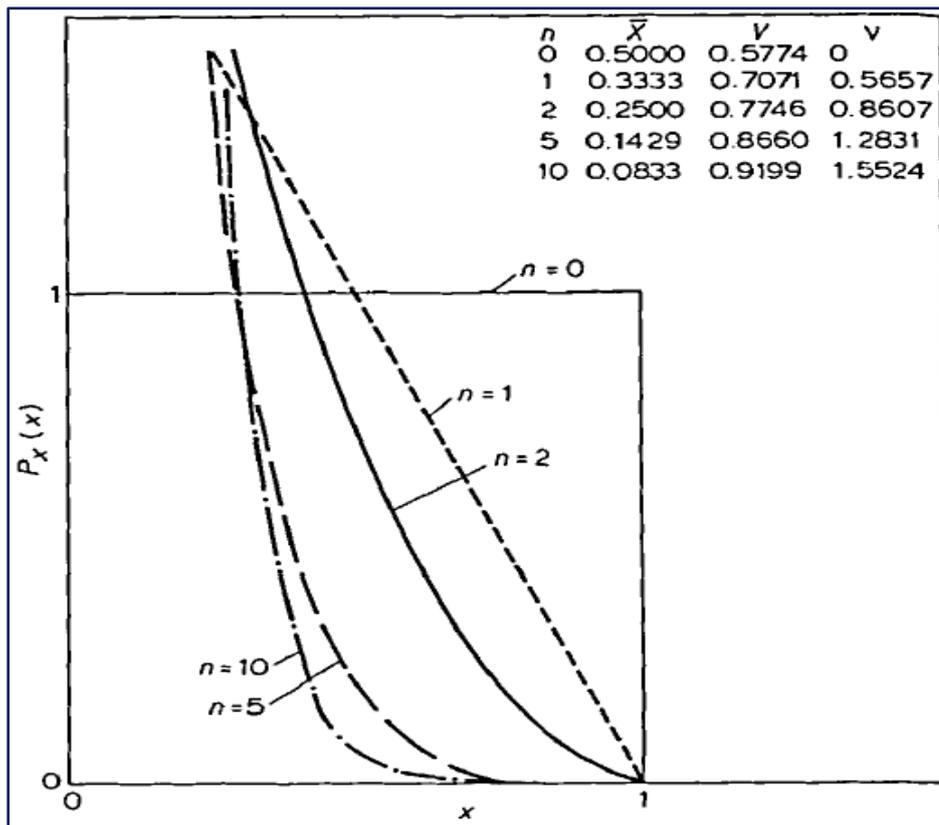


Figura 3.6: Distribuição de probabilidade pelo MEP $p_x(x) = (n+1)(1-x)^n$

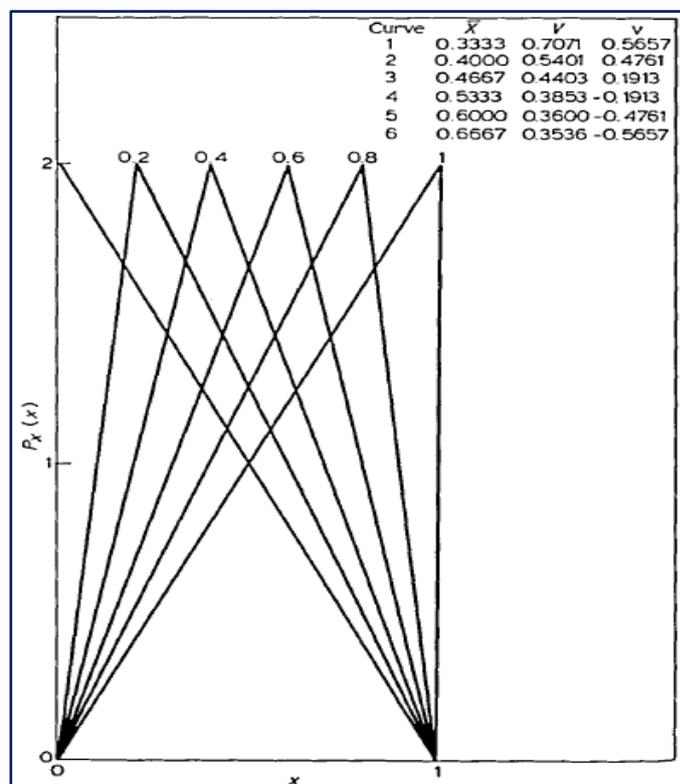


Figura 3.7: Distribuição de probabilidade triangular pelo MEP (adaptado de Rosenblueth, 1981)

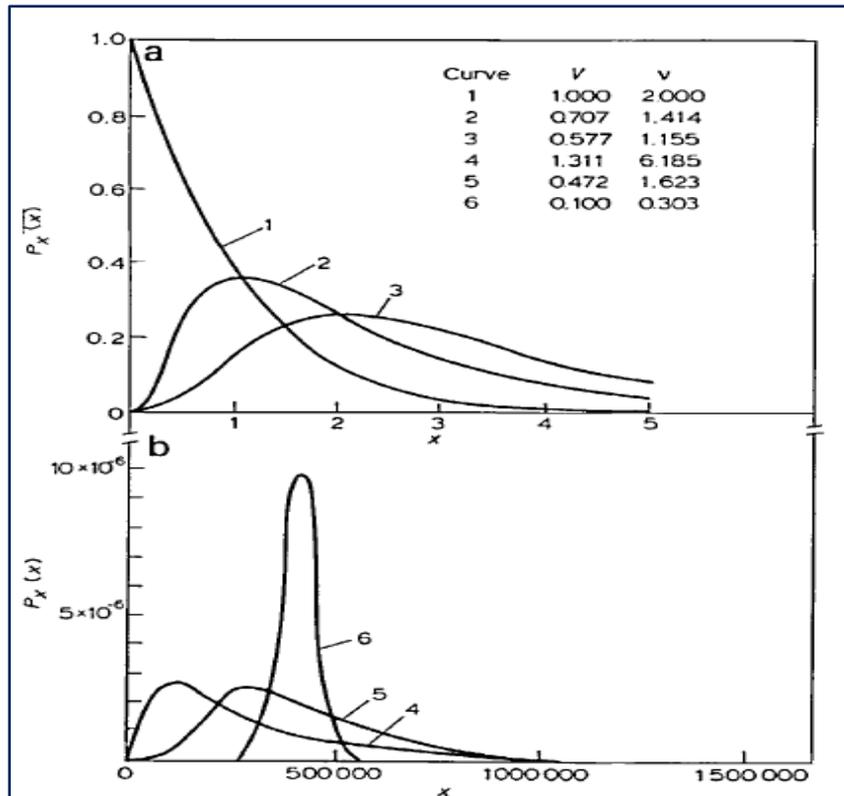


Figura 3.8: a) Distribuição de probabilidades gama pelo MEP b) Distribuição log-normal pelo MEP (Adaptado de Rosenblueth, 1981).

3.5. Método das Estimativas Pontuais Alternativas (MEPA)

Todos os modelos probabilísticos são baseados nas análises determinísticas do *FS* para um número de cenários. O método de estimativas pontuais requer um número menor de cálculos e apresenta resultados relativamente precisos. No entanto, o número de cálculos exigido aumenta drasticamente à medida que cresce o número de variáveis aleatórias de entrada.

3.5.1. Função de uma variável

Um método probabilístico para o *FS* precisa ser capaz de acomodar uma função multivariada de variáveis aleatórias não simétricas correlacionadas. O Método das Estimativas Pontuais Alternativas apresenta esses recursos, sendo baseado na combinação da abordagem por expansão em séries de Taylor com o

método das estimativas pontuais univariada proposto por Rosenblueth (1975, 1981).

A fim de combinar a aproximação das séries de Taylor e o método de estimativas de dois pontos, o fator de segurança FS deve primeiramente ser expandido usando a série de Taylor em relação aos valores médios das variáveis aleatórias de entrada. A expansão seguinte usa termos até a segunda ordem:

$$\begin{aligned}
 FS(X) = & FS(E[X]) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial FS}{\partial x_i} \Big|_{E[X]} (x_i - E[x_i]) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 FS}{\partial x_i^2} \Big|_{E[X]} (x_i - E[x_i])^2 \\
 & + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 FS}{\partial x_i \partial x_j} \Big|_{E[X]} (x_i - E[x_i])(x_j - E[x_j])
 \end{aligned} \quad (3.23)$$

Onde:

FS : fator de segurança.

X : conjunto de n variáveis aleatórias X_1, X_2, \dots, X_n .

$E[\]$: valor esperado.

$FS(E[X]) = FS(E[X_1], E[X_2], \dots, E[X_n])$.

As derivadas que aparecem na Eq. 3.23 devem ser obtidas em relação aos valores médios $E[X]$ como indicado. O valor esperado do $FS(X)$, $E[FS(X)]$, pode ser estimado considerando o valor esperado de ambos os lados da Eq. 3.23, como segue:

$$E[FS(X)] = FS(E[X]) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 FS}{\partial x_i^2} \Big|_{E[X]} Var[x_i] + \sum_{i < j} \sum_j \frac{\partial^2 FS}{\partial x_i \partial x_j} \Big|_{E[X]} Cov[x_i, x_j] \quad (3.24)$$

Onde:

$Var[X_i] = E[(x_i - E[X_i])^2]$, é a variância de x_i .

$Cov[X_i, X_j] = E[(x_i - E[X_i])(x_j - E[X_j])]$, é o covariância entre x_i e x_j .

A Eq. 3.24 corresponde ao método das séries de Taylor para o cálculo do valor médio de uma função de varias variáveis aleatórias. Momentos do FS de ordem m , $\mu_m[FS]$, podem ser obtidas com base na definição pela qual $\mu_m[FS] = E[(FS - E[FS])^m]$. Por exemplo, a variância do FS pode ser calculada

usando a equação de $Var[FS] = E[(FS-E[FS])^2]$. Qualquer outro momento do FS de maior ordem estatística pode ser obtido por meio da Eq. 3.24 e substituindo FS por $(FS-E[FS])^m$.

As derivadas requeridas pela Eq. 3.24 não são facilmente determinadas, deixando-a praticamente quase sem uso prático. No entanto, o método de estimativas pontuais univariadas de dois pontos proposto por Rosenblueth (1975, 1981) pode ser utilizado para obter os termos da Eq. 3.24, definindo-se primeiramente $FS(x_i) = FS(E[X_1], \dots, E[X_{i-1}], x_i, E[X_{i+1}], \dots, E[X_n])$.

De acordo com o método proposto por Rosenblueth (1981), a seguinte estimativa univariada de dois pontos de $E[FS(x_i)]$, pode ser escrita:

$$E[FS(x_i)] = p_i^+ FS(x_i^+) + p_i^- FS(x_i^-) \quad (3.25)$$

Onde:

$$FS(x_i) = FS(E[X_1], \dots, E[X_{i-1}], x_i, E[X_{i+1}], \dots, E[X_n])$$

$$FS(x_i^\pm) = FS(E[X_1], \dots, E[X_{i-1}], x_i^\pm, E[X_{i+1}], \dots, E[X_n])$$

$$x_i^\pm = E[x_i] + \xi^\pm[X_i] \sigma[X_i]$$

$$\xi^\pm[X_i] = \gamma_1[X_i] / 2 \pm \sqrt{1 + (\gamma_1[X_i] / 2)^2}$$

$$\gamma_1[X_i] = \mu_3[x] / \{\sigma[X_i]\}, \text{ é a assimetria de } X_i$$

$$\mu_3[x] = \text{é o terceiro mometo estatístico de } X_i$$

$$\sigma[X_i] = \text{é o desvio padrão de } X_i$$

$$P_i^\pm = \frac{1}{2} \left[1 \mp \sqrt{1 - \frac{1}{1 + [\gamma_1[x_i] / 2]^2}} \right]$$

A estimativa univariada de dois pontos apresentados na Eq. 3.25 é baseada nas equações de momento até o terceiro momento estatístico. Nota-se que $x_i^\pm = E[X_i] \pm \sigma[X_i]$ e $p_i^\pm = 1/2$, quando X_i é assumido simetricamente distribuído (i.e., $\gamma_1[X_i] = 0$).

Uma equação alternativa para $E[FS(x_i)]$ pode ser obtida usando uma expansão das séries univariadas de Taylor do $FS(x_i)$ sobre os valores médios das variáveis de

entrada. A seguinte equação é obtida, mantendo os termos até segunda ordem e aplicando o operador da esperança:

$$E[FS(x_i)] = FS(E[X]) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 FS}{\partial x_i^2} \Big|_{E[X]} Var[x_i] \quad (3.26)$$

A seguinte equação pode ser obtida igualando-se as Eqs. 3.25 e 3.26,

$$FS(E[X]) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 FS}{\partial x_i^2} \Big|_{E[X]} Var[X_i] = FS(E[X]) + \sum_{i=1}^n p_i^+ FS(x_i^+) + p_i^- FS(x_i^-) - FS(E[X]) \quad (3.27)$$

Todos os termos da Eq. 3.27 foram previamente determinados. A Equação 3.27 fornece os dois primeiros termos do lado direito da Eq. 3.24. O último termo do lado direito da Eq. 3.24 pode ser determinado se a derivada da segunda ordem $\partial^2 FS / \partial x_i \partial x_j$ for obtida. A fim de determiná-la, primeiramente se define $FS(x_i^+, x_j^+) = FS(E[X_1], \dots, E[X_{i-1}], x_i^+, E[X_{i+1}], \dots, E[X_{j-1}], x_j^+, E[X_{j+1}], \dots, E[X_n])$, e então usar a expansão da série de Taylor de $FS(x_i^+, x_j^+)$ em relação aos valores médios das variáveis aleatórias de entrada como forma de obter uma aproximação de $\partial^2 FS / \partial x_i \partial x_j$. A expansão da série de Taylor pode ser escrita como segue:

$$\begin{aligned} FS(x_i^+, x_j^+) &= FS(E[X]) + \frac{\partial FS}{\partial x_i} \Big|_{E[X]} (x_i^+ - E[x_i]) + \frac{\partial FS}{\partial x_j} \Big|_{E[X]} (x_j^+ - E[x_j]) \\ &+ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 FS}{\partial x_i^2} \Big|_{E[X]} (x_i^+ - E[x_i])^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 FS}{\partial x_j^2} \Big|_{E[X]} (x_j^+ - E[x_j])^2 \\ &+ \frac{\partial^2 FS}{\partial x_i \partial x_j} \Big|_{E[X]} (x_i^+ - E[x_i])(x_j^+ - E[x_j]) \end{aligned} \quad (3.28)$$

Onde:

$$FS(x_i^+, x_j^+) = FS(E[x_1], \dots, E[x_{i-1}], x_i^+, E[x_{i+1}], \dots, E[x_{j-1}], x_j^+, E[x_{j+1}], \dots, E[x_n])$$

Note-se que a Eq. 3.28 pode ser reorganizada, considerando $\partial FS / \partial x_i \Big|_{E[X]} (x_i^+ - E[X_i]) + (1/2)(\partial^2 FS / \partial x_i^2 \Big|_{E[X]}) (x_i^+ - E[X_i])^2 = FS(x_i^+) - FS(E[X])$,

resultando:

$$\frac{\partial^2 FS}{\partial x_i \partial x_j} \Big|_{E[X]} = \frac{FS(x_i^+, x_j^+) - FS(x_i^+) - FS(x_j^+) + FS(E[X])}{\xi^+[x_i] \sigma[x_i] \xi^+[x_j] \sigma[x_j]} \quad (3.29)$$

A seguinte equação é obtida após a combinação das Eqs. 3.24, 3.27 e 3.29:

$$\begin{aligned} E[FS(X)] &= FS(E[X]) + \sum_{i=1}^n \left[p_i^+ FS(x_i^+) + p_i^- FS(x_i^-) - FS(E[X]) \right] \\ &+ \sum_{\substack{i \\ i < j}} \sum_j \left[FS(x_i^+, x_j^+) - FS(x_i^+) - FS(x_j^+) + FS(E[X]) \right] \frac{\rho[x_i, x_j]}{\xi^+[x_i] \xi^+[x_j]} \end{aligned} \quad (3.30)$$

Onde:

$$FS(E[X]) = FS(E[X_1], E[X_2], \dots, E[X_n])$$

$$FS(x_i^\pm) = FS(E[X_1], E[X_2], \dots, E[X_{i-1}], x_i^\pm, E[X_{i+1}], \dots, E[X_n])$$

$$x_i^\pm = E[X_i] + \xi^\pm[X_i] \sigma[X_i]$$

$$\xi^\pm[X_i] = \gamma_1[X_i] / 2 \pm \sqrt{1 + (\gamma_1[X_i] / 2)^2}$$

$$P_i^\pm = \frac{1}{2} \left[1 \mp \sqrt{1 - \frac{1}{1 + [\gamma_1[x_i] / 2]^2}} \right]$$

$$FS(x_i^+, x_j^+) = FS(E[X_1], \dots, E[X_{i-1}], x_i^+, E[X_{i+1}], \dots, E[X_{j-1}], x_j^+, E[X_{j+1}], \dots, E[X_n])$$

$$\rho[x_i, x_j] = \frac{Cov[X_i, X_j]}{\sigma[X_i] \sigma[X_j]} = \text{coeficiente de correlação entre } X_i \text{ e } X_j$$

A Eq. 3.30 é a equação final para o cálculo do valor esperado do FS . Qualquer momento do FS de ordem m pode ser obtido com base na definição, $\mu_m[FS] = E[\{FS - E[FS]\}^m]$ como mencionado anteriormente. Em outras palavras, os

momentos de ordem superior estatístico do FS podem ser obtidos usando a Eq. 3.30 e substituindo o FS por $\{FS(X) - E[FS(X)]\}^m$.

$$\begin{aligned} \mu_m[FS(X)] &= E[\{FS(X) - E[FS(X)]\}^m] = \{FS(E(X) - E[FS(X)])\}^m \\ &+ \sum_{i=1}^n \left[p_i^+ \{FS(x_i^+) - E[FS(X)]\}^m + p_i^- \{FS(x_i^-) - E[FS(X)]\}^m \right. \\ &\quad \left. - \{FS(E[X]) - E[FS(X)]\}^m \right] \\ &+ \sum_{i < j} \sum_j \left[\{FS(x_i^+, x_j^+) - E[FS(X)]\}^m - \{FS(x_i^+) - E[FS(X)]\}^m \right. \\ &\quad \left. - \{FS(x_j^+) - E[FS(X)]\}^m + \{FS(E[X]) - E[FS(X)]\}^m \right] \quad (3.31) \\ &\times \frac{\rho[X_i, X_j]}{\xi^+[X_i] \xi^+[X_j]} \end{aligned}$$

Onde:

$$\mu_m[FS(X)] = \text{momento estatístico do } FS \text{ de ordem } m$$

$$E[FS(X)] = \text{valor calculado usando a Eq. 3.30}$$

As Eqs. 3.30 e 3.31 podem ser utilizadas no cálculo dos primeiros momentos estatísticos do fator de segurança FS que são utilizados para cálculo do índice de confiabilidade e a probabilidade de ruptura P_f . São requerimentos de entrada das Eqs 3.30 e 3.31, a média, o desvio padrão (ou coeficiente de variação), a assimetria e a matriz de correlação das variáveis aleatórias de entrada. O número necessário de avaliações do fator de segurança FS é $(n^2 + 3n + 2)/2$ se todas as variáveis são correlacionadas e $(2n + 1)$ se todas as variáveis são independentes, sendo n o número de variáveis de entrada.

O Método das Estimativas Pontuais proposto por Rosenblueth (1975, 1981) requer 2^n avaliações do fator de segurança FS para a aproximação de 2 pontos e 3^n avaliações do fator de segurança FS para a aproximação de 3 pontos. É aparente que o método torna-se impraticável devido ao esforço computacional crescente com o número de avaliações exigidas. A Figura 3.9 mostra que para $n \geq 5$ as equações aqui apresentadas exigem avaliações significativamente menores do que aproximações para 2 e 3 pontos utilizando as equações propostas por Rosenblueth (1975, 1981). Para $n \leq 4$ o número de avaliações necessárias pelas equações aqui

mostradas para variáveis aleatórias correlacionadas não apresenta variações significativas com relação à aproximação de 2 pontos proposto por Rosenblueth (1975).

A Figura 3.9 mostra também que as equações apresentadas exigem uma série de avaliações relativamente próximas do número de avaliações requeridas pela aproximação das séries de Taylor quando as variáveis são consideradas independentes. A taxa de aumento do número de avaliações é bastante constante e significativamente menor do que os outros métodos de estimativas pontuais.

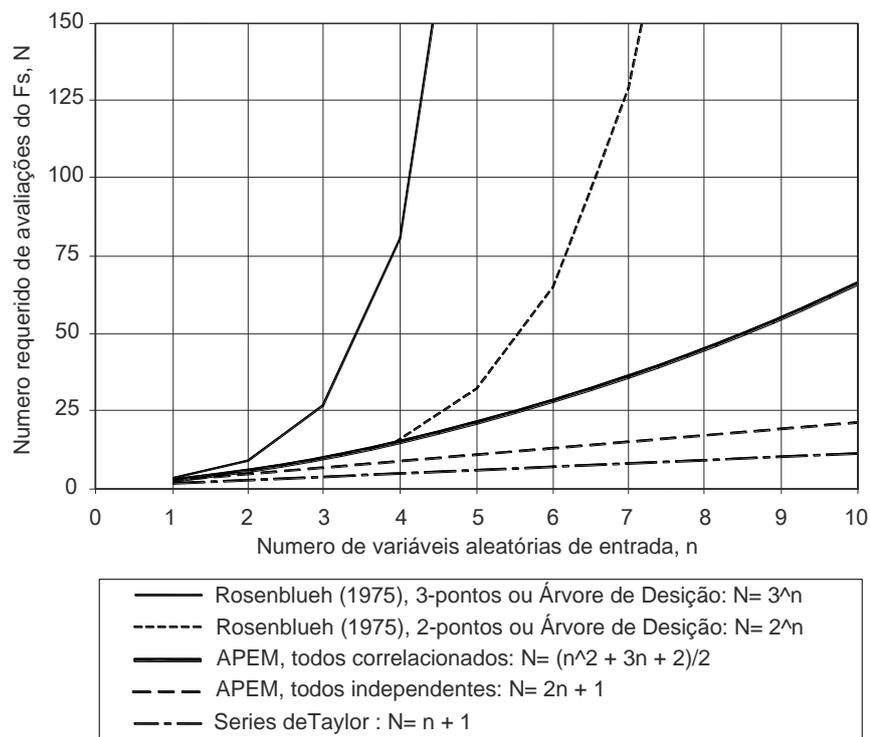


Figura 3.9: Número de avaliações de FS , exigido por vários métodos probabilísticos (adaptado de Fredlund e Fredlund, 2011).

3.6. Métodos de estimativa de desvios padrão

Uma característica especial que distingue o engenheiro geotécnico é a capacidade de estimar valores razoáveis de parâmetros, usando a própria experiência e dados escassos, muitas vezes sob forma de índices e correlações com ensaios de campo. Para poder estimar probabilidade de ruptura (P_f), primeiramente é necessário estimar os desvios padrão dos parâmetros envolvidos no cálculo do

fator de segurança (FS). Normalmente exigiriam um grande número de resultados para estimativas confiáveis no cálculo do desvio padrão, o que raramente acontece na prática da engenharia. Essas estimativas podem ser feitas através dos seguintes métodos:

3.6.1. Determinação direta com base em resultados de ensaios

Quando resultados de ensaios em número suficientemente grande forem disponíveis, o que raramente acontece, o desvio padrão é determinado pela formulação estatística:

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1}} \quad (3.32)$$

Onde:

σ : desvio padrão do conjunto amostral

x_i : i -ésimo valor do parâmetro x

\bar{x} : média dos valores do parâmetro x

n : número de valores do parâmetro x

Se o único método de estimativa de valores de desvio padrão fosse por meio da equação (3.32), então as análises probabilísticas não poderiam ser empregadas pois, como mencionado, a quantidade de dados disponíveis é via de regra insuficiente para aplicação desta formulação.

3.6.2. Estimativa com base em valores publicados na literatura

Valores do coeficiente de variação COV para vários parâmetros de engenharia geotécnica foram compilados por diversos pesquisadores, dentre os quais Lacasse e Nadim (1996), cujos resultados estão mostrados na Tabela 3.1, e Duncam (2000), com resultados listados na Tabela 3.2.

Com base no valor estimado do coeficiente de variação (COV) o desvio padrão da propriedade de interesse pode ser determinado como:

$$\sigma = (COV)(\bar{x}) \quad (3.33)$$

Onde:

σ : desvio padrão do conjunto amostral

COV : coeficiente de variação do parâmetro x

\bar{x} : média dos valores do parâmetro x

Tabela 3.1: Valores típicos para o coeficiente de variação COV (adaptado de Lacasse e Nadim, 1996).

Parâmetro do solo [x]		$Cov[x]$ %	Referência
Peso específico	γ	3 - 8	Harr (1984), Kulhawy (1992), Wolff (1994).
Peso específico submerso	γ_b	0 - 10	Lacasse e Nadim (1997), Duncan (2000).
Índice de vazios	e	7 - 30	Lacasse e Nadim (1997).
Ângulo de atrito efetivo	ϕ'	2 - 13	Harr (1984), Kulhawy (1992).
Limite de liquidez (argilas)	LL	3 - 20	Lacasse e Nadim (1997).
Limite de plasticidade (argilas)	LP	3 - 20	Lacasse e Nadim (1997).
Resistência drenada de areias	$s_{\phi'}$	3.7 - 12	Schultze (1972), Wolff (1994).
Resistência drenada de argilas	$s_{u'}$	7.5 - 10	Wolff (1985).
Resistência não drenada	s_u	13 - 40	Fredlund e Dahlman (1972), Kulhawy (1992), Lacasse e Nadim (1997), Duncan (2000).
Razão de resistência não drenada	s_u / σ'_{vo}	5 - 15	Lacasse e Nadim (1997), Duncan (2000).
Índice de compressão	c_c	10 - 37	Lacasse e Nadim (1997), Duncan (2000).
Tensão de pré-adensamento	σ_p	10 - 35	Harr (1984), Kulhawy (1992), Duncan (2000).
Coef. de permeabilidade de argilas saturadas	k	68 - 90	Harr (1984), Duncan (2000).
Coef. de permeabilidade de argilas não saturadas	k	130 - 240	Harr (1984), Benson et al (1999).
Coef. de adensamento vertical	c_v	33 - 68	Duncan (2000).
Número de golpes SPT	N	15 - 45	Harr (1984), Kulhawy (1992).
Resistência de ponta CPT elétrico	q_c	5 - 15	Kulhawy (1992).

Resistência de ponta CPT mecânico	q_c	15 - 37	Harr (1984), Kulhawy (1992).
Resistência do ensaio dilatométrico	q_{DMT}	5 - 15	Kulhawy (1992).
Resistência não drenada do ensaio de palheta	s_u	10 - 20	Kulhawy (1992).

Tabela 3.2: Valores típicos para o coeficiente de variação *COV*, Duncan (2000).

<i>Property or in situ test result</i>	<i>Coefficient of variation— COV (%)</i>	<i>Source</i>
Unit weight (γ)	3%–7%	Harr (1984), Kulhawy (1992)
Buoyant unit weight (γ_b)	0%–10%	This chapter, Lacasse and Nadim (1997)
Effective stress friction angle (ϕ')	2%–13%	Harr (1984), Kulhawy (1992)
Undrained shear strength (S_u)	13%–40%	This chapter, Kulhawy (1992), Harr (1984), Lacasse and Nadim (1997)
Undrained shear strength (S_u)	Clay – UU Triaxial (10%–30%)	Phoon and Kulhawy (1999)
	Clay – UC Triaxial (20%–55%)	Phoon and Kulhawy (1999)
Undrained strength ratio (S_u/σ_v')	5%–15%	This chapter, Lacasse and Nadim (1997)
Compression index (C_c)	10%–37%	This chapter, Kulhawy (1992), Harr (1984)
Preconsolidation pressure (p_p)	10%–35%	This chapter, Harr (1984), Lacasse and Nadim (1997)
Coefficient of permeability of saturated clay (k)	68%–90%	This chapter, Harr (1984)
Coefficient of permeability of partly saturated clay (k)	130%–240%	Harr (1984), Benson et al. (1999)
Coefficient of consolidation (c_v)	33%–68%	This chapter.
Standard Penetration Test blow count (N)	15%–45%	Harr (1984), Kulhawy (1992)
Electric Cone Penetration Test (q_c)	5%–15%	Kulhawy (1992)
Mechanical Cone Penetration Test (q_c)	15%–37%	Harr (1984), Kulhawy (1992)
Dilatometer Test tip resistance (q_{DMT})	5%–15%	Kulhawy (1992)
Vane shear test undrained strength (S_v)	10%–20%	Kulhawy (1992)
Plastic Limit	6%–30%	Phoon and Kulhawy (1999)
Liquid Limit	6%–30%	Phoon and Kulhawy (1999)

Source: Duncan, J.M., 2000, Factors of safety and reliability in geotechnical engineering, *Journal of Geotechnical Engineering*, Vol. 126, No. 4, p. 307–316. Used with Permission from ASCE.

3.6.3. A regra dos três desvios padrão

Dai e Wang (1992) sugeriram que valores do desvio padrão poderiam ser estimados usando o que eles chamam de “regra dos três desvios padrão”. A aplicação desta recomendação é baseada no fato de que 99,73 % dos valores de um parâmetro normalmente distribuído se situam dentro do intervalo compreendido entre ± 3 desvios padrão em relação à média. Assim, o valor mínimo seria determinado considerando três desvios padrão abaixo da média e o valor máximo com três desvios padrão acima da média. Aqueles pesquisadores sugeriram que o desvio padrão então poderia ser calculado dividindo-se a diferença entre o máximo valor observado VCA e mínimo valor observado VCB por seis, conforme Equação (3.34).

$$\sigma = \frac{VCA - VCB}{6} \quad (3.34)$$

A “regra dos três desvios padrão” porém depende da precisão com a qual VCA e VCB são estimados. Folayan et al. (1970) descreveram uma pesquisa que consistiu em solicitar a quatro engenheiros geotécnicos uma estimativa do valor de $C_c/(1+e)$ para a argila da Baía de São Francisco, com a qual todos tinham grande experiência profissional. Os resultados deste exercício estão resumidos na Tabela 3.3 de onde se observa que os engenheiros foram capazes de estimar o valor médio de $C_c/(1+e)$ razoavelmente, mas que subestimaram o coeficiente de variação por um fator superior a 2, em comparação com os resultados de 45 ensaios de laboratório.

Tabela 3.3: Valores estimados e medidos de $C_c/(1+e)$ e coeficiente de variação COV , para a argila da Baía de São Francisco.

Estimado por	Estimado $C_c/(1+e)$	Estimado $COV\%$
Engenheiro geotécnico #1	0.30	10
Engenheiro geotécnico #2	0.275	5
Engenheiro geotécnico #3	0.275	5.5
Engenheiro geotécnico #4	0.30	10
Média : #1 - #4	0.29	8
Valores medidos	$C_c/(1+e) = 0.34$	$COV = 18$

Source: Duncan, J.M., 2000, Factors of safety and reliability in geotechnical engineering, *Journal of Geotechnical Engineering*, Vol. 126, No. 4, p. 307–316. Used with permission from ASCE.

Segundo Duncan (2000) a tendência para subestimar os coeficientes de variação *COV* resulta principalmente do fato de que, enquanto grande parte dos engenheiros geotécnicos aprimorou sua capacidade de estimar valores médios das propriedades do solo, por outro lado desenvolveram pouca experiência na estimativa de coeficientes de variação *COV*. Ao utilizar a “regra dos três desvios padrão” para estimar desvios padrão e coeficientes de variação, deve ser tomado o cuidado para considerar o intervalo entre *VCA* e *VCB* tão amplo quanto aparentemente possível, para superar a tendência natural de admitir essa faixa de variação muito pequena.

Esta regra também pode ser empregada para julgar a razoabilidade de valores de coeficientes de variação publicados na literatura, considerando que o menor valor deveria corresponder a três desvios padrão abaixo da média e o maior valor a três desvios padrão acima da média. Se esses valores parecerem não razoáveis, é necessário um ajuste dos valores máximo e mínimo.

A regra usa a distribuição normal como base para estimativa de que valores de três desvios padrão abrangem praticamente toda a população. Porém, segundo Harr (1978), o mesmo é verdade para outras distribuições, fazendo com que a aplicação da “regra dos três desvios padrão” não esteja estritamente vinculada a determinada distribuição da variável aleatória.

3.6.4. O gráfico da regra dos três desvios padrão

O conceito da regra dos três desvios padrão de Dai e Wang (1992) pode ser estendido a um procedimento gráfico, aplicável a muitas situações da engenharia geotécnica, onde o parâmetro de interesse, como a resistência não drenada ao cisalhamento, varia com a profundidade conforme mostra a Figura 3.10. A aplicação do método gráfico envolve os seguintes passos:

1. Desenhe uma linha reta ou curva através dos dados que representam a valores da média mais provável do parâmetro com profundidade.

2. Desenhe linhas retas ou curvas que representem os limites considerados mais altos e mais baixos do conjunto de dados. Estes devem ser amplos o suficiente para incluir todos os dados válidos e admitir uma tolerância para o fato de que a tendência natural é subestimar o intervalo entre tais limites como discutido anteriormente. Verifique que alguns pontos na Figura 3.10 estão fora dos limites, indicando que se referem a dados considerados errôneos.
3. Desenhe linhas retas ou curvas que representem valores de menos um desvio padrão e mais um desvio padrão em relação à média. Tais linhas devem passar no terço da distância medida entre a linha dos valores médios e as linhas que delimitam os valores mais altos e mais baixos do parâmetro geotécnico.

Esse mesmo conceito é útil para caracterizar envoltórias da resistência dos solos onde a quantidade não varia com a profundidade, mas com o valor da tensão normal no plano de ruptura, conforme Figura 3.11.

Usar a regra gráfica de três desvios padrão para estabelecer valores de resistência média mais um desvio padrão e de resistência média menos um desvio padrão é procedimento preferível em relação ao emprego de valores de desvios padrão separados para os parâmetros de resistência c e ϕ .

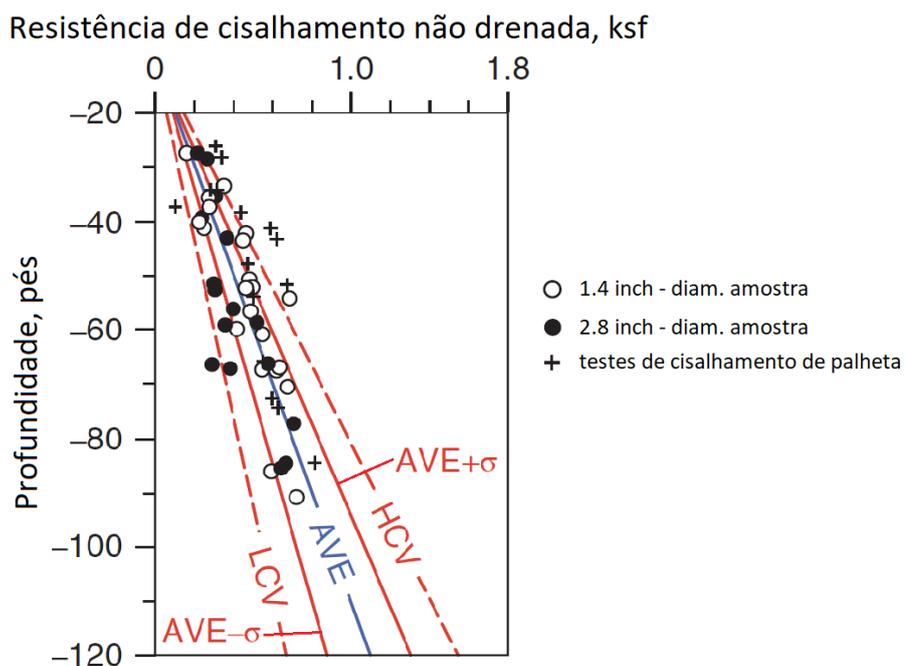


Figura 3.10: Variação da resistência não drenada com a profundidade para a argila da Baía de São Francisco (Duncan and Buchignani, 1973).

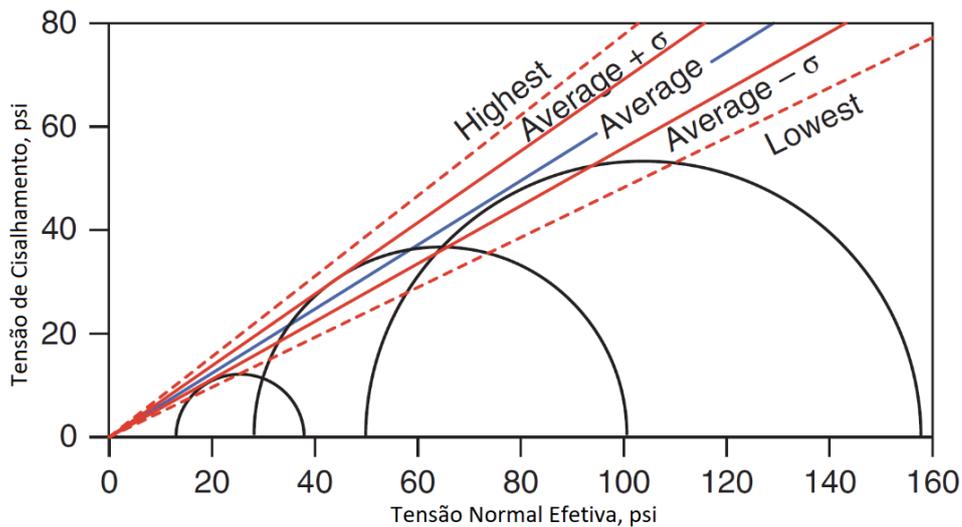


Figura 3.11: Envoltórias em resistência ao cisalhamento de ensaios triaxiais CU em argilito da barragem Los Vaqueros (Duncan 2000).

3.7. Análise de confiabilidade

3.7.1. Margem de segurança e fator de segurança

Muitas vezes uma distribuição normal padrão é assumida para variáveis aleatórias. Por exemplo, na análise de um talude os momentos (ou forças) atuantes e os resistentes, podem ser tratados como variáveis aleatórias utilizando as distribuições de capacidade (C) e demanda (D), como mostrado na Figura 3.12. Em uma única abordagem determinística valores estimados \hat{C} e \hat{D} são usados em cada uma dessas variáveis aleatórias para calcular o fator de segurança FS convencional (Eq. 3.35). A margem de segurança (MS) pode ser definida como a diferença entre capacidade e demanda (Eq. 3.36) e o fator central de segurança CFS é definido como uma proporção da capacidade esperada para a demanda esperada. Muitas vezes, os valores esperados são considerados como valores médios \bar{C} e \bar{D} (Eq. 3.37).

$$FS = \frac{\hat{C}}{\hat{D}} \quad (3.35)$$

$$MS = C - D \quad (3.36)$$

$$CFS = \frac{\bar{C}}{\bar{D}} \quad (3.37)$$

Quando a margem de segurança é negativa ou nula, a ruptura pode ser esperada (área sombreada da função de densidade de probabilidade da Figura 3.12b).

3.7.2. Probabilidade de ruptura e o índice de confiabilidade

A área sob a função densidade de probabilidade entre determinados limites representa a função de distribuição acumulada, que varia entre os valores 0 a 1. A proporção da área total sob a curva à esquerda de um determinado valor representa a probabilidade da variável aleatória assumir um valor igual ou inferior ao mesmo. É habitual considerar a área total sob a curva como unitária; portanto, a área sob a curva entre duas ordenadas fornece diretamente uma proporção da área total.

A probabilidade de ruptura (P_f) é denotada como a probabilidade da quantidade $(C - D)$ ser menor ou igual a zero:

$$P_f = P[(C - D) \leq 0] = P(MS \leq 0) \quad \text{com} \quad 0 \leq P_f \leq 1 \quad (3.38)$$

Segundo Cornell (1969) o índice de confiabilidade (β) corresponde a diferença entre o valor médio calculado do fator de segurança FS , ($E[FS]$), e o valor do FS que representa a ruptura iminente (i.e., FS igual a 1), dividido pelo valor do desvio padrão do FS , ($\sigma[FS]$).

$$\beta = \frac{E[FS] - 1}{\sigma[FS]} \quad (3.39)$$

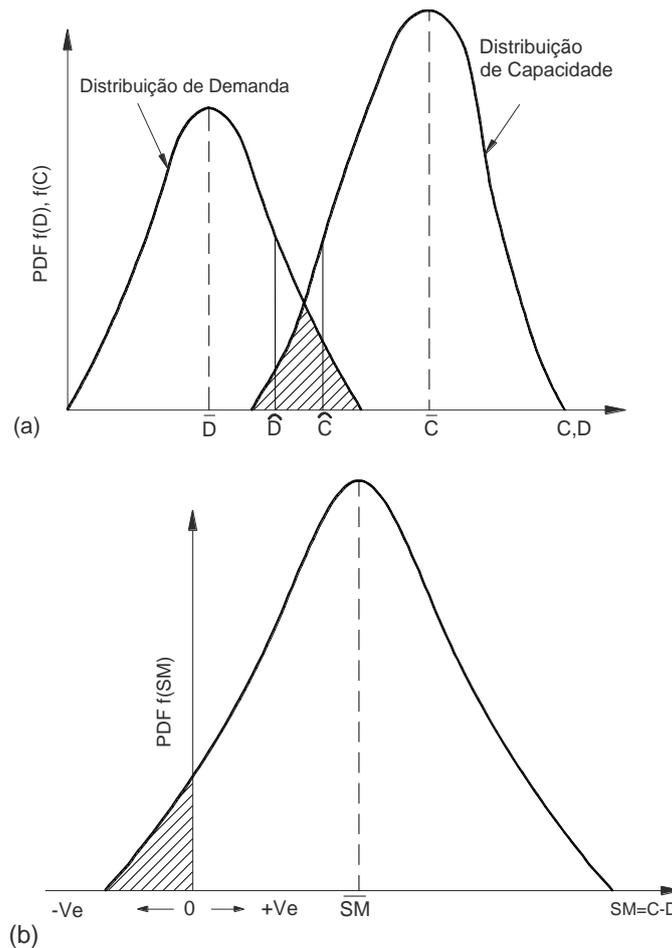


Figura 3.12: a) Distribuição de capacidade C e demanda D , considerados como variáveis aleatórias; b) distribuição da margem de segurança MS considerada como variável aleatória.

O índice de confiabilidade requer o cálculo do valor esperado e desvio padrão do fator de segurança FS . A probabilidade de ruptura (P_f) requer, portanto, duas medidas e uma suposição da forma da função densidade de probabilidade (FDP) relativa ao FS .

A Figura 3.13 mostra a relação entre a probabilidade de ruptura (P_f) e o (β) para uma função densidade de probabilidade (FDP) com distribuição normal. É claro como o β é relacionado ao valor de P_f , de modo que valores mais elevados de β implica menores valores de P_f . Outras distribuições fornecem curvas semelhantes para $\beta < 2,5$, porém diferem para valores mais elevados.

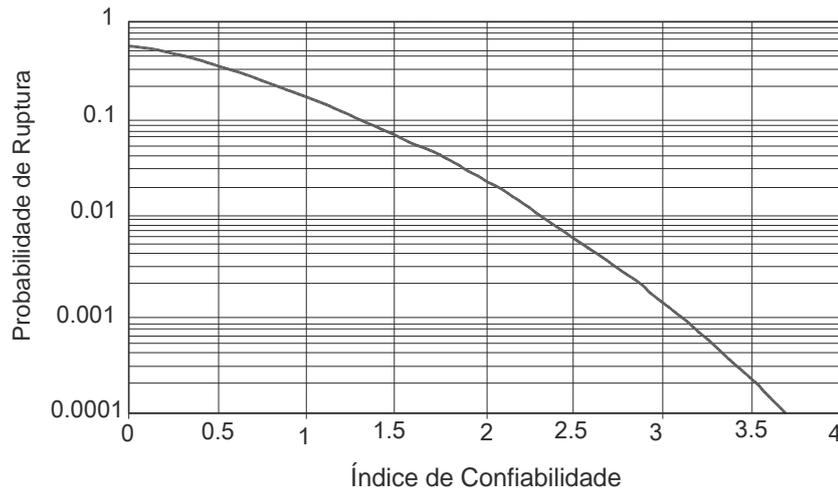


Figura 3.13: Probabilidade de ruptura, P_f , versus o índice de confiabilidade β , para uma distribuição normal. (Adaptado de Christian et al., 1994).

3.7.3. Probabilidade de ruptura considerando a distribuição normal

De acordo com a suposição de que C e D apresentam uma distribuição normal, suas respectivas funções densidade de probabilidades (FDP) são expressas em termos dos valores médios (\bar{C} , \bar{D}) e desvios-padrão (σ_C , σ_D):

$$f_C(C) = \frac{1}{\sigma_C \sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2} \left(\frac{C - \bar{C}}{\sigma_C}\right)^2\right\} \quad (3.40)$$

$$f_D(D) = \frac{1}{\sigma_D \sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2} \left(\frac{D - \bar{D}}{\sigma_D}\right)^2\right\} \quad (3.41)$$

Sabe-se matematicamente que a diferença entre as variáveis que tem uma distribuição normal também é normalmente distribuída. A média e o desvio padrão da MS são:

$$\overline{MS} = \bar{C} - \bar{D} \quad (3.42)$$

$$\sigma_{MS} = \sqrt{\sigma_C^2 + \sigma_D^2} \quad (3.43)$$

E a FDP para a margem de segurança MS é expressa como:

$$f_{MS}(MS) = \frac{1}{\sigma_{MS}\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{MS - \bar{MS}}{\sigma_{MS}}\right)^2\right\} \quad (3.44)$$

A fim de calcular a probabilidade de ruptura (P_f) é necessária a função de probabilidade acumulada da distribuição normal padrão associada a $MS \leq 0$. Tabelas são amplamente disponíveis, a partir das quais a função de probabilidade acumulada para o padrão normal de variáveis pode ser lida entre limites estabelecidos. A P_f pode ser expressa na seguinte forma:

$$P_f = \frac{1}{2} - \psi\left(\frac{\bar{C} - \bar{D}}{\sqrt{\sigma_C^2 + \sigma_D^2}}\right) \quad (3.45)$$

Considerando que ψ deve ser lido a partir das tabelas do valor especial entre parênteses e da área sob a *FDP* ou curva de frequência entre a linha de simetria e de quaisquer outras abscissas ($MS = 0$ neste caso).

3.7.4. Probabilidade de ruptura aceitável na análise de confiabilidade

Santamarina *et al.* (1992) desenvolveram um critério para avaliar as consequências de ruptura do talude em relação a uma série de condições que influem na análise real do projeto dentro do conceito de níveis aceitáveis de probabilidade de ruptura ou níveis de risco aceitáveis dentro de uma análise de confiabilidade, e assim tentar compatibilizar os resultados teóricos com a realidade. Estas condições são: (i) perdas de vidas humanas; (ii) perdas econômicas; (iii) custo para reduzir a P_f com relação ao custo das reparações após ruptura; (iv) estruturas únicas ou grupais; (v) construções existentes ou novas, (vi) duração temporária ou permanente; (vii) tipo e importância do serviço.

Este critério foi determinado através de uma análise de lógica “fuzzy” em resposta de uma série de pesquisas envolvendo engenheiros geotécnicos. Santamarina *et al.* (1992) estabeleceram critérios associados aos níveis aceitáveis de risco apresentados na Tabela 3.4.

Tabela 3.4: Probabilidade de ruptura aceitável na análise de estabilidade de taludes (Adaptado de Santamarina *et al.*, 1992).

Condições	Probabilidade de ruptura P_f
Estruturas temporárias com baixos custos em reparações.	10^{-1}
Nenhuma consequência de ruptura, alto custo para manter baixa a P_f (i.e., minas a céu aberto).	1 ou 2 (10^{-1})
Baixas consequências de ruptura.	10^{-2}
Cortes existentes em rodovias interestaduais.	1 ou 2 (10^{-2})
Aceitável na maioria dos casos, exceto se vidas fossem perdidas.	10^{-3}
Aceitável para a maioria dos taludes.	10^{-4}
Desnecessariamente baixos.	10^{-5}

3.8. Análise de sensibilidade

Análises de sensibilidade são utilizadas para verificar como o grau de incerteza de cada variável aleatória influencia no valor da probabilidade de ruptura P_f da análise probabilística. A análise de sensibilidade é uma comparação relativa, onde determinada variável aleatória tem seu valor alterado enquanto que todas as demais são mantidas fixas em seus valores de linha base.

Um diagrama de Tornado mostra graficamente por meio de barras horizontais o resultado da análise de sensibilidade, onde as variáveis de maior influência são listadas verticalmente e ordenadas de tal forma que a maior barra aparece no topo e a segunda maior na segunda posição a partir do topo, e assim sucessivamente, construindo um gráfico que se assemelha a um tornado.

Os seguintes passos foram adotados nesta dissertação para a construção de diagramas de evento probabilístico tipo tornado:

1. A incerteza de uma variável de entrada é removida e o primeiro e segundo momentos do fator de segurança FS são calculados usando equações com base no método de estimativas pontuais alternativas MEPA.

2. O primeiro e segundo momento estatístico obtido para o fator de segurança FS são usados para calcular os 10^{mo}, 50^{mo} e 90^{mo} percentis. A distribuição lognormal é assumida para o FS .
3. O procedimento descrito nos passos 1 e 2 é repetido para todas as variáveis aleatórias de entrada.
4. Uma barra é criada no diagrama Tornado para cada cálculo realizado seguindo os passos 1 a 3. Cada barra corresponde à variável aleatória de entrada cuja incerteza foi removida do modelo. As extremidades das barras correspondem aos 10^{mo} e 90^{mo} percentis do fator de segurança FS e uma linha localizada próxima ao meio da barra indica o 50^{mo} percentil.
5. O procedimento descrito nos passos 1 a 4 é repetido para o modelo integral, i.e., sem remover nenhuma incerteza das variáveis de entrada, e uma barra para o modelo integral é gerada.
6. Finalmente as barras são ordenadas para criar a forma característica do gráfico Tornado. O tamanho de cada barra mostrada na Figura 3.14 está relacionado com as incertezas que foram consideradas nas variáveis de entrada para determinação do fator de segurança FS . Assim, quanto mais próximo é o tamanho da barra em relação ao modelo integral, tanto menor é a sensibilidade do fator de segurança FS em relação às incertezas da variável correspondente. Por exemplo, a Figura 3.14 mostra que as variáveis 4, 5 e 6 têm impactos consideravelmente maiores do que as variáveis 1 e 2. Variáveis 1 e 2 poderiam ser consideradas como variáveis de certeza, e esta simplificação não afetaria os resultados da análise consideravelmente.

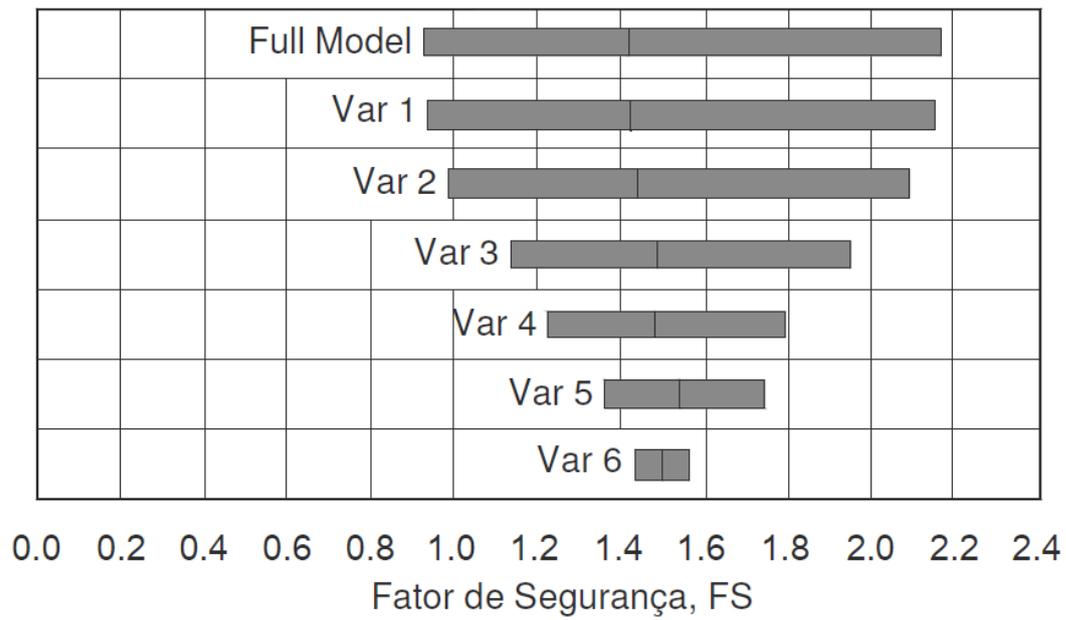


Figura 3.14: Diagrama de evento probabilístico do tipo tornado (adaptado de Fredlund e Fredlund, 2011).

4 Exemplos de aplicação

4.1. Talude de Solo homogêneo

O solo é modelado como um material homogêneo e isotrópico, com comportamento elástico linear até atingir a tensão de escoamento definida pelo critério de ruptura de Mohr-Coulomb. O mesmo exemplo foi analisado por outros pesquisadores como Li e Lumb (1987), Hassan e Wolff (1999) e Bhattacharya et al. (2003). A Figura 4.1 mostra a geometria do talude e a Tabela 4.1 lista os valores médios dos parâmetros geotécnicos.

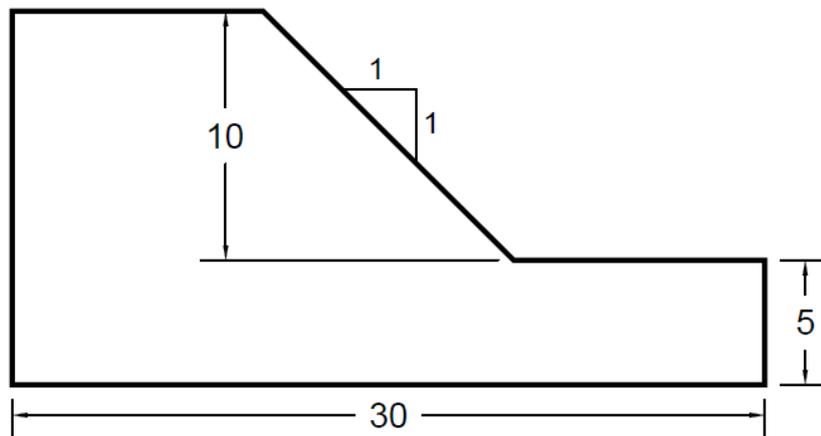


Figura 4.1: Seção transversal do talude homogêneo (metros).

Tabela 4.1: Parâmetros geotécnicos do maciço de solo homogêneo.

Parâmetro	μ
c' (kPa)	18
ϕ' ($^{\circ}$)	30
γ (kN/m ³)	18
r_u	0,2
E (MPa)	200
ν	0,25

4.1.1. Fator de segurança por método de equilíbrio limite

A posição da potencial superfície de ruptura foi determinada pelo método das fatias de Spencer, utilizando o programa computacional *Slide v7*, e está apresentada na Figura 4.2 com fator de segurança $FS = 1,339$. Em outras publicações da literatura esse resultado foi levemente diferente: $FS = 1,334$ em Hassan and Wolff (1999) e $FS = 1,326$ em Bhattacharya et al. (2003), diferenças que provavelmente se devem ao diferente número de fatias consideradas nestas análises. Na presente investigação, com 25 fatias, a potencial superfície de ruptura circular passa pelo pé do talude e intercepta o topo na distância de 2,95m, conforme indicado na Figura 4.2.

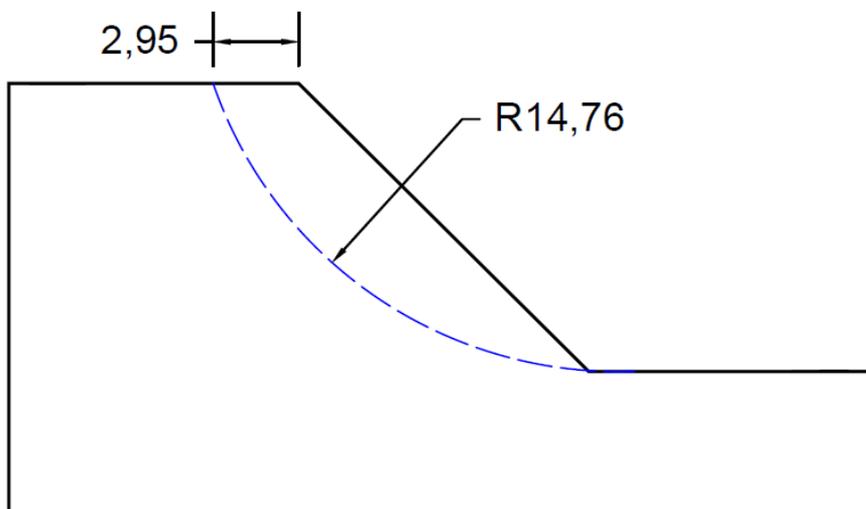


Figura 4.2: Potencial superfície de ruptura circular obtida pelo método das fatias de Spencer com fator de segurança $FS = 1,339$.

4.1.2. Fator de segurança pelo método dos elementos finitos

O método dos elementos finitos (MEF) é frequentemente usado para calcular o fator de segurança de taludes pela técnica de redução progressiva dos parâmetros de resistência, gradualmente divididos por certo valor M conforme indicado nas equações seguintes:

$$c^* = \frac{c}{M} \quad (4.1)$$

$$\tan^* \phi = \frac{\tan \phi}{M} \quad (4.2)$$

O decréscimo dos parâmetros é executado até que o sistema de equações do método dos elementos finitos não apresente mais convergência, indicando a iminência de desequilíbrio estático. Neste estágio, então o valor de M é admitido como o fator de segurança do talude ($FS = M$) e a localização da potencial superfície de ruptura é feita graficamente por meio das isolinhas que determinam as máximas deformações cisalhantes no maciço de solo.

Esta técnica foi empregada por diversos pesquisadores, dentre os quais Zienkiewics et al. (1975) e Naylor (1982), e encontra-se atualmente implementada na maioria dos programas computacionais para análise de problemas geotécnicos, dentre os quais o software PLAXIS 2D v. 2016 utilizado nesta pesquisa.

A malha de elementos finitos e a potencial superfície de ruptura, após a execução da análise de estabilidade, são mostradas nas Figuras 4.3 e 4.4 respectivamente. O valor do fator de segurança calculado foi $FS = 1,33$ para a potencial superfície de ruptura indicada na Figura 4.5. O modelo constitutivo considerado foi o elasto-perfeitamente plástico de Mohr – Coulomb em uma discretização formada por 817 elementos triangulares de 15 nós, conforme Figura 4.3.

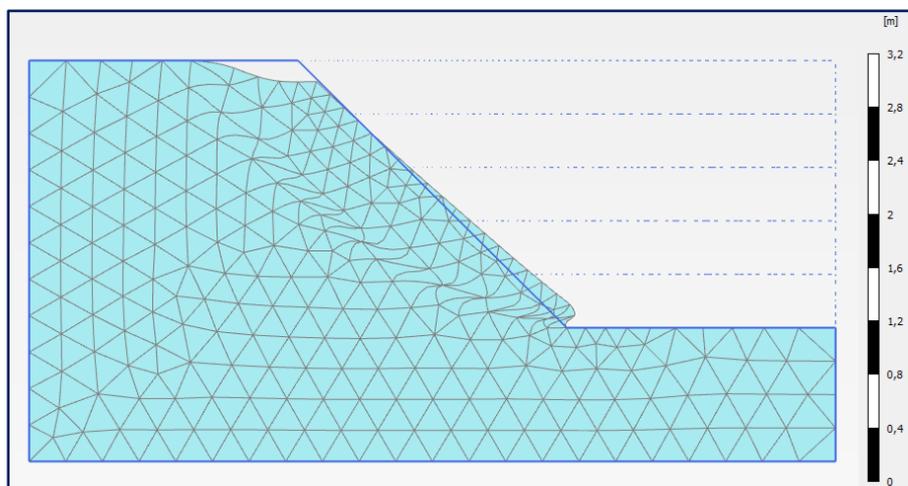


Figura 4.3: Malha deformada de elementos finitos do talude de solo homogêneo

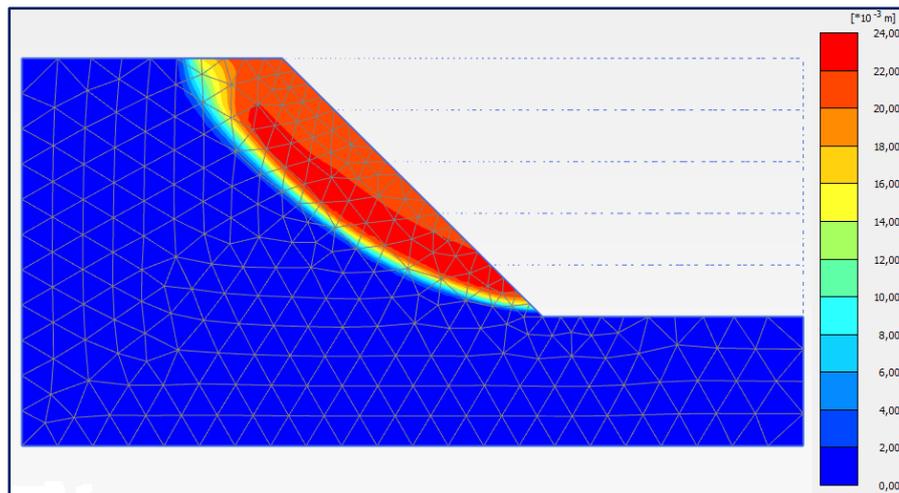


Figura 4.4: Potencial superfície de ruptura com $FS = 1,33$, para o talude de solo homogêneo.

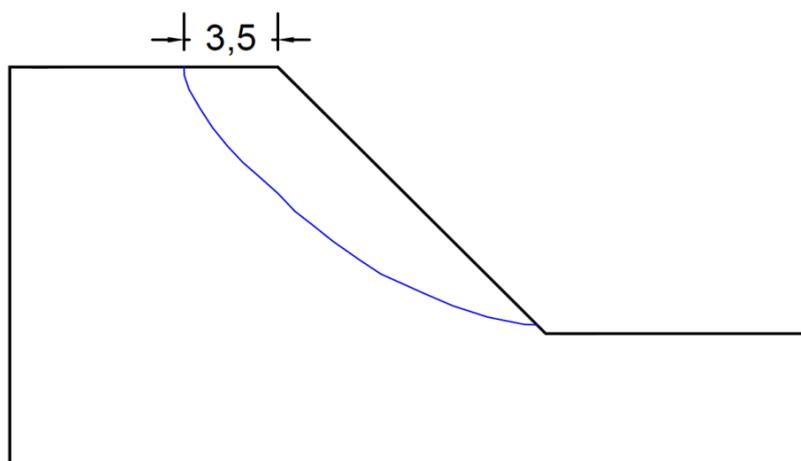


Figura 4.5: Localização da potencial superfície de ruptura do talude de solo homogêneo.

4.1.3. Análise por métodos probabilísticos

Os quatro parâmetros geotécnicos, a saber, a coesão c , o ângulo de atrito ϕ , o peso específico do solo γ e a razão de poropressão r_u foram tratados como variáveis aleatórias com valores médios e coeficientes de variação indicados na Tabela 4.2. A probabilidade de ruptura P_f e o índice de confiabilidade β foram calculados mediante os métodos de Monte Carlo (MMC), Hipercubo Latino (MHL) e Estimativas Pontuais Alternativas (MEPA). O fator de segurança calculado em cada realização foi obtido com o método das fatias de Spencer (1967) assumindo potenciais superfícies de ruptura circulares. Para as análises probabilísticas com os métodos de Monte Carlo (MCM) e Hipercubo Latino (LHM) foi utilizado o

programa computacional *Slide v7* enquanto que para o método das Estimativas Pontuais Alternativas (MEPA) foi empregado o programa computacional *SVSlope v2009*.

Tabela 4.2: Parâmetros geotécnicos e estatísticos do solo homogêneo

Parâmetro	μ	σ	COV (%)	FDP
c (kPa)	18,0	3,60	20,0	Normal
ϕ (°)	30,0	3,00	10,0	Normal
γ (kN/m ³)	18,0	0,90	5,0	Normal
r_u	0,2	0,02	10,0	Normal

O índice de confiabilidade β e a probabilidade de ruptura P_f estão associados à potencial superfície de ruptura obtida por método probabilístico (superfície com valor de β mínimo)

A primeira técnica, denominada de *Overall Slope*, consiste na busca por uma potencial superfície de ruptura com menor valor do fator de segurança FS para cada nova amostra com diferentes valores das variáveis aleatórias consideradas. Esta seria a forma mais adequada de análise por considerar que diferentes parâmetros de resistência podem resultar em diferentes localizações de superfícies de ruptura, apesar de apresentar um excessivo tempo computacional.

A segunda técnica, denominada de *Global Minimum*, consiste na obtenção da potencial superfície de ruptura em análise de estabilidade determinística por método de equilíbrio limite e, em seguida, variar os parâmetros de resistência para cálculo dos fatores de segurança associados a cada amostra, porém mantendo a mesma superfície fixa. A variação dos parâmetros de resistência em cada amostra respeita a função de densidade probabilística pré-estabelecida para cada uma das variáveis aleatórias.

4.1.3.1. Análise pelo Método de Monte Carlo

A análise pelo método de Monte Carlo foi executada considerando 50.000 amostras. Para cada amostra foi determinada a potencial superfície de ruptura de acordo com a técnica *Overall Slope* anteriormente mencionada, o que demandou um tempo de execução computacional de aproximadamente 15 horas. Foram

consideradas funções densidade de probabilidade normal para as distribuições dos valores dos parâmetros geotécnicos, conforme Tabela 4.2. A Figura 4.6 apresenta a distribuição dos valores do fator de segurança FS determinados na simulação de Monte Carlo com distribuição normal de média $\mu = 1,349$ desvio padrão $\sigma = 0,1705$ probabilidade de ruptura $P_f = 2,26\%$ e índice de confiabilidade $\beta = 2,115$. Os valores do fator de segurança FS menores do que 1 obtidos na simulação são apresentados em cor laranja.

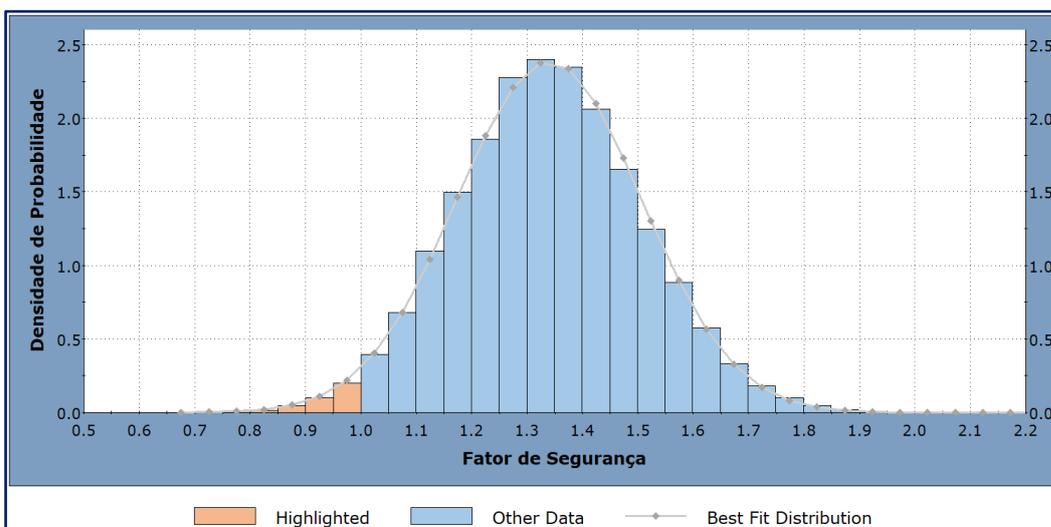


Figura 4.6: Distribuição normal do fator de segurança FS determinados pelo Método de Monte Carlo considerando 50.000 amostras.

As Figuras 4.7 a 4.10 ilustram a correlação entre os valores do fator de segurança FS e parâmetros de resistência (c , ϕ), peso específico do solo γ e razão de poropressão r_u . Observa-se que os maiores impactos no valor do fator de segurança FS advêm de variações nos parâmetros de resistência de coesão c (coeficiente de correlação 0,8727) e ângulo de atrito ϕ (coeficiente de correlação 0,4084).

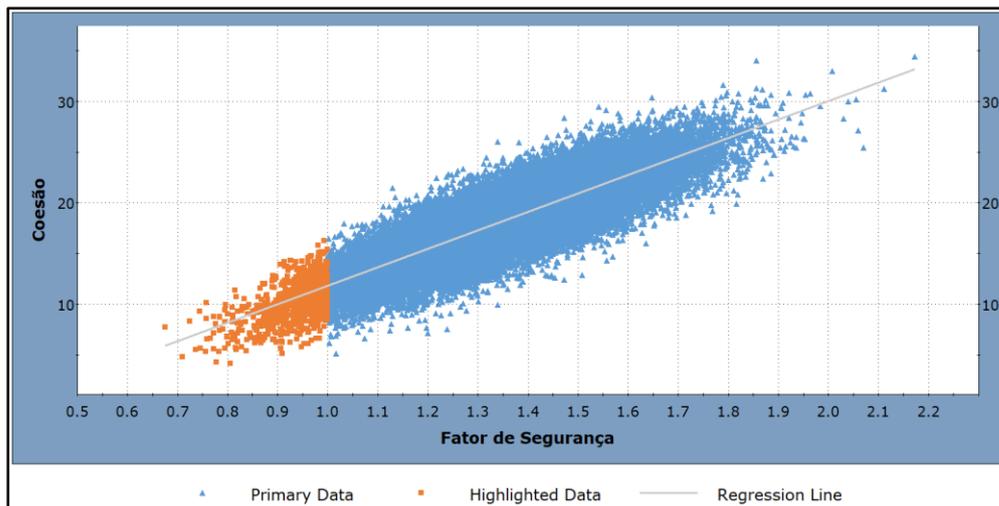


Figura 4.7: Coeficiente de correlação 0,8727 entre FS e c .

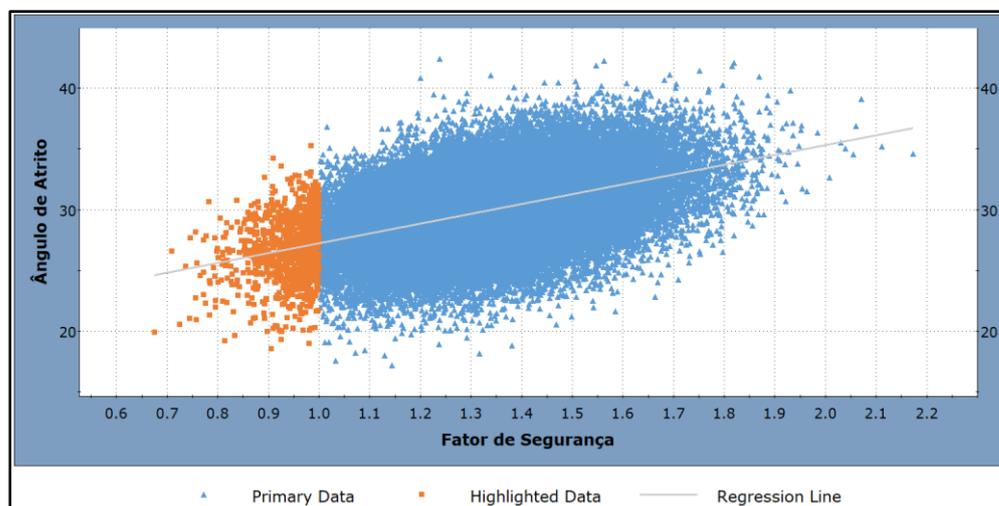


Figura 4.8: Coeficiente de correlação 0,4084 entre FS e ϕ .

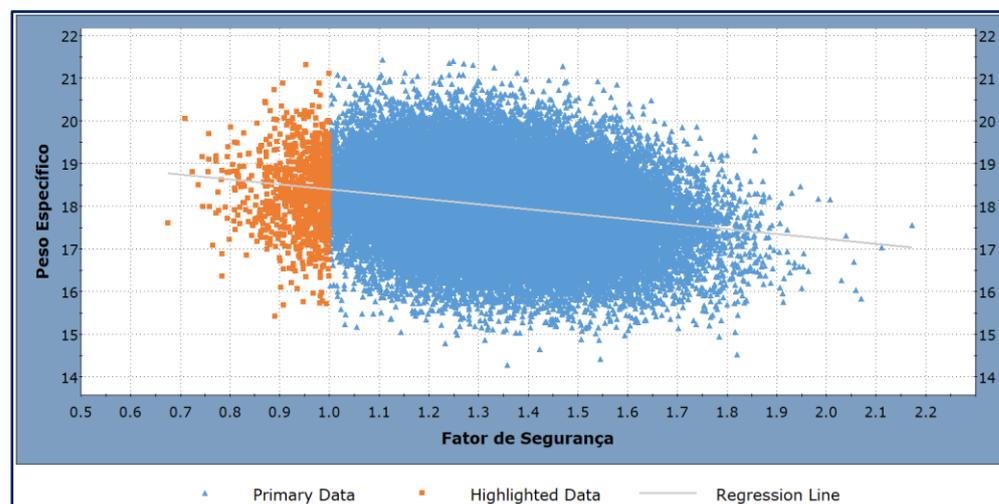


Figura 4.9: Coeficiente de correlação -0,221 entre FS e γ .

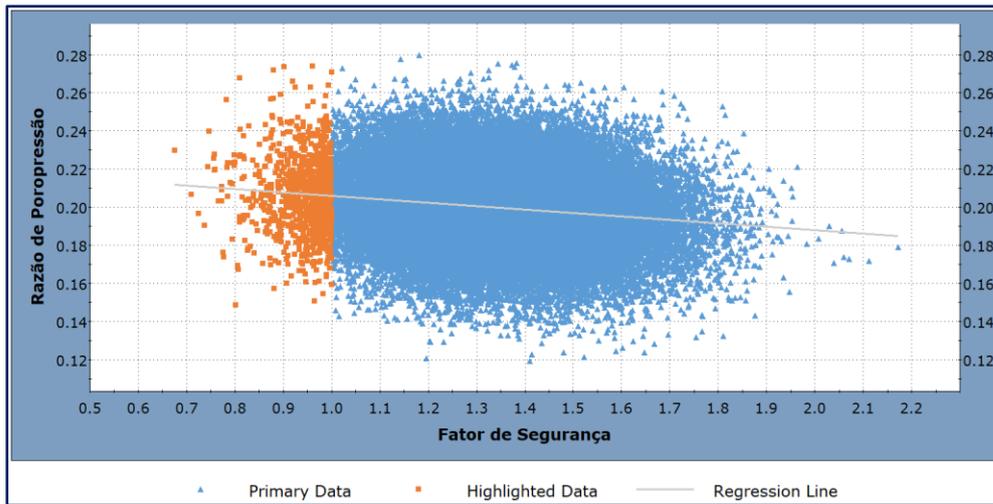


Figura 4.10: Coeficiente de correlação $-0,1419$ entre FS e r_u .

4.1.3.2. Análise pelo Método Hipercubo Latino

A análise pelo método Hipercubo Latino foi realizada para 10.000 amostras, também empregando a técnica *Overall Slope* para cálculo de fatores de segurança associados a diferentes posições da potencial superfície de ruptura. O tempo para execução da simulação foi neste caso de aproximadamente 5 horas, considerando novamente as distribuições de densidade de probabilidade mencionadas na Tabela 4.2. A Figura 4.11 apresenta a distribuição dos valores do fator de segurança FS , caracterizada como distribuição normal com média $\mu = 1,351$ desvio padrão $\sigma = 0,1762$ probabilidade de ruptura $P_f = 2,11\%$ e índice de confiabilidade $\beta = 2,248$. Os valores de fator de segurança FS menores que 1, obtidos na simulação, são apresentados em cor laranja nesta figura.

Observa-se novamente que os maiores impactos no valor do fator de segurança FS resultam de variações nos parâmetros de resistência de coesão c (coeficiente de correlação $0,8757$) e ângulo de atrito ϕ (coeficiente de correlação $0,4198$), praticamente os mesmos valores anteriormente calculados pelo método de Monte Carlo.

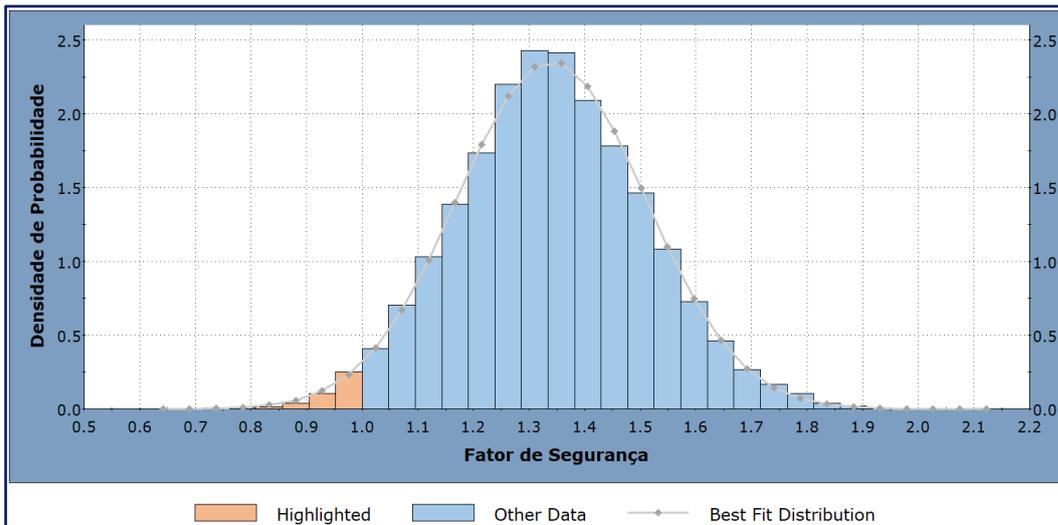


Figura 4.11: Distribuição normal do fator de segurança determinados pelo Método Hipercubo Latino considerando 10.000 amostras.

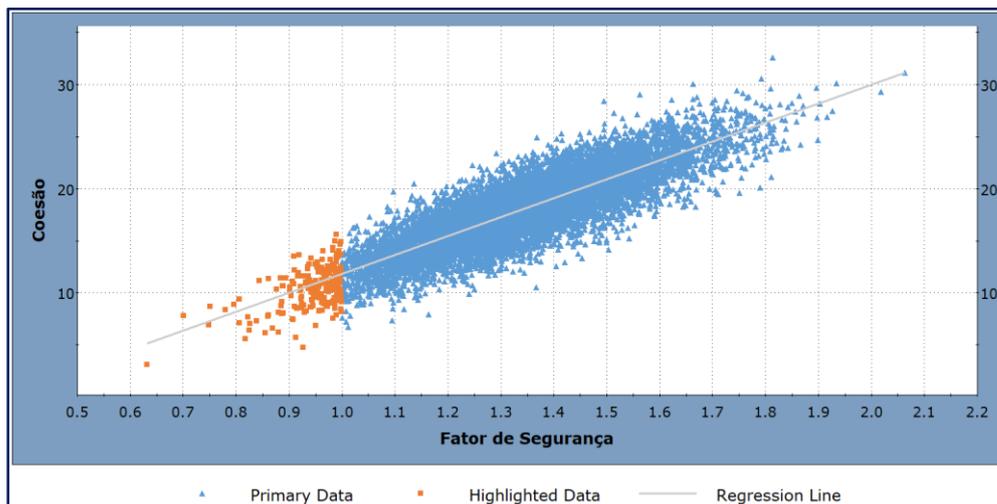


Figura 4.12: Coeficiente de correlação 0,8757 entre FS e c .

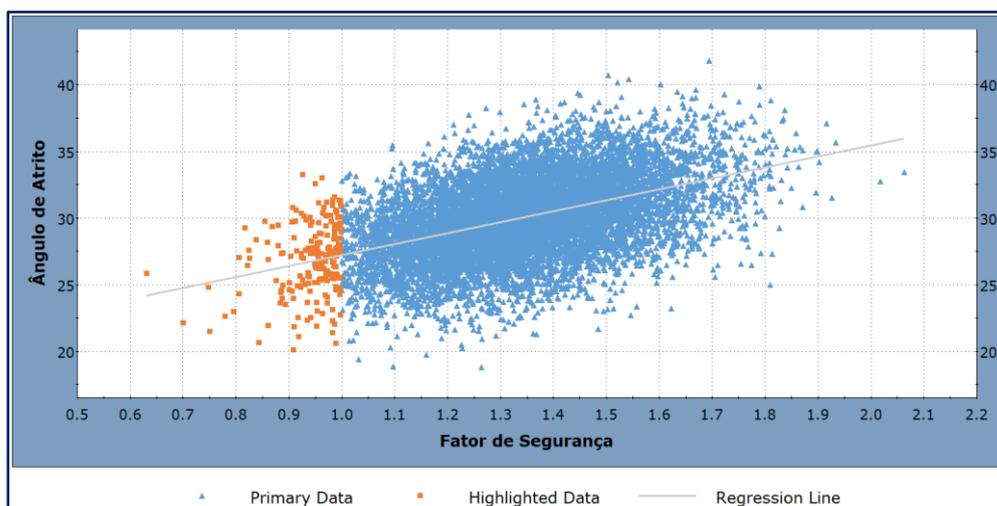


Figura 4.13: Coeficiente de correlação 0,4198 entre FS e ϕ .

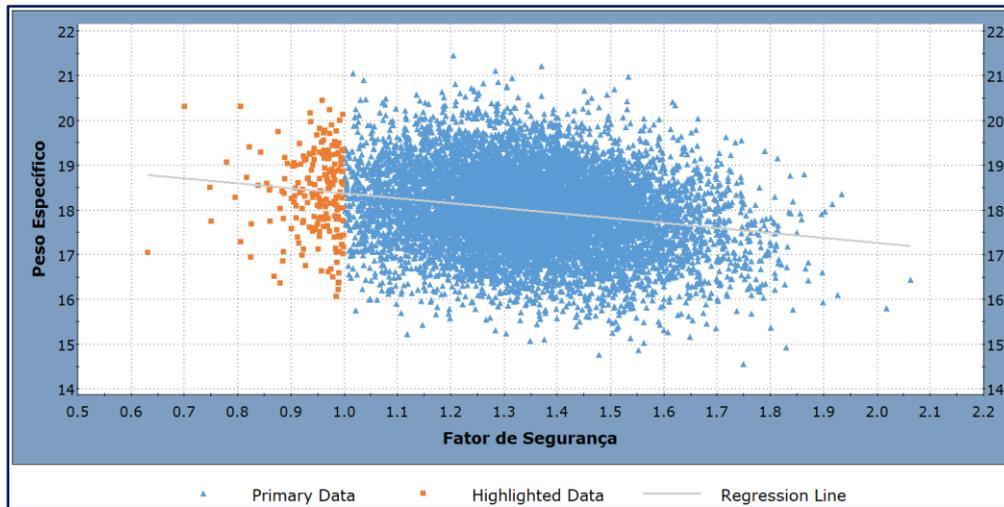


Figura 4.14: Coeficiente de correlação $-0,2143$ entre FS e γ .

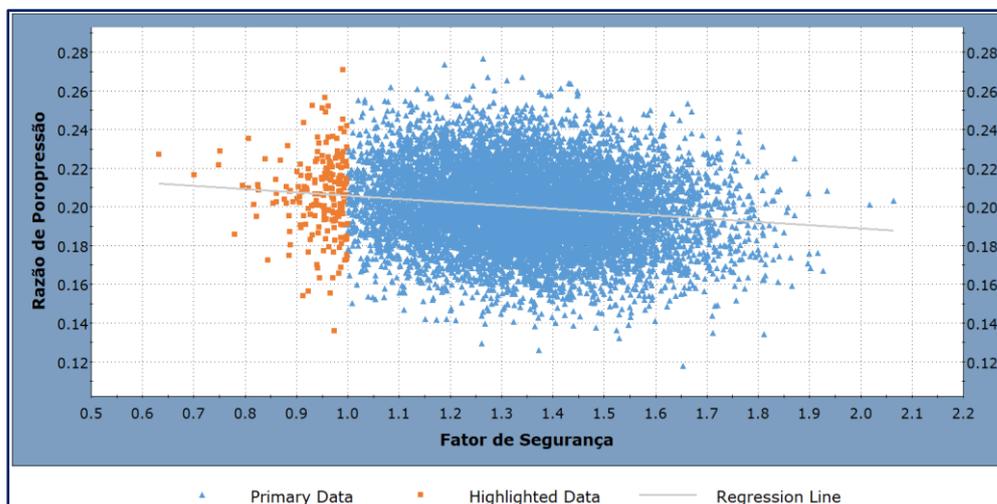


Figura 4.15: Coeficiente de correlação $-0,1348$ entre FS e r_u .

4.1.3.3. Análise pelo Método das Estimativas Pontuais Alternativas

A análise pelo método de Estimativas Pontuais Alternativas (programa computacional SVSlope v2009) requer o conhecimento prévio da média e do desvio padrão dos parâmetros geotécnicos do solo, para determinação dos três primeiros momentos estatísticos. Neste caso foram consideradas como variáveis aleatórias a coesão c , o ângulo de atrito ϕ e o peso específico γ , requerendo $2n + 1 = 7$ simulações (n é o número de variáveis aleatórias de entrada) para estimar a média μ e o desvio padrão σ do fator de segurança FS . Nesse exemplo o tempo de execução foi de apenas 20 minutos, aproximadamente. A Figura 4.16 apresenta a distribuição

dos valores do fator de segurança FS , com distribuição normal de média $\mu = 1,342$ desvio padrão $\sigma = 0,1652$ probabilidade de ruptura $P_f = 1,993 \%$ e índice de confiabilidade $\beta = 2,316$.

A Figura 4.17 apresenta resultados da análise de sensibilidade na forma de diagrama Tornado probabilístico (Método de Estimativas Pontuais Alternativas). Conforme pode ser visto, variações na coesão do solo tiveram o maior impacto no fator de segurança, reproduzindo os resultados já examinados anteriormente. A Tabela 4,3 apresenta os resultados numéricos do Método das Estimativas Pontuais Alternativas.

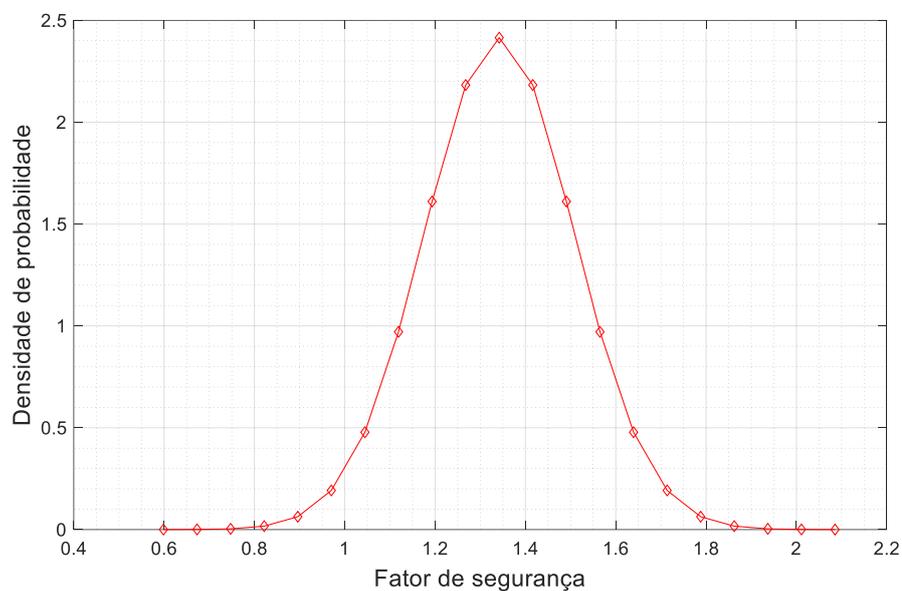


Figura 4.16: Distribuição normal do FS determinados pelo Método das Estimativas Pontuais Alternativas.

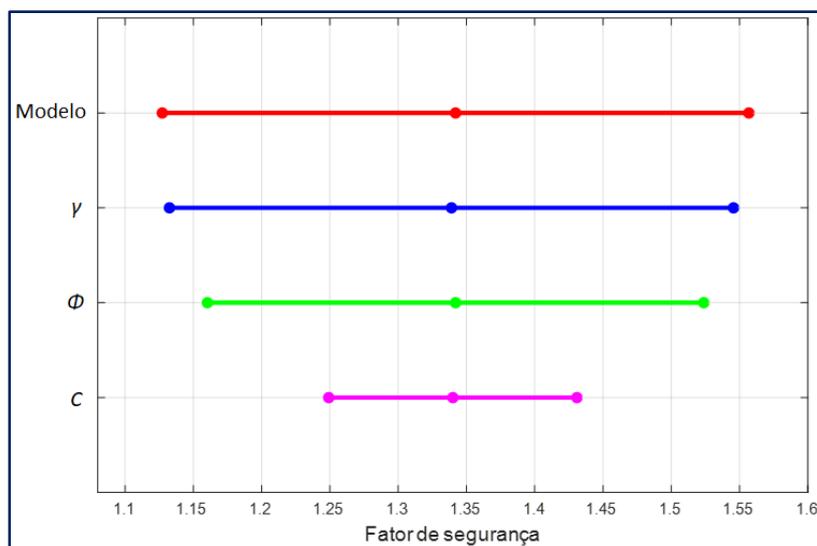


Figura 4.17: Diagrama tornado probabilístico para o talude de solo homogêneo.

Tabela 4.3: Resultados numéricos do Método das Estimativas Pontuais Alternativas.

Variável	E[FS]	V[FS]	Percentil min 10 %	Percentil médio 50%	Percentil max 90%
c (kPa)	1,34	0,02285	1,146	1,34	1,534
ϕ (°)	1,342	0,00499	1,251	1,342	1,432
γ (kN/m ³)	1,339	0	1,339	1,339	1,339

As potenciais superfícies de ruptura obtidas por método de equilíbrio limite (MEL) considerando o método das fatias de Spencer, método dos elementos finitos (MEF), por meio do programa computacional Plaxis 2D e métodos probabilísticos (MP), com a técnica *Overall Slope*, estão indicadas na Figura 4.18. A proximidade entre as diferentes soluções é satisfatória, bem como entre os valores das probabilidades de ruptura P_f listadas na Tabela 4.4 obtidas pelos diferentes métodos probabilísticos.

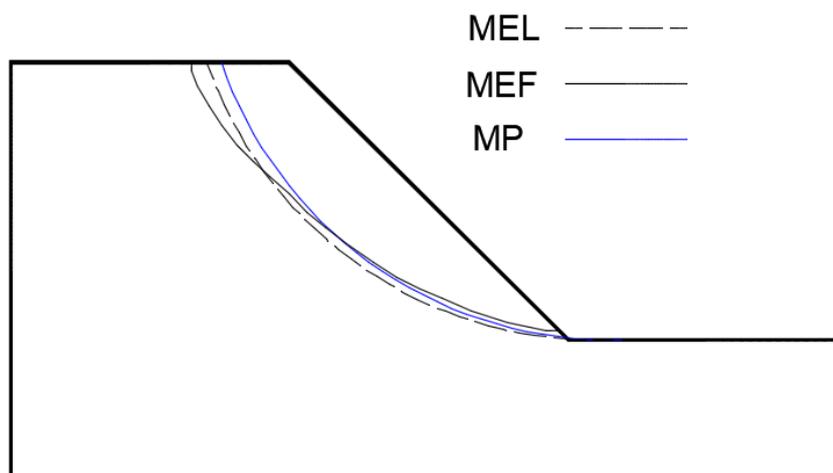


Figura 4.18: Localização da potencial superfície de ruptura obtidas por diferentes métodos.

Tabela 4.4: Resumo dos resultados determinados por métodos probabilísticos.

Método	FS _P	β_P	PF (%)	PDF
Monte Carlo	1,349	2,115	2,60	Normal
Hipercubo Latino	1,351	2,248	2,11	Normal
Estimativas Pontuais Alternativas	1,342	2,316	1,993	Normal
Bhattachyrya et al. (2003)	1,337	2,239	—	—
Hassan e Wolff (1999)	—	2,293	—	—
Li e Lumb (1987)	—	2,500	—	—

Neste mesmo exemplo, foram feitas análises modificando os valores dos coeficientes de variação (*COV*) para a coesão c , o ângulo de atrito ϕ e o peso

específico γ , mantendo constante a razão de poropressão $r_u = 0,2$. As faixas de variação dos $COVs$ foram escolhidas com base nos valores publicados por Lacasse e Nadim (1996) e Duncan e Sleep (2015). A Tabela 4.5 lista os correspondentes valores da média μ , desvio padrão σ e coeficiente de variação COV para as variáveis aleatórias consideradas e a Figura 4.19 mostram os resultados. Pode-se observar um incremento, para o mesmo fator de segurança FS determinístico, da probabilidade de falha P_f entre 0 a 12%, devido à mudança nos intervalos do coeficiente de variação COV . A Figura 4.20 mostra o comportamento do índice de confiabilidade β nesta situação.

Tabela 4.5: Valores dos parâmetros geotécnicos para diferentes $COVs$.

COV padrão	c' (kPa)			ϕ' (°)			γ (kN/m ³)			r_u
	μ	σ	COV %	μ	σ	COV %	μ	σ	COV %	
0	18,0	2,340	13,00	30,0	0,600	2,00	18,0	0,54	3,0	0,2
0,25	18,0	3,555	19,75	30,0	1,425	4,75	18,0	0,72	4,0	0,2
0,5	18,0	4,770	26,50	30,0	2,250	7,50	18,0	0,90	5,0	0,2
0,75	18,0	5,985	33,25	30,0	3,075	10,25	18,0	1,08	6,0	0,2
1	18,0	7,200	40,00	30,0	3,900	13,00	18,0	1,26	7,0	0,2

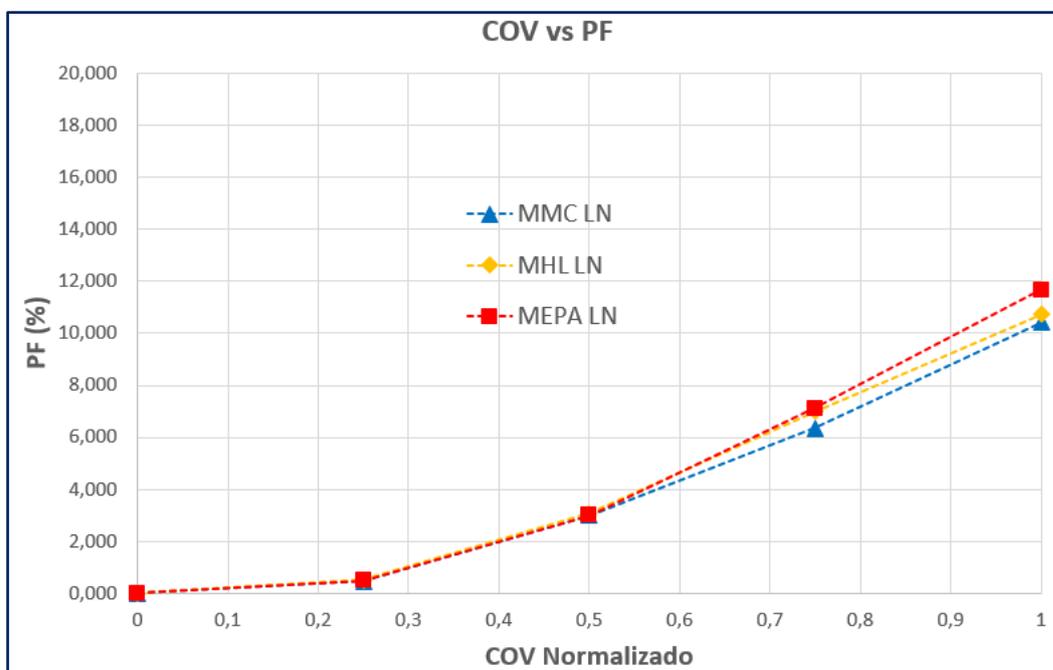


Figura 4.19: P_f versus COV Normalizado para os métodos probabilísticos de Monte Carlo, Hipercubo Latino e Estimativas Pontuais Alternativas com distribuição lognormal do fator de segurança FS .

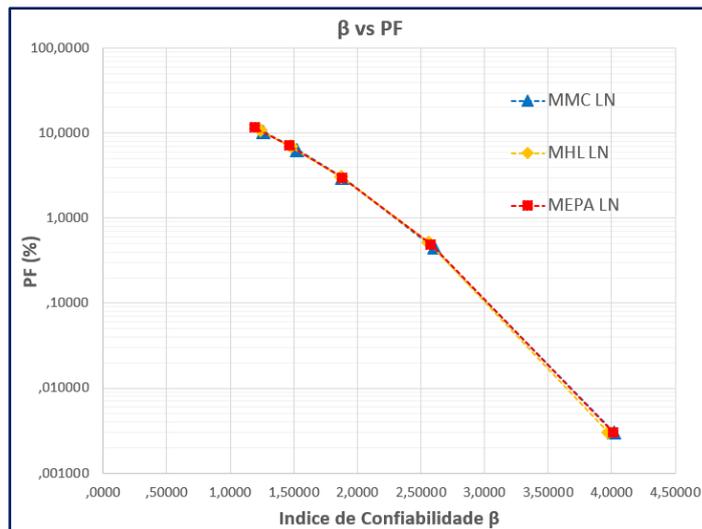


Figura 4.20: Probabilidade de falha P_f versus Índice de confiabilidade β

Outra série de análises foi executada considerando $r_u = 0,2$, assumindo c , σ e γ como variáveis aleatórias e admitindo ângulos de inclinação do talude variando entre 45° a 55° . Para determinado ângulo de inclinação, observou-se que à medida que o coeficiente de variação aumenta, o gráfico COV vs P_f mostra comportamento semelhante dependendo do valor do FS calculado por método determinístico (Figura 4.21). Para taludes com $FS > 1,00$, com o aumento do coeficiente de variação COV também acontece o aumento da probabilidade de ruptura P_f . Resultados semelhantes foram obtidos por Griffiths e Fenton (2004) e Le et al. (2014).

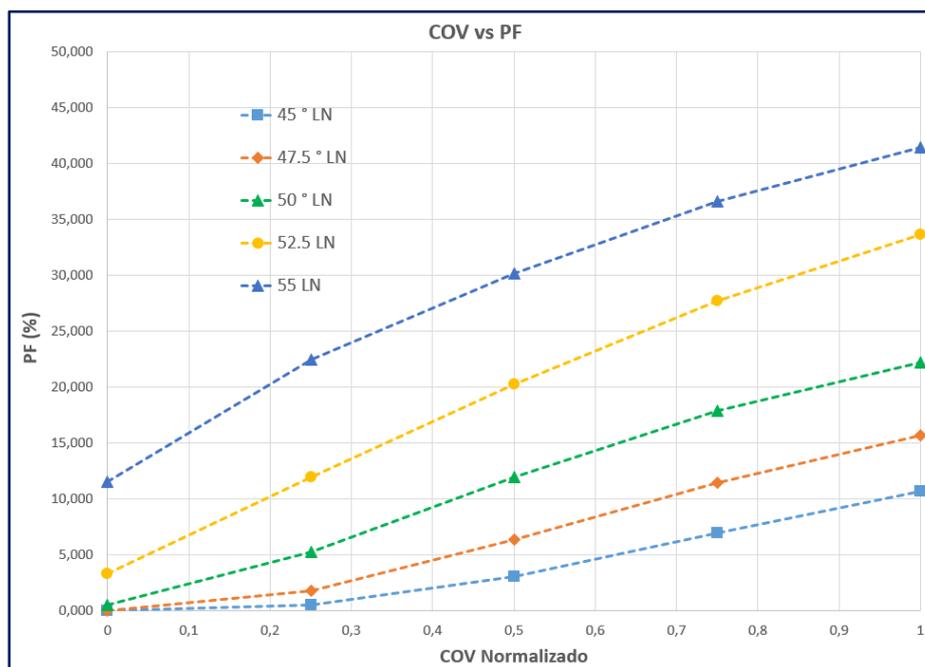


Figura 4.21: P_f vs COV normalizado para diferentes ângulos de inclinação do talude.

4.2. Talude estratificado

A estabilidade de um talude estratificado formado por duas camadas (figura 4.22) é avaliada através de análises determinística e probabilística. A Tabela 4.6 apresenta os valores médios das propriedades geotécnicas dos materiais. O mesmo exemplo foi analisado anteriormente por Hassan e Wolff (1999) e Bhattacharya et al. (2003). O método de Spencer (1967) foi utilizado para avaliação do fator de segurança FS determinístico em análises pelo método das fatias. .

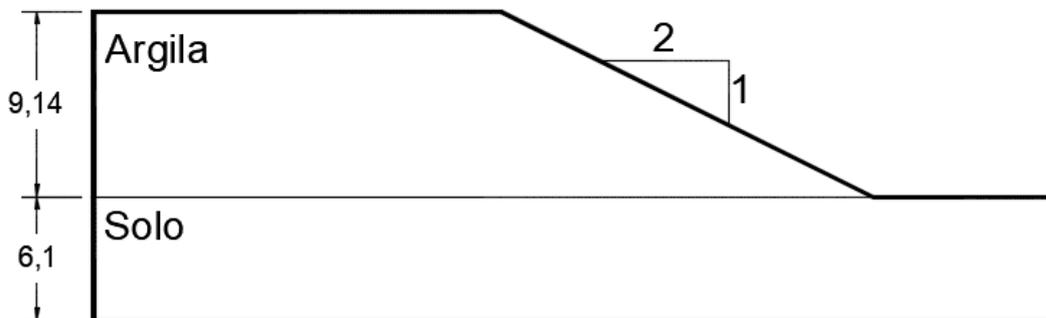


Figura 4.22: Geometria do talude estratificado formado por duas camadas de solo.

Tabela 4.6: Propriedades geotécnicas e coeficiente de variação $COVs$ das camadas de solo.

Material	S_u	c'	(kN/m^2)		$\phi'(^{\circ})$			$\gamma' (\text{kN/m}^3)$		
	μ	μ	σ	$cov (\%)$	μ	σ	$cov (\%)$	μ	σ	$cov (\%)$
Argila	38,31	—	7,662	20	0	0	—	19	1,33	7
Solo	—	23,94	4,788	20	12	1,2	10	20	1,40	7

4.2.1. Análise por método de equilíbrio limite

A posição da potencial superfície de ruptura determinado pelo método das fatias de Spencer (programa computacional Slide v7) está apresentada na Figura 4.23. O fator de segurança computado foi $FS = 1,66$ com o comprimento do início da potencial superfície de ruptura no topo do talude medido em 6,19 m.

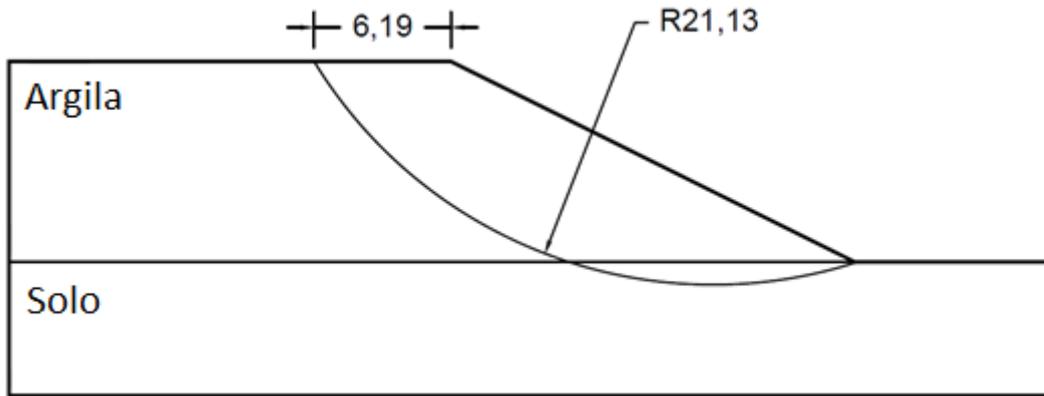


Figura 4.23: Potencial superfície de ruptura obtida pelo método de Spencer com $FS = 1,66$.

4.2.2. Análise pelo método dos elementos finitos

A malha de elementos finitos utilizada e a posição da potencial superfície de ruptura, após a análise de estabilidade pelo método dos elementos finitos, são mostradas nas Figuras 4.24 e 4.25, respectivamente. O valor do fator de segurança determinístico obtido foi $FS = 1,648$ (programa computacional Plaxis 2D) considerando como leis constitutivas dos materiais o modelo de Mohr-Coulomb, para a camada de areia, e Soft Soil, para a camada de argila. A discretização foi feita utilizando 358 elementos triangulares de 15 nós.

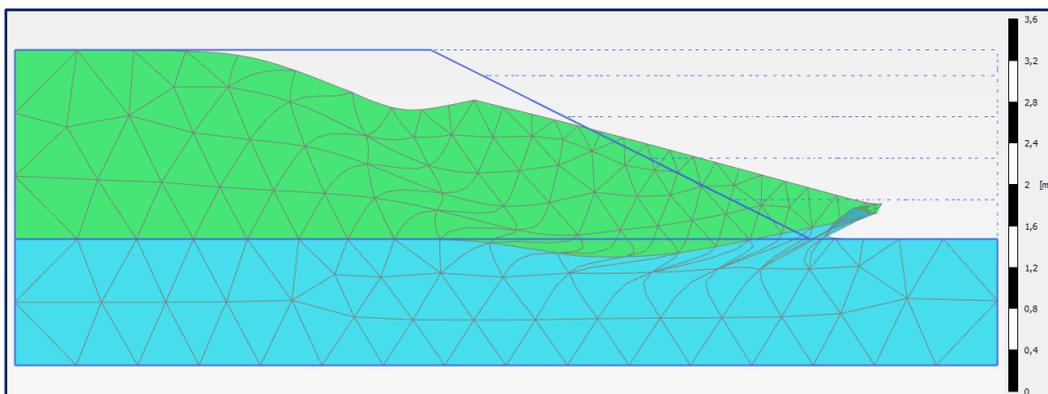


Figura 4.24: Aspecto da malha de elementos finitos deformada.

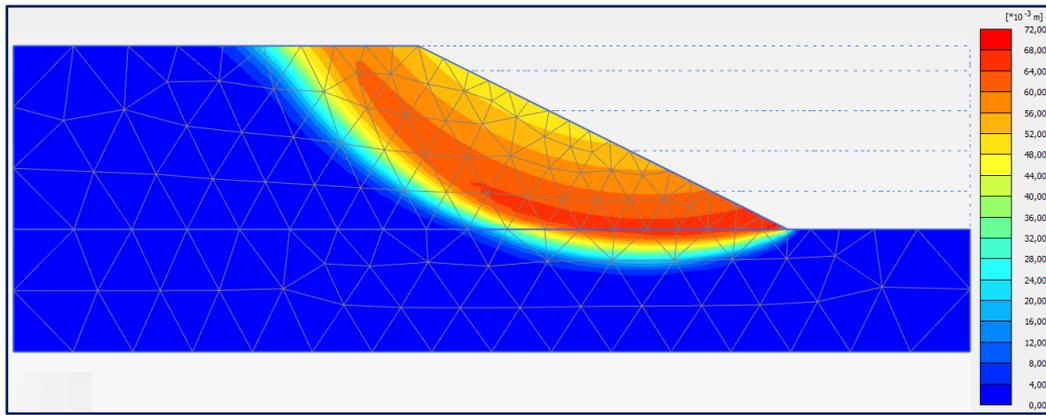


Figura 4.25: Posição da potencial superfície de ruptura obtida pelo método dos elementos finitos com fator de segurança $FS = 1,648$.

4.2.3. Análise por método probabilístico

4.2.3.1. Análise pelo método de Monte Carlo

A análise pelo método de Monte Carlo foi executada para 50.000 amostras considerando a técnica *Overall Slope* com o programa computacional Slide v7. Neste exemplo o tempo de execução foi de aproximadamente 17 horas, considerando funções densidade de probabilidade lognormal para a resistência ao cisalhamento não drenada da argila e função densidade de probabilidade normal para as demais variáveis aleatórias consideradas. A Figura 4.26 apresenta a distribuição dos valores do fator de segurança FS , com distribuição lognormal de média $\mu = 1,808$, desvio padrão $\sigma = 0,3936$, probabilidade de ruptura $P_f = 2,268\%$ e índice de confiabilidade $\beta = 2,6458$. Os valores do fator de segurança FS menores que 1, obtidos na simulação, são apresentados em cor laranja.

Da Figura 4.27 pode-se observar que a resistência não drenada S_u da argila tem o maior impacto no valor do fator de segurança FS com coeficiente de correlação 0,9395.

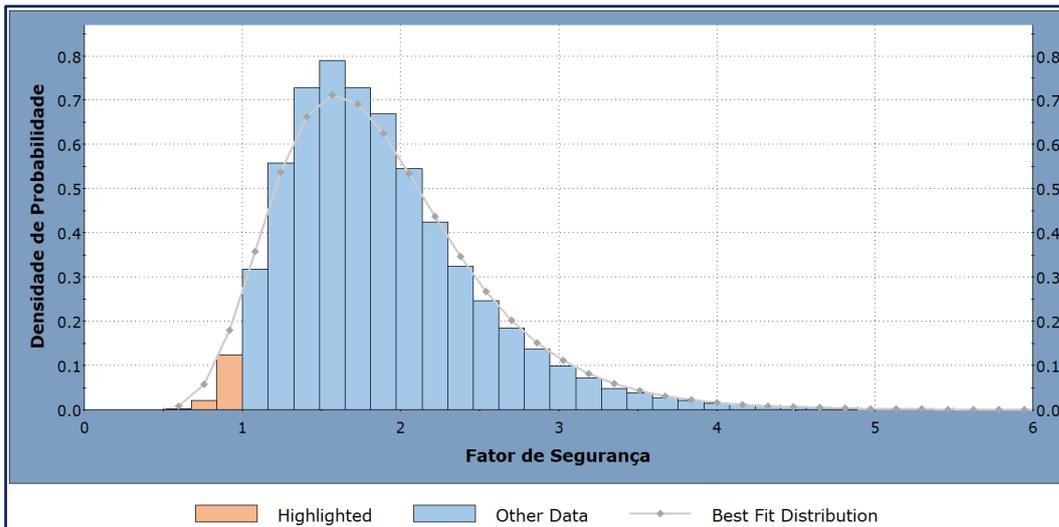


Figura 4.26: Distribuição logNormal do FS com $\mu = 1,808$; $\sigma = 0,3936$; $P_f = 2,268 \%$; $\beta = 2,6458$.

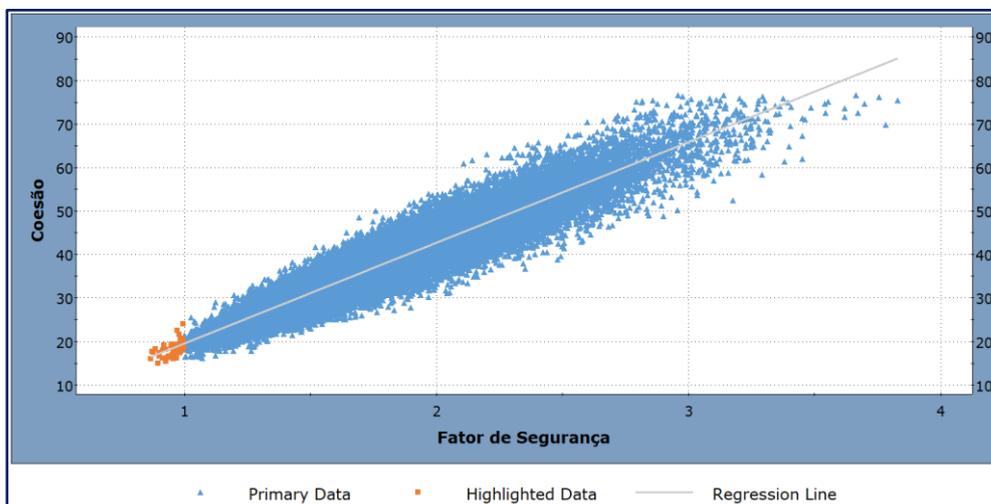


Figura 4.27: Coeficiente de correlação 0,9395 entre FS e S_u da argila.

4.2.3.2. Análise pelo método de Hipercubo Latino

A análise pelo método de Hipercubo Latino foi executada para 10.000 amostras considerando a técnica *Overall Slope* (Slide v7). Neste exemplo o tempo de execução foi de aproximadamente 6 horas, considerando funções densidade de probabilidade lognormal para a resistência ao cisalhamento não drenada da argila e função densidade de probabilidade normal para as demais variáveis aleatórias consideradas. A Figura 4.28 apresenta a distribuição dos valores do fator de segurança FS , com distribuição lognormal de média $\mu = 1,805$, desvio padrão $\sigma = 0,3833$, probabilidade de ruptura $P_f = 2,243 \%$ e índice de confiabilidade $\beta = 2,781$.

Os valores do fator de segurança FS menores que 1, obtidos na simulação, são apresentados em cor laranja.

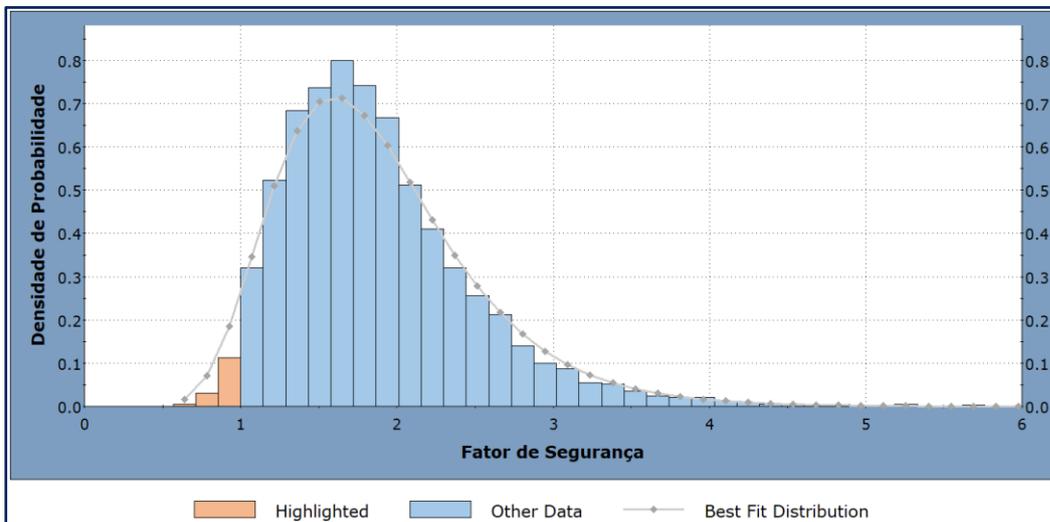


Figura 4.28: Distribuição logNormal do FS com $\mu = 1,805$; $\sigma = 0,3833$; $P_f = 2,243\%$; $\beta = 2,781$.

Da Figura 4.29 pode-se observar que a resistência não drenada S_u da argila tem o maior impacto no valor do fator de segurança FS com coeficiente de correlação 0,9135.

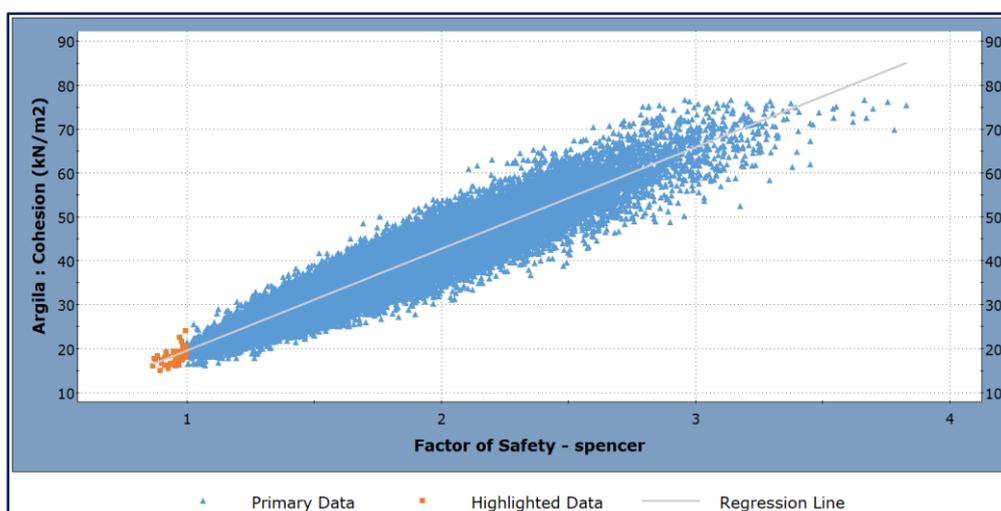


Figura 4.29: Coeficiente de correlação 0,9135 entre FS e S_u da argila.

A Figura 4.30 mostra a localização da potencial superfície de ruptura determinada por método de equilíbrio limite (MEL), método dos elementos finitos (MEF) e método probabilístico (MP).

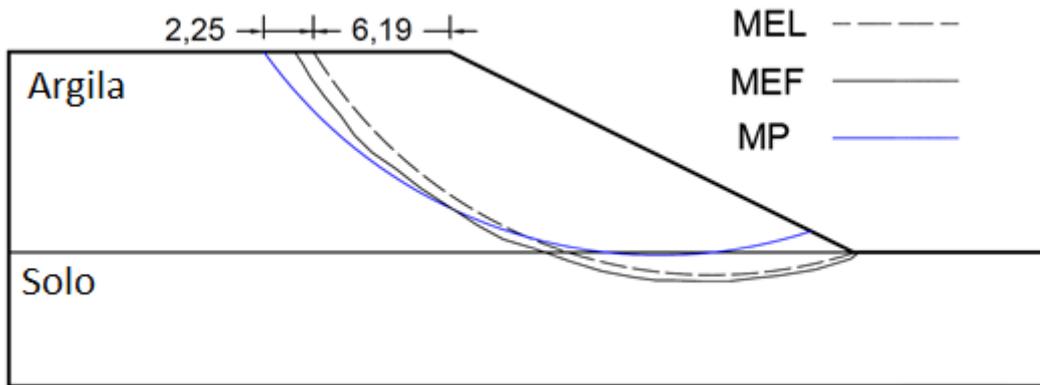


Figura 4.30: Localização da potencial superfície de ruptura pelo método de equilíbrio limite (MEL), método dos elementos finitos (MEF) e método probabilístico (MP).

4.2.3.3.

Análise pelo método das Estimativas Pontuais Alternativas

A análise pelo Método de Estimativas Pontuais Alternativas (programa computacional SVSlope v. 2009) requer o conhecimento prévio da média e do desvio padrão das variáveis aleatórias de entrada (ângulo de atrito ϕ , coesão do solo c , resistência não drenada da argila S_u , peso específico γ) para a estimativa da média μ e do desvio padrão σ da distribuição do fator de segurança FS , requerendo $2n + 1 = 11$ simulações (n é o número de variáveis aleatórias de entrada). Neste exemplo o tempo de execução foi de 1 hora, aproximadamente. A Figura 4.31 apresenta a distribuição dos valores do fator de segurança FS , determinados nesta simulação, com distribuição lognormal de média $\mu = 1,80$ desvio padrão $\sigma = 0,2925$ probabilidade de ruptura $P_f = 0,16\%$ e índice de confiabilidade $\beta = 3,586$.

A Tabela 4.7 compara os resultados obtidos nesta dissertação com os métodos probabilísticos para análise da estabilidade de taludes, incluindo os publicados na literatura obtidos por outros pesquisadores.

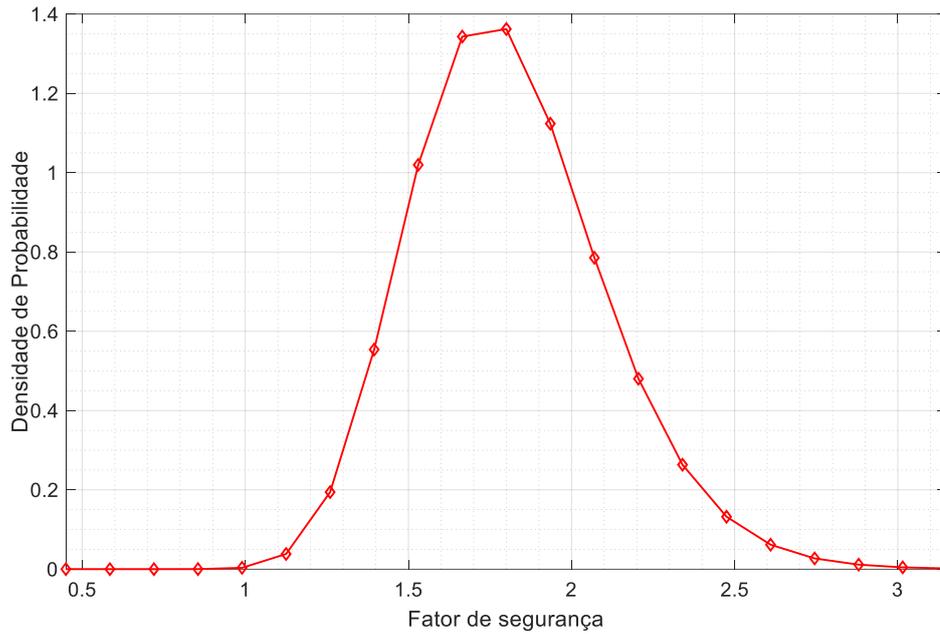


Figura 4.31: Distribuição logNormal do fator de segurança $\mu = 1,80$; $\sigma = 0,2925$; $P_f = 0,16\%$; $\beta = 3,586$.

Tabela 4.7: Resumo dos resultados das análises probabilísticas.

Método	Amostras	FS _p	β	PF (%)	FDP
Método de Monte Carlo	50.000	1,808	2,646	2,27	Lognormal
Método hipercubo latino	10.000	1,805	2,781	2,24	Lognormal
Método estimativas pontuais alternativas	11	1,8	3,586	0,16	Lognormal
Bhattachyrya et al. (2003)	—	1,797	2,861	—	—
Hassan e Wolff (1999)	—	—	2,869	—	—

4.3. Talude subaquático em argila mole

Em agosto de 1970, durante a construção de um novo terminal no porto de São Francisco, EUA, uma região de comprimento aproximado de 250 pés (75 m) de um talude subaquático com 100 pés (30 m) de altura entrou em colapso (Duncan e Buchignani, 1973). Uma seção transversal do talude é mostrada na Figura 4.32. A trincheira, que rompeu quando estava sendo escavada, deveria ter sido preenchida com areia para formar uma berma e favorecer a estabilidade do talude.

No dia 20 de agosto de 1970 ocorreu a ruptura na argila mole da baía de São Francisco, normalmente adensada, ligeiramente orgânica, de origem marinha, com limite de plasticidade de 30% e limite de liquidez de 50%, aproximadamente.

Valores da resistência não drenada S_u foram obtidos com ensaios triaxiais de laboratório (UU) e ensaios de palheta, em campo, os resultados estão indicados na Figura 4.33.

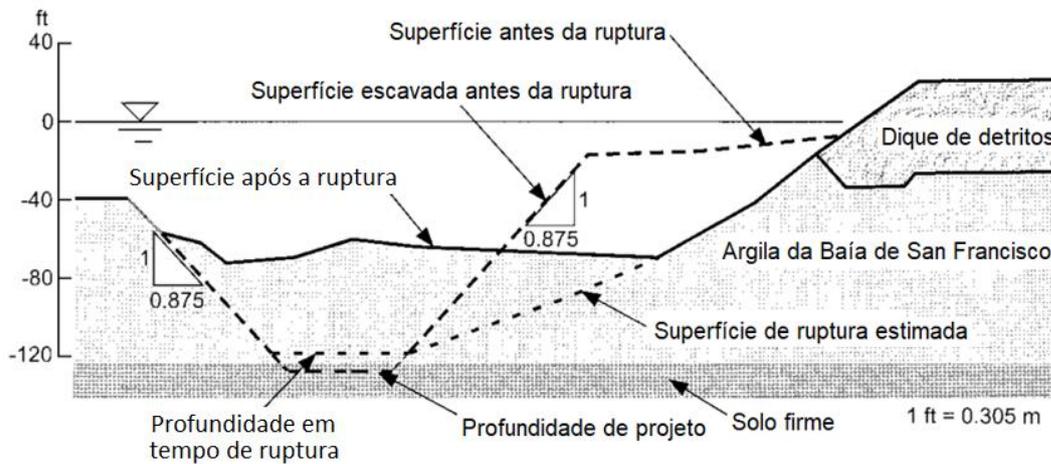


Figura 4.32: Seção transversal do talude antes e após a ocorrência da ruptura.

A experiência dos engenheiros encarregados do projeto, recomendava que taludes subaquáticos de 1(H):1(V) poderiam ser executados com fator de segurança determinístico $FS = 1,25$. O projeto com taludes íngremes reduziria o volume de escavação e posterior preenchimento, diminuindo custos. Estimou-se que se os taludes pudessem ser escavados com inclinação 0,875(H):1(V), o custo da trincheira seria reduzido em cerca de duzentos mil dólares. Um esforço considerável foi dedicado para avaliar a resistência não drenada S_u da argila para avaliar o fator de segurança FS do talude com a máxima acurácia possível. Com base no perfil da resistência não drenada média da Figura 4.33 verificou-se que o fator de segurança seria de $FS = 1,17$ para taludes escavados com inclinação 0,875(H):1(V)

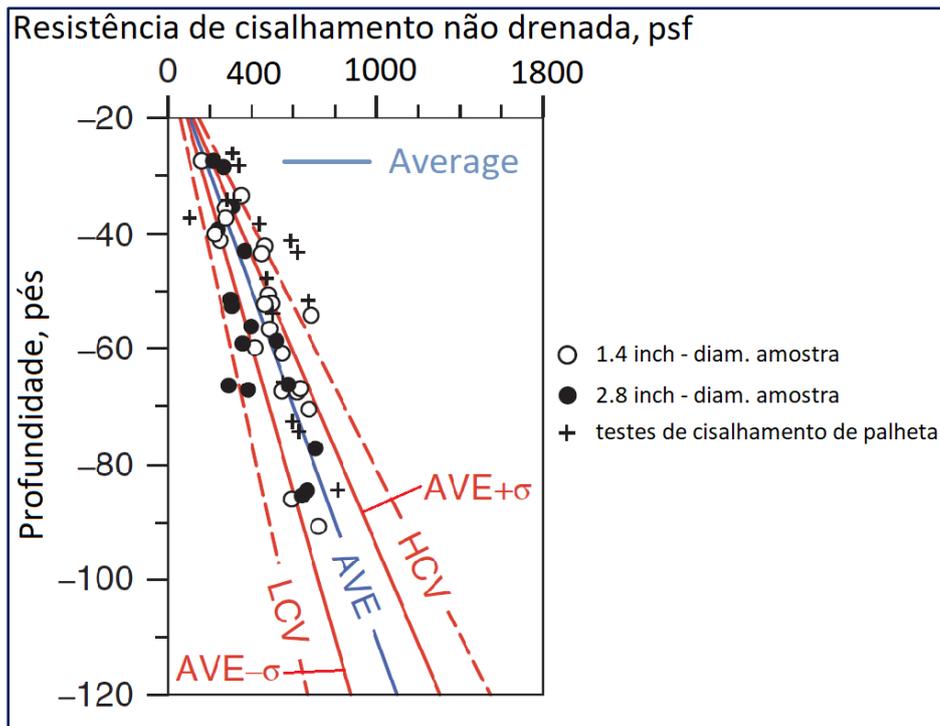


Figura 4.33: Variação com a profundidade da resistência não drenada S_u da argila mole da baía de São Francisco (Duncan and Buchignani, 1973): resultados de ensaios de laboratório (UU) e de campo (ensaio de palheta)

Como as análises foram baseadas em uma quantidade considerável de dados de alta qualidade, foi então decidida a escavação com taludes inclinados $0,875(H):1(V)$, como mostra a Figura 4.33.

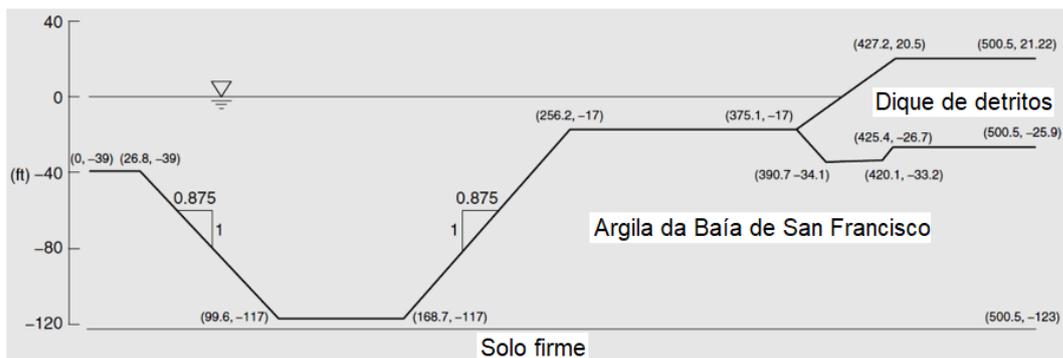


Figura 4.34: Talude subaquático na argila mole da baía de São Francisco - Duncan e Buchignani (1973); Duncan (2000).

Para as análises apresentadas a seguir a camada de argila mole foi subdividida em cinco subcamadas, com valores médios de resistência não drenada S_u listados na Tabela 4.8 e de acordo com o perfil da Figura 4.33.

Tabela 4.8: Valores médios dos parâmetros geotécnicos.

Camada	c (lbf/ft ²)	γ (lbf/ft ³)	E (lbf/ft ²)	ν
Argila 1	400	109,3	2,09E+05	0,495
Argila 2	640	109,3		
Argila 3	895	109,3		
Argila 4	1155	109,3		
Argila 5	1405	109,3		

4.3.1. Análise por método de equilíbrio limite

Para este estudo específico foi utilizado o método das fatias de Spencer (1967) para cálculo do fator de segurança determinístico $FS = 1,171$, próximo ao computado por Duncan (2000) com o método de Taylor $FS = 1,7$. A posição da potencial superfície de ruptura está ilustrada na Figura 4.34.

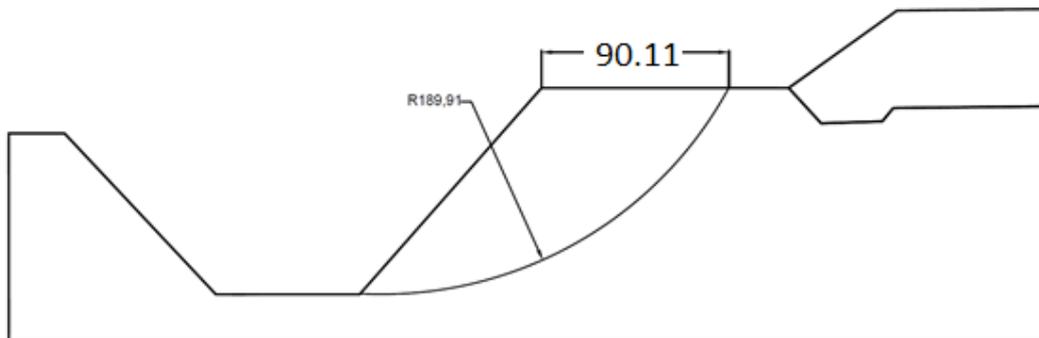


Figura 4.35: Posição da potencial superfície de ruptura obtida pelo método de Spencer com fator de segurança $FS = 1,171$.

4.3.2. Análise pelo método dos elementos finitos

A malha de elementos finitos, após a execução da análise de estabilidade, e a localização da potencial superfície de ruptura são mostradas nas Figuras 4.36 a 4.38. O comportamento do solo foi representado pelo modelo de Mohr-Coulomb (Figura 4.36) e também pelo modelo constitutivo Soft – Soil (Figura 4.37). A discretização da geometria do talude foi formada por 1118 elementos triangulares de 15 nós.

Como resultado da análise, o comprimento que demarca o início da potencial superfície de ruptura no topo do talude é de 89,9 pés, conforme ilustra a Figura 4.39.

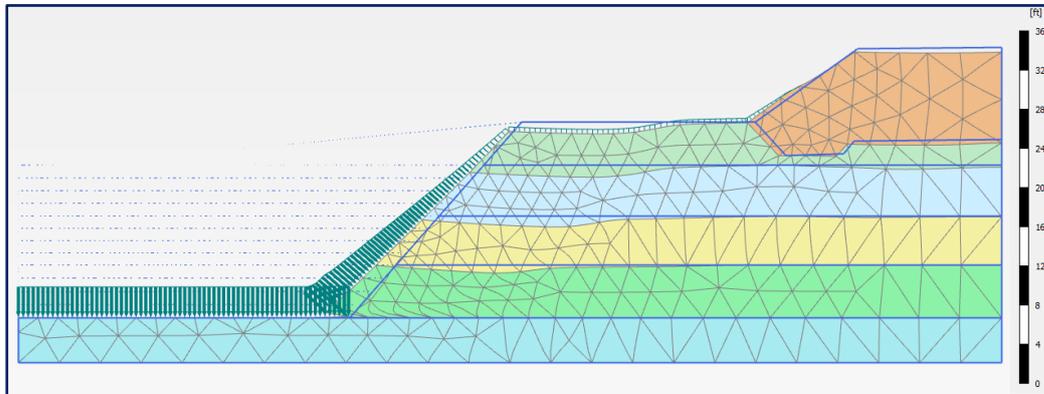


Figura 4.36: Malha deformada de elementos finitos considerando o modelo constitutivo de Mohr-Coulomb.

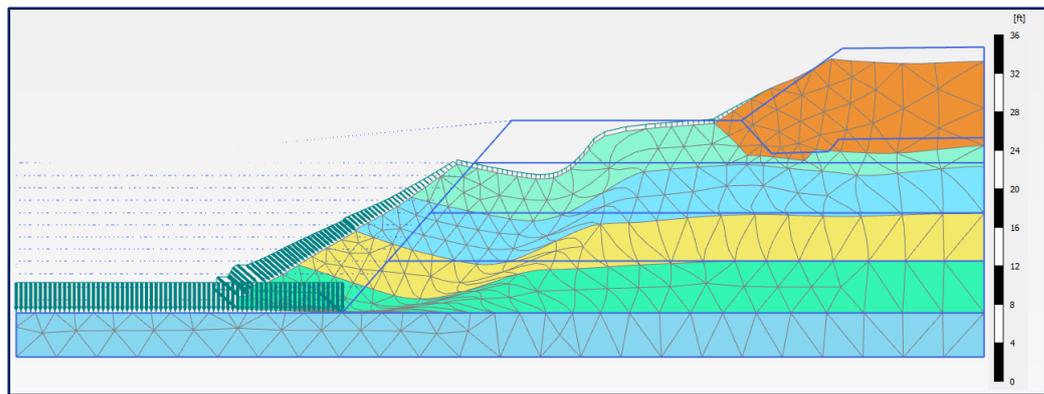


Figura 4.37: Malha deformada de elementos finitos considerando o modelo constitutivo Soft-Soil.

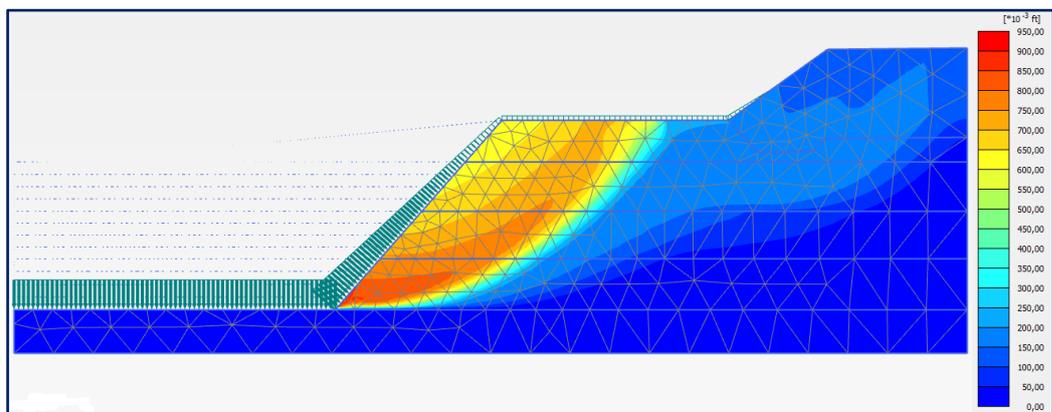


Figura 4.38: Posição da potencial superfície de ruptura obtida pelo método dos elementos finitos com fator de segurança $FS = 1,180$.

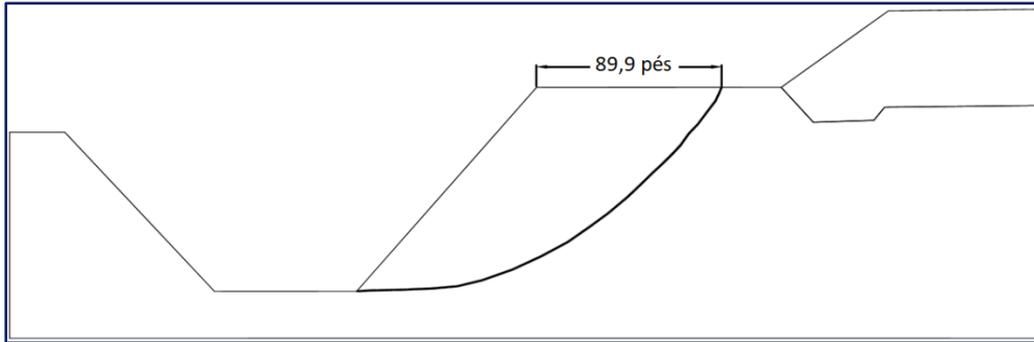


Figura 4.39: Comprimento do início da potencial superfície de ruptura obtida pelo método dos elementos finitos com fator de segurança $FS = 1,180$.

4.3.3. Análise por método probabilístico

As análises probabilísticas foram executadas utilizando os métodos probabilísticos de Monte Carlo, Hipercubo Latino e Estimativas Pontuais Alternativas com cálculo do fator de segurança determinístico pelo método ds fatias de Spencer (1967).

Na Tabela 4.9 apresentam-se os valores dos parâmetros geotécnicos, bem como os valores dos coeficientes de variação e as distribuições de densidades de probabilidade para cada subcamada de argila mole. A variação com a profundidade da resistência não drenada S_u foi obtida com auxílio dos gráficos da Figura 4.40.

Tabela 4.9: Valores médios, coeficiente de variação e função densidade de probabilidade dos parâmetros geotécnicos.

Camada	S_u (lbf/ft ²)				γ (lbf/ft ³)			
	μ	σ	COV(%)	FDP	μ	σ	COV(%)	FDP
Argila 1	400	80	20	LogNormal	109,3	9,837	9	Normal
Argila 2	640	128	20	LogNormal	109,3	9,837	9	Normal
Argila 3	895	179	20	LogNormal	109,3	9,837	9	Normal
Argila 4	1155	231	20	LogNormal	109,3	9,837	9	Normal
Argila 5	1405	281	20	LogNormal	109,3	9,837	9	Normal

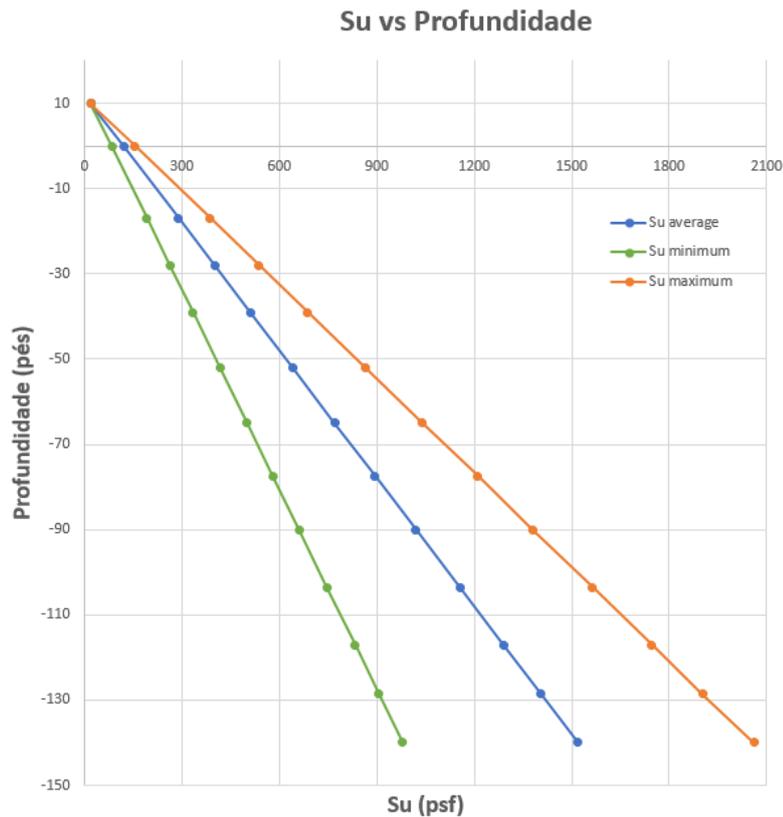


Figura 4.40: Variação com a profundidade da resistência não drenada mínima, média e máxima.

4.3.3.1. Análise pelo método de Monte Carlo

A análise pelo método de Monte Carlo foi executada considerando 50.000 amostras, utilizando a técnica *Overall Slope* com o programa computacional Slide v.7. O tempo de processamento do exemplo foi de aproximadamente 17 horas com a distribuição lognormal dos fatores de segurança mostrada na Figura 4.41 com média $\mu = 1,183$ desvio padrão $\sigma = 0,2164$ probabilidade de ruptura $P_f = 18,068\%$ e índice de confiabilidade $\beta = 0,899$. Os valores do fator de segurança menores do que 1, obtidos na simulação, são apresentados em cor laranja.

As Figuras 4.42. a 4.46 apresentam o impacto no fator de segurança FS em relação à resistência não drenada S_u das subcamadas de argila mole. Pode-se perceber que o impacto aumenta gradualmente da camada 1 até a camada 4, sendo menor o impacto em relação à camada 5.

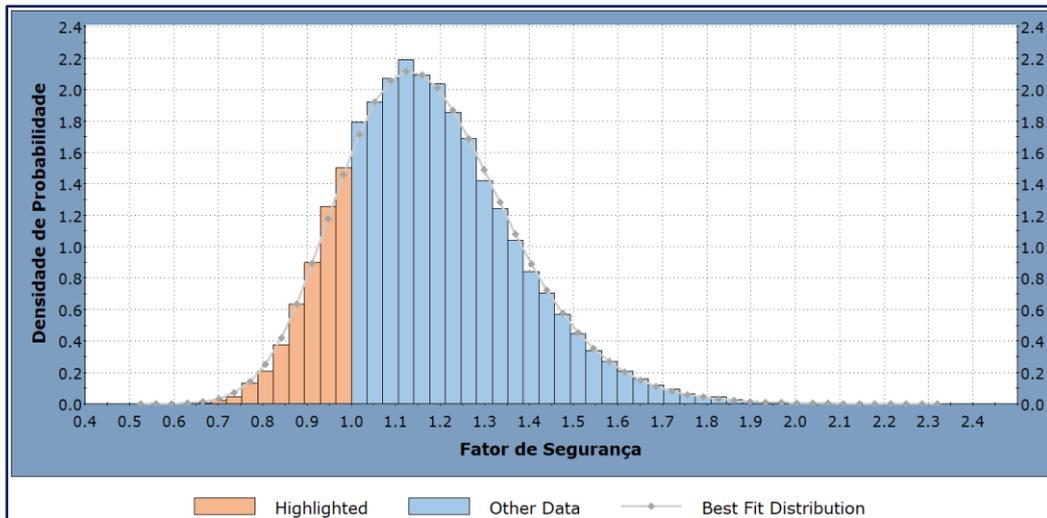


Figura 4.41: Distribuição logNormal do FS com $\mu = 1,183$; $\sigma = 0,2165$; $P_f = 18,068\%$; $\beta = 0,899$.

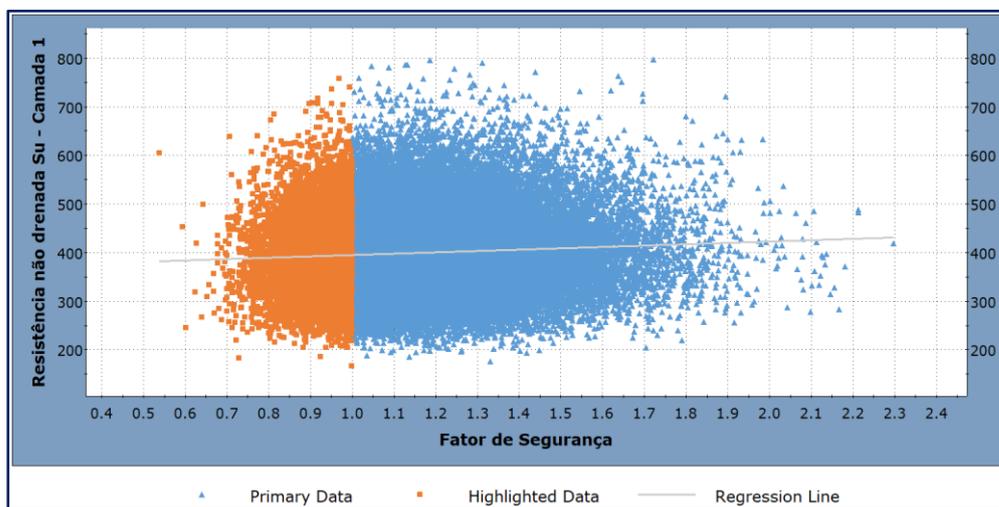


Figura 4.42: Coeficiente de correlação 0,0533 entre o FS e a S_u da camada 1.

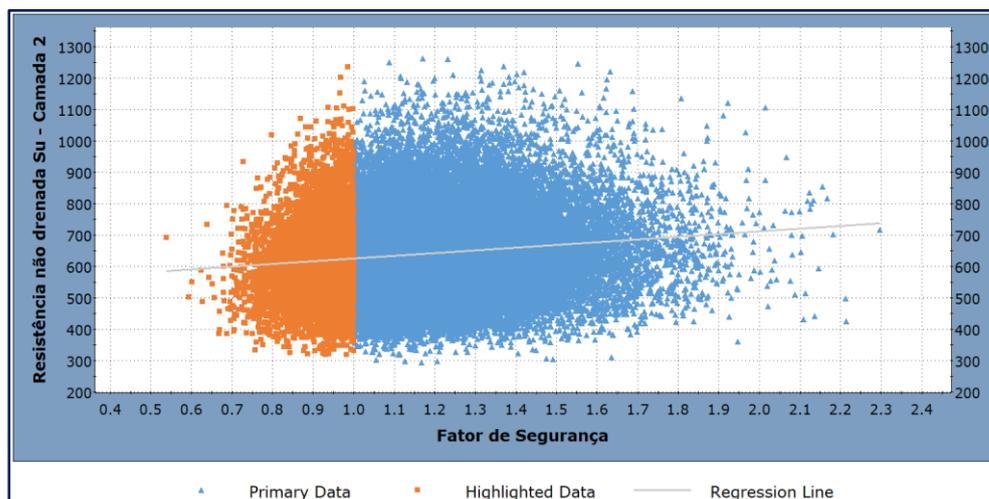


Figura 4.43: Coeficiente de correlação 0,1302 entre o FS e a S_u da camada 2.

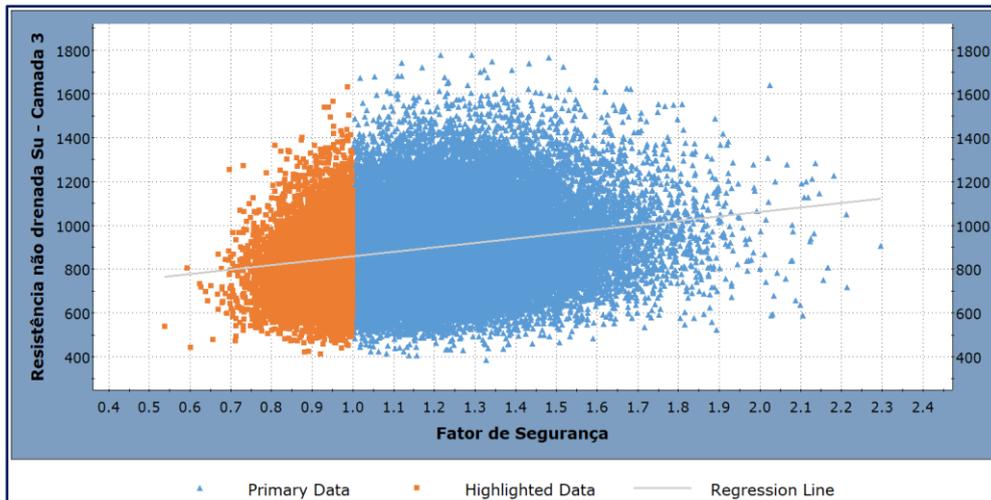


Figura 4.44: Coeficiente de correlação 0,2098 entre o FS e a S_u da camada 3.

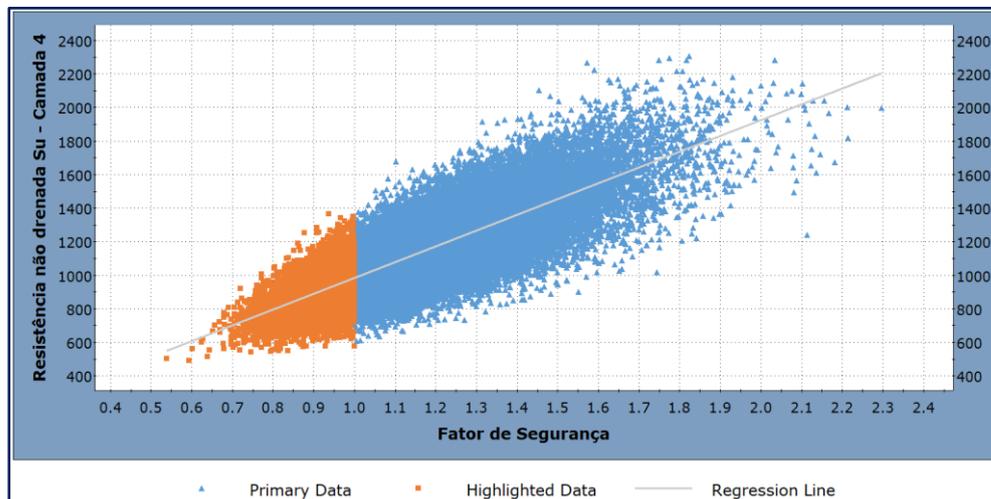


Figura 4.45: Coeficiente de correlação 0,71 entre o FS e a S_u da camada 4.

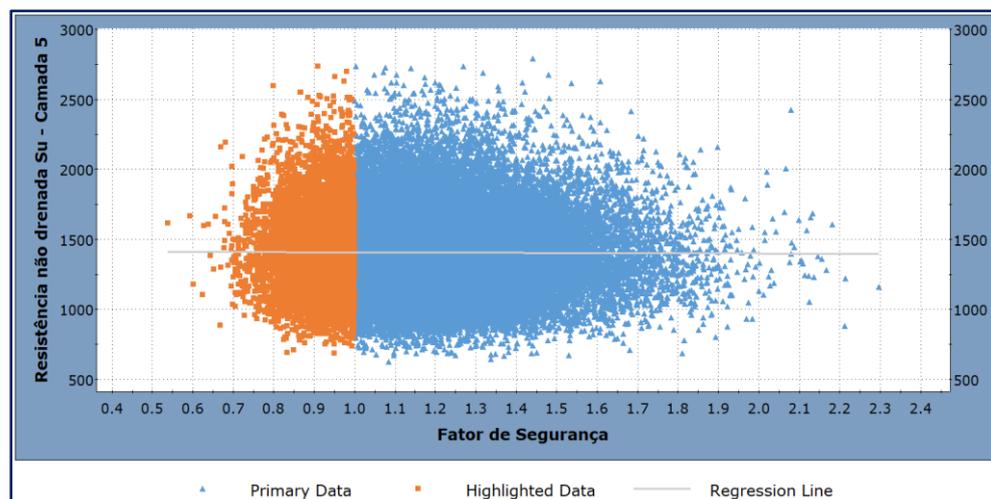


Figura 4.46: Coeficiente de correlação -0,0022 entre o FS e a S_u da camada 5.

4.3.3.2. Análise pelo método hipercubo latino

A análise pelo método de Hipercubo Latino envolveu 10.000 amostras e o cálculo dos fatores de segurança e posição da potencial superfície de ruptura pela técnica *Overall Slope*. O tempo de processamento foi de aproximadamente 6 horas com a distribuição lognormal dos valores do *FS* mostrada na Figura 4.47, com média $\mu = 1,180$; desvio padrão $\sigma = 0,2184$; probabilidade de ruptura $P_f = 17,89\%$; índice de confiabilidade $\beta = 0,895$. Os valores do fator de segurança menores do que 1, obtidos na simulação, são apresentados em cor laranja. Similarmente, as Figuras 4.48 a 4.52 ilustram o impacto no fator de segurança da variação da resistência não drenada das camadas de argila 1 a 5.

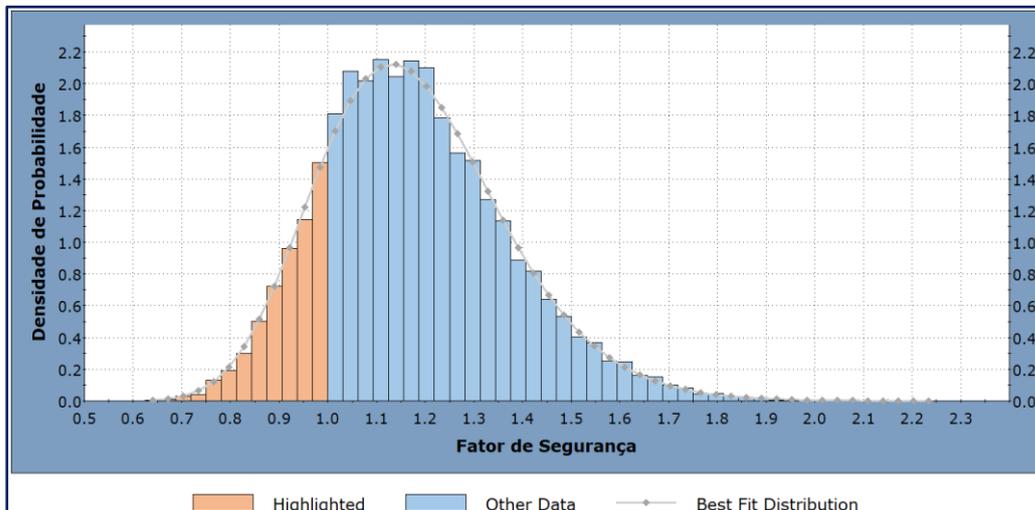


Figura 4.47: Distribuição lognormal do *FS* $\mu = 1,180$; $\sigma = 0,2184$; $P_f = 17,89\%$; $\beta = 0,895$.

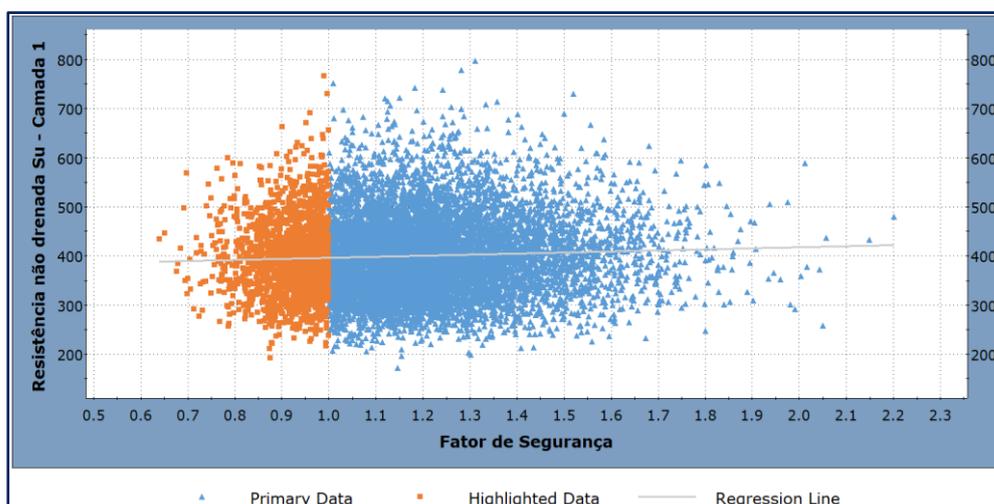


Figura 4.48: Coeficiente de correlação 0,039 entre o *FS* e a S_u da camada 1.

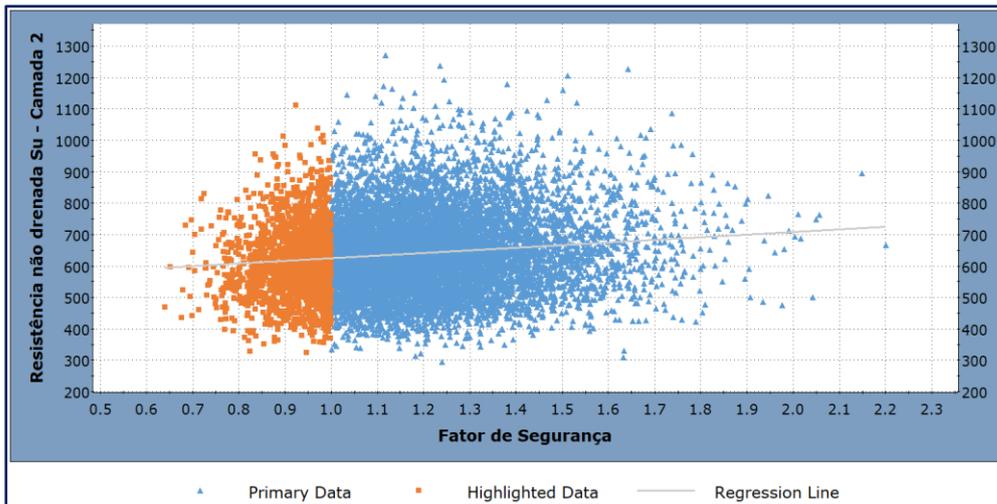


Figura 4.49: Coeficiente de correlação 0,1248 entre o FS e a S_u da camada 2.

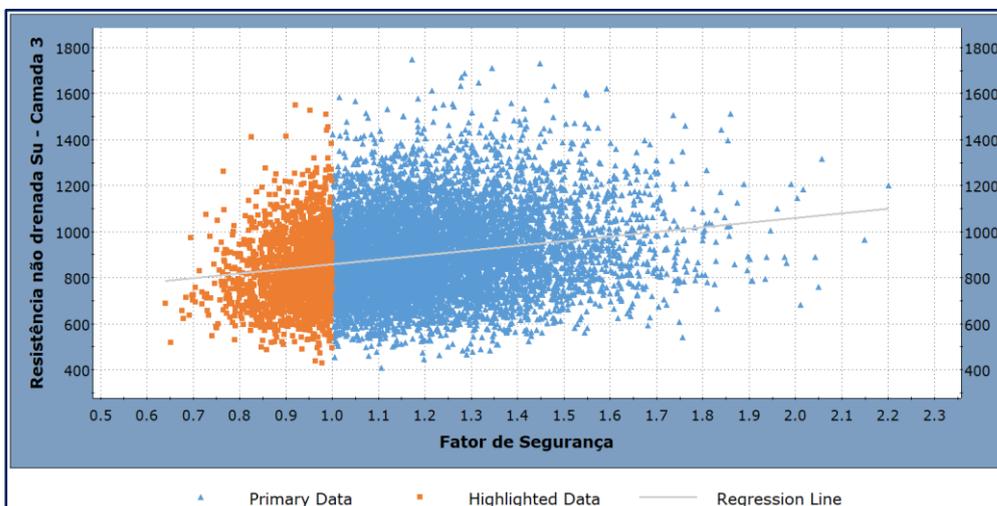


Figura 4.50: Coeficiente de correlação 0,1977 entre o FS e a S_u da camada 3.

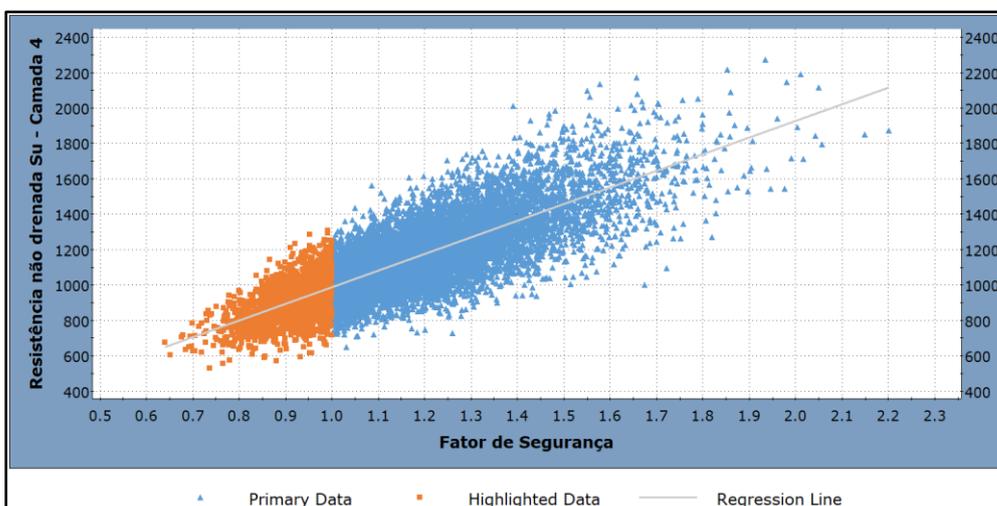


Figura 4.51: Coeficiente de correlação 0,7125 entre o FS e a S_u da camada 4.

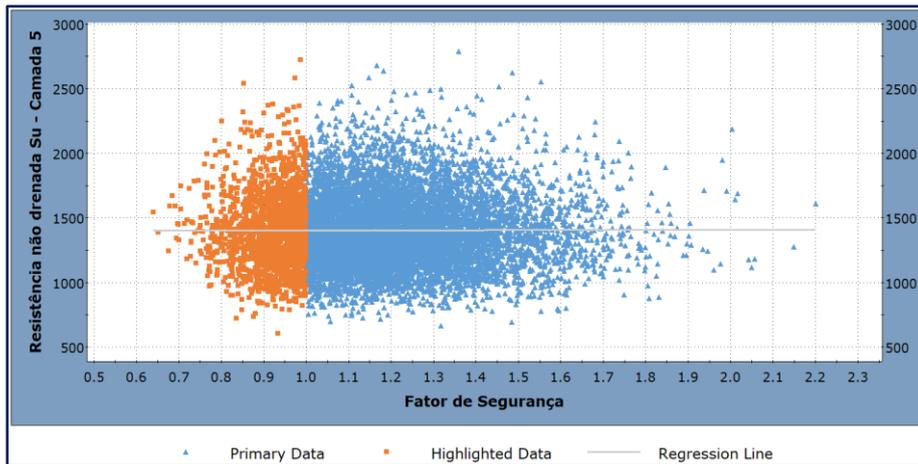


Figura 4.52: Coeficiente de correlação 0,0006 entre o FS e a S_u da subcamada 5.

4.3.3.3.

Análise pelo método de Estimativas Pontuais Alternativas

Neste caso são consideradas como variáveis aleatórias de entrada as resistências não drenadas S_u das 5 camadas de argilas, além dos seus respectivos pesos específicos, sendo necessária a execução de 21 simulações para estimativa da média μ e do desvio padrão σ da distribuição dos valores do fator de segurança FS .

O tempo de processamento foi de aproximadamente 30 minutos, com a distribuição lognormal dos valores do fator de segurança FS ilustrada na Figura 4.53, com média $\mu = 1,18$; desvio padrão $\sigma = 0,1613$; probabilidade de ruptura $P_f = 15,46\%$; índice de confiabilidade $\beta = 1,13$.

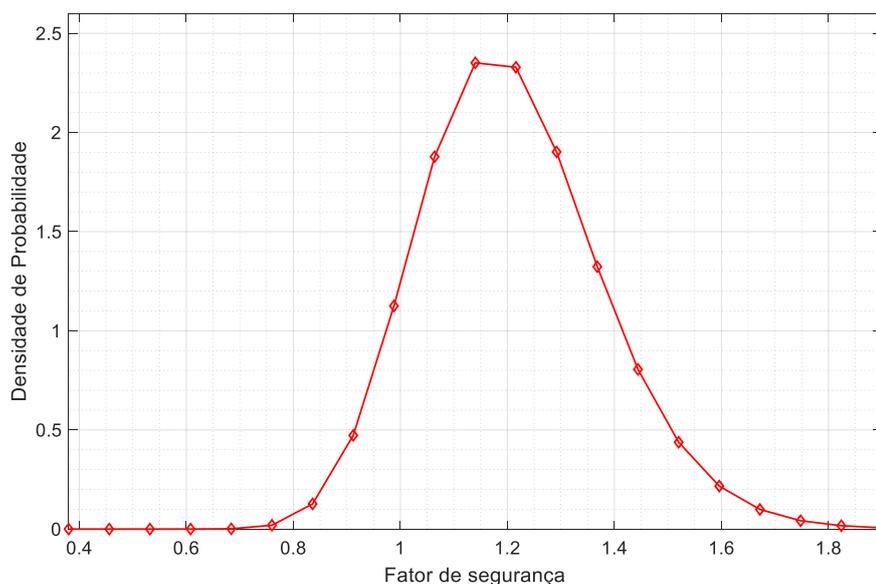


Figura 4.53: Distribuição lognormal do FS com $\mu = 1,18$; $\sigma = 0,1613$; $P_f = 15,46\%$; $\beta = 1,13$.

A Figura 4.54 apresenta o diagrama tornado que mostra a sensibilidade do fator de segurança FS com relação aos parâmetros geotécnicos. Pode-se observar que o impacto da variação dos pesos específicos é mínimo e que a maior influência na estabilidade do talude decorre da variação da resistência não drenada na camada de argila 2. A Tabela 4.10 apresenta os resultados das análises pelo método das estimativas pontuais alternativas (MEPA).

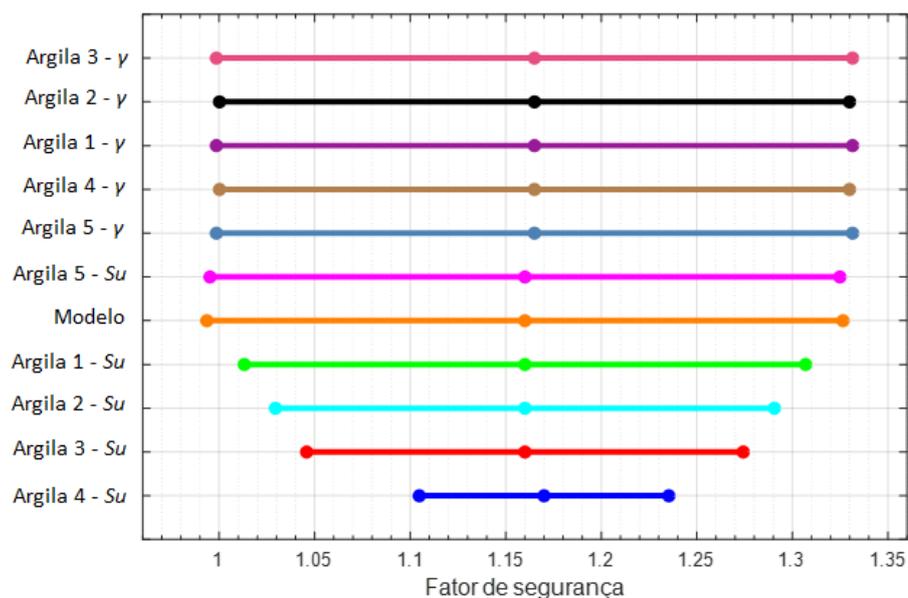


Figura 4.54: Diagrama tornado probabilístico indicando a sensibilidade da variação dos parâmetros geotécnicos das camadas de argila.

Tabela 4.10: Resultados numéricos obtidos pelo MEPA.

Material	Variável	E[FS]	V[FS]	Percentil	Percentil	Percentil
				min	médio	max
				10%	50%	90%
Argila 1	S_u (lbf/ft ²)	1,18	0	1,18	1,18	1,18
Argila 1	γ (lbf/ft ³)	1,18	0	1,18	1,18	1,18
Argila 2	S_u (lbf/ft ²)	1,18	0,02318	0,9908	1,168	1,378
Argila 2	γ (lbf/ft ³)	1,18	0	1,18	1,178	1,178
Argila 3	S_u (lbf/ft ²)	1,18	0,001982	1,122	1,177	1,236
Argila 3	γ (lbf/ft ³)	1,18	0	1,18	1,18	1,18
Argila 4	S_u (lbf/ft ²)	1,18	0,0007	1,144	1,18	1,212
Argila 4	γ (lbf/ft ³)	1,18	0	1,18	1,18	1,18
Argila 5	S_u (lbf/ft ²)	1,18	0,0002	1,162	1,18	1,194
Argila 5	γ (lbf/ft ³)	1,18	0	1,18	1,18	1,18

A Figura 4.55 mostra a posição da potencial superfície de ruptura determinada por método de equilíbrio limite (LEM), método dos elementos finitos (FEM) e

método probabilístico (PM). A Tabela 4.11 apresenta um resumo dos resultados obtidos.

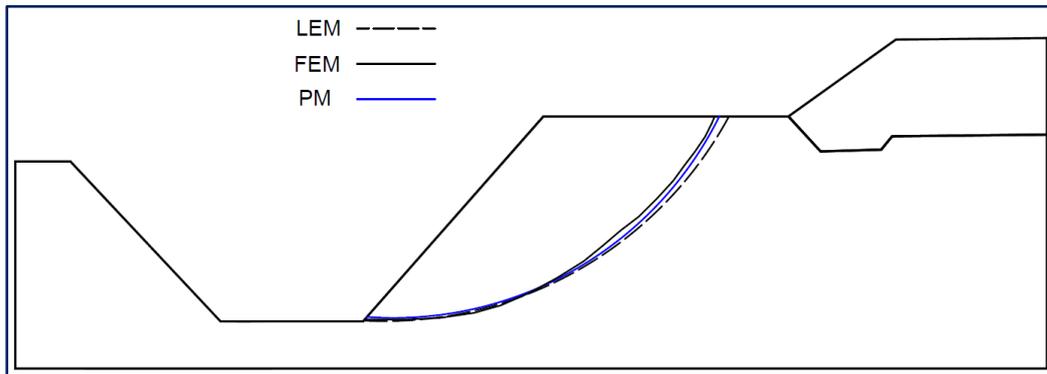


Figura 4.55: Localização da potencial superfície de ruptura pelos métodos MEL, MEF e MP.

Tabela 4.11: Resumo de resultados obtidos com métodos probabilísticos.

Método	Amostras	FS _P	β	PF (%)	FDP
Monte Carlo	50000	1,183	0,899	18,07	LogNormal
Hipercubo Latino	10000	1,180	0,895	17,89	LogNormal
Estimativas Pontuais Alternativas	21	1,1780	1,130	15,46	LogNormal
Duncan (2000)		1,170		18,00	LogNormal

4.4. Dique da Baía James

O projeto hidrelétrico da Baía James envolveu o desenho de diques que deveriam ser construídos em argilas macias e sensíveis (Christian et al., 1994, Duncan et al., 2003). Uma seção transversal típica de um dos diques planejados é mostrada na Figura 4.56. As propriedades geotécnicas do solo para os materiais no dique e sua base estão resumidas na Tabela 4.12. Na seção transversal da Baía da James, a camada rígida é a camada de calço na base da seção.

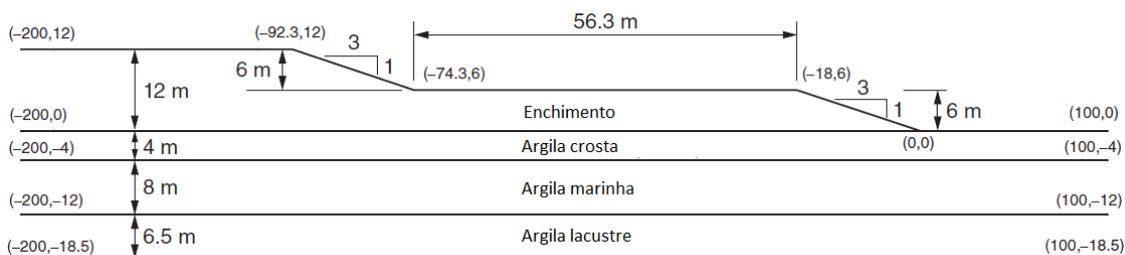


Figura 4.56: Seção transversal do dique da Baía James.

Tabela 4.12: Valores das propriedades geotécnicas dos materiais no dique

Material	S_u (kN/m ²)	ϕ (°)	γ (kN/m ³)
Enchimento	—	30,00	20,00
Argila crosta	41,00	—	20,00
Argila marinha	34,50	—	18,80
Argila lacustre	31,20	—	20,30

4.4.1. Análise por método de equilíbrio limite

Para esse estudo específico foi utilizado o método das fatias de Spencer (1967) no cálculo do fator de segurança determinístico $FS = 1,461$, valor próximo a $FS = 1,45$ computado por Christian et al. (1994). A posição da potencial superfície de ruptura está ilustrada na Figura 4.57.

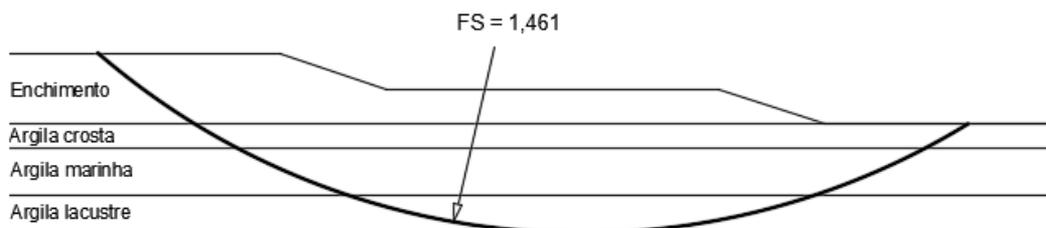


Figura 4.57: Posição da potencial superfície de ruptura circular obtida pelo método de Spencer com fator de segurança $FS = 1,461$, para o dique da Baía James.

Duncan et al. (2003) mostraram que fatores de segurança consideravelmente menores foram calculados se as análises fossem realizadas usando superfícies deslizantes não circulares. A superfície crítica de ruptura, não circular, é mostrada na Figura 4.58. O fator mínimo de segurança determinado foi de 1,158, consideravelmente inferior ao valor de 1,461 determinado usando superfícies deslizantes circulares.

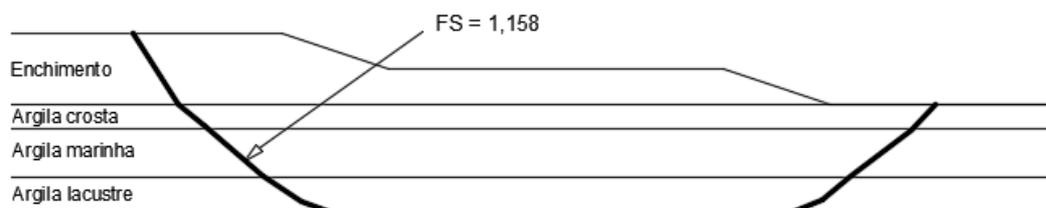


Figura 4.58: Posição da potencial superfície de ruptura não circular obtida pelo método de Spencer com fator de segurança $FS = 1,158$, para o dique da Baía James.

4.4.2. Análise pelo método dos elementos finitos

A análise foi realizada usando o método de Redução da Resistência ao Cisalhamento (RRC) com o programa computacional Plaxis 2D. Uma das vantagens do RRC é que não é necessário localizar uma superfície de falha crítica. A zona de ruptura crítica é encontrada automaticamente através do processo de cálculo das tensões dentro da seção.

A malha de elementos finitos (997 elementos triangulares e 8175 nós), após a execução da análise de estabilidade, é mostrada na Figura 4,59. O comportamento do solo foi representado pelo modelo constitutivo de Mohr-Coulomb.

Os contornos da tensão de cisalhamento são mostrados na Figura 4.60. A zona de ruptura que é evidente nestes contornos aproxima-se muito de a forma da superfície não circular crítica determinada usando análises de equilíbrio limite ($FS = 1.58$). No entanto, o fator de segurança calculado é $FS = 1.24$.

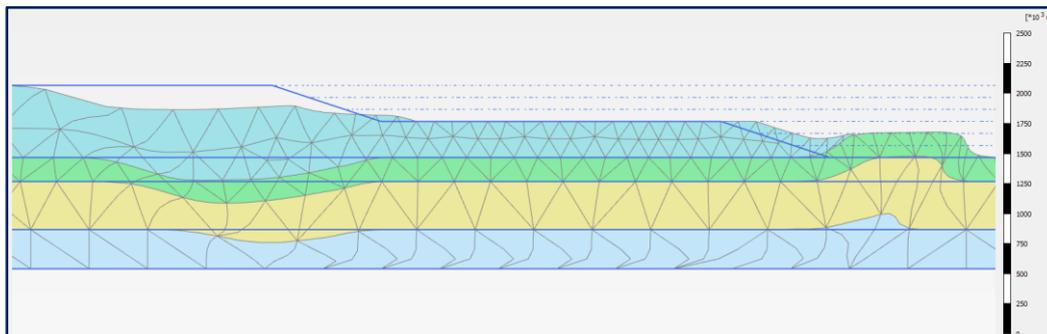


Figura 4.59: Malha deformada de elementos finitos do dique da Baía James, considerando o modelo constitutivo de Mohr - Coulomb.

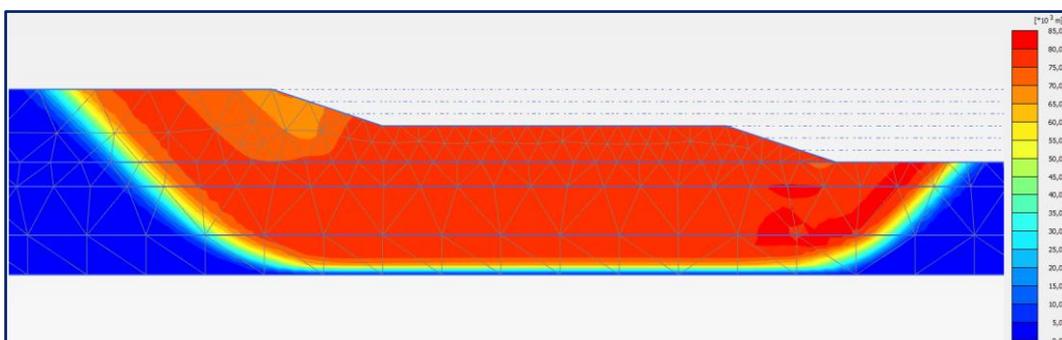


Figura 4.60: Posição da potencial superfície de ruptura obtida pelo método dos elementos finitos com fator de segurança $FS = 1,24$, para o dique da Baía James.

Esta diferença nos fatores de segurança calculados (MEL e MEF) indica que as análises de RRC não devem ser usadas sozinhas na análise de estabilidade de taludes. Os resultados apresentados nos parágrafos anteriores mostram que o efeito do uso de superfícies deslizantes não circulares também é muito significativo, destacando a importância de localizar a superfície de deslizamento crítica com precisão.

4.4.3. Análise por método probabilístico

As análises probabilísticas foram executadas para a superfície de ruptura não circular utilizando os métodos probabilísticos de Monte Carlo, Hipercubo Latino e Estimativas Pontuais Alternativas com cálculo do fator de segurança determinístico pelo método das fatias de Spencer (1967).

Na Tabela 4.13 apresentam-se os valores dos parâmetros geotécnicos, bem como os valores dos coeficientes de variação e as distribuições de densidades de probabilidade para cada material.

Tabela 4.13: Valores médios, coeficiente de variação e função densidade de probabilidade dos parâmetros geotécnicos para o dique da Baía James.

Material	S_u (kN/m ²)				ϕ (°)				γ (kN/m ³)			
	μ	σ	COV	FDP	μ	σ	COV	FDP	μ	σ	COV	FDP
Enchimento	—	—	—	—	30,00	2,25	7,50	Normal	20,00	1,00	5,00	Normal
Argila crosta	41,00	9,43	23	Normal	—	—	—	—	20,00	1,00	5,00	Normal
Argila marinha	34,50	7,94	23	Normal	—	—	—	—	18,80	0,94	5,00	Normal
Argila lacustre	31,20	7,18	23	Normal	—	—	—	—	20,30	1,02	5,00	Normal

4.4.3.1. Análise pelo método de Monte Carlo

A análise pelo método de Monte Carlo foi executada considerando 50.000 amostras, utilizando a técnica *Global Minimum* com o programa computacional Slide v.7. Os valores do fator de segurança FS com distribuição normal são mostrados na Figura 4.61 com média $\mu = 1,161$ desvio padrão $\sigma = 0,187$ probabilidade de ruptura $P_f = 19,40\%$ e índice de confiabilidade $\beta = 0,862$. Os

valores do fator de segurança menores do que 1, obtidos na simulação, são apresentados em cor laranja.

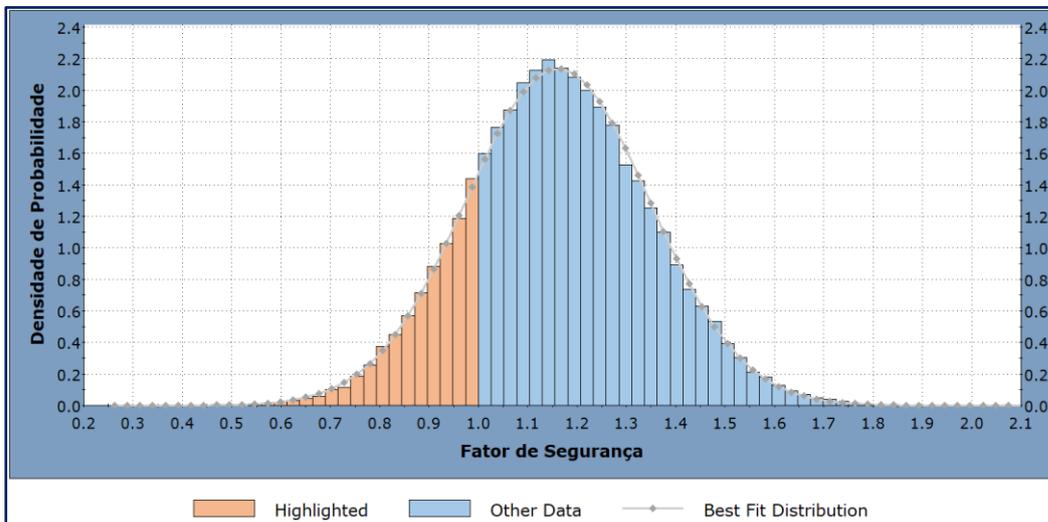


Figura 4.61: Distribuição Normal do FS com $\mu = 1,161$; $\sigma = 0,187$; $P_f = 19,40\%$; $\beta = 0,862$.

A Figura 4.62 mostra a relação de sensibilidade entre o fator de segurança FS e o ângulo de atrito do material de enchimento e as Figuras 4.63 a 4.65 apresentam o impacto de sensibilidade no fator de segurança FS em relação à variação da resistência não drenada S_u das camadas de argila. Pode-se perceber que o impacto de sensibilidade aumenta gradualmente da camada de enchimento até a camada de argila lacustre.

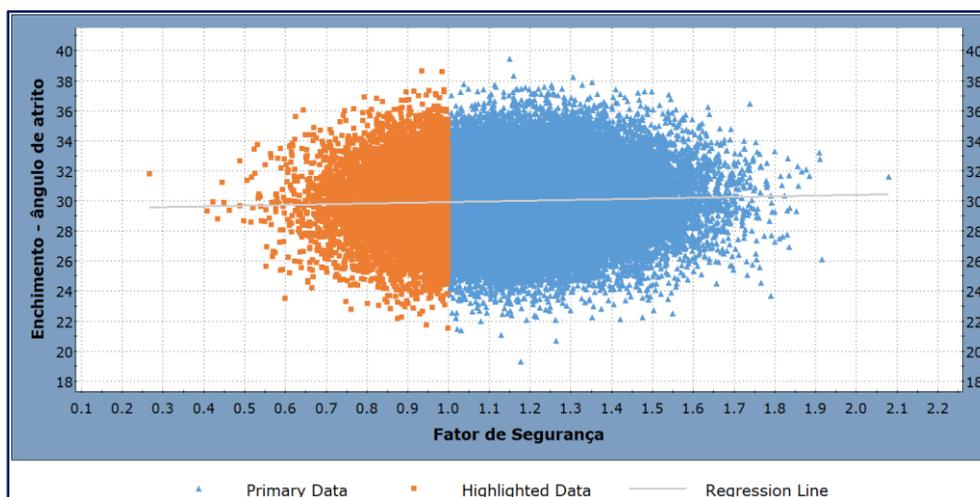


Figura 4.62: Coeficiente de correlação 0,041 entre o FS e o ϕ da camada de enchimento.

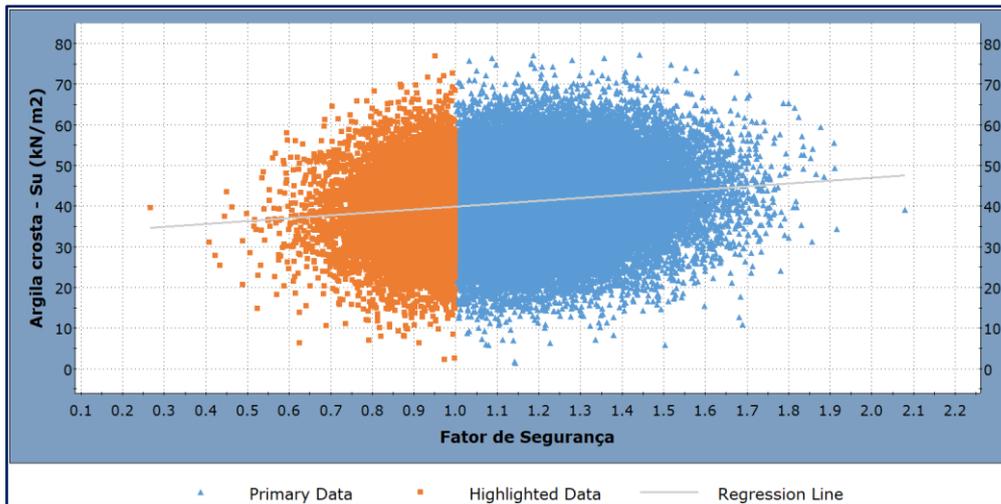


Figura 4.63: Coeficiente de correlação 0,14 entre o FS e a S_u da argila crosta.

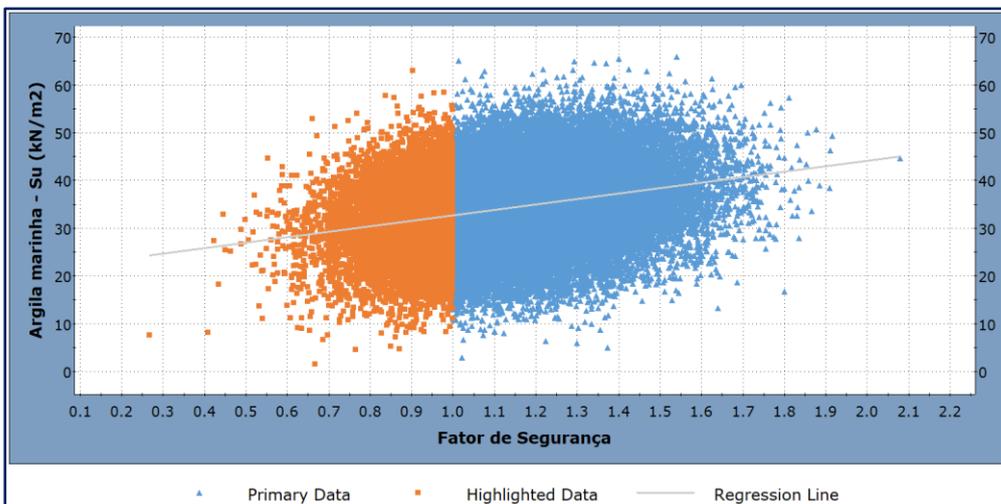


Figura 4.64: Coeficiente de correlação 0,269 entre o FS e a S_u da argila marinha.

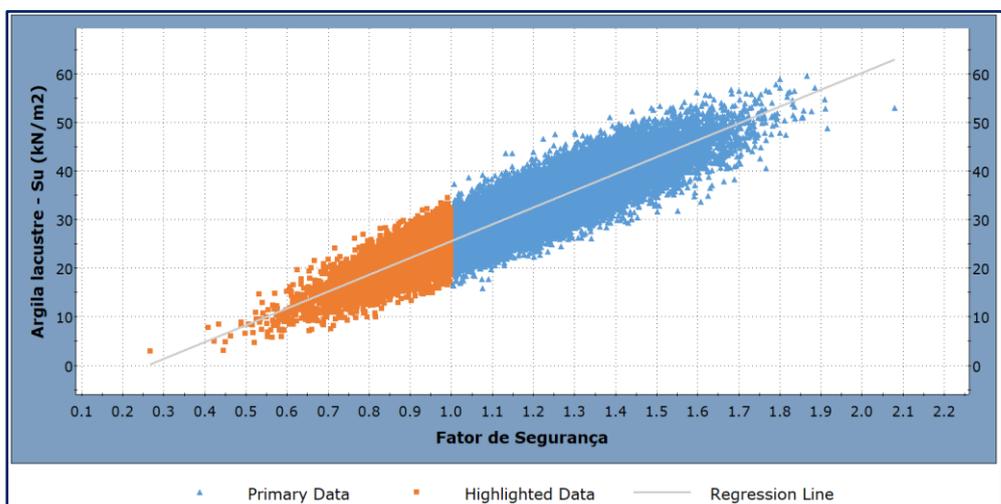


Figura 4.65: Coeficiente de correlação 0,907 entre o FS e a S_u da argila lacustre.

4.4.3.2. Análise pelo método hipercubo latino

A análise pelo método Hipercubo Latino envolveu 10.000 amostras, utilizando a técnica *Global Minimum* (Slide v.7). Os valores do *FS* com distribuição normal são mostrados na Figura 4.66 com média $\mu = 1,16$ desvio padrão $\sigma = 0,18$ probabilidade de ruptura $P_f = 19,93 \%$ e índice de confiabilidade $\beta = 0,85$. Os valores do *FS* menores do que 1, obtidos na simulação, são apresentados em cor laranja. A Figura 4.67 mostra a relação de sensibilidade entre o *FS* e o ϕ do material de enchimento e as Figuras 4.68 a 4.70 apresentam o impacto de sensibilidade no *FS* em relação à variação da resistência não drenada S_u das camadas de argila. Pode-se perceber que o impacto de sensibilidade aumenta gradualmente da camada de enchimento até a camada de argila lacustre.

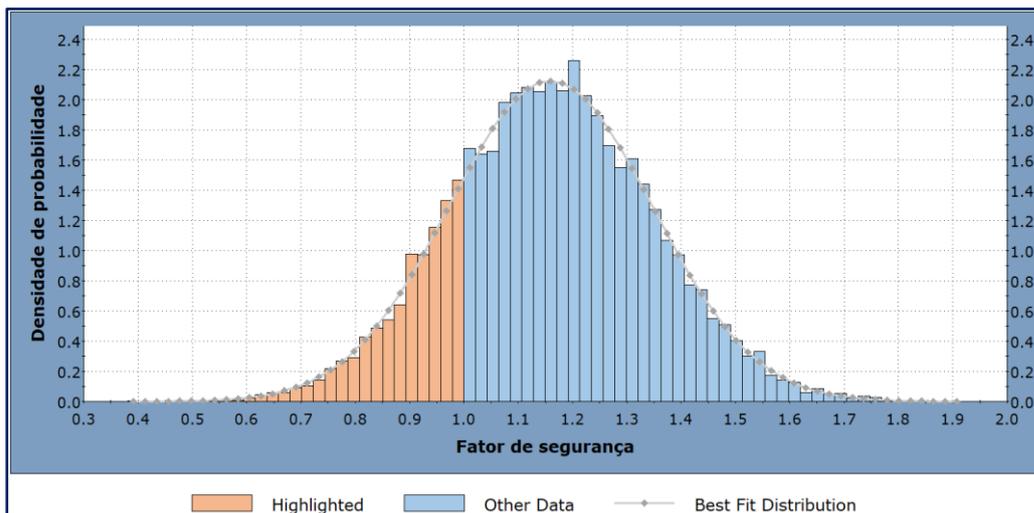


Figura 4.66: Distribuição Normal do *FS* $\mu = 1,16$; $\sigma = 0,18$; $P_f = 19,93 \%$; $\beta = 0,85$.

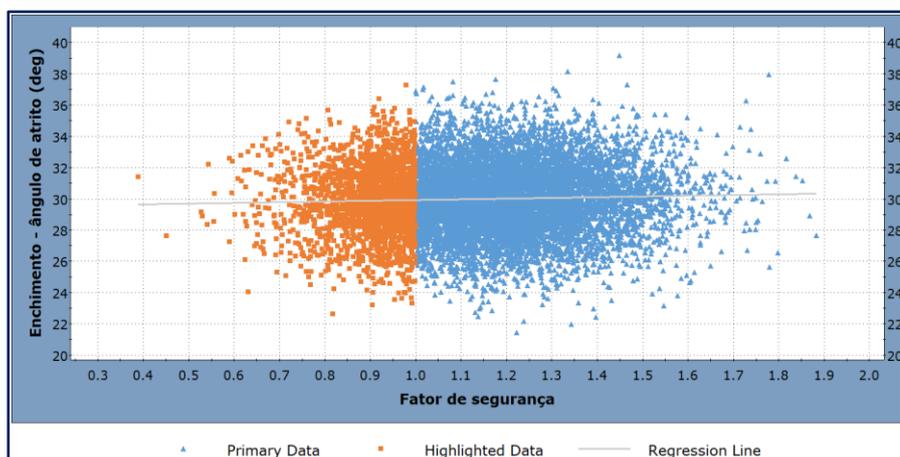


Figura 4.67: Coeficiente de correlação 0,038 entre o *FS* e o ϕ da camada de enchimento.

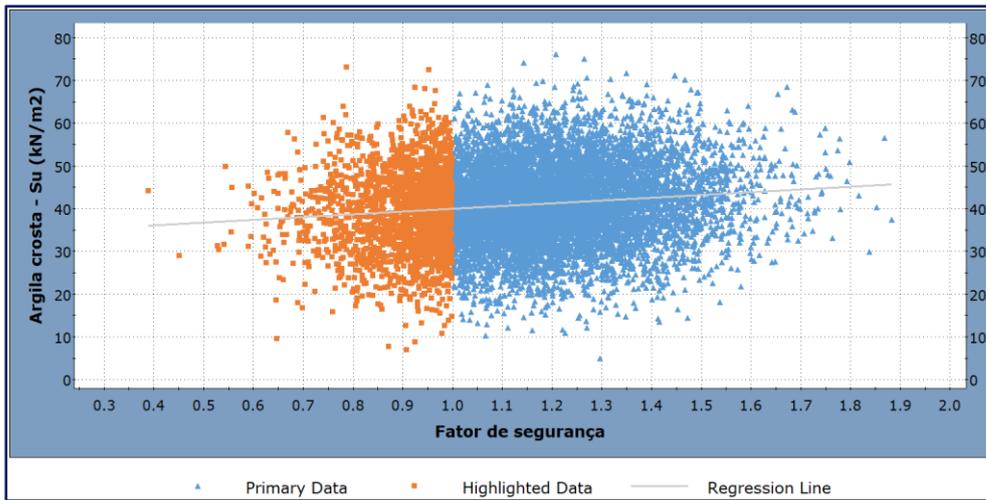


Figura 4.68: Coeficiente de correlação 0,13 entre o FS e a S_u da argila crosta.

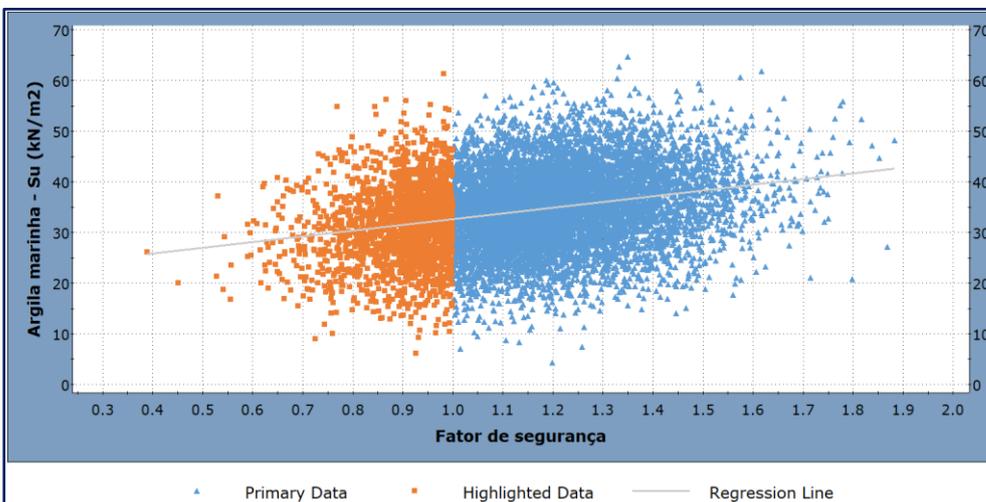


Figura 4.69: Coeficiente de correlação 0,267 entre o FS e a S_u da argila marinha.

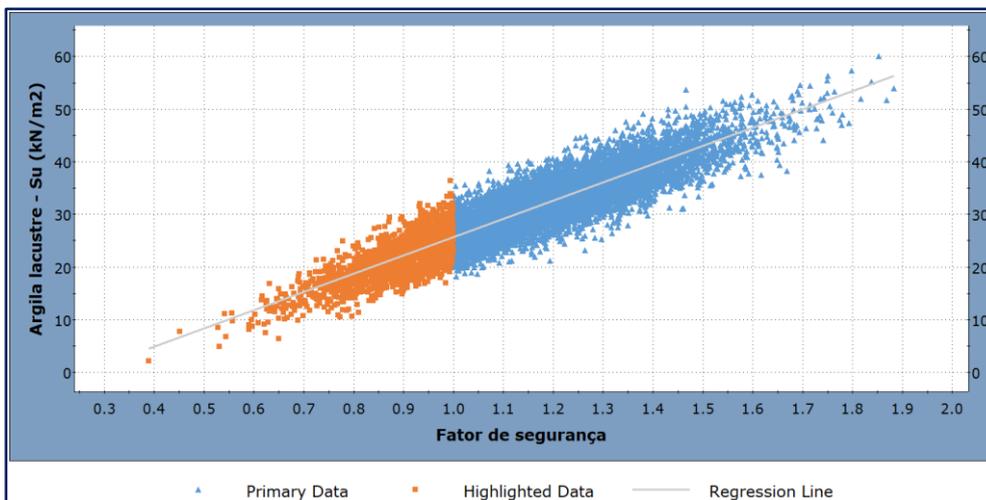


Figura 4.70: Coeficiente de correlação 0,906 entre o FS e a S_u da argila lacustre.

4.4.3.3.

Análise pelo método de Estimativas Pontuais Alternativas

Nesse caso são consideradas como variáveis aleatórias de entrada o ângulo de atrito ϕ da camada de enchimento e as resistências não drenadas S_u das 3 camadas de argila, além dos seus respectivos pesos específicos, sendo necessária a execução de 17 simulações para estimativa da média, μ , e do desvio padrão, σ , da distribuição dos valores do fator de segurança FS .

Os valores do fator de segurança FS com distribuição normal são mostrados na Figura 4.71 com média $\mu = 1,160$, desvio padrão $\sigma = 0,165$, probabilidade de ruptura $P_f = 17,02\%$ e índice de confiabilidade $\beta = 0,90$.

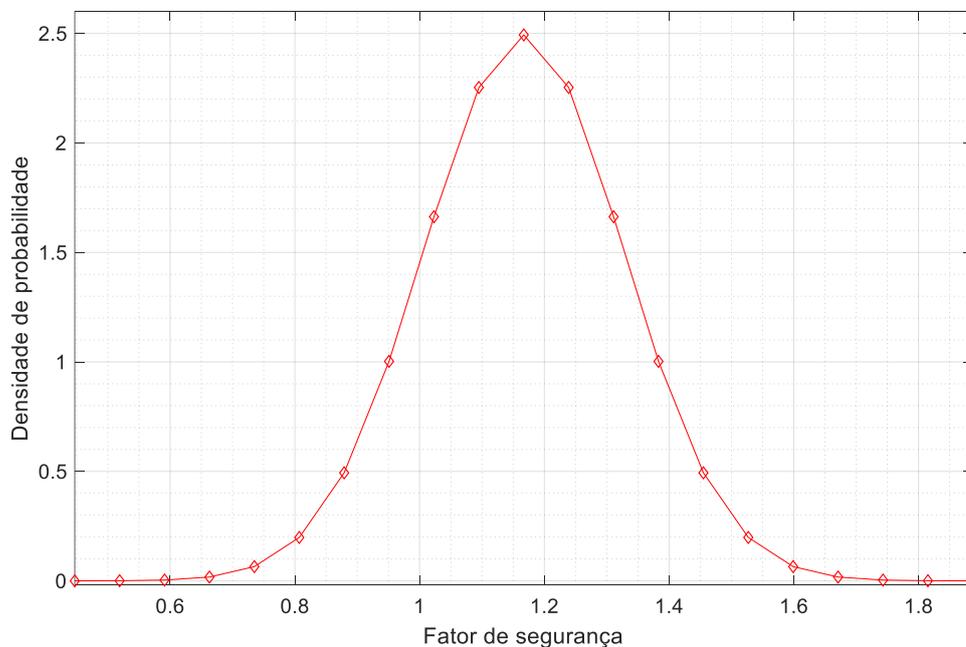


Figura 4.71: Distribuição Normal do FS com $\mu = 1,160$; $\sigma = 0,165$; $P_f = 17,02\%$; $\beta = 0,90$.

A Figura 4.72 apresenta o diagrama Tornado que mostra a sensibilidade do fator de segurança FS com relação aos parâmetros geotécnicos. Pode-se observar que o impacto da variação dos pesos específicos é mínimo e que a maior influência na estabilidade do talude decorre da variação da resistência não drenada na camada de argila lacustre. A Tabela 4.14 apresenta os resultados das análises pelo método das estimativas pontuais alternativas (MEPA).

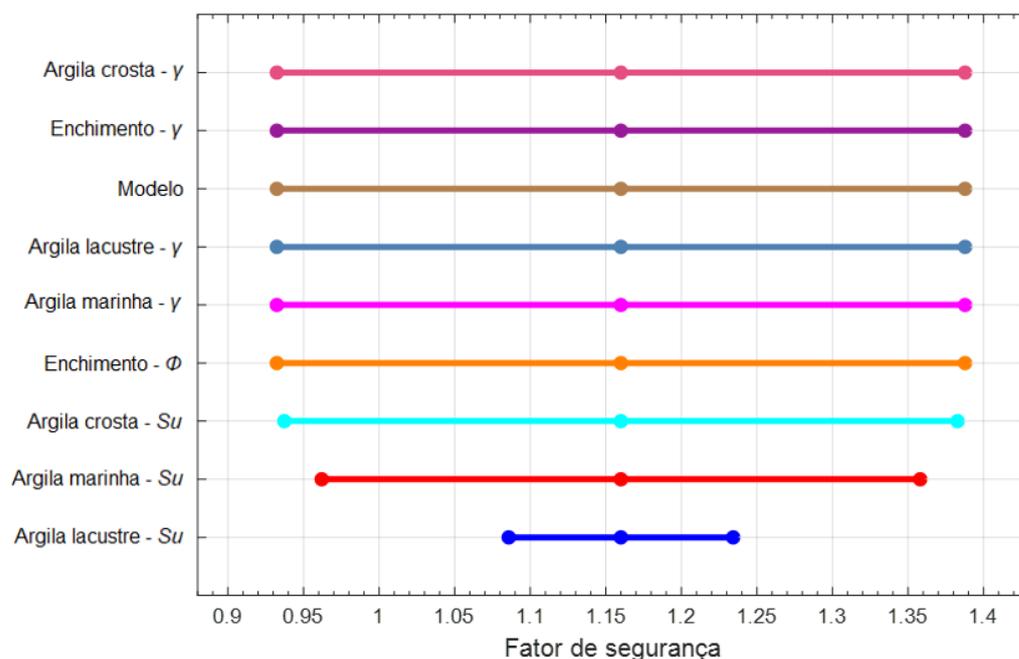


Figura 4.72: Diagrama Tornado probabilístico indicando a sensibilidade da variação das propriedades geotécnicas das camadas de argila.

Tabela 4.14: Resultados numéricos obtidos pelo MEPA, para o dique da Baía James.

Material	Variável	E[FS]	V[FS]	Percentil	Percentil	Percentil
				min	médio	max
				10%	50%	90%
Enchimento	ϕ (°)	1,16	7,04E-05	1,15	1,16	1,171
Enchimento	γ (kN/m ³)	1,16	0	1,16	1,16	1,16
Argila crosta	S_u (kN/m ²)	1,16	0,000727	1,126	1,16	1,195
Argila crosta	γ (kN/m ³)	1,16	0	1,16	1,16	1,16
Argila marinha	S_u (kN/m ²)	1,16	0,002462	1,097	1,16	1,224
Argila marinha	γ (kN/m ³)	1,16	0	1,16	1,16	1,16
Argila lacustre	S_u (kN/m ²)	1,159	0,02845	0,9432	1,159	1,375
Argila lacustre	γ (kN/m ³)	1,16	0	1,16	1,16	1,6

A Figura 4.73 mostra a posição da potencial superfície de ruptura determinada por método probabilístico (MP) e método dos elementos finitos (MEF). A Tabela 4.15 apresenta um resumo dos resultados obtidos.

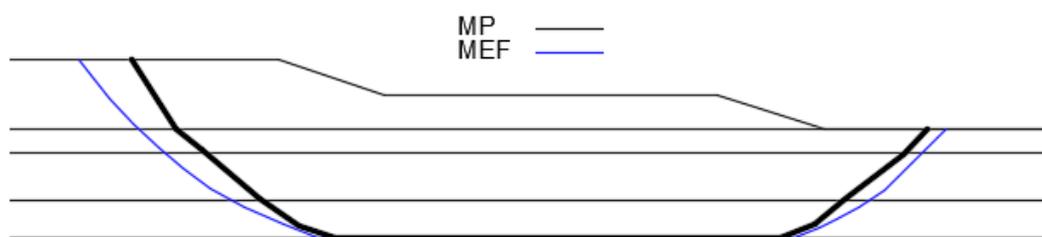


Figura 4.73: Localização da potencial superfície de ruptura não circular no dique da Baía James pelo (MP) e (MEF).

Tabela 4.15: Resumo de resultados obtidos com métodos probabilísticos.

Método	Amostras	FS_p	β	PF (%)	FDP
Monte Carlo	50000	1,161	0,862	19,40	Normal
Hipercubo Latino	10000	1,160	0,85	19,93	Normal
Estimativas Pontuais Alternativas	17	1,160	0,90	17,02	Normal

5 Conclusões e Sugestões

5.1. Conclusões

Partindo dos conceitos de análise de probabilidades apresentados no presente trabalho e considerando a ênfase em problemas de estabilidade de taludes, estão listadas a seguir as principais conclusões:

- Métodos probabilísticos podem ser aplicados à engenharia geotécnica através de procedimentos simples, sem exigir quantidade de dados muito maior do que os necessários para análises determinísticas tendo em vista que a literatura publica várias recomendações sobre o coeficiente de variação de parâmetros geotécnicos, obtidos da compilação de um grande número de ensaios de campo e de laboratório. Com esforço adicional relativamente pequeno a interpretação das análises pode ganhar muito em qualidade, e extensão.
- O método probabilístico aplicado na análise de estabilidade de taludes apresenta várias vantagens sobre a análise determinística, sendo a principal delas possibilitar uma quantificação racional das incertezas presentes nos parâmetros geotécnicos.
- A determinação da probabilidade de ruptura não deve ser encarada como uma substituição do fator de segurança, mas sim como importante suplemento.
- O número de interações, e o tempo de processamento, é um importante fator a ser considerado na escolha do método probabilístico. Neste aspecto, o método das alternativas pontuais é o

mais recomendado, embora requeira o conhecimento prévio da variação do desvio padrão da variável aleatória considerada.

- As análises de confiabilidade fornecem um quadro lógico para escolha dos fatores de segurança apropriados levando em consideração as incertezas e consequências da eventual ruptura.
- A metodologia de análise probabilística utilizada neste trabalho permitiu a identificação da influência relativa de cada variável aleatória (parâmetro geotécnico) na composição da variância do fator de segurança. Isto possibilita uma maior otimização das eventuais soluções ou modificações de projeto, com foco no parâmetro geotécnico mais relevante.

5.2. Sugestões para trabalhos futuros

Como sugestões para futuros trabalhos sugere-se estender as simulações realizadas nesta pesquisa, quantificando os efeitos anisotrópicos na estabilidade de taludes e estendendo a modelagem para situações da análise 3D de taludes de solo.

6

Referências bibliográficas

ANG, A.H.-S.; TANG, W.H. **Probability Concepts in Engineering Planning and Design**. Vol. 1, Basic Principles, John Wiley, New York, 1975.

ABRAMSON, L. W.; LEE, T. S.; SHARMA, S.; BOYCE, G. M. **Slope Stability and Stabilization Methods**. John Wiley & Sons, Inc. New York, USA, 2002.

AL-KARNI; AL-SHAMRANI. Study of the effect of soil anisotropy on slope stability using method of slices. **Computers and Geotechnics**. 26, 83-103, 2000.

ALONSO, E. E. Risk analysis of slopes and its application to slopes in Canadian sensitive clays. **Geotechnique**. Volume 26, Number 3, pp. 453– 472, 1976.

ASAOKA, A.; A-GRIVAS, D. Spatial variability of the undrained strength of clays. **Journal of the Geotechnical Engineering Division, ASCE**. Volume 108, Number 5, pp. 743-756, 1982.

BEACHER, G. B.; CHRISTIAN, J. T. **Reliability and Statistics in Geotechnical Engineering**. John Wiley & Sons, New York. 2003.

BAKER, R.; GARBER, M. Theoretical analysis of the stability of slopes. **Geotechnique**. 28(4): 395-411, 1978.

BAKER, R. Determination of the critical slip surface in slope stability computations. **International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics**, 4, 333-359, 1980.

BARNEICH, J. et al. The Reliability Analysis of a Major Dam Project. **Proc., Uncertainty'96, ASCE**, Reston, Va., 1367–1382, 1996.

BHATTACHARYA, G. et al. Direct search for minimum reliability index of earth slopes. **Computers and Geotechnics** 30 (2003), 455-462, 2003.

BECKER, D. E. Eighteenth Canadian geotechnical colloquium: limit states design for foundations. Part I. An overview of the foundation design process. **Canadian Geotechnical Journal**, 33: 956-983, 1996a.

BECKER, D. E. Eighteenth Canadian geotechnical colloquium: limit states design for foundations. Part II. Development for the national building code of Canada. **Canadian Geotechnical Journal**, 33: 984-1007, 1996b.

BJERRUM, L. Embankment on soft ground. **Proc. Specialty Conf., Performance of Earth and Earth Supported Structures, ASCE**, Vol. 2:1-54, 1972.

BJERRUM, L. Problems of soil mechanics and construction on soft clays. **Proc. 8th ICSMFE**, Moscow, Vol. 3:11-159, 1973.

BELLMAN, R. **Dynamic Programming**. Princeton University press, Princeton, New Jersey, USA, 1995.

BISHOP, A. W. The use of the Slip Circle in the Stability Analysis of Slopes. **Géotechnique**, 5: 7-17, 1955.

BOUTRUP, E.; LOVELL, C. W. Search technique in slope stability analysis. **Engineering Geology**, 16(1): 51-61, 1980.

BREJDA, J. et al. **Distribution and variability of surface soil properties at a regional scale**. Soil Sci. Soc. Am. J. 64, 974-982, 2000.

BRINKGREVE, R. B. J.; SWOLFS, W. M.; ENGIN, E. **Plaxis manuals, 2D version 10**. Delft University of Technology, The Netherlands, 2010.

CHEN, F. H.; SNITBHAN, N.; FANG, H. Y. Stability of slopes in anisotropic, nonhomogeneous soils. **Canadian Geotechnical Journal**; 12:146-52, 1975.

CHEN, W. F. **Limit Analysis and Soil Plasticity**. USA: Elsevier, 1975.

CHOWDHURY, R.; XU, D. W. Geotechnical system reliability of slopes. **Reliability Engineering and System Safety**, 47: 141–151, 1995.

CHRISTIAN, J. T.; LADD, C. C.; BAECHER, G. B. Reliability and probability in stability analysis. **Stability and Performance of Slopes and Embankments-II**, ASCE, Berkeley, 1992.

CHRISTIAN, J. T.; LADD, C. C.; BAECHER, G. B. Reliability applied to slope stability analysis. **Journal of Geotechnical Engineering**, 120(12): 2180- 2207, 1994.

CORNELL, C. A. **Structural safety specifications based on second moment reliability analysis**. Dept. of Civil Engineering, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, Mass, 1969.

DAI, SHU-HO; WANG, MING-O. **Reliability Analysis in Engineering Applications**. Van Nostrand Reinhold, 1992.

DE JOSSELIN DE JONG, G. A. Variational fallacy. **Géotechnique**, Vol. 31, pp. 289-290, 1981.

DEGROOT, D.; BAECHER, G. B. Estimating autocovariance of in-situ soil properties. **Journal of Geotechnical Engineering**, 119(GT1), 147-166, 1993.

DEGROOT, D. J. **Analyzing spatial variability of in situ soil properties**. Uncertainty in the geologic environment, Geotechnical Special Pub. 58, C. D. Shackelford, P. P. Nelson, and M. J. S. Roth, eds., ASCE, New York, 210–238, 1996.

DELL'AVANZI, E. **Confiabilidade e probabilidade em análises de estabilidade de taludes**. Dissertação (Mestrado) - Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, PUC-Rio, 135 p, 1995.

DUNCAN, J. M.; BUCHIGNANI, A. L. Failure of underwater slope in San Francisco Bay. **J. Soil Mech. and Found. Div., ASCE**, 99(9), 687–703, 1973.

DUNCAN, J. M. State-of-the-Art: **Static stability and deformation analysis, Invited lecture, Stability and Performance of slopes and Embankments II**, Geotechnical Special Publication No. 31, ASCE, Vol. 1, 222–266, 1992.

DUNCAN, J. M. State of the art: limit equilibrium & finite-element analysis of slopes. **Journal of Geotechnical Engineering**, Vol 122, No. 7, July, pp. 557-596, 1996.

DUNCAN J. M.; SEED, H. B. Anisotropy and stress reorientation in clay, **J. Soil Mech. Found. Div., ASCE**, 92, SM5; 21–50, 1996a.

DUNCAN J. M.; SEED, H. B. Strength variation along failure surfaces in clay, **J. Soil Mech. Found. Div., ASCE**, 92, sm6; 81–104, 1996b.

DUNCAN, J. M. Factors of safety and reliability in geotechnical engineering. **Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering, ASCE**, 126(4): 307- 316, 2000.

DUNCAN, J. M.; WRIGHT, S. G. **Soil Strength and Slope Stability**. John Wiley & Sons. NY, 2005.

EINSTEIN, H. H.; BAECHER, G. B. Probabilistic and statistical methods in engineering geology. **Rock Mechanics and Rock Engineering** 12, 47-61, 1982.

EL-RAMLY, H. **Probabilistic analyses of landside hazards and risks: bridging theory and practice**, Ph.D. Thesis, University of Alberta, Edmonton, Alberta, Canada, 2001.

EL-RAMLY, H.; MORGENSTERN, N. R.; CRUDEN, D. M. Probabilistic slope stability analysis for practice. **Canadian Geotechnical Journal**, 39:665–683. 2002.

FARIAS, M. M.; NAYLOR, D. J. Safety analysis using finite elements. **Infogeo** **96**, São Paulo, Brasil, 1996.

FELLENIOUS, W. **Calculations of the stability of earth dams**. Transaction of the 2nd Congress on Large Dams, 4, Washington, D.C., 1936.

FLORES, E. A. F. **Análises probabilísticas da estabilidade de taludes considerando a variabilidade espacial do solo**. Dissertação (Mestrado) - Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, PUCRio, 178 p., 2008.

FREDLUND, D. G.; SCOULAR, R. E. G. **Using limit equilibrium in finite element slope stability analysis**. Slope Stability Engineering, Rotterdam, 31-47, 1999.

FREDLUND, D. G.; DAHLMAN, A. E. **Statistical geotechnical properties of glacial lake Edmonton sediments**. Proceedings of the 1st International Conference on Applications of Statistics and Probability to Soil and Structural Engineering, Hong Kong, September 13-16, 1971, 204-228, 1971.

FREDLUND, D. G.; KRAHN, J. Comparison of slope stability methods. **Canadian Geotechnical Journal**, 14(3), pp. 429-439, 1977.

FREDLUND, D. G.; KRAHN, J.; PUFAHL, D. E. Analytical methods for slope stability analysis. **Proceedings of the Fourth International Symposium on Landslide**, State of the Art, pp.229-250. September 16-21, Toronto, Canada, 1984.

FREDLUND, D. G.; KRAHN, J.; PUFAHL, D. E. The relationship between limit equilibrium slope stability methods. **In Proceedings of the 10th International Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering**, Stockholm, 3: 409-416, 1981.

FREDLUND, M. D.; FREDLUND, D. G. **SVSLOPE, theory manual, 2D version 2**. Saskatoon, SK, Canada, 2011.

GAVILANES, H. E. **Análise do Campo de Deslocamentos para Estabilidade de Taludes de Grande altura em Mineração**. Dissertação (Mestrado) – Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, PUCRio, 133 p., 1999.

GIAM, P. S. K. **Improved methods & computational approaches to geotechnical stability analysis**. Ph.D. thesis, Monash University, Melbourne, Australia, 1989.

GITIRANA JR., G. F. N.; FREDLUND, D. G. Transient embankment stability analysis using dynamic programming. **Proceedings of the 56th Canadian Geotechnical Conference**, Winnipeg, MB, Canada. 1: 808-814, 2003a.

GITIRANA JR., G. F. N. **Weather-related geo-hazard assessment model for railway embankment stability**. Ph.D. Thesis. University of Saskatchewan, Saskatoon, SK, Canada, 411p., 2005.

GRECO, V. R. Efficient Monte-Carlo technique for locating critical slip surface. **Journal of Geotechnical Engineering, ASCE**, 122(7): 517-525, 1996.

GRIFFITHS, D. V.; LANE, P. A. Slope stability analysis by finite elements. **Géotechnique**; 49(3):387– 403, 1999.

GRIFFITHS, D.; FENTON, G. Probabilistic slope stability analysis by finite elements. **Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering**. 130(5), 507-518, 2004.

GUEDES, M. C. S. **Considerações sobre análise probabilística da estabilidade de taludes**. Dissertação (Mestrado) - Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, PUCRio, 146 p, 1997.

HAHN, G.; SHAPIRO, S. **Statistical Models in Engineering**. N. York: John Wiley & Sons, 355 p., 1967.

HAMMERSLEY, J. M; HANDSCOMB, D. C. **Monte Carlo Methods**. Methuen, London, 1964.

HASSAN, A.; WOLFF, T. Search algorithm for minimum reliability index of earth slopes. **Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering**, 125(4), 301-308. 1999.

HASSAN, A. M.; WOLFF, T. F. Effect of deterministic and probabilistic models on slope reliability index, **Proceeding of GeoDenver 2000, Slope Stability 2000, Griffiths, D.V. et al (eds.), pub. ASCE**, GSP 101, pp.194-208, 2000.

HARR, M. E. **Mechanics of particulate media : a probabilistic approach**, Reliability. McGraw-Hill, New York, N.Y., 1977.

HARR, M. E. **Reliability-Based Design in Civil Engineering**.1984 Henry M. Shaw Lecture, Dept. of Civil Engineering, North Carolina State University, Raleigh, N.C., 1984.

Harr, M. E. **Reliability-Based Design in Civil Engineering**. McGraw-Hill, New York, 1987.

IRELAND, H. O. Stability analysis of the congress street open cut in Chicago. **Geotechnique**, 4:163-168, 1954.

JANBU, N. (1968). **Slope stability computations**. Institutt for Geotknikk og Fundamentering slaere, Norges Tekniske Høgskole. Soils Mechanics & Foundation Engineering, the Technical University of Norway.

JANBU, N. **Stability analysis of slopes with dimensionless parameters**. Harvard Soil Mechanics Séries, 46, 811, 1954.

Kim, J. Y. & Lee, S. R. An improved search strategy for the critical slip surface using finite element stress fields. **Computers and Geotechnics**, Vol. 21, No. 4, pp. 295-313.

KRAHN, J. Hardy Lecture: The limits of limit equilibrium analysis. **Canadian Geotechnical Journal**, 40: 643-660, 2003.

KULHAWY, F. H.; MAYNE, P. W. **Manual on estimating soil properties for foundation design**, Report No. EL-6800, Electric Power Research Institute, Palo Alto, CA: 306 p., 1990.

LACASSE, S.; NADIM, F. **Uncertainties in Characterizing Soil Properties**, Proceedings, Uncertainty in the Geologic Environment: from Theory to Practice, Geotechnical Special Publication No. 58, ASCE, Vol. 1, pp. 49-75, 1996.

LADD, C. C. Stability evaluation during staged construction. **Journal of Geotechnical Engineering**, Vol. 117, No. 4, 76pp., 1991.

LE, T. M. H.; SANCHEZ M.; GALLIPOLI, D.; WHEELER, S. Probabilistic modelling of autocorrelation characteristics of heterogeneous slopes. **Geomechanics and Geoengineering**, Vol. 10, Issue 2, pp. 95-108, 2014.

Lee, K., White, W. & Ingles, O.G. (1983). **Geotechnical Engineering**. Pitman, London.

LESHCHINSKY, D.; HUANG, C. C. Generalized three-dimensional slope stability analysis. **Journal of Geotechnical Engineering, ASCE**, 118(11): 1748- 1764, 1992b.

LI, K. S.; LUMB, P. Probabilistic design of slopes. **Canadian Geotechnical Journal**. 24:520 - 531, 1987.

Li, K.S. & White, W. (1987a). Rapid evaluation of the critical slip surface in slope stability problems. **International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics**, 11: 449-473.

LI, K. S. Point estimate method for calculating statistical moments. **Journal of Engineering Mechanics**, 118(7): 1506-1511, 1992.

LI, K. S. Point estimate methods in geotechnics. **Computational Mechanics**, Cheung, Lee, & Leung (eds), 827-832, 1991.

LO, K. Y. Stability of slopes in anisotropic soils. **Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division. ASCE**, Vol. 91, No. 3, SM4, pp. 85-106, 1965.

LUMB, P. Application of statistics in soil mechanics. **Soil Mechanics New Horizons, I. K. Lee, ed.**, Elsevier, New York, 44–111, 1974.

LUMB, P. The variability of natural soils. **Canadian Geotechnical Journal**, 3, 74-97, 1966.

MATSUO, M.; ASAOKA, A. **Bayesian calibration of embankment safety under earthquake loading**. *Structural Safety*, 1, 53-65, 1982.

MATTHAI, A. C. E.; RANGANATHAM, B. V. **Stability of free and retained slopes of anisotropic, non-homogeneous soil**, *Sols Soils*, 20: 11–19, 1968.

MCKAY, M. D.; CONOVER, W. J.; BECKMAN, R. J. **A comparison of three methods for selecting values of input variables in the analysis of output from a computer code**. *Technometrics* 21: 239-245, 1979.

MEDINA, V. E. **Estabilidade de taludes de grande altura em minas a céu aberto**. Dissertação (Mestrado) - Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, PUCRio, 105 p., 1995.

MEYERHOF, G. G. Discussion of paper, Stability of slopes in anisotropic soil. **J. Soil Mech. Found. Div., ASCE**, 91, SM6; 132, 1965.

MICHALOWSKI, R. L. Slope stability analysis: a kinematical approach. **Geotechnique**, 45~2, 283–293, 1995.

MILLER, I.; FREUND, J. E. **Probability and Statistics for Engineers**, 3rd ed. Englewood Cliffs, N. J.; Prentice-Hall, 1985.

MONTGOMERY, D. C.; RUNGER, G. C. **Applied Statistics and Probability for Engineers**. Wiley Interscience, 2014.

MORGENSTERN, N. R. Managing risk in geotechnical engineering. **Proc. 10th Pan-American Conf. Soil Mech. Found. Engng**, Guadalajara 4, 02–126, 1995.

MORGENSTERN, N. R.; PRICE, V. E. The analysis of the stability of generalised slip surfaces. **Géotechnique**, 15: 79-93, 1965.

MOSTYN, G. R.; SOO, S. The effect of autocorrelation on the probability of failure of slopes. **In 6th Australia, New Zealand Conference on Geomechanics: Geotechnical Risk**, pages 542–546, 1992.

Muir-Wood, D. (1990). Soil behaviour and critical state soil mechanics. Cambridge University Press, Cambridge, 462pp.

NGUYEN, V. U.; CHOWDHURY, R. N. Probabilistic analysis of mining special piles—Two techniques compared. **Int J Rock Mechanics and Min Science**, 21: 303–312, 1984.

NGUYEN, V. U.; CHOWDHURY, R. N. Risk analysis with correlated variables. **Geotechnique**, 35 :47–59, 1985.

NGUYEN, V. U. Determination of critical slope failure surfaces. **Journal of Geotechnical Engineering, ASCE**, 111(2): 238-250, 1985.

OKA, Y.; WU, T. H. System reliability of slope stability. **J. Geotechnical Engng, ASCE**, 116, 1185-1189, 1990.

PHAM, H. T. V.; FREDLUND, D. G.; GITIRANA Jr., G. F. N. Slope stability analysis using dynamic programming combined with finite element stress analysis. **In International Conference on Management of the Land & Water Resources - MLWR**. Hanoi, Vietnam. 1: 107-114, 2001.

PHOON, K. -K.; KULHAWY, F. H. Characterization of geotechnical variability. **Canadian Geotechnical Journal**, 36: 612-624, 1999a.

PHOON, K. -K.; KULHAWY, F. H. Evaluation of geotechnical property variability. **Canadian Geotechnical Journal**, 36: 625-639, 1999b.

RESENDIZ, D. Accuracy of equilibrium slope stability analysis. **Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division, ASCE**, 967-970, 1974.

REVILLA, J.; CASTILLO, E. The calculus of variations applied to stability of slopes. **In Proceedings of the Earth and Earth-Supported Structure, ASCE**, New York, 1: 817-836, 1977.

Roca, M. E. **Aplicação do método dos elementos finitos na análise da estabilidade de taludes em solo**. Dissertação (Mestrado) – Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, PUCRio, 131 p. 1999.

ROSENBLUETH, E. Point estimates for probability moments, **Proc. Nat. Acad. Scie.**, vol. 72, no. 10, pp 3812-3814, 1975.

ROSENBLUETH, E. **Two point estimates in probabilities**, Appl. Math Modelling, vol. 5, pp 324-334, 1981.

RUBINSTEIN, B. Y. **Simulation and the Monte Carlo Method**. New York: Wiley & Sons, 1981.

SANTAMARINA, J. C.; ALTSCHAEFFL, A. G.; CHAMEAU, J. L. **Reliability of slopes, Transportation Research Board**, Paper #920569, Washington D. C., 1992.

SEED, R. B.; HARDER, L. F. SPT-Based Analysis of Cyclic Pore Pressure Generation and Undrained Residual Strength. **In: Duncan, J.M., Ed., Proceedings of the H.B. Seed Memorial Symposium, Vol. 2**, BiTech Publishers, Richmond, 351-376, 1990.

SKEMPTON, A. W. Slope stability of cuttings in Brown London clay. **Proc. 9th ICSMFE**, Tokyo, Vol. 3: 261-270, 1977.

SKEMPTON, A. W. Residual strength of clays in landslides, folded strata and the laboratory. **Géotechnique**, 35(1): 3-18, 1985.

SPENCER, E. A method for analysis of the stability of embankments assuming parallel interslice forces. **Géotechnique**, 17(1), 11-26, 1967.

VANMARCKE, E. H. Probabilistic modeling of soil profiles. **Journal of the Geotechnical Engineering Division, ASCE**, Vol 103, No. GT11, November 1977, pp. 1227-1246, 1977a.

VANMARCKE, E. H. Reliability of Earth Slopes. **Journal of the Geotechnical Engineering Division, ASCE**, Vol 103, No. GT11, November 1977, pp. 1247-1265, 1977b.

WANG, Y.; ZIJUN, C.; Au, S.-K. Practical reliability analysis of slope stability by advanced Monte Carlo simulations in a spreadsheet. **Can. Geotech. J.** 48: 162–172, 2011.

WHITMAN, R. V. Evaluating calculated risk in geotechnical engineering. **Journal of Geotechnical Engineering. New York: ASCE**, v.110, n.2, p.144-188. Feb. 1984. 17., Terzaghi Lecture, 1984.

WHITMAN, R. V. Organizing and evaluating uncertainty in geotechnical engineering, **Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering, ASCE**, Vol. 126, No.7, pp. 583-593, 2000.

ZIENKIEWICZ, O. C.; HUMPHESON, C.; LEWIS, R. W. Associated and non-associated viscoplasticity and plasticity in soil mechanics. **Géotechnique**, 25(4): 671-689, 1975.