

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA  
DO RIO DE JANEIRO



**Marcelo Coelho Martins**

**Desenvolvimento de um Aferidor de IMU  
(Inertial Measurement Unit)**

**Projeto de Graduação**

Projeto de Graduação apresentado ao Departamento de Engenharia  
Mecânica da PUC-Rio

Orientador: Mauro Speranza Neto

Rio de Janeiro

Dezembro de 2017

## **Agradecimentos**

Agradeço ao meu orientador, por se mostrar sempre presente e solícito.

Agradeço em especial à PUC-Rio e aos membros do corpo docente do Departamento de Engenharia Mecânica (DEM) por terem me fornecido os meios para o meu pleno desenvolvimento intelectual, que permitiu a produção deste documento.

## Resumo

### Desenvolvimento de um aferidor de IMU

Neste documento, consta o desenvolvimento de metodologia para aferição de dados obtidos através de uma Unidade de Medidas Inerciais (do inglês, *Inertial Measurement Unit*, IMU) acoplada a uma bicicleta. Fato a ser posteriormente tratado em maior detalhe, a IMU possui alta sensibilidade a fatores externos nos regimes de teste, estando, portanto, suscetível a incertezas de alta variância; resultando assim em leituras (sinais) contaminados por ruídos impulsivos. A metodologia implementada consiste em estabelecimento de um modelo de referência gerado por conhecimento a priori das condições de experimentação para estabelecimento de causalidade entre leituras distintas, análise estatística das formas de onda estimadas e recuperação dos sinais desejados a partir dos dados corrompidos observados. Em conclusão, propõe-se, após detalhamento da metodologia matemática de aferição, a construção de um aparato para realização de testes em ambiente controlado, onde a implementação do software desenvolvido (tendo este o sido em ambiente MATLAB) se fará mais do que necessária à análise de novos dados obtidos.

### Palavras-chave

IMU; Processamento Adaptativo; Supressão de Ruído; MATLAB.

## **Abstract**

### **Development of an IMU's Data Validation Method**

This document contains the development of a methodology for validation of data obtained through an Inertial Measurement Unit's (IMU) readings when coupled to an ordinary bicycle. The IMU's readings may have high sensibility to the tests' regime and/or experimentation conditions (to be better explained later, in detail), especially when it comes to external factors, so making them susceptible to high variance uncertainties; thus resulting in readings (signals) corrupted by impulsive noise. The implemented methodology consists in establishment of a reference model generated by prior knowledge of the experiments' conditions for then establishing causality between distinct readings, statistical analysis of estimated waveforms and recovery of desired signals from the corrupted, observed data. In conclusion there proposes, after detailing the mathematical methodology for data validation, the construction of an apparatus for testing in a controlled environment, where the further implementation of the designed software (programmed in MATLAB environment) will be strictly needed for the analysis of newly obtained data.

## **Keywords**

IMU; Adaptive Processing; Noise Reduction; MATLAB.

## **Sumário**

<b>1. Introdução</b>	<b>10</b>
<b>2. Formulação e Equacionamento</b>	<b>11</b>
<b>2.1. Formulação Dinâmica Genérica</b>	<b>11</b>
2.1.1. Mudança de Coordenadas	11
2.1.2. Acelerações Lineares	14
2.1.3. Velocidades Angulares	15
2.1.4. Fator Aleatório: Ruído de Medição	16
<b>2.2. Formulação Específica: Movimento Plano Circular</b>	<b>17</b>
<b>2.3. Formulação para Testes de Validação</b>	<b>18</b>
2.3.1. Testes em Linha Reta	19
2.3.2. Testes em Subida e/ou Descida de Rampas	19
2.3.3. Testes em Movimento Circular (Skid Pad)	21
<b>3. Tratamento dos Dados</b>	<b>22</b>
<b>3.1. Teste 1: Análise em Linha Reta</b>	<b>33</b>
<b>3.2. Teste 14: Análise em Linha Reta seguida de Aclive</b>	<b>47</b>
<b>3.3. Teste 4: Análise em Movimento Circular (Skid Pad)</b>	<b>58</b>
<b>4. Conclusão</b>	<b>72</b>

## Lista de figuras

2.1.1.1: Posicionamento da IMU (esfera) em relação ao sistema de eixos $uvw$ .	11
2.1.1.2: Ângulos de revolução $\alpha, \beta$ e $\gamma$ em relação aos eixos $x, y$ e $z$ , respectivamente, representados em sentido anti-horário.	12
2.1.1.3: Visualização plana (plano $xy$ ) da angulação de revolução $\gamma$ em torno do eixo $z$ .	13
2.1.3.1: Ângulos de <i>roll</i> ( $\phi$ ), <i>pitch</i> ( $\psi$ ) e <i>yaw</i> ( $\theta$ ) e seus sentidos de rotação	15
2.3.1: Diagrama de posição da bicicleta num sistema de eixos $xyz$ .	18
2.3.2.1: Função degrau de amplitude $\theta = \pi/6$ rad, $\tau = 10$ s (azul) e aproximação por função sigmoide $\psi_{aprox}(t) = \frac{\theta}{1+e^{-\beta(t-\tau)}}$ , com $\beta = 10$ (laranja).	20
2.3.2.2: Comportamento esperado à medição de velocidade angular de pitch para os parâmetros simulados.	20
3.1: Densidade de probabilidade estimada, $\hat{p}_T(\tau)$ , para a variável aleatória $T$ , período de amostragem.	22
3.2: Função de probabilidade acumulada, $\hat{P}_T(\tau) = \int_{-\infty}^{\tau} \hat{p}_T(s) \cdot ds \approx \Pr\{T \leq \tau\}$ , para a variável aleatória $T$ .	23
3.3: Velocidades angulares medidas nas rodas dianteira e traseira da bicicleta no primeiro teste realizado.	24
3.4: Velocidades angulares medidas nas rodas dianteira e traseira da bicicleta no primeiro teste realizado, após filtragem por mediana de ordem 50.	25
3.5: Captura da tendência do processo após filtragem por médias móveis bilateral de ordem 21, primeiro teste.	26
3.6: Comparação entre os sinais originais e filtrados dos 4 primeiros testes, roda dianteira.	27
3.7: Comparação entre os sinais originais e filtrados dos 4 primeiros testes, roda traseira.	27
3.8: Comparação entre sinais obtidos pós-filtragem no primeiro teste.	28
3.9: Erros entre medições das rodas dianteira e traseira, pós-filtragem.	28
3.10: Distâncias percorridas estimadas para os 4 primeiros testes.	29
3.11: Comparação entre as distâncias estimadas pelos dados de ambas as rodas	30
3.12: Curvas de aceleração linear obtidas nos 4 primeiros testes.	32

## Lista de figuras

3.1.1: Aceleração linear na direção $x$ , teste 1.	33
3.1.2: Aceleração linear na direção $y$ , teste 1.	33
3.1.3: Aceleração linear na direção $z$ , teste 1.	34
3.1.4: Velocidade angular na direção $x$ ( <i>roll</i> ), teste 1.	34
3.1.5: Velocidade angular na direção $y$ ( <i>pitch</i> ), teste 1.	35
3.1.6: Velocidade angular na direção $z$ ( <i>yaw</i> ), teste 1.	35
3.1.7: Velocidades angulares das rodas dianteira e traseira, dados originais e pós-filtragem, teste 1.	36
3.1.8: Ação dos freios dianteiro e traseiro, teste 1.	36
3.1.9: Estimativas das respostas impulsivas para grandezas modeladas como nulas.	38
3.1.10: Histogramas das amostras das respostas impulsivas estimadas.	39
3.1.11: Funções de autocorrelação estimadas para cada um dos processos, com limites de 5% de significância.	40
3.1.12: Medição de aceleração linear na direção $x$ subtraída da tendência estimada, teste 1.	42
3.1.13: Diagrama de blocos do circuito de detecção e supressão de ruído impulsivo.	43
3.1.14: Sinal recuperado pelo sistema proposto, comparado à tendência estimada.	45
3.1.15: Ruído de excitação do modelo AR(2), contaminado por impulsos.	45
3.2.1: Aceleração linear na direção $x$ , teste 14.	47
3.2.2: Aceleração linear na direção $y$ , teste 14.	47
3.2.3: Aceleração linear na direção $z$ , teste 14.	48
3.2.4: Velocidade angular na direção $x$ ( <i>roll</i> ), teste 14.	48
3.2.5: Velocidade angular na direção $y$ ( <i>pitch</i> ), teste 14.	49
3.2.6: Velocidade angular na direção $z$ ( <i>yaw</i> ), teste 14.	49
3.2.7: Velocidades angulares das rodas dianteira e traseira, dados originais e pós-filtragem, teste 14.	50
3.2.8: Ação dos freios dianteiro e traseiro, teste 14.	50
3.2.9: Sinal estimado para aceleração linear, teste 14.	51
3.2.10: Sinal estimado para velocidade linear, teste 14.	52

## Lista de figuras

3.2.11: Sinal recuperado para a aceleração linear no eixo $z$ pelo circuito de detecção e supressão de ruído impulsivo.	54
3.2.12: Sinal obtido ao subtrair a tendência estimada da medição original da IMU.	55
3.2.13: Sinal de excitação do processo autoregressivo, contaminado por impulsos	56
3.2.14: Sinal recuperado pelo sistema proposto, comparado à tendência estimada.	56
3.3.1: Aceleração linear na direção $x$ , teste 4.	58
3.3.2: Aceleração linear na direção $y$ , teste 4.	58
3.3.3: Aceleração linear na direção $z$ , teste 4.	59
3.3.4: Velocidade angular na direção $x$ , teste 4.	59
3.3.5: Velocidade angular na direção $y$ , teste 4.	60
3.3.6: Velocidade angular na direção $z$ , teste 4.	60
3.3.7: Velocidades angulares das rodas dianteira e traseira, dados originais e pós-filtragem, teste 4.	61
3.3.8: Ação dos freios dianteiro e traseiro, teste 4.	61
3.3.9: Sinal estimado para velocidade linear, teste 14.	62
3.3.10: Sinal estimado para aceleração linear, teste 14.	62
3.3.11: Sinal obtido ao subtrair a tendência estimada da medição original da IMU.	63
3.3.12: Sinal de excitação do processo autoregressivo, contaminado por impulsos.	64
3.3.13: Sinal recuperado pelo sistema proposto, comparado à tendência estimada.	64
3.3.14: Sinal obtido ao subtrair a tendência estimada da medição original da IMU, aceleração lateral.	66
3.3.15: Sinal de excitação do processo autoregressivo, contaminado por impulsos, aceleração lateral.	66
3.3.16: Sinal recuperado pelo sistema proposto, aceleração lateral.	67
3.3.17: Sinal recuperado pelo sistema proposto, comparado à tendência estimada por mínimos quadrados, aceleração lateral.	68

## Lista de figuras

3.3.18: Tendência estimada à velocidade angular de <i>yaw</i> .	69
3.3.19: Sinal obtido ao subtrair a tendência estimada da medição original da IMU, velocidade angular na direção <i>z</i> .	70
3.3.20: Sinal de excitação do processo autoregressivo, contaminado por impulsos, velocidade angular na direção <i>z</i> .	70
3.3.21: Sinal recuperado pelo sistema proposto, comparado à tendência estimada por mínimos quadrados, velocidade angular na direção <i>z</i> .	71

# 1

## Introdução

Veículos, automotivos ou não, fazem parte do dia-a-dia da humanidade, de forma que todo tipo de interação social, econômica e política da sociedade atual é diretamente dependente da utilização de meios de transporte. A facilidade e eficiência na movimentação utilizando-se de tais tecnologias é tamanha que se faz inconcebível um mundo no qual seja necessário abrir mão destas. Não à toa, os índices econômicos mundiais e quaisquer precificações de produtos/serviços sofrem severa influência da variação da cotação dos preços de barris de petróleo e/ou outros combustíveis fósseis, uma vez que praticamente todo e qualquer processo de logística se faz dependente destas formas de energia. Tal dependência é, inclusive, a engrenagem que movimenta um processo de constante inovação tanto na indústria quanto na academia, com o intuito de desenvolver e projetar fontes renováveis de energia, veículos mais eficientes e modernos, entre tantas outras linhas de pesquisa.

Conjuntamente com a necessidade por inovação, a aferição de resultados experimentais se faz imprescindível para a validação das conclusões obtidas sempre que um novo procedimento é adotado ou descobertas são feitas. Além disso, para garantir a devida manutenção e avaliação consistente dos veículos já existentes, se faz necessário que suas características dinâmicas sejam propriamente medidas. Atualmente, as IMU's (*inertial measurement units*, ou medidas de unidades inerciais, em português) são constantemente utilizadas para testes em laboratório e muitas vezes são encontradas em veículos de maior “finesse”, como aviões. Ainda assim, as mesmas são instrumentos de medição sujeitos a incertezas de altíssima variância a depender das condições de experimentação. Desta forma, deve-se garantir, para obtenção de resultados consistentes, que a IMU esteja precisamente calibrada; fator esse que induz a necessidade de um aparato que seja capaz de efetuar aferição das medidas obtidas pela IMU. Em paralelo, se faz necessário um tratamento próprio e altamente refinado dos dados obtidos, de forma a eliminar ao máximo o efeito de imprecisões experimentais características do uso do aparelho.

## 2

### Formulação e Equacionamento

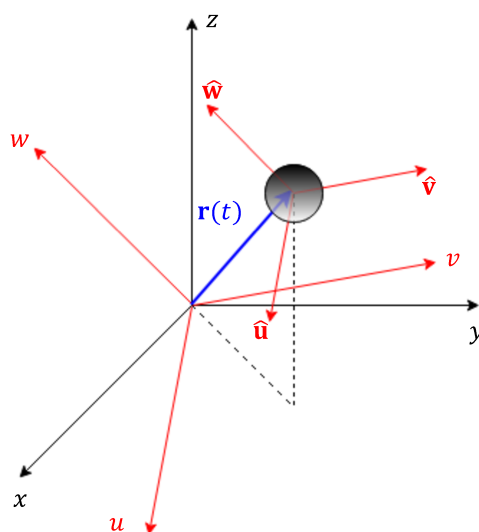
Visando avaliação coesa e robusta dos resultados a serem posteriormente apresentados, se fez necessária a formulação de um modelo da movimentação da Unidade de Medidas Inerciais a tempo contínuo; estabelecendo relações entre as posições, velocidades e acelerações (angulares e lineares) do mesmo em distintos sistemas de coordenadas. Nesta seção, composta por três subseções adjacentes, são apresentados os modelos e equações utilizados numa formulação genérica do problema (dado um posicionamento qualquer no espaço, bem como variáveis de estado com funções a definir); na configuração exigida aos testes do aferidor; e na configuração utilizada nos testes de validação prévios à construção do aferidor, respectivamente.

### 2.1

#### Formulação Dinâmica Genérica

##### 2.1.1. Mudança de Coordenadas

Conforme previamente mencionado, nesta subseção constam as formulações para as equações de interesse dada uma Unidade de Medidas Inerciais posicionada em um ponto genérico (a definir) no sistema de eixos  $xyz$ , a ser, a partir deste ponto, referido como  $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ ,  $t$  denotando o instante de tempo. A IMU, por sua vez, possui um sistema de eixos principais próprio, em relação aos quais são efetuadas as medidas de grandezas inerciais: este será denotado por  $uvw$  e seus vetores diretores ( $\hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{v}}, \hat{\mathbf{w}}$ ) serão plenamente definidos com base nas angulações em relação ao sistema de eixos original, conforme **Fig. 2.1.1.1**:



**Figura 2.1.1.1:** Posicionamento da IMU (esfera) em relação aos sistemas de eixos  $xyz$  e  $uvw$ .

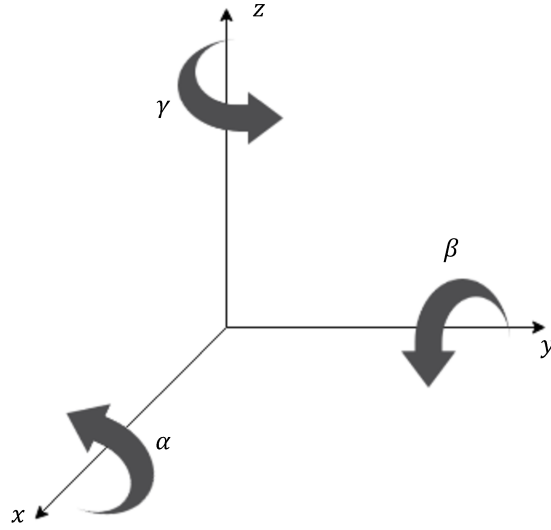
Sejam, portanto, as bases de Hamel [1] canônica,  $\epsilon = \{\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}, \hat{\mathbf{k}}\}$ , e rotacionada,  $\eta = \{\hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{v}}, \hat{\mathbf{w}}\}$ , de  $\mathbb{R}^3$ . A posição  $\mathbf{r}(t)$  pode ser descrita em termos de combinações lineares<sup>||</sup> dos elementos de cada base, conforme **Eq. 2.1.1.1**:

$$\mathbf{r}(t) = x(t) \cdot \hat{\mathbf{i}} + y(t) \cdot \hat{\mathbf{j}} + z(t) \cdot \hat{\mathbf{k}} = u(t) \cdot \hat{\mathbf{u}} + v(t) \cdot \hat{\mathbf{v}} + w(t) \cdot \hat{\mathbf{w}} \quad (2.1.1.1)$$

Logo, denota-se por  $\mathbf{r}_\eta(t)$  a expressão da posição da IMU segundo a base de vetores  $\eta$ , ou seja:

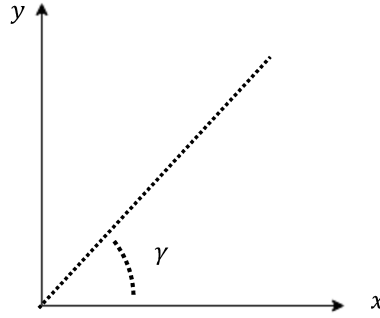
$$\mathbf{r}_\eta(t) \triangleq (u(t), v(t), z(t)) \quad (2.1.1.2)$$

Vide o fato que o sistema de eixos  $uvw$  é uma mera rotação arbitrária do sistema de eixos original  $xyz$ , a relação entre as coordenadas, dadas as distintas bases, pode ser dada por meio de três respectivas transformações lineares <sup>||</sup> de rotação aplicadas ao vetor original, a ser denotado por  $\mathbf{r}_\epsilon(t)$  deste ponto em diante. Abaixo, a **Fig. 2.1.1.2** expressa os sentidos (anti-horário, positivo) de revolução em relação a cada eixo original, que serão utilizados na definição das transformações lineares envolvidas:



**Figura 2.1.1.2:** Ângulos de revolução  $\alpha, \beta$  e  $\gamma$  em relação aos eixos  $x, y$  e  $z$ , respectivamente, representados em sentido anti-horário.

É importante ressaltar o fato de que os valores adotados para tais ângulos foram variáveis de acordo com os experimentos realizados, porém permanecendo fixos ao longo de cada sessão de experimentação, com o intuito de averiguar a respeito da consistência das medidas realizadas dada uma orientação atribuída aos eixos da IMU. A **Fig 2.1.1.3** abaixo induz uma melhor visualização das medidas angulares ao representar uma destas no plano  $xy$ :



**Figura 2.1.1.3:** Visualização plana (plano  $xy$ ) da angulação de revolução  $\gamma$  em torno do eixo  $z$

Definindo, portanto, as matrizes de transformação linear que retornam as coordenadas da posição nos sistemas de eixos rotacionados dos ângulos  $\alpha, \beta$  e  $\gamma$ , respectivamente:

$$\underline{\mathbf{R}}_x(\alpha) \triangleq \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ 0 & -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix} \quad (2.1.1.3)$$

$$\underline{\mathbf{R}}_y(\beta) \triangleq \begin{bmatrix} \cos(\beta) & 0 & -\sin(\beta) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\beta) & 0 & \cos(\beta) \end{bmatrix} \quad (2.1.1.4)$$

$$\underline{\mathbf{R}}_z(\gamma) \triangleq \begin{bmatrix} \cos(\gamma) & \sin(\gamma) & 0 \\ -\sin(\gamma) & \cos(\gamma) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.1.1.5)$$

Se faz notável o fato de que as matrizes das transformações acima definidas efetuam a operação inversa em relação à rotação da posição nos respectivos ângulos. Uma vez que o interesse em questão é a rotação dos eixos e não da posição em si, se fez necessária uma pequena modificação (inversão, no caso) das matrizes de transformação de rotação tipicamente mencionadas na literatura.

Ao final, a matriz correspondente à transformação que integra as três revoluções de eixos é dada por:

$$\underline{\mathbf{P}} \triangleq \underline{\mathbf{R}}_x(\alpha) \cdot \underline{\mathbf{R}}_y(\beta) \cdot \underline{\mathbf{R}}_z(\gamma) \quad (2.1.1.6)$$

A matriz  $\underline{\mathbf{P}}$  denotada na **Eq. 2.1.1.6** é denominada matriz de mudança de base de  $\epsilon$  para  $\eta$  e, por relacionar duas bases ortonormais [1], possui a propriedade de ser uma matriz ortogonal [1]. Sua relação com os vetores  $\hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{v}}, \hat{\mathbf{w}}$  é dada, portanto, segundo a subsequente **Eq. 2.1.1.7**:

$$\underline{\mathbf{P}} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{u}}^T \\ \hat{\mathbf{v}}^T \\ \hat{\mathbf{w}}^T \end{bmatrix} \quad (2.1.1.7)$$

Com auxílio da equação prévia, é possível definir os vetores da base  $\eta$  em função dos ângulos desejados aos eixos principais da IMU. Sendo assim, se faz possível estabelecer a seguinte relação entre os sistemas de coordenadas:

$$\mathbf{r}_\eta(t) = \underline{\mathbf{P}} \cdot \mathbf{r}_\epsilon(t) \quad (2.1.1.8)$$

Uma vez relacionados os distintos sistemas de coordenadas, é possível derivar expressões para as grandezas de interesse à aferição da IMU: acelerações lineares e velocidades angulares no sistema de eixos  $uvw$ .

### 2.1.2. Acelerações Lineares

A definição das acelerações lineares na base  $\eta$  é um tanto quanto simples, devido à relação linear existente entre as coordenadas em ambos os sistemas. Para tal, deve-se somente calcular a derivada segunda da posição em relação ao tempo, valendo-se da **Eq. 2.1.1.8**:

$$\frac{d^2 \mathbf{r}_\eta}{dt^2}(t) = \underline{\mathbf{P}} \cdot \frac{d^2 \mathbf{r}_\epsilon}{dt^2}(t) \quad (2.1.2.1)$$

Visando uma notação mais compacta, as operações de derivação serão denotadas deste ponto em diante conforme abaixo:

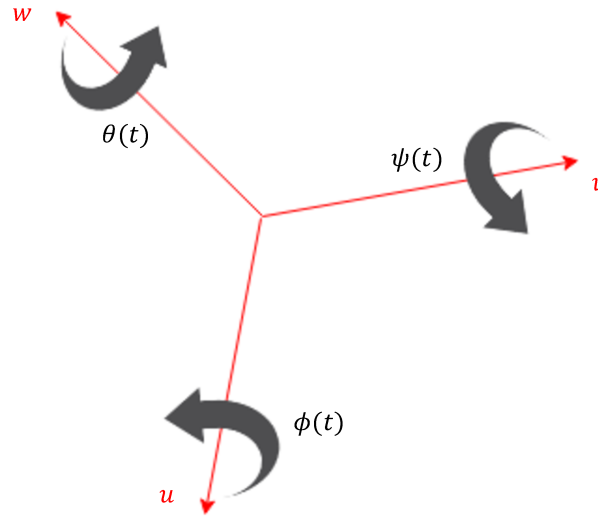
$$\frac{d^2 \mathbf{r}_\eta}{dt^2}(t) \triangleq \ddot{\mathbf{r}}_\eta(t) \quad (2.1.2.2)$$

Valendo-se, portanto, da notação adotada, tem-se, em análogo à **Eq. 2.1.2.1**:

$$\ddot{\mathbf{r}}_\eta(t) = \underline{\mathbf{P}} \cdot \ddot{\mathbf{r}}_\epsilon(t) \quad (2.1.2.3)$$

### 2.1.3. Velocidades Angulares

Em contrapartida com a facilidade de cálculo das acelerações lineares previamente apresentado, a definição das velocidades angulares não se dá de maneira tão trivial a ser solucionada com apenas uma simples derivação, exigindo assim uma análise mais detalhada. Primeiramente, se faz necessário estabelecer (nomear) as variáveis de interesse, que correspondem aos ângulos (e suas respectivas velocidades angulares) de *roll*, *pitch* e *yaw* em relação ao sistema de eixos  $uvw$ . Abaixo, a **Fig. 2.1.3.1** permite uma clara visualização das grandezas de interesse e seus sentidos:



**Figura 2.1.3.1:** Ângulos de *roll* ( $\phi$ ), *pitch* ( $\psi$ ) e *yaw* ( $\theta$ ) e seus sentidos de rotação

Seja, portanto, a grandeza pseudo-vetorial  $\xi$ , um vetor contendo os valores das três velocidades angulares em relação a cada um dos eixos:

$$\xi(t) \triangleq \dot{\phi}(t) \cdot \hat{\mathbf{u}} + \dot{\psi}(t) \cdot \hat{\mathbf{v}} + \dot{\theta}(t) \cdot \hat{\mathbf{w}} \quad (2.1.3.1)$$

Valendo-se da notação adotada para mudanças de coordenadas na **seção 2.1.1**, é possível estabelecer a seguinte relação:

$$\xi_{\eta}(t) \triangleq (\dot{\phi}(t), \dot{\psi}(t), \dot{\theta}(t)) \quad (2.1.3.2)$$

Segundo vasto e já amplamente difundido conhecimento literário, a relação entre  $\xi_{\eta}(t)$ ,  $\mathbf{r}_{\eta}(t)$  e  $\dot{\mathbf{r}}_{\eta}(t)$  segue conforme a posterior **Eq. 2.1.3.2**:

$$\xi_{\eta}(t) = \frac{\mathbf{r}_{\eta}(t) \times \dot{\mathbf{r}}_{\eta}(t)}{\|\mathbf{r}_{\eta}(t)\|^2} \quad (2.1.3.3)$$

Onde “ $\times$ ” denota a operação de produto vetorial em  $\mathbb{R}^3$  e  $\|\cdot\|$  denota a norma Euclidiana no mesmo espaço vetorial. Em termos, portanto, da posição e velocidade na base canônica, tem-se:

$$\xi_\eta(t) = \frac{(\underline{\mathbf{P}} \cdot \mathbf{r}_\epsilon(t)) \times (\underline{\mathbf{P}} \cdot \dot{\mathbf{r}}_\epsilon(t))}{\|\underline{\mathbf{P}} \cdot \mathbf{r}_\epsilon(t)\|^2} \quad (2.1.3.4)$$

Por meio das equações obtidas se faz possível a obtenção das mais distintas grandezas/medidas inerciais, sejam essa realizada por meio de integrações, derivações e/ou estabelecimento de relações (lineares ou não) funcionais entre característica já obtidas e as a se obter. A depender, portanto, das necessidades experimentais ou analíticas, breves equacionamentos podem ser apresentados em posteriores sessões.

#### 2.1.4. Fator Aleatório: Ruído de Medição

Visando providenciar um tratamento estatístico dos dados obtidos, o modelo utilizado deve consistir não de sinais tipicamente determinísticos, porém de observações (funções amostra [2]) de processos estocásticos. Seja, portanto,  $\mathbf{s}(t)$  um dos sinais vetoriais (determinísticos) de interesse previamente mencionados na modelagem das últimas subseções. O processo estocástico respectivo à observação de  $\mathbf{s}(t)$  corrompida por ruído é o sinal  $\mathbf{s}^*(t)$ :

$$\mathbf{s}^*(t) = \mathbf{s}(t) + \mathbf{n}(t) \quad (2.1.4.1)$$

Onde  $\mathbf{n}(t)$  é um processo estocástico cujas entradas (ao fixar o instante  $t$ ) são vetores aleatórios de  $\mathbb{R}^3$ . Em geral, ruídos de medição são modelados como processos estocásticos estacionários no sentido amplo, porém este não será o modelo adotado neste documento. As razões para tal são simples: experimentos de medição de medidas inerciais são caracterizados por sua sensibilidade ao ambiente no qual está imerso o veículo de interesse (terreno, fluxo de ar, entre outros), bem como com as velocidades do veículo. Sendo assim, mudanças bruscas no regime de movimento geram maiores incertezas de medição, de forma que se pode estabelecer uma correlação positiva entre as altas frequências/velocidades de movimento e a amplitude do ruído de medição. Tais considerações podem ser verificadas com os resultados experimentais apresentados a posteriori neste mesmo relatório.

Abaixo, seguem as especificações do modelo de ruído:

- I. Distintas entradas do vetor serão consideradas estatisticamente independentes entre si, de forma que a função de autocorrelação [2] do ruído retorna sempre uma matriz diagonal para todo par de instantes  $(t, \tau)$ , ou seja:

$$K: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R}) \quad (2.1.4.2)$$

$$\underline{\mathbf{K}}(t, \tau) = \mathbb{E}[\mathbf{n}(t) \cdot \mathbf{n}(\tau)^T] \quad (2.1.4.3)$$

$$\text{Im}(\underline{\mathbf{K}}) = \{\underline{\mathbf{K}} \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R}) \mid K_{ij} = 0, \ i \neq j\} \quad (2.1.4.4)$$

Na prática, a terceira condição é imposta com base na hipótese de que ruídos observados em distintas medidas inerciais são processos estocásticos estatisticamente independentes.

- II. A função média do ruído é sempre nula, ou seja,

$$\mathbb{E}[\mathbf{n}(t)] = \mathbf{0} \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad (2.1.4.5)$$

## 2.2

### Formulação Específica: Movimento Plano Circular

Levando em conta a estrutura básica do aparato físico de aferição (cuja proposta de construção se dá na conclusão deste documento), envolvendo um motor e uma base rotativa, espera-se em condições padrão e ideais (matematicamente falando) que o movimento da IMU seja circular no Plano  $xy$ , tendo como entrada do sistema (aqui modelado como linear e invariante no tempo) apenas a velocidade instantânea de rotação do motor,  $\dot{\chi}(t)$ , e, consequentemente, do eixo acoplado. Vale, porém, ressaltar que, por se encontrar posicionado de maneira genérica em termos de seus eixos próprios de referência, a IMU “enxerga” o movimento de maneira distinta, existindo componentes não-triviais de rotação em cada um de seus eixos principais, bem como deslocamento, velocidades e acelerações lineares.

Portanto, para o caso particular da formulação específica, tem-se o seguinte vetor posição:

$$\mathbf{r}_e(t) = (R \cdot \cos(\chi(t)), R \cdot \sin(\chi(t)), 0) \quad (2.2.1)$$

Onde  $\chi(t)$  denota o ângulo instantâneo da IMU no sentido horário em relação ao eixo  $x$ , e  $R$  é a distância radial fixa (em cada sessão de experimentação) da IMU ao eixo de rotação. Assumindo velocidade angular do motor constante ao longo da realização do experimento (cujo intervalo de duração será denotado por  $I$ ), tem-se:

$$\dot{\chi}(t) = \omega \in \mathbb{R} \quad \forall t \in I \quad (2.2.2)$$

$$\chi(t) = \int_0^t \dot{\chi}(\tau) \cdot d\tau = \omega t \quad (2.2.3)$$

Chega-se, portanto, a uma distinta expressão para o caso simplificado:

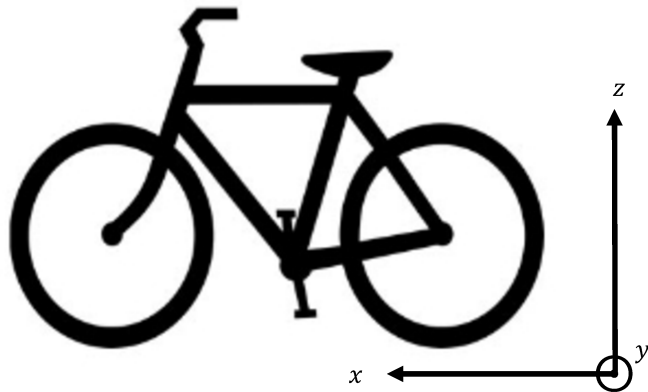
$$\mathbf{r}_\epsilon(t) = (R \cdot \cos(\omega t), R \cdot \sin(\omega t), 0) \quad (2.2.4)$$

### 2.3

#### Formulação para Testes de Validação

Previamente à construção do aferidor, a IMU de interesse foi utilizada em testes de validação, a partir dos quais foram obtidos distintos conjuntos de dados. Tais dados, por sua vez, foram avaliados e estruturados de forma a definir os procedimentos próprios de tratamento/processamento a serem implementados de forma a estimar as formas de onda não-observáveis corrompidas por ruído. Para seu devido uso e definição das implementações necessárias, se faz necessária também a modelagem (ainda que básica) das grandezas medidas pela IMU.

A configuração dos testes era tal que a IMU se encontrava acoplada a uma bicicleta, em terreno aproximadamente liso, sob diferentes condições de frenagem e regimes de deslocamento. Abaixo, uma relação esquemática da bicicleta e sua posição no sistema canônico de eixos,  $xyz$ :



**Figura 2.3.1:** Diagrama de posição da bicicleta num sistema de eixos  $xyz$

Os testes de validação consistiram, por sua vez, em três distintas configurações: deslocamento em linha reta, subida/descida de rampas e movimento circular. Cada uma destas configurações será devidamente modelada em seu caso ideal para que, com conhecimento a priori dos resultados desejados, ocorra a devida validação dos dados obtidos nos testes.

Se faz importante ressaltar que o sistema de eixos é acoplado à IMU e, portanto, à bicicleta. Portanto, a análise é realizada com base no referencial da bicicleta, este sendo mutável em relação a um referencial global.

### 2.3.1. Testes em Linha Reta

Neste caso espera-se que, em condições ideais, não haja qualquer angulação de *pitch*, *roll* e *yaw*, bem como velocidades angulares nulas nas direções canônicas. No caso, porém, do ângulo de *yaw* (rotação em torno do eixo  $x$ ), ao levar em conta a interferência do piloto humano (gerador de incerteza), espera-se um ruído aditivo auto-correlacionado com formato semelhante ao senoidal. Isso se deve ao fato de que o piloto deve buscar manter o equilíbrio em um sistema instável que é a bicicleta, tendendo a compensar continuamente as inclinações da mesma. Ainda assim, a percepção humana não é suficientemente rápida para fazê-lo instantaneamente, de forma que o ângulo oscila arbitrariamente lentamente em relação ao ponto de equilíbrio instável, com amplitude arbitrariamente pequena. Tais fatores de incerteza serão melhor abordados em seções posteriores, onde será explicada a análise estatística dos resultados obtidos.

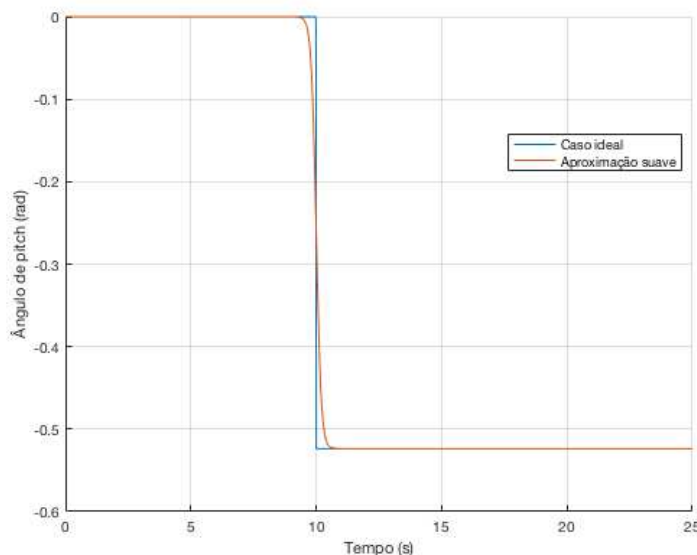
Além disso, a aceleração linear na direção  $y$  deve ser nula, enquanto a aceleração linear na direção  $z$  deve ser a da gravidade, ou seja, aproximadamente  $g = 9.81 \text{ m/s}^2$  (de acordo com a orientação dos eixos). Na direção  $x$ , porém, é impossível afirmar sem conhecimento a priori das condições de frenagem em cada experimento. Sendo assim, espera-se que todas as medidas inerciais nesta configuração (com exceção da aceleração linear nas direções  $x$  e  $z$ ) apresentem dados puramente ruidosos pois, em condições ideais, tais sinais deveriam ser puramente nulos.

### 2.3.2. Testes em Subida e/ou Descida de Rampas

Testes em subidas apresentam alguns aspectos em comum com testes realizados em linha reta, como por exemplo: espera-se que a aceleração linear no eixo  $y$ , em condições ideais, seja puramente nula; bem como as velocidades angulares nos eixos  $x$  e  $z$ . A aceleração linear na direção  $x$ , por sua vez, será a soma da aceleração imposta pelo piloto com a resistência gerada pela gravidade, ou seja,  $-g \cdot \sin \theta$ , onde  $\theta$  é o ângulo de declive. Em caso de descida, a única mudança é a alteração do sinal negativo para positivo, uma vez que a gravidade auxilia no aumento da aceleração, ao invés de oferecer resistência. A componente da aceleração linear na direção  $z$  será apenas  $g \cdot \cos \theta$ , por geometria trivial.

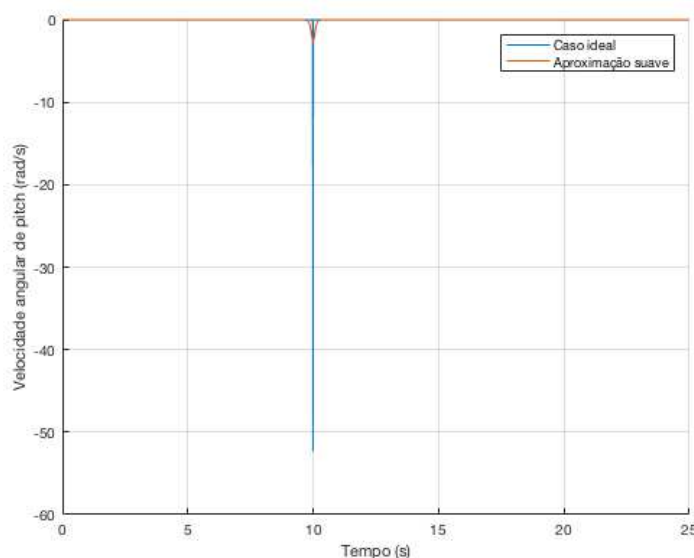
Tratando-se de velocidades angulares, as expressões tendem a apresentar características descontínuas e/ou impulsivas. No caso, por exemplo, do ângulo de *pitch*, o mesmo valerá 0 enquanto em linha reta e sofrerá decréscimo súbito para a angulação  $-\theta$  após entrada no aclave. Tem-se, portanto,  $\psi(t) = -\theta \cdot u(t - \tau)$ , onde  $u(t)$  é a função Degrau de Heaviside [3] e  $\tau$  é o tempo de entrada no aclave. Devido, porém, a incapacidade de respostas automáticas por parte da IMU,

espera-se, em caso mais próximo do real, uma transição suave que aproxime a função degrau, conforme **Fig. 2.3.2.1**:



**Figura 2.3.2.1:** Função degrau de amplitude  $\theta = \pi/6$  rad,  $\tau = 10$  s (azul) e aproximação por função sigmoide  $\psi_{aprox}(t) = \frac{\theta}{1+e^{-\beta(t-\tau)}}$ , com  $\beta = 10$  (laranja)

Espera-se, portanto, que a velocidade angular de *pitch*, ou seja, a derivada da função  $\psi(t)$  seja, em caso ideal,  $\dot{\psi}(t) = -\theta \cdot \delta(t - \tau)$ , onde  $\delta(t)$  é a distribuição Delta de Dirac [3], também conhecida como impulso unitário. Abaixo, a **Fig. 2.3.2.2** simula os resultados esperados para a velocidade angular em questão:



**Figura 2.3.2.2:** Comportamento esperado à medição de velocidade angular de pitch para os parâmetros simulados

Nota-se que o impulso é aproximado por um pulso de curta duração (que deve possuir área igual ao ângulo de aclave/declive), sendo o comportamento esperado

um meio termo dentre os previamente apresentados, a depender do tempo de resposta e/ou sensibilidade do sistema de medição, ou seja, da IMU. Trata-se de um fator um tanto quanto importante a ser levado em conta na análise estatística, pois comportamento impulsivo pode ser esperado em terrenos com ondulações pouco suaves e não necessariamente representa comportamento anômalo nas medições (*outliers*). O estudo e análise de *outliers* é, porém, necessário em caso de uma unidade com alta sensibilidade como a utilizada nos testes pois, conforme atestado, esta reagirá com leituras impulsivas contínuas em testes realizados em solos cuja rugosidade não seja desprezível quando comparada à já mencionada sensibilidade.

### 2.3.3. Testes em Movimento Circular (Skid Pad)

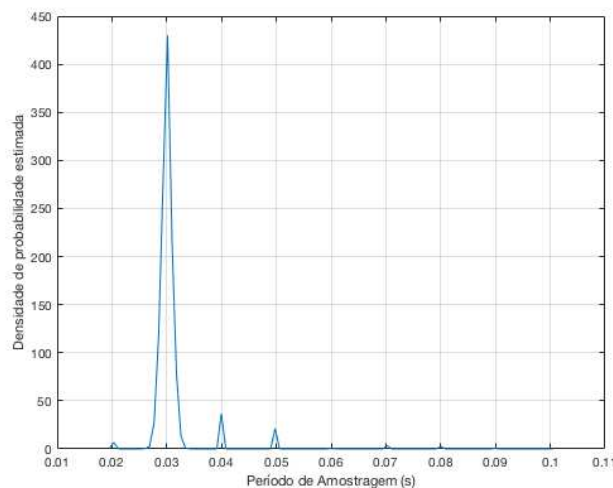
A terceira configuração de interesse é uma variação de um clássico teste de aceleração lateral proposto para sistemas automotivos. Neste caso, a bicicleta percorre um trecho circular de raio constante, sob distintas condições de frenagem impostas pelo piloto. Em condições ideais, a movimentação do veículo gerará uma inclinação constante de *roll* (com ângulo pendendo para o centro da circunferência), introduzindo comportamento impulsivo nas medições de velocidade angular na direção  $x$ . Velocidades angulares nos eixos  $y$  e  $z$  devem, por sua vez, permanecer inalteradas. Já tratando de acelerações lineares, a componente  $y$  apresentará comportamento em degrau no instante de entrada no *skid pad*, cuja amplitude instantânea seria definida pela relação  $V^2(t)/R$ , tendo  $V(t)$  como o módulo instantâneo da velocidade linear (e igual à velocidade na direção tangente, ou seja,  $x$ ) e  $R$  como o raio da circunferência. A aceleração linear na direção  $z$  será a da gravidade e a na direção  $x$  dependerá do acionamento dos freios relativo ao teste específico.

### 3 Tratamento dos Dados

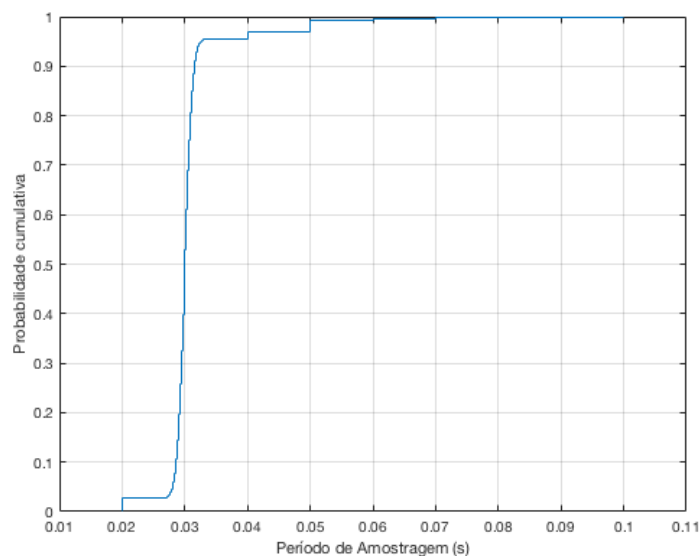
Com base em conhecimento prévio dos regimes de movimentação característicos de cada teste, foram escolhidos 3 (três) dentre um total de 15 testes realizados para processamento aprofundado, incluindo filtragem, remoção de *outliers* e análise das séries temporais geradas pelas leituras. Os procedimentos apresentados nestas seções são variáveis com o tipo de regime, porém apresentam em alguns casos, aspectos em comum.

Dentre os dados obtidos, foram realizadas leituras de 10 grandezas ao longo do tempo: acelerações lineares nas direções  $x, y$  e  $z$ ; velocidades angulares nas direções  $x, y$  e  $z$ ; velocidades angulares das rodas traseira e dianteira; e ação percentual dos freios traseiro e dianteiro. As 6 primeiras grandezas são medidas pela IMU, sendo estas o objetivo do processamento. Os dados processados o serão pela ótica digital (a tempo discreto), com período de amostragem variável em torno de  $T = 0.03$  s.

As séries temporais foram estruturadas em matrizes respectivas a cada grandeza (sinal) de interesse, tais quais cuja entrada  $(i, j)$  contém a  $i$ -ésima amostra do  $j$ -ésimo teste, ou seja, as linhas da matriz possuem os dados da série obtida em cada teste para aquela grandez. Devido às distintas durações dos testes, se fez necessário completar os vetores contendo os instantes de tempo, bem como os vetores correspondentes aos sinais com amostras nulas. Visando não comprometer a análise harmônica na passagem para tempo contínuo, a matriz com os instantes de tempo foi completada segundo estimacão da densidade de probabilidade do período de amostragem. Abaixo, as **Fig 3.1** e **Fig. 3.2** explicitam as curvas para a densidade de probabilidade estimada de  $T$ , suavizada por *kernel smoothing*, e sua função de probabilidade acumulada estimada:



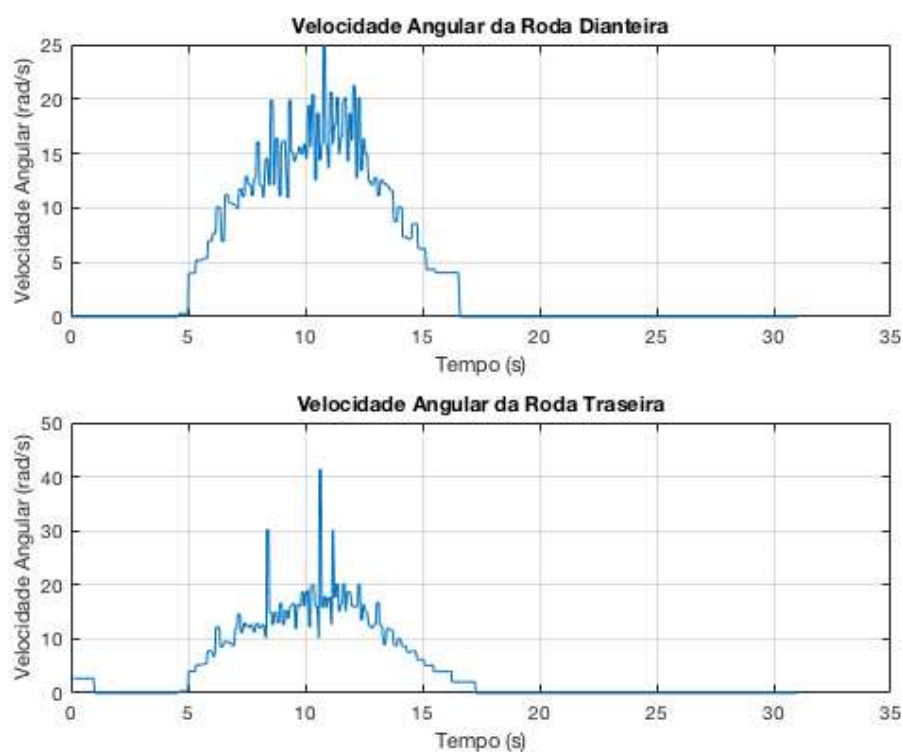
**Figura 3.1:** Densidade de probabilidade estimada,  $\hat{p}_T(\tau)$ , para a variável aleatória  $T$ , período de amostragem



**Figura 3.2:** Função de probabilidade acumulada,  $\hat{P}_T(\tau) = \int_{-\infty}^{\tau} \hat{p}_T(s) \cdot ds \approx \Pr\{T \leq \tau\}$ , para a variável aleatória  $T$

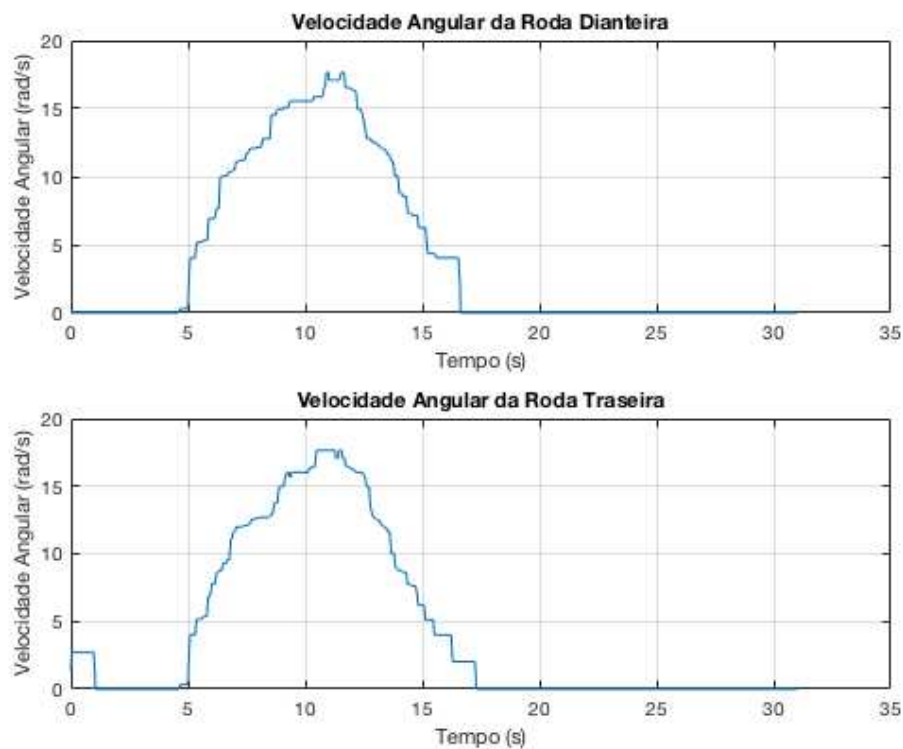
Avaliando as curvas, percebe-se que a densidade de  $T$  possui características impulsivas típicas de uma variável aleatória discreta que, neste caso, assume primordialmente os valores 0.02, 0.03, 0.04 ou 0.05 s. Apesar disto, pela **Fig 3.2**, a probabilidade de  $T$  assumir o valor 0.03 s é próxima a 0.9, de forma que há evidências estatísticas de que o vetor pode ser completado apenas assumindo o período de amostragem como determinístico e igual a 0.03 s, com erros praticamente desprezíveis.

Após completar as entradas necessárias aos vetores e matrizes de interesse, foi necessária estabelecer uma referência de análise para o regime da bicicleta. Sendo assim, os dados não obtidos pela IMU foram processados de forma a capturar sua tendência. As grandezas escolhidas para referência foram as velocidades de rotação das rodas da bicicleta, de onde se fez possível obter noções de aceleração, velocidade linear e distância percorrida. Esta etapa do procedimento de tratamento foi comum a todos os regimes de teste, uma vez que os dados do sensor de velocidade de rotação são menos sujeitos a erros e apresentam menos *outliers* em suas medições. A **Fig 3.3** apresenta o comportamento típico dos dados obtidos em um dos testes, para as rodas traseira e dianteira:



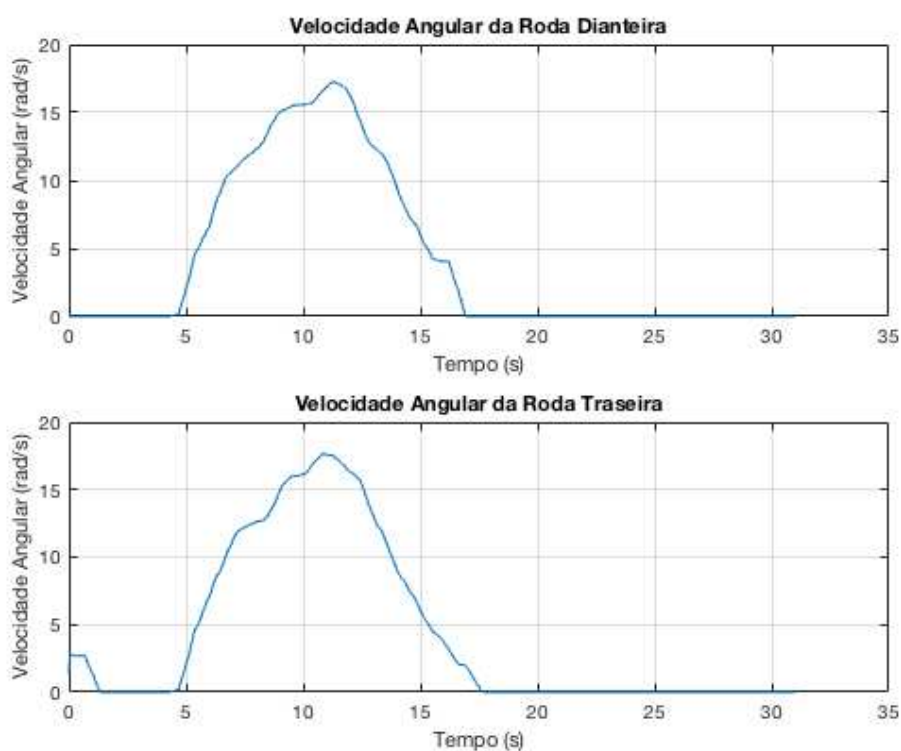
**Figura 3.3:** Velocidades angulares medidas nas rodas dianteira e traseira da bicicleta no primeiro teste realizado

Na ausência de deslizamentos, as medidas obtidas em ambas as rodas deveriam ser iguais, porém é possível notar que isto não ocorre. Conforme explicitado na **Seção 2.1.4**, assumir-se-á que as medições observadas estão corrompidas por ruído de média nula, ruído este com características impulsivas e não necessariamente estacionário após a remoção de impulsos. Com base nesta noção, foi realizado em todas as amostras uma filtragem não linear por meio de um filtro de medianas [4] de ordem 50 para remoção dos *outliers*, resultando nos seguintes sinais:



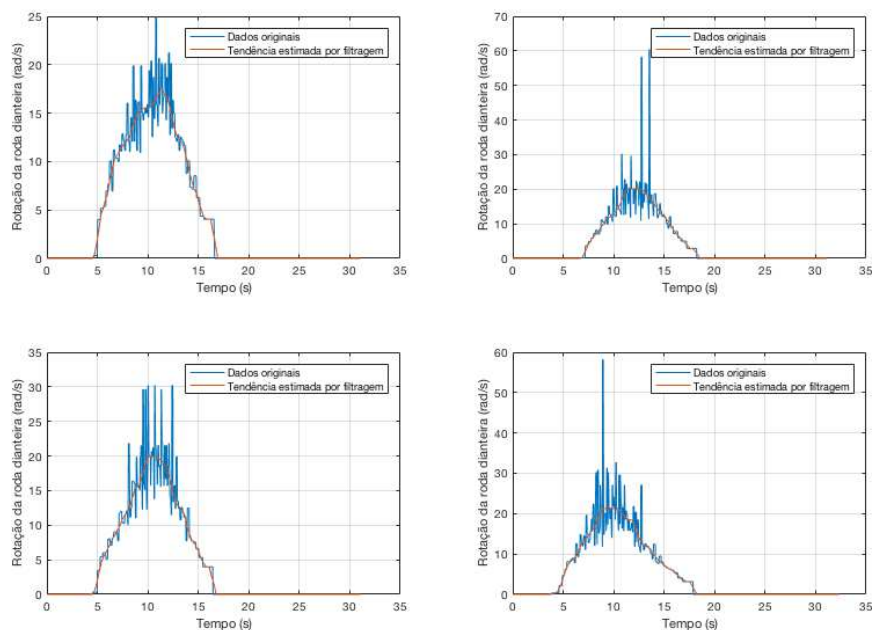
**Figura 3.4:** Velocidades angulares medidas nas rodas dianteira e traseira da bicicleta no primeiro teste realizado, após filtragem por mediana de ordem 50

Nota-se que o filtro de medianas é capaz de eliminar impulsos, uma vez que, no caso de distribuições de probabilidade simétricas, a mediana é um estimador robusto para o valor esperado instantâneo (função média) do processo, caso o processo determinístico que foi corrompido por ruído seja não estacionário. Conforme esperado, os sinais obtidos em ambos os casos (roda dianteira e traseira) se mostram muito mais próximos após a supressão de ruído impulsivo, estando porém, ainda ligeiramente ruidosos. Para captura da tendência do processo, portanto, foi implementada uma filtragem linear bilateral de médias móveis de ordem 21 (tipicamente um filtro passa-baixas, capaz de remover oscilações em altas frequências). Os resultados para o teste de interesse seguem abaixo, na **Fig. 3.5**:

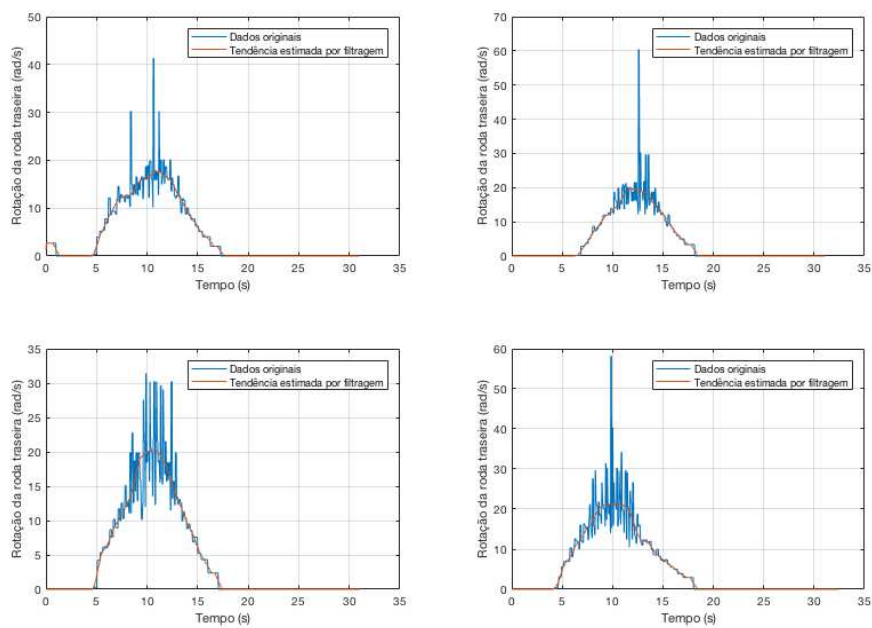


**Figura 3.5:** Captura da tendência do processo após filtragem por médias móveis bilateral de ordem 21, primeiro teste

As **Fig. 3.6** e **Fig. 3.7** apresentam a comparação entre os sinais recebidos do sensor e a tendência capturada após a implementação de filtragens sequenciais, para os 4 primeiros testes:

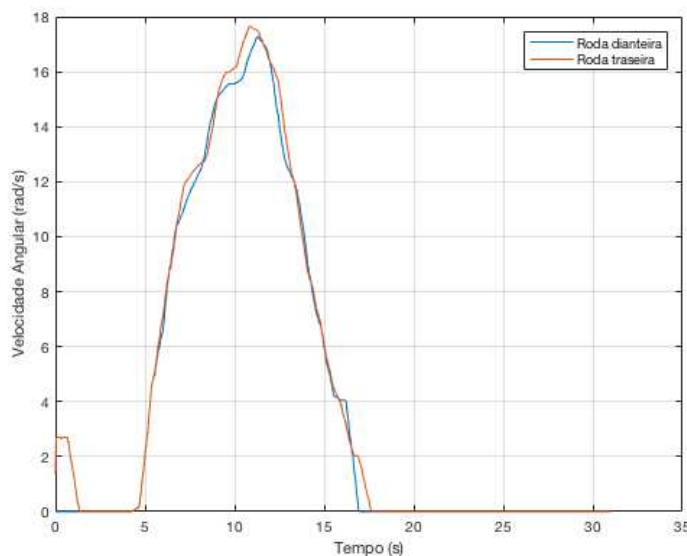


**Figura 3.6:** Comparação entre os sinais originais e filtrados dos 4 primeiros testes, roda dianteira

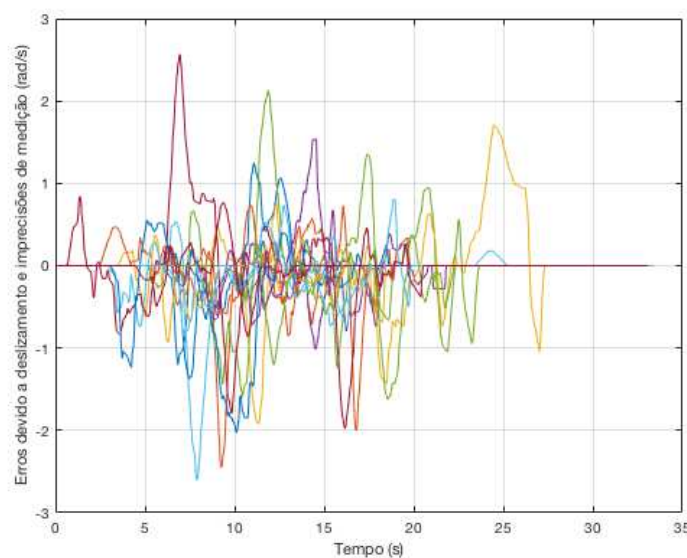


**Figura 3.7:** Comparação entre os sinais originais e filtrados dos 4 primeiros testes, roda traseira

As curvas de tendência foram devidamente comparadas para os pares de rodas respectivos a cada teste por meio de subtração dos resultados obtidos em cada filtro e verificação da proporção dos erros:



**Figura 3.8:** Comparação entre sinais obtidos pós-filtragem no primeiro teste



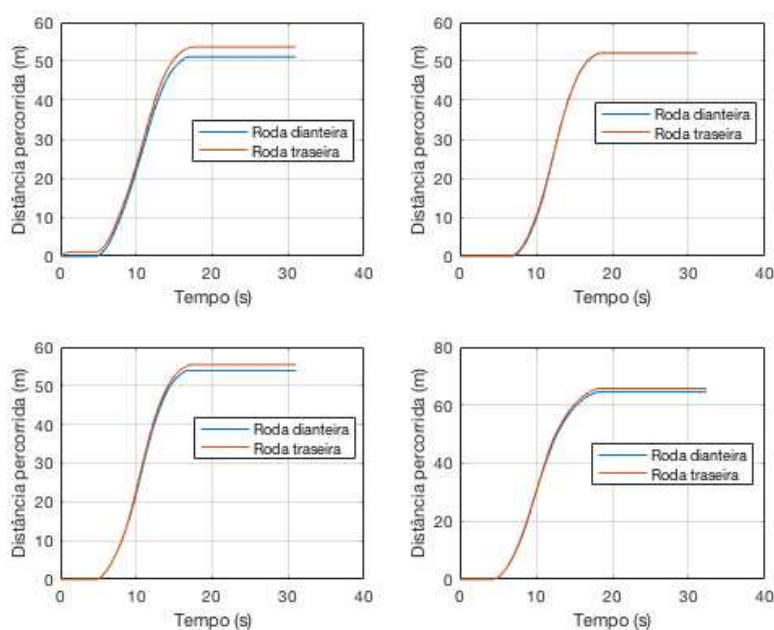
**Figura 3.9:** Erros entre medições das rodas dianteira e traseira, pós-filtragem

Na **Tabela 3.1** ficam explícitas as proporções de ocorrência dos erros, em módulo:

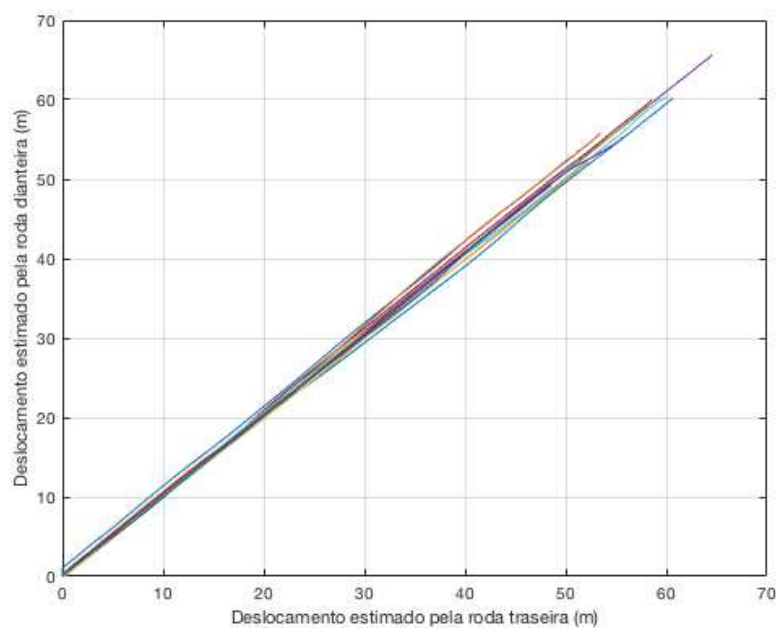
**Tabela 3.1:** Proporção dos valores absolutos dos erros

Valor Absoluto do Erro (rad/s)	Proporção de ocorrência
1	0.96 (96%)
0.5	0.89 (89%)
0.1	0.68 (68%)

De acordo com os dados obtidos, aproximadamente 90% dos sinais apresentaram erros inferiores a 0.5 rad/s em um problema cuja ordem de grandeza é algo em torno de 10 rad/s. Levando-se em conta de que alguns destes desvios ocorrem devido a deslizamentos imprevisíveis de alguma das rodas, é possível concluir que o procedimento resultou em redução sub-ótima e consistente dos erros de medição. Com isto, se fez possível a estimação das distâncias percorridas através de integração numérica da velocidade linear pelo método dos retângulos. Para isto, estimou-se um raio  $r = 40$  cm para a roda da bicicleta, utilizando assim a simples expressão  $V(t) = \Omega(t) \cdot r$  (onde  $\Omega$  é a velocidade angular das rodas) para cálculo do módulo da velocidade:



**Figura 3.10:** Distâncias percorridas estimadas para os 4 primeiros testes



**Figura 3.11:** Comparação entre as distâncias estimadas pelos dados de ambas as rodas

Conforme esperado, o procedimento de integração resultou em curvas praticamente iguais para ambas as rodas dianteiras e traseiras, resultando em uma estimativa consistente da distância percorrida ao longo do tempo. Os resultados constam na **Tabela 3.2**:

**Tabela 3.2:** Distâncias estimadas pelos dados de cada roda

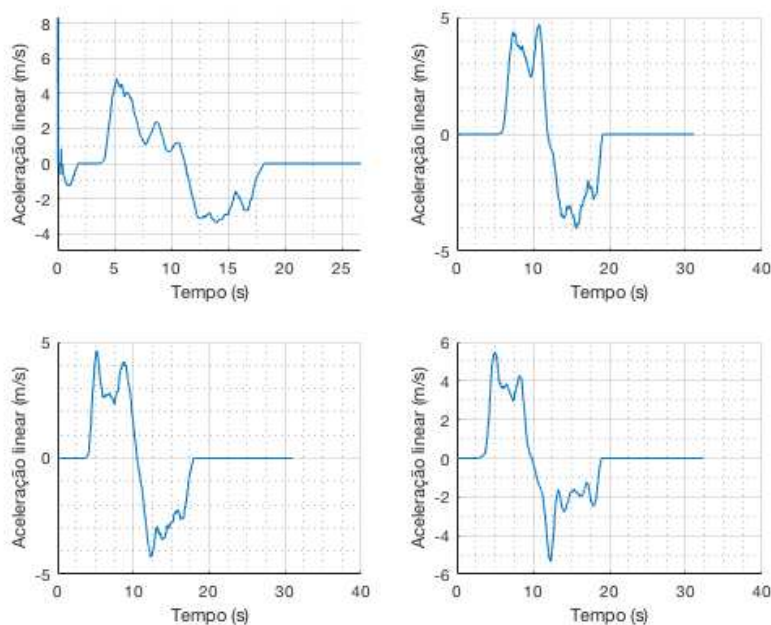
Teste	Distância Estimada (m)	
	Roda Dianteira	Roda Traseira
1	51.16	53.72
2	52.16	52.10
3	53.95	55.42
4	64.52	65.74
5	58.60	59.60
6	60.14	60.74
7	58.56	59.97
8	60.66	60.17
9	53.49	55.81
10	52.27	52.13
11	55.55	55.28
12	34.33	34.27
13	51.11	52.44
14	49.48	50.38
15	48.57	49.32

Também se fez possível, com a obtenção de estimativas para as distâncias percorridas, estimar a velocidade média da bicicleta em cada um dos testes, conforme consta na **Tabela 3.3**:

**Tabela 3.3:** Velocidades médias estimadas pelos dados de cada roda

Teste	Velocidade Média Estimada (m/s)	
	Roda Dianteira	Roda Traseira
1	4.05	3.89
2	4.27	4.15
3	4.28	4.22
4	4.37	4.49
5	4.29	4.30
6	3.38	3.34
7	4.41	4.42
8	4.09	4.14
9	4.07	4.12
10	3.82	3.86
11	3.41	3.41
12	3.54	3.52
13	3.85	3.71
14	3.81	3.69
15	3.13	3.07

Por último, em análise análoga, foram definidos os perfis de aceleração por meio de diferenciação numérica pelo método de diferenças centrais, cujo resultado para os 4 primeiros testes se encontra expresso na subsequente **Fig. 3.11**:



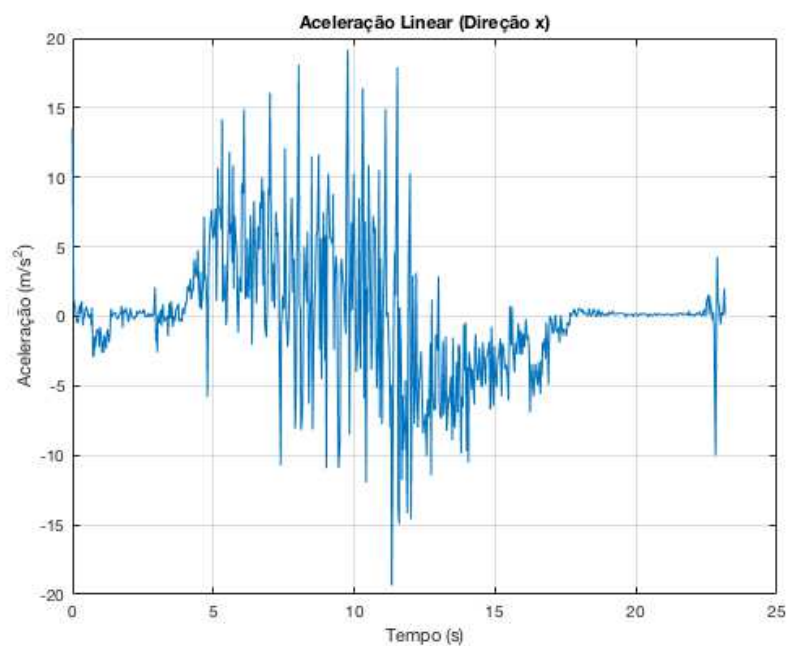
**Figura 3.12:** Curvas de aceleração linear obtidas nos 4 primeiros testes

Com o devido tratamento dos dados de referência realizados, se fez possível inferir a respeito dos dados obtidos pela IMU, associando os resultados previamente apresentados com conhecimento a priori dos regimes impostos aos testes. Os testes selecionados para apresentação dos resultados neste documento foram os testes de número 1, 14 e 4, que correspondem a deslocamento em linha reta, em aclave e em movimento circular, respectivamente. As especificações do processamento e análise de cada caso serão explicitadas nas próximas subseções, onde cada conjunto de dados é tratado separadamente.

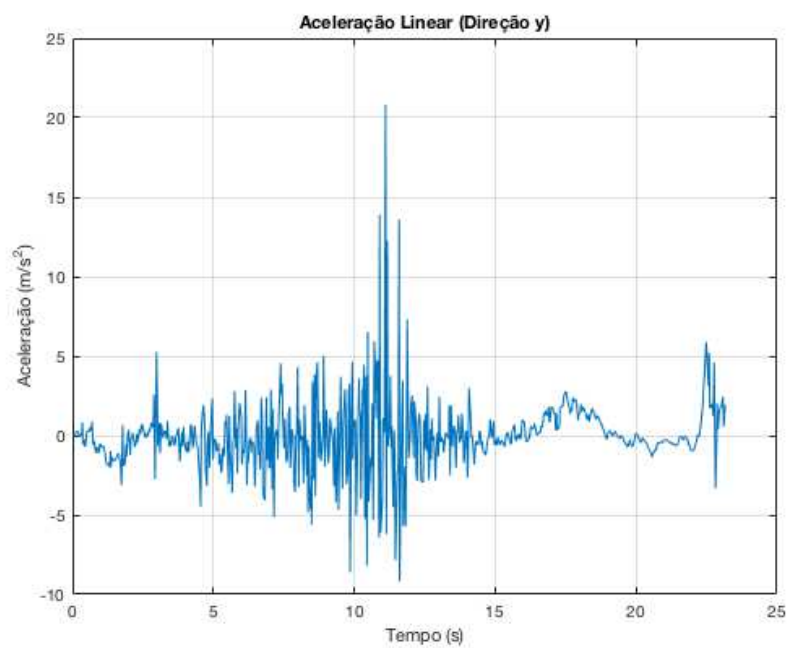
### 3.1

#### Teste 1: Análise em Linha Reta

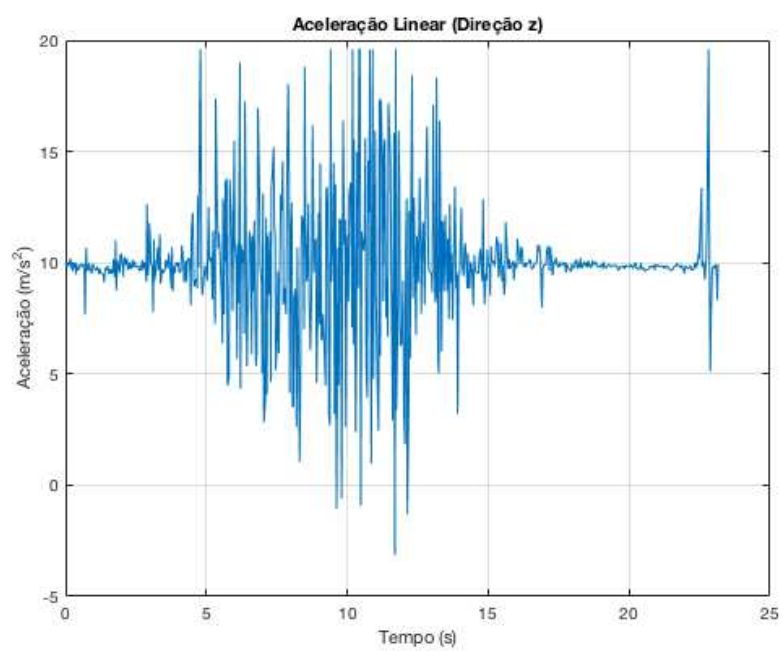
Neste problema, serão considerados os aspectos mencionados na **Seção 2.3.1** para modelagem dos sinais desejados às medições. Primeiramente, as subsequentes figuras apresentam os dados crus obtidos:



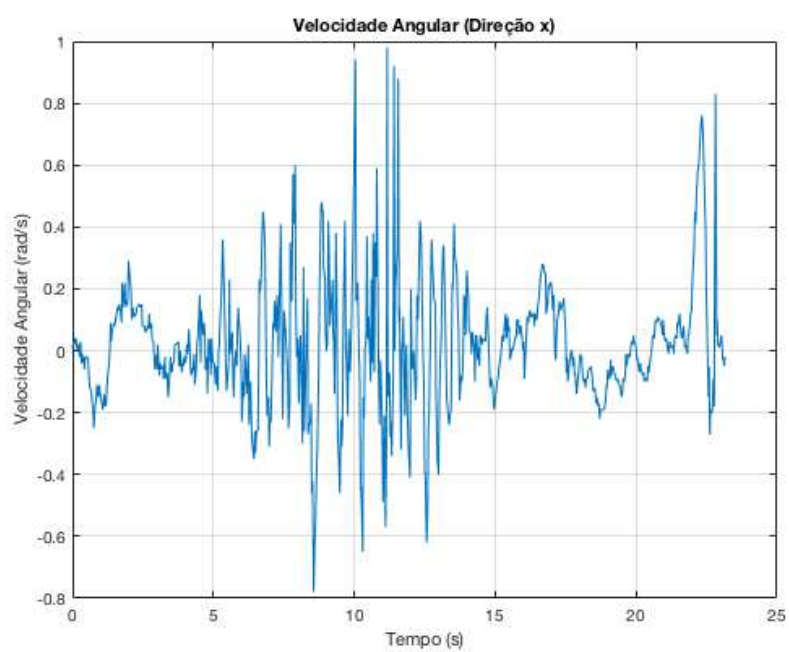
**Figura 3.1.1:** Aceleração linear na direção  $x$ , teste 1



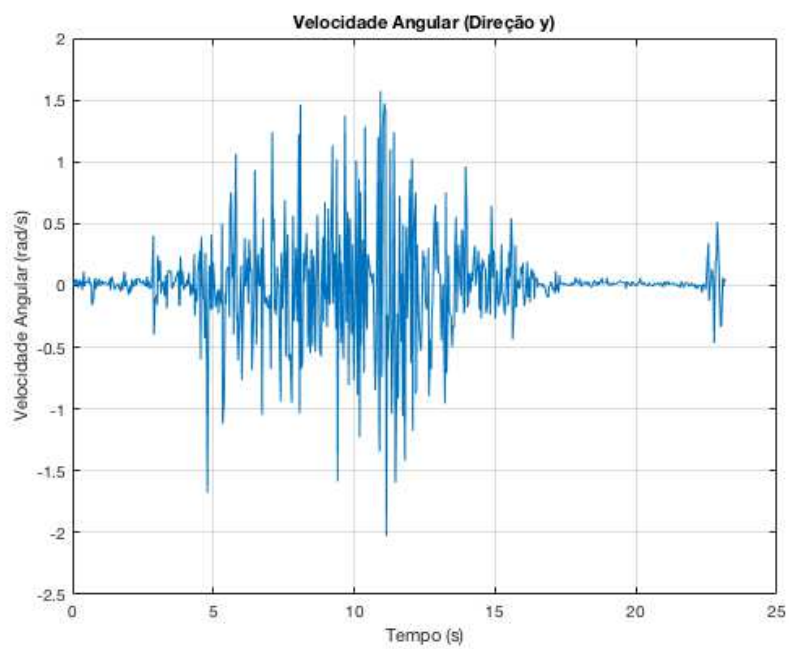
**Figura 3.1.2:** Aceleração linear na direção  $y$ , teste 1



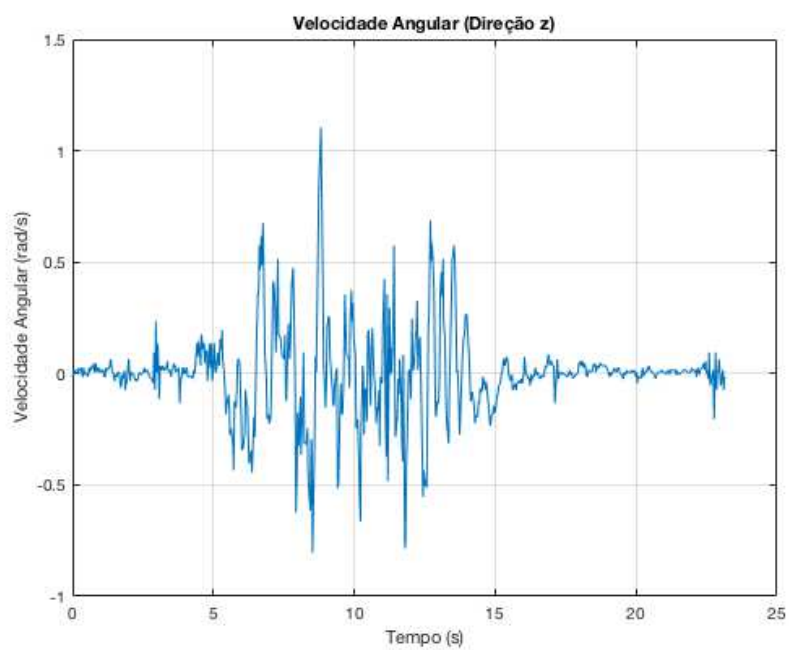
**Figura 3.1.3:** Aceleração linear na direção z, teste 1



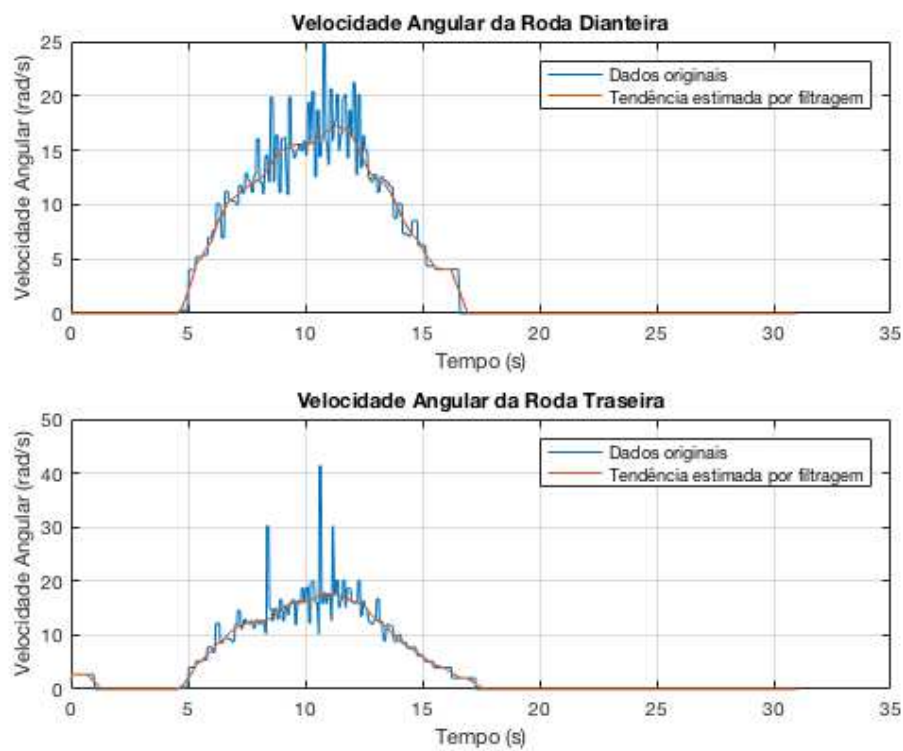
**Figura 3.1.4:** Velocidade angular na direção  $x$  (*roll*), teste 1



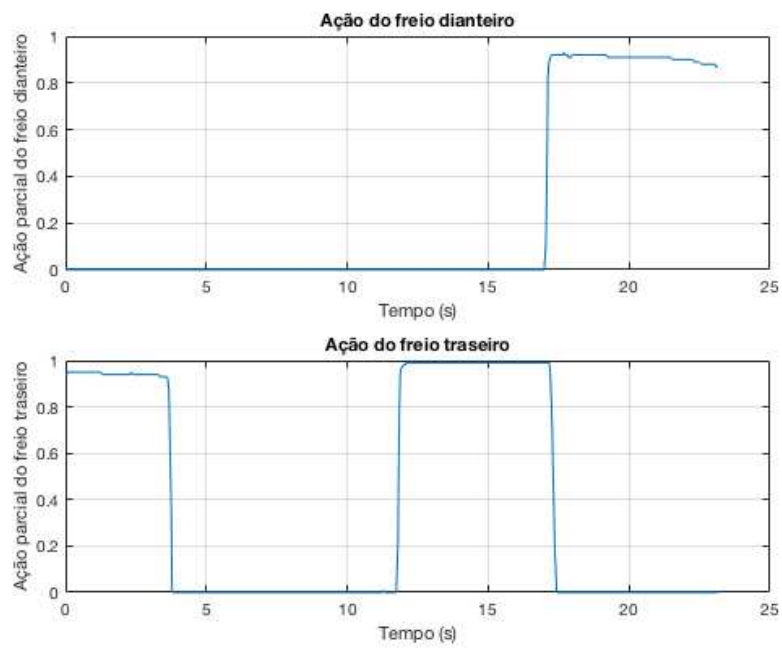
**Figura 3.1.5:** Velocidade angular na direção  $y$  (*pitch*), teste 1



**Figura 3.1.6:** Velocidade angular na direção  $z$  (*yaw*), teste 1



**Figura 3.1.7:** Velocidades angulares das rodas dianteira e traseira, dados originais e pós-filtragem, teste 1



**Figura 3.1.8:** Ação dos freios dianteiro e traseiro, teste 1

Em primeira análise, é possível perceber que os dados obtidos pela IMU são, em sua maioria, processos estocásticos com média estacionária em torno de 0, porém não estacionários em termos de autocorrelação e variância. Nota-se que, aproximadamente no intervalo [5,17] (quando as rodas da bicicleta apresentam velocidade angular não nula), a variância dos processos é maior do que nos instantes de tempo que as rodas não estão girando. Tal aspecto confirma a hipótese explicitada na **Seção 2.1.4** de que o nível de ruído é uma resposta da sensibilidade ao regime, ou seja, que existe relação direta entre a variância do ruído e as frequências de oscilação das rodas.

Propor-se-á, portanto, um modelo de função de transferência [5] entre as séries temporais de medidas inerciais e a tendência estimada da velocidade angular das rodas pelo procedimento de filtragem:

$$y[k] = (h[k] + n[k]) * x[k] \quad (3.1.1)$$

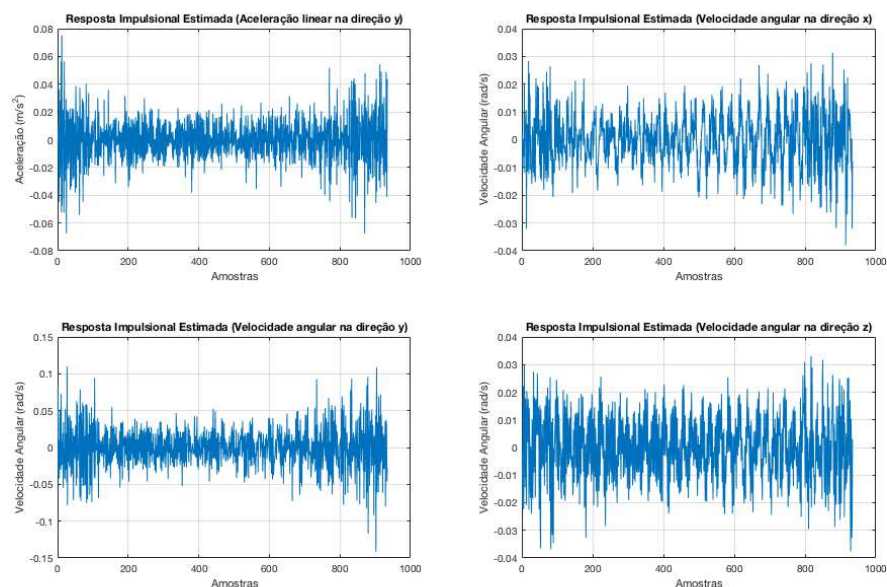
Onde  $y[k]$  é o processo estocástico de saída (medida inercial),  $x[k]$  é o processo determinístico de entrada (tendência estimada para a velocidade angular das rodas) e  $n[k]$  é o ruído estacionário na média, e  $k \in \mathbb{Z}$  é um contador para as amostras dos processos discretos. Por meio de Transformadas de Fourier a tempo discreto [3][6], tem-se:

$$\begin{aligned} Y(\omega) &= (H(\omega) + N(\omega)) \cdot X(\omega) \\ \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} &= H(\omega) + N(\omega) \\ \mathbb{E} \left[ \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} \right] &= H(\omega) \end{aligned} \quad (3.1.2)$$

Visando uma estimação robusta da função de transferência, foram utilizados os dados dos testes 8, 9 e 10, cujo conhecimento prévio do regime de deslocamento permite a assunção da hipótese de uma mesma função de transferência para estes 4 casos. A estimação da resposta em frequência se deu pelo método dos momentos, segundo a posterior **Eq. 3.1.3**:

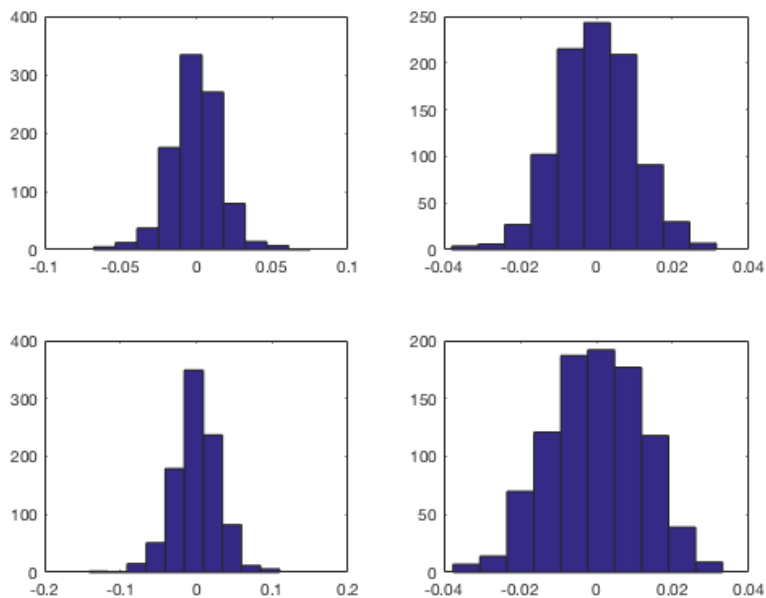
$$\hat{H}(\omega) = \frac{1}{4} \cdot \sum_{i=1}^4 \frac{Y_i(\omega)}{X_i(\omega)} \quad \Leftrightarrow \quad \hat{h}[k] = \mathcal{F}^{-1} \left\{ \frac{1}{4} \cdot \sum_{i=1}^4 \frac{Y_i(\omega)}{X_i(\omega)} \right\} \quad (3.1.3)$$

As respostas impulsivas [3][6] dos sistemas lineares invariantes no tempo desejados, neste caso, são exatamente as respectivas respostas relacionadas às medidas inerciais que, em condições ideais, seriam nulas de acordo com o modelo explicitado na **Seção 2.3.1**. Abaixo, a **Fig. 3.1.9** explicita os vetores contendo as estimativas das amostras dos sinais:



**Figura 3.1.9:** Estimativas das respostas impulsivas para grandezas modeladas como nulas

Tratando-se de uma amostra de apenas 4 vetores aleatórios para gerar cada uma das 4 estimativas, um teste de hipótese é necessário para inferir se as respostas impulsiais reais não são vetores inteiramente nulos. Para tal, portanto, verificar-se-á a distribuição de probabilidade das amostras obtidas, por meio de ferramentas estatísticas:



**Figura 3.1.10:** Histogramas das amostras das respostas impulsiais estimadas

Os histogramas apresentados na **Fig. 3.1.10** demonstram fortes indícios de normalidade. Portanto, assumindo que as amostras dos processos são inteiramente estatisticamente independentes entre si, testar-se-á se as amostras são, de fato, funções amostra de processos Gaussianos, por meio do teste estatístico de Jarque-Bera [5]:

**Tabela 3.1.1:** Resultados do teste de Jarque-Bera a um nível de significância de 5%

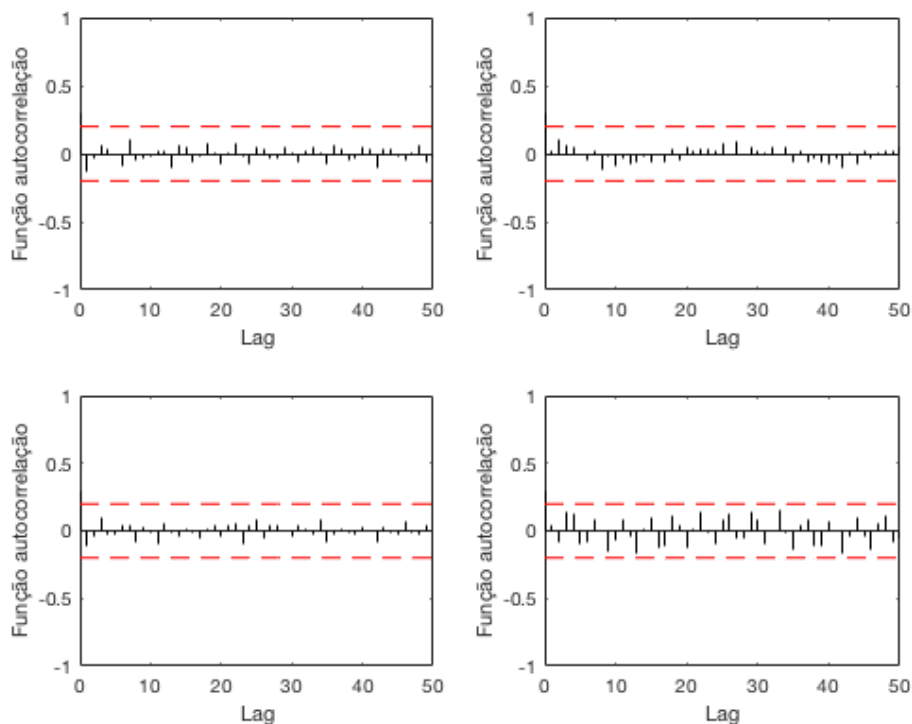
Resposta Impulsional	Estatística de Teste	Valor Crítico
Aceleração linear ( $y$ )	4.16	4.82
Velocidade angular ( $x$ )	3.15	4.82
Velocidade angular ( $y$ )	4.27	4.82
Velocidade angular ( $z$ )	2.99	4.82

Conforme esperado após a visualização do histograma, em caso de posterior confirmação de independência das amostras de um mesmo processo, não é possível rejeitar, a 5% de significância, a hipótese de normalidade para nenhuma das respostas impulsiais. Para comprovar, portanto, a hipótese de independência, basta que se ateste descorrelação entre as amostras de cada processo, por meio do teste estatístico de Ljung-Box [5] aplicado às estimativas das funções de autocorrelação dos sinais estimados. Para uma estimativa condizente, porém, deve se garantir estacionariedade em variância, havendo a necessidade de um teste estatístico para variância constante (homocedasticidade), o teste F de Fisher-Snedecor [7], cujos resultados constam na posterior **Tabela 3.1.2**:

**Tabela 3.1.2:** Resultados do teste F com 240 amostras a um nível de significância de 5%

Resposta Impulsional	Estatística de Teste	Valor Crítico
Aceleração linear ( $y$ )	1.34	1.35
Velocidade angular ( $x$ )	1.06	1.35
Velocidade angular ( $y$ )	1.30	1.35
Velocidade angular ( $z$ )	0.79	1.35

Segundo, portanto, o teste de homocedasticidade, pode-se assumir que os sinais estimados possuem variância estacionária e é, portanto, possível estimar consistentemente as funções de autocorrelação por meio de médias temporais, cujos resultados se encontram explícitos abaixo na **Fig. 3.1.11**:



**Figura 3.1.11:** Funções de autocorrelação estimadas para cada um dos processos, com limites de 5% de significância

Conforme se faz observável na figura anterior, as autocorrelações estimadas para os primeiros 50 lags se encontram dentro dos limites de 5% de significância definidos por Bartlett [5] e, portanto, apresentam fortes indícios estatísticos de insignificância. Abaixo, a **Tabela 3.1.3** apresenta os resultados para descorrelação para os 25 primeiros lags pelo teste de Ljung-Box:

**Tabela 3.1.3:** Resultados do teste de Ljung-Box para os 25 primeiros lags a um nível de significância de 5%

Resposta Impulsional	Estatística de Teste	Valor Crítico
Aceleração linear ( $y$ )	12.14	37.65
Velocidade angular ( $x$ )	25.66	37.65
Velocidade angular ( $y$ )	10.47	37.65
Velocidade angular ( $z$ )	32.19	37.65

De acordo com as estatísticas obtidas, não é possível rejeitar a hipótese de descorrelação a um nível de significância de 5%. Ao final, tem-se um sólido conjunto de resultados indicando que as respostas impulsiais estimadas são puro ruído branco Gaussiano, onde o conjunto de amostras de um sinal representa uma amostra aleatória. Sendo assim, é possível utilizar um teste t-Student [7] para média de uma distribuição normal, onde o número de graus de liberdade é diretamente relacionado ao número de amostras dos sinais (933 graus de liberdade para 934 amostras, implicando em uma distribuição t-Student próxima de uma normal padrão). A **Tabela 3.1.4** apresenta os resultados do teste:

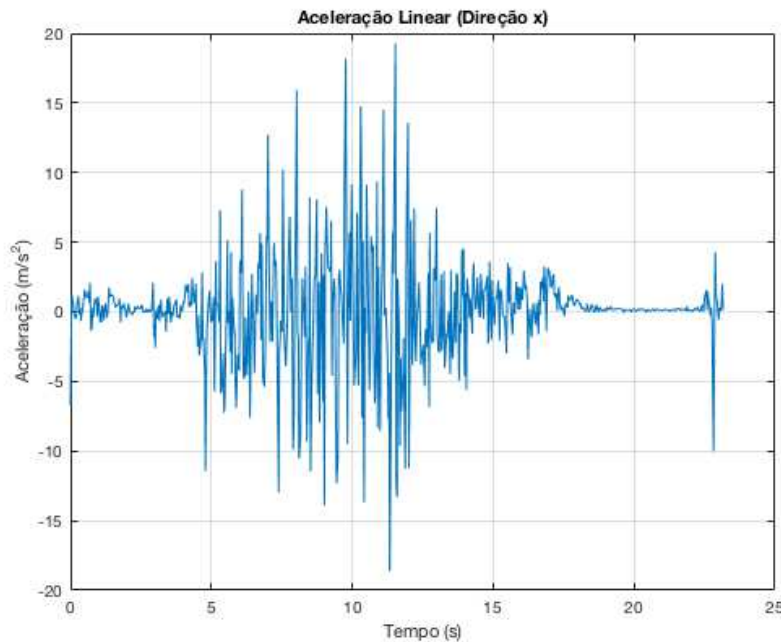
**Tabela 3.1.4:** Resultados do teste t-Student com 933 graus de liberdade um nível de significância de 5%

Resposta Impulsional	Estatística de Teste	Valor Crítico
Aceleração linear ( $y$ )	0.44	1.65
Velocidade angular ( $x$ )	-0.49	1.65
Velocidade angular ( $y$ )	0.34	1.65
Velocidade angular ( $z$ )	0.52	1.65

Com tais indícios é possível afirmar, portanto, a um nível de significância de 5%, que  $h[k] = 0 \forall k \in \mathbb{Z}$  em todos os casos avaliados. Conclui-se, portanto, que as estimativas obtidas são puro ruído branco Gaussiano aditivo, gerador de interferência na real resposta impulsional nula, ou seja, não existe qualquer noção de causalidade direta entre as medidas reais das grandezas inerciais e o regime de rotação das rodas e/ou da bicicleta quando em deslocamento em linha reta. As medidas observadas são puramente ruidosas, porém não se tratando de um caso trivial como o já mencionado AWGN (*Additive White Gaussian Noise*, ruído branco Gaussiano aditivo).

Procedimento analítico semelhante pode ser realizado para o caso da medida de aceleração linear no eixo  $z$ , com a pequena modificação que a expressão para  $y[k]$  estaria somada de um termo  $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ , porém a descorrelação é clara e os passos são facilmente replicáveis.

A aceleração linear na direção  $x$ , por sua vez, apresenta tendência visivelmente positiva seguida de negativa no que se parece com um pulso senoidal, semelhante à aceleração linear estimada com os dados obtidos da rotação das rodas. Subtraindo-se, portanto, a tendência estimada da série temporal, tem-se:



**Figura 3.1.12:** Medição de aceleração linear na direção  $x$  subtraída da tendência estimada, teste 1

Um bom sinal de acurácia do modelo está no fato de que, assim como descrito na **Seção 2.1.4**, o sinal subtraído de sua tendência estimada (tendência essa que representa a estimativa do sinal determinístico característico do regime, livre de ruído), o sinal obtido possui aspecto ruidoso, aparenta possuir média estacionária nula e possui função de autocorrelação variante no tempo.

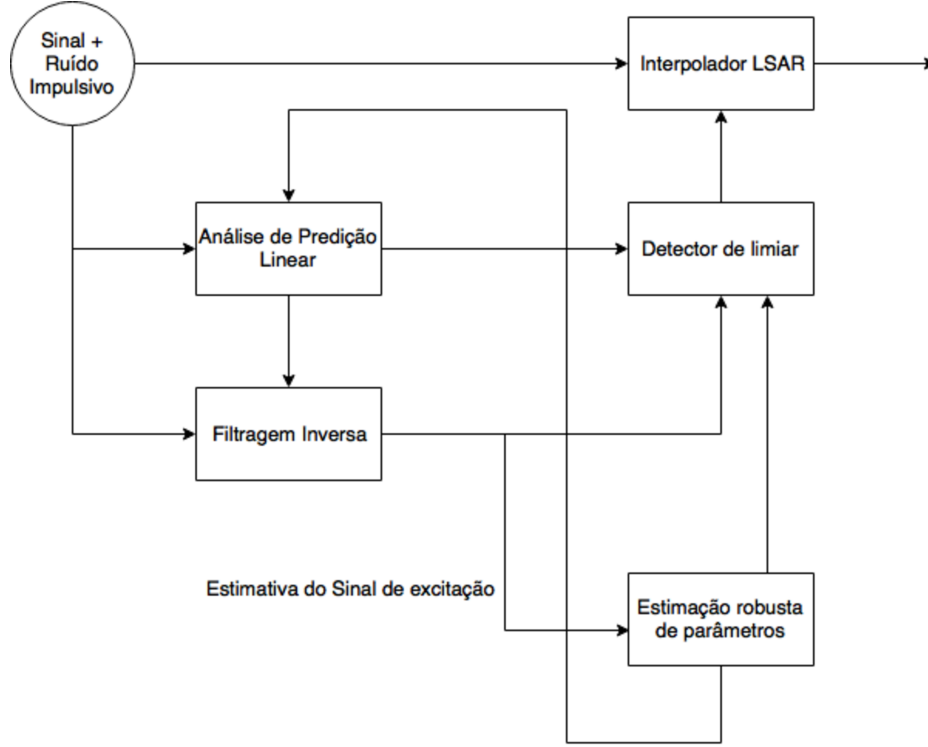
Como forma de evitar inferências precipitadas, o modelo de tendência previamente apresentado será validado através de metodologia distinta. Assumir-se-á que o sinal original contém uma componente estocástica de interesse a ser separada do ruído. O sistema implementado para detecção e supressão de ruído impulsivo se baseia nos conceitos de predição linear com estimação robusta e filtragem inversa [4]. Propõe-se o seguinte modelo autoregressivo para o sinal desejado,  $x[k]$ :

$$x[k] = \sum_{m=1}^p a_m \cdot x[k - m] + e[k] \quad (3.1.4)$$

Onde  $e[k]$  é um processo estocástico denominado sinal de excitação, assumido como estacionário na média, com função média nula. Já o sinal observado,  $r[k]$ , portanto, é dado por:

$$r[k] = x[k] + n[k] \quad (3.1.5)$$

Onde  $n[k]$  é, conforme previamente mencionado, o ruído com características impulsivas. O diagrama de blocos do sistema proposto segue abaixo, apresentado na subsequente **Fig. 3.1.13**:



**Figura 3.1.13:** Diagrama de blocos do circuito de detecção e supressão de ruído impulsivo

O funcionamento do sistema se dá da seguinte maneira: primeiramente o sinal observado  $r[k]$  é filtrado inversamente utilizando as estimativas previamente obtidas para os coeficientes  $\{a_m\}_{m=1,\dots,p}$ , resultando em uma estimativa do sinal de excitação somado de ruído, conforme **Eq. 3.1.6** abaixo:

$$v[k] = r[k] - \sum_{m=1}^p \hat{a}_m \cdot r[k-m] \quad (3.1.6)$$

$$v[k] = \sum_{m=1}^p a_m \cdot x[k-m] + e[k] - \sum_{m=1}^p \hat{a}_m \cdot (x[k-m] + n[k-m])$$

$$v[k] = e[k] + \sum_{m=1}^p (a_m - \hat{a}_m) \cdot x[k-m] - \sum_{m=1}^p \hat{a}_m \cdot n[k-m]$$

Após isto, os coeficientes  $\{a_m\}_{m=1,\dots,p}$  são novamente estimados por meio de uma função custo robusta, neste caso a função de Huber  $\|$ :

$$C[v[k]] = \begin{cases} v^2[k], & \text{se } |v[k]| \leq \rho \\ \rho \cdot |v[k]|, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (3.1.7)$$

Onde  $\rho$  é um parâmetro de limiar a ser definido posteriormente. Reescrevendo a Eq. 3.1.6 em forma vetorial, em função dos vetores  $\hat{\mathbf{a}} = [a_1 \ a_2 \ \dots \ a_m]^T$  e  $\mathbf{r}[k-1] = [r[k-1] \ r[k-2] \ \dots \ r[k-p]]^T$ , é possível definir o problema de minimização como:

$$v[k] = r[k] - \hat{\mathbf{a}} \cdot \mathbf{r}[k-1]$$

$$\frac{\partial C[v[k]]}{\partial \mathbf{a}}(\mathbf{a} = \hat{\mathbf{a}}) = \mathbf{0} \quad (3.1.8)$$

O algoritmo, porém, trabalha de maneira iterativa, por meio de uma atualização dos parâmetros estimados por correção de gradiente (vide convexidade da função custo):

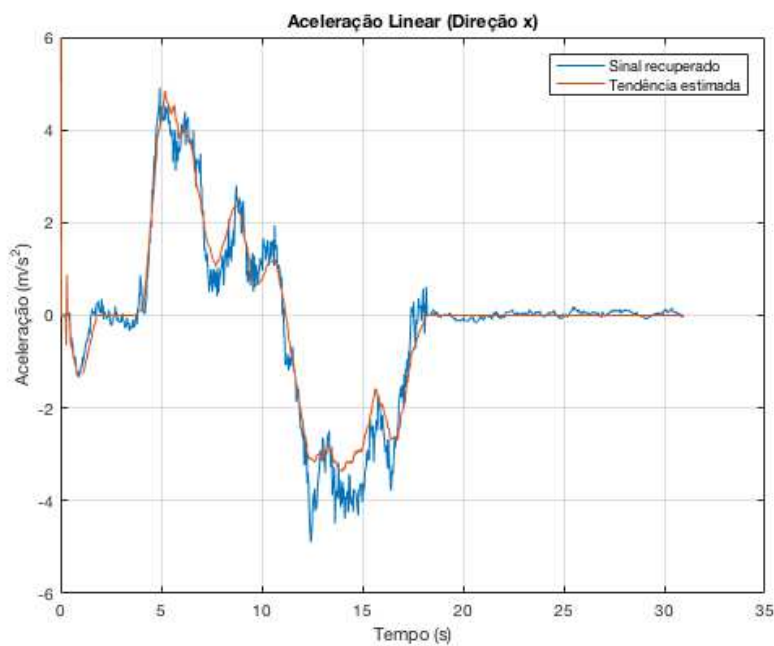
$$\hat{\mathbf{a}}[k] = \hat{\mathbf{a}}[k-1] - \mu \frac{\partial C[v[k]]}{\partial \mathbf{a}}(\mathbf{a} = \hat{\mathbf{a}}[k-1]) \quad (3.1.9)$$

Onde  $\mu$  é o passo do algoritmo, neste problema utilizado como 0.01. Logo, uma vez estimado o sinal de excitação, o mesmo passa pelo detector de limiar e, caso a amostra seja maior (em módulo) do que o limiar aceitável  $\rho$ , a amostra é descartada e repostada por meio de um interpolador autoregressivo [4], que se baseia nos parâmetros estimados  $\hat{\mathbf{a}}$  para estimar amostras condizentes do processo  $x[k]$ . Por meio da implementação desta metodologia, foi escolhida uma ordem  $p = 10$  para o modelo autoregressivo e um fator de limiar  $\rho = 0.5$ , obtendo-se os resultados expressos na **Tabela 3.1.5**:

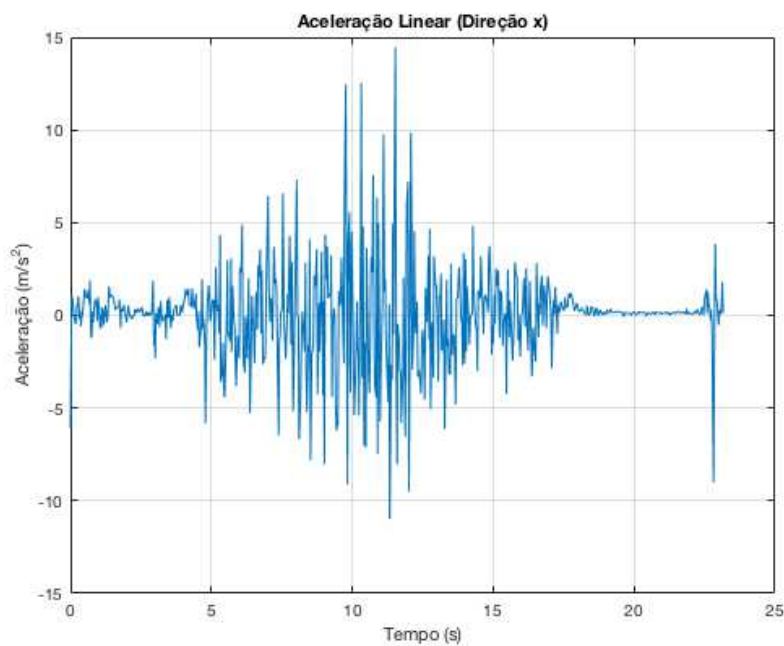
**Tabela 3.1.5:** Resultados obtidos aos estimadores do modelo autoregressivo

Parâmetro ( $a_m$ )	Estimativa ( $\hat{a}_m$ )	Erro Padrão
$a_1$	0.52	0.010
$a_2$	0.38	0.015
$a_3$	$1.16 \times 10^{-4}$	0.012
$a_4$	$2.10 \times 10^{-5}$	0.028
$a_5$	$1.05 \times 10^{-4}$	0.045
$a_6$	$3.67 \times 10^{-5}$	0.109
$a_7$	$2.12 \times 10^{-5}$	0.057
$a_8$	$1.23 \times 10^{-4}$	0.016
$a_9$	$7.54 \times 10^{-5}$	0.011
$a_{10}$	$4.35 \times 10^{-4}$	0.090

Se faz possível notar que a escolha conservadora de uma ordem alta para o modelo retornou valores estatisticamente insignificantes para as estimativas dos coeficientes de ordem 3 em diante, providenciando fortes indícios estatísticos de que o modelo real do sinal é um AR(2). A **Fig. 3.1.14** apresenta as amostras do sinal recuperado pelo sistema, enquanto a **Fig. 3.1.15** apresenta o sinal ruidoso de excitação,  $v[k]$ :



**Figura 3.1.14:** Sinal recuperado pelo sistema proposto, comparado à tendência estimada



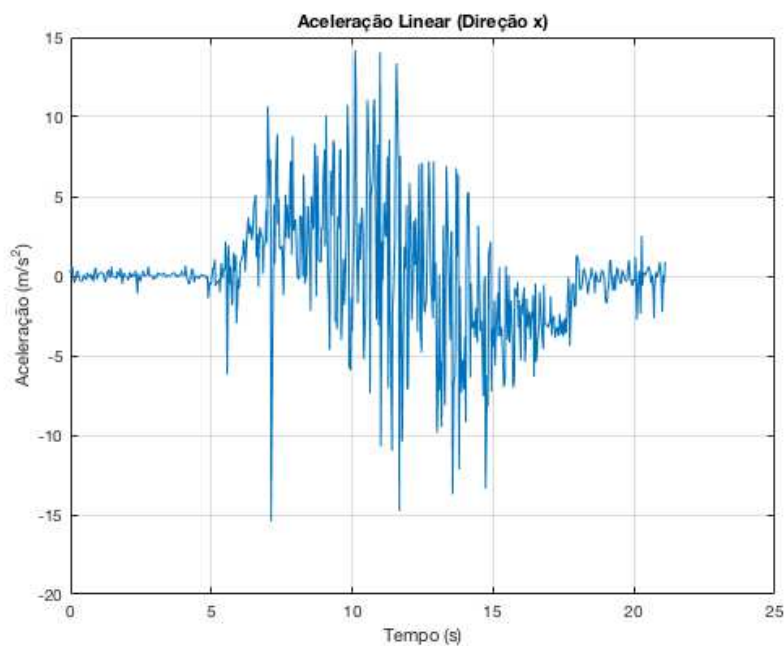
**Figura 3.1.15:** Ruído de excitação do modelo AR(2), contaminado por impulsos

Nota-se que o sinal recuperado se aproxima da tendência previamente estimada, bem como o ruído de excitação é próximo do resultado da subtração do sinal original pela tendência estimada. O método proposto, portanto, apresenta resultados condizentes com o regime a priori conhecido e com os resultados previamente encontrados.

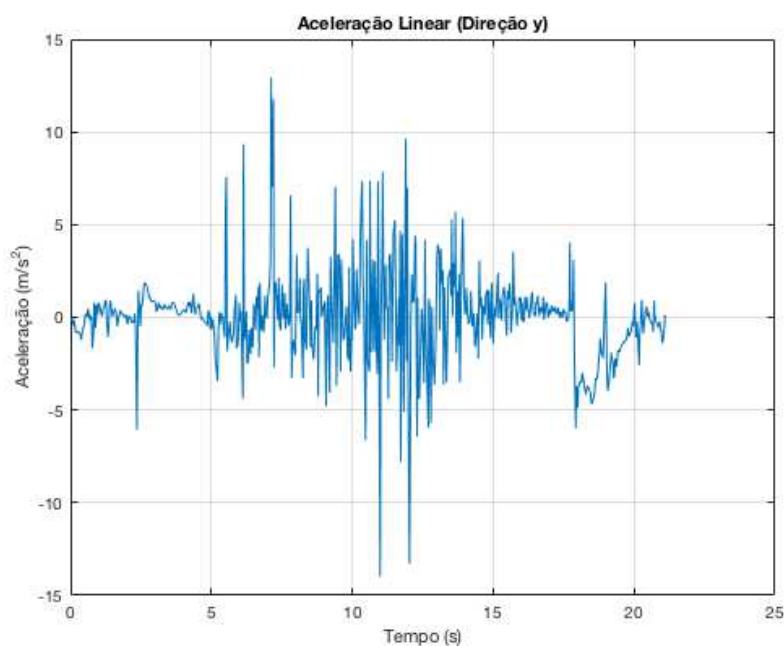
### 3.2

#### Teste 14: Análise em Linha Reta seguida de Active

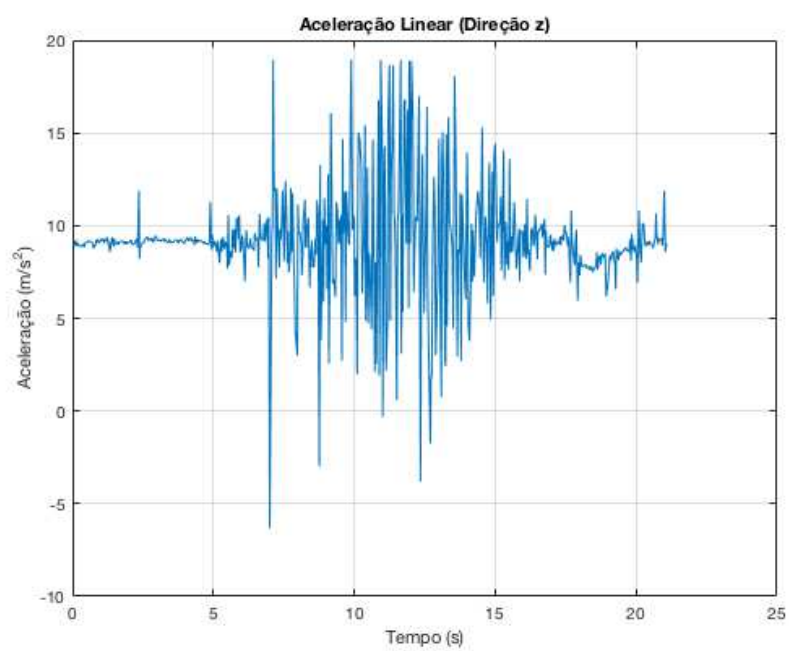
Neste problema, serão considerados os aspectos mencionados na **Seção 2.3.2** para modelagem dos sinais desejados às medições. Primeiramente, as subsequentes figuras apresentam os dados crus obtidos:



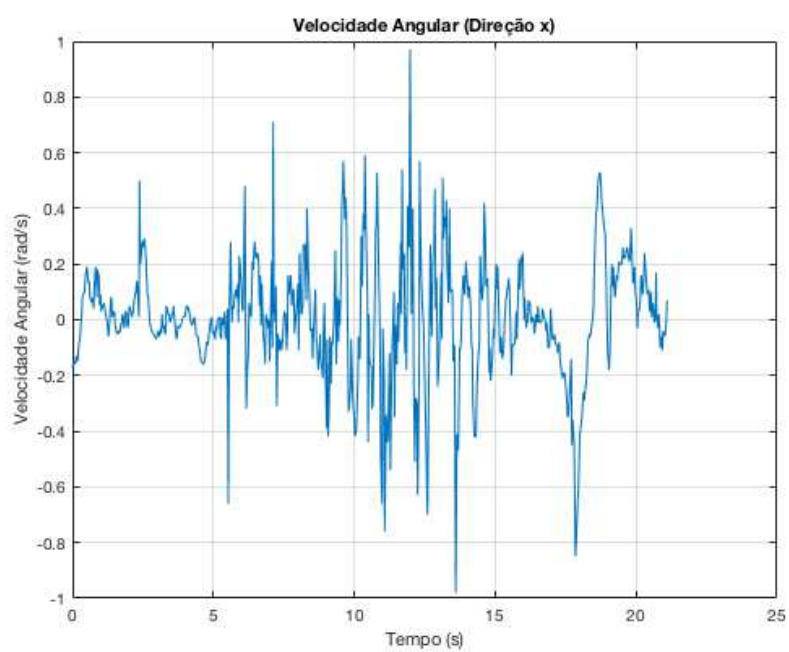
**Figura 3.2.1:** Aceleração linear na direção  $x$ , teste 14



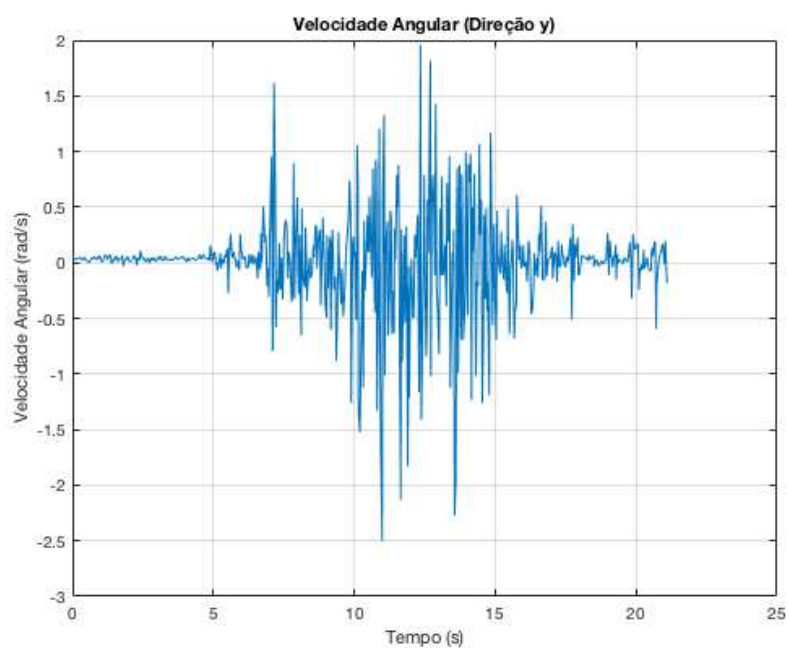
**Figura 3.2.2:** Aceleração linear na direção  $y$ , teste 14



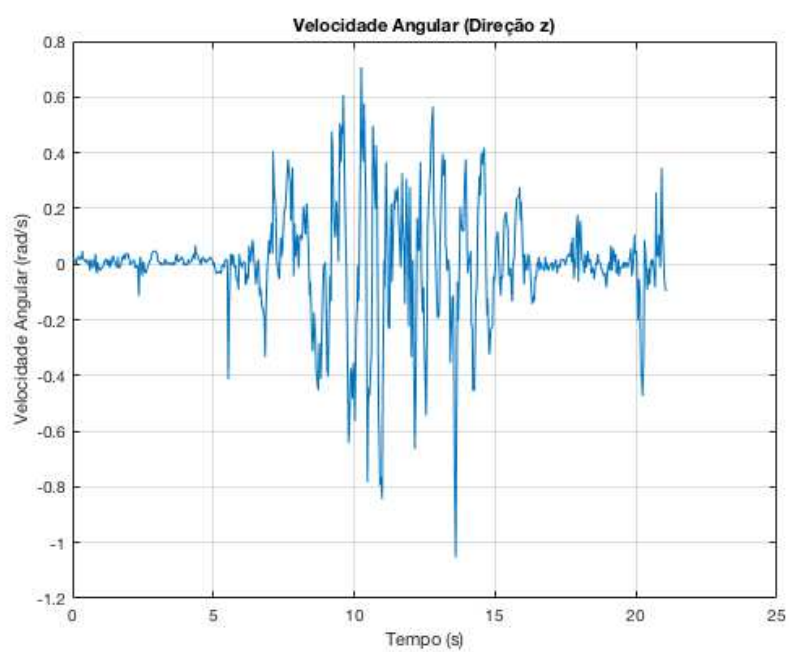
**Figura 3.2.3:** Aceleração linear na direção z, teste 14



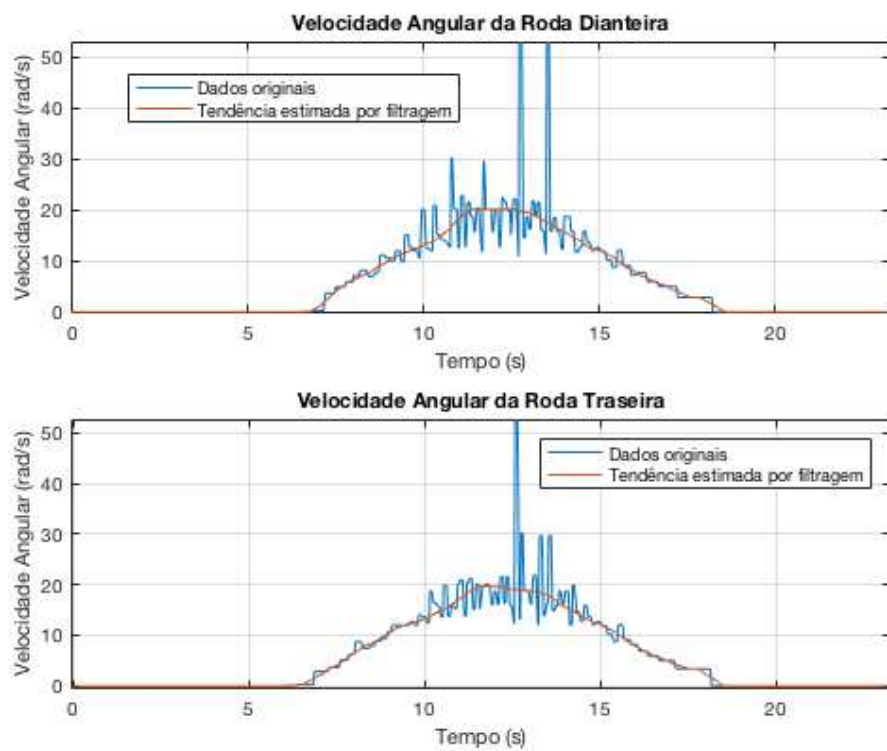
**Figura 3.2.4:** Velocidade angular na direção x, teste 14



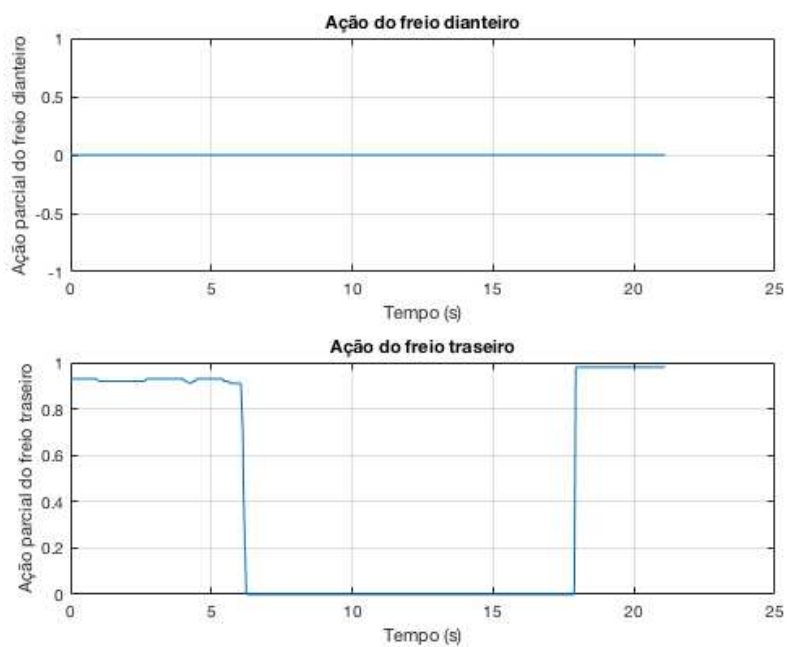
**Figura 3.2.5:** Velocidade angular na direção y, teste 14



**Figura 3.2.6:** Velocidade angular na direção z, teste 14

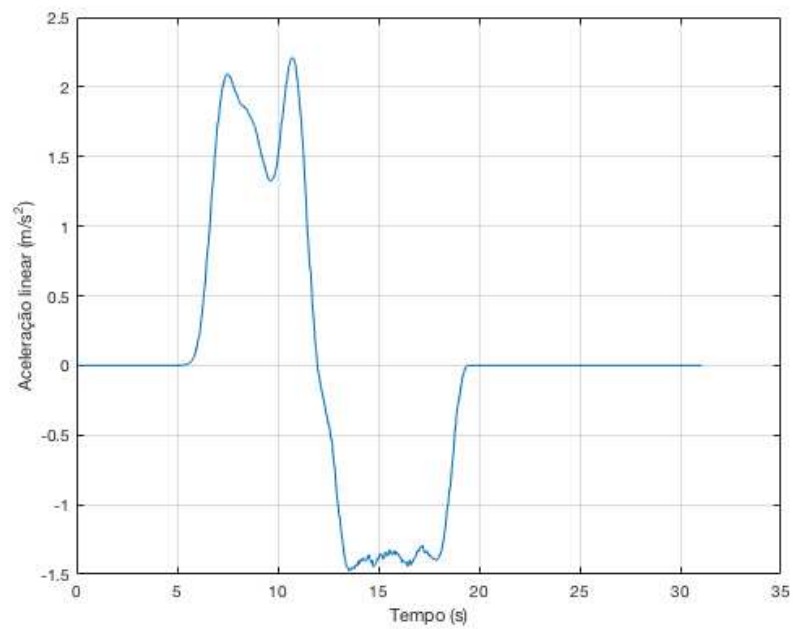


**Figura 3.2.7:** Velocidades angulares das rodas dianteira e traseira, dados originais e pós-filtragem, teste 14



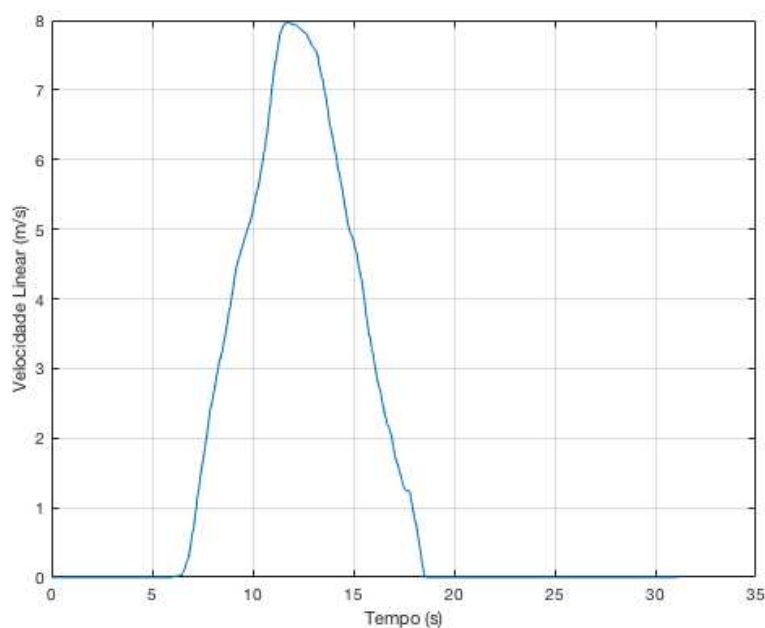
**Figura 3.2.8:** Ação dos freios dianteiro e traseiro, teste 14

Através da tendência estimada para a velocidade angular das rodas e assumindo um raio de 40 cm para a roda da bicicleta, foi estimada a curva de aceleração linear:



**Figura 3.2.9:** Sinal estimado para aceleração linear, teste 14

Este teste em particular possui a peculiaridade de que a ação dos freios não foi utilizada em momento algum com o intuito de desacelerar a bicicleta mediante movimentação. O teste foi realizado acelerando a bicicleta em linha reta e, ao chegar a um aclave, deixar que somente a gravidade desacelerasse a bicicleta, acionando os freios apenas ao final (quando a velocidade chegasse a 0), somente para impedir o veículo de começar a descer na direção oposta (declive). Tal aspecto pode ser facilmente visualizado na **Fig. 3.2.9** acima, onde, passados em torno de 12 segundos do início do experimento, a aceleração se torna negativa e praticamente constante (com pequenas oscilações que podem ser frutos de erros de medição não filtrados e ruído gerado no processo de diferenciação numérica) até em torno de 18 segundos, até o ponto em que é zerada. Nota-se, portanto, que a aceleração neste intervalo diz respeito à componente  $g \cdot \sin \theta$  que se opõe ao movimento em aclave. Sendo assim, é possível estimar o ângulo de aclave com base na análise da **Fig. 3.2.9** ou da subsequente **Fig. 3.2.10**, que apresenta a tendência estimada da velocidade linear (em módulo) do veículo:



**Figura 3.2.10:** Sinal estimado para velocidade linear, teste 14

A redução de velocidade se dá praticamente de maneira retilínea, conforme previsto pelo modelo, onde o ângulo de aclave,  $\theta$ , foi estimado pela taxa de variação média da função no intervalo de decrescimento, resultando em:

$$\begin{aligned} g \cdot \sin \hat{\theta} &= 0.154 \\ \hat{\theta} &= 8.86^\circ \end{aligned} \tag{3.2.1}$$

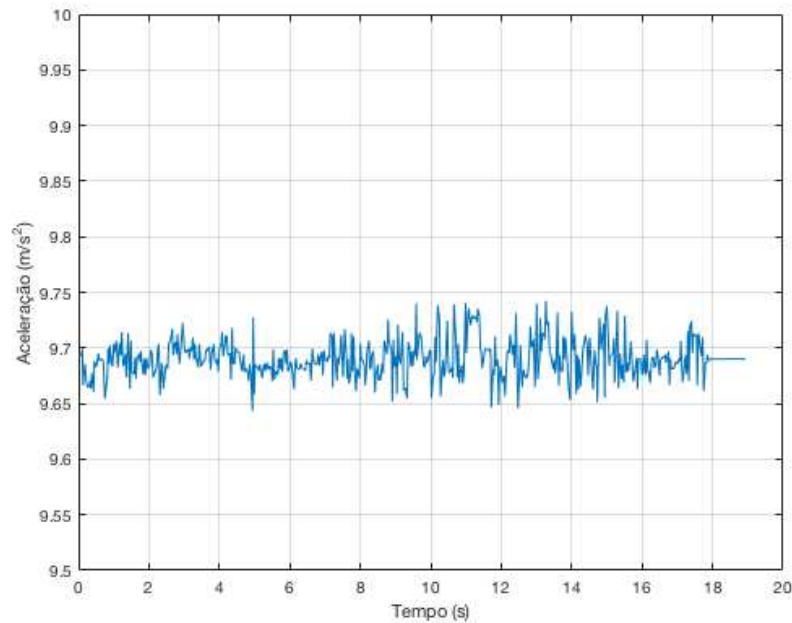
O resultado oferece uma estimativa plausível, vide o fato de que representa uma rampa com inclinação de 16%.

A verificação deste valor e constatação da consistência da estimativa podem ser realizadas por meio de análises dos sinais influenciados pela existência de alicive. Ao observar, por exemplo, a **Fig. 3.2.3**, é possível perceber que, diferentemente do ocorrido no teste 1, o sinal parece oscilar em torno de um valor médio menor do que  $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ , indicando a leitura da componente  $g \cdot \cos \theta$ . Para melhor avaliação, foi implementada a mesma metodologia de detecção e supressão de ruído impulsivo proposta na **Seção 3.1** no sinal de aceleração linear na direção z, retornando os seguintes resultados:

**Tabela 3.2.1:** Resultados obtidos aos estimadores do modelo autoregressivo, aceleração linear na direção z

Parâmetro ( $a_m$ )	Estimativa ( $\hat{a}_m$ )	Erro Padrão
$a_1$	0.01	0.010
$a_2$	0.05	0.015
$a_3$	0.03	0.012
$a_4$	$4.14 \times 10^{-5}$	0.096
$a_5$	$2.72 \times 10^{-4}$	0.089
$a_6$	$8.04 \times 10^{-7}$	$1.04 \times 10^{-4}$
$a_7$	$2.23 \times 10^{-5}$	$5.95 \times 10^{-4}$
$a_8$	$9.67 \times 10^{-9}$	$1.28 \times 10^{-5}$
$a_9$	$2.97 \times 10^{-9}$	$4.74 \times 10^{-7}$
$a_{10}$	$6.60 \times 10^{-12}$	$3.97 \times 10^{-6}$

O procedimento de filtragem retornou um processo autoregressivo de ordem 3 com pesos de regressão um tanto quanto pequenos. Sendo assim, isto indica que o processo possui fraca dependência de amostras anteriores (até 3 lags) e tende, portanto, a se comportar praticamente como ruído colorido. Abaixo, a **Fig. 3.2.11**: mostra o sinal recuperado:



**Figura 3.2.11:** Sinal recuperado para a aceleração linear no eixo z pelo circuito de detecção e supressão de ruído impulsivo

Fica claro que o sinal recuperado é estacionário na média, de forma que é possível estimar seu valor esperado através de médias temporais. Essa média, portanto, deve ser aproximadamente igual a  $g \cdot \cos \theta$ . Calculando, tem-se:

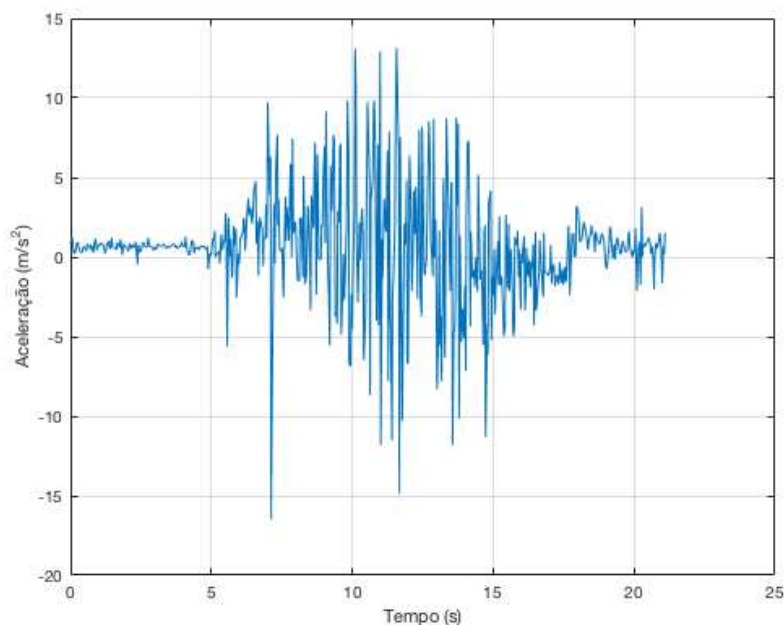
$$\begin{aligned} g \cdot \cos \hat{\theta} &= 9.6891 \\ \hat{\theta} &= 9.01^\circ \end{aligned} \tag{3.2.2}$$

As estimativas obtidas em ambos os casos se mostraram compatíveis, quando desprezados pequenos erros, providenciando evidências de acurácia do modelo. Visando uma última verificação, o procedimento de detecção e supressão de ruído impulsivo também será aplicado ao sinal de aceleração na direção  $x$ , de forma a avaliar a consistência da tendência estimada por diferenciação numérica. Partindo do princípio de que a tendência possui comportamento semelhante ao da observada na **Seção 3.1**, o modelo proposto neste caso possuirá menor ordem, limitado a  $p = 4$ . Os resultados se encontram expressos na **Tabela 3.2.2**:

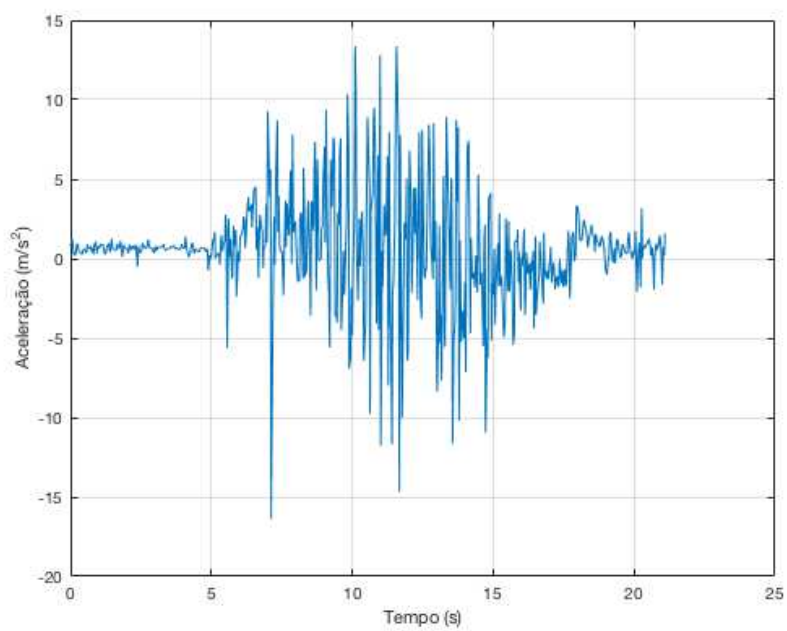
**Tabela 3.2.2:** Resultados obtidos aos estimadores do modelo autoregressivo, aceleração linear na direção  $x$

Parâmetro ( $a_m$ )	Estimativa ( $\hat{a}_m$ )	Erro Padrão
$a_1$	0.49	0.010
$a_2$	0.39	0.015
$a_3$	$1.40 \times 10^{-3}$	$3.57 \times 10^{-4}$
$a_4$	$4.14 \times 10^{-4}$	0.023

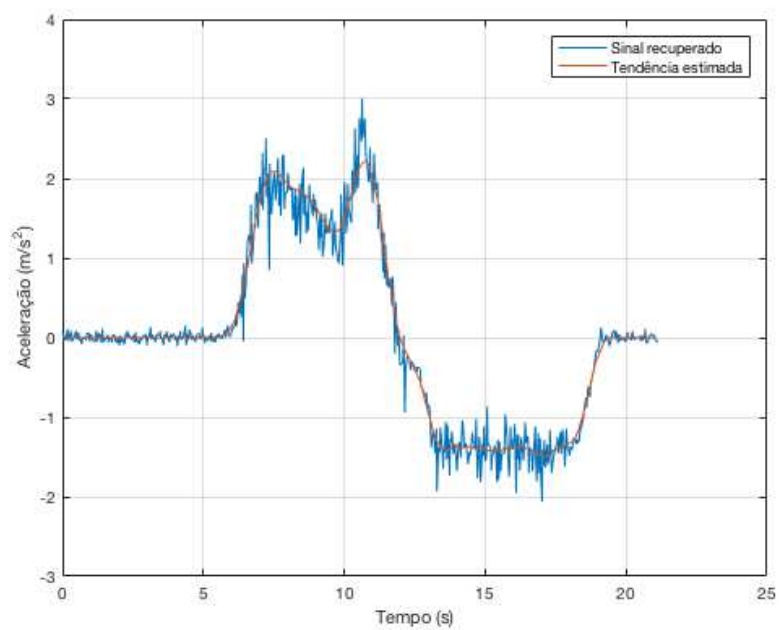
Nota-se que, conforme esperado, a semelhança entre as formas de onda apresentadas nesta e na prévia seção implicou em um conjunto de coeficientes próximos, porém neste caso tratando-se de um AR(3) com o terceiro coeficiente pequeno, porém não estatisticamente insignificante. Abaixo, as **Fig. 3.2.12**, **Fig. 3.2.13** e **Fig. 3.2.14** apresentam os resultados gráficos, bem como comparações com os estimados a partir dos dados de velocidade angular das rodas:



**Figura 3.2.12:** Sinal obtido ao subtrair a tendência estimada da medição original da IMU



**Figura 3.2.13:** Sinal de excitação do processo autoregressivo, contaminado por impulsos



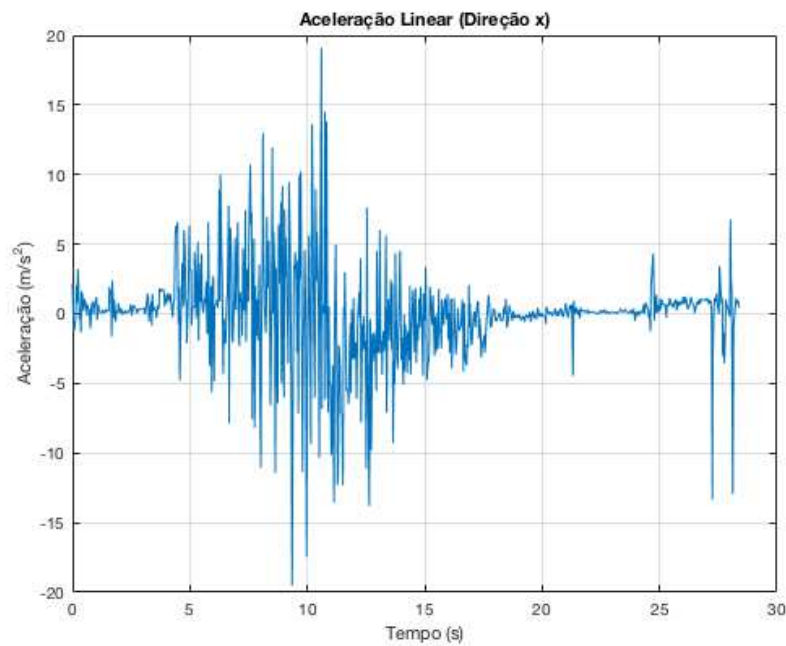
**Figura 3.2.14:** Sinal recuperado pelo sistema proposto, comparado à tendência estimada

Fica visível que, para este caso, o sistema foi capaz de captar o comportamento da aceleração linear de forma um tanto quanto precisa, com menores desvios em média do que os resultados obtidos na **Seção 3.1**. A utilização, porém, de um sistema de supressão de ruído impulsivo impede, sob a ótica desta metodologia, a identificação do impulso manifestado na velocidade angular de *pitch* característico da entrada em aclave. Ainda assim, conforme se fez claro nesta última seção, é possível avaliar a consistência das estimativas com base em outras medições relacionadas ao regime.

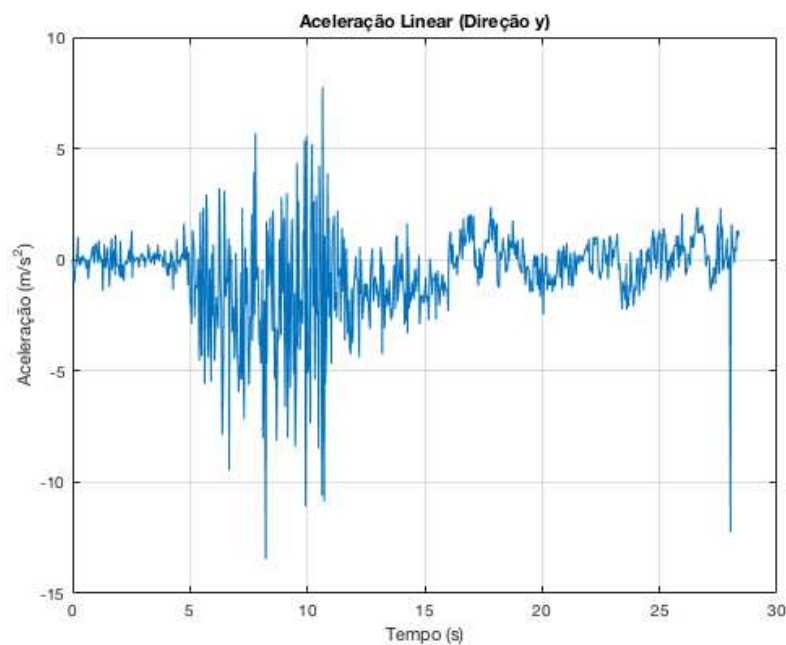
### 3.3

#### Teste 4: Análise em Movimento Circular (Skid Pad)

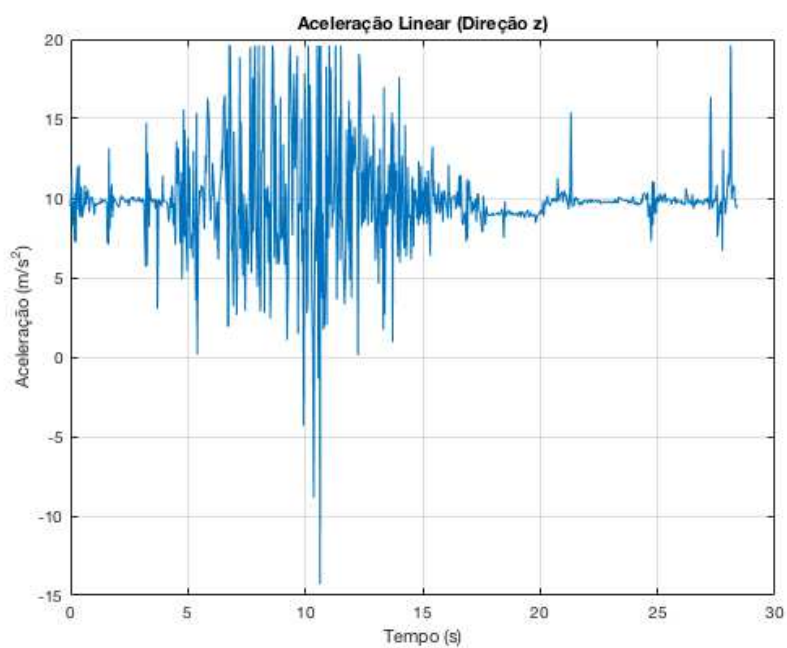
Neste problema, serão considerados os aspectos mencionados na **Seção 2.3.3** para modelagem dos sinais desejados às medições. Primeiramente, as subsequentes figuras apresentam os dados crus obtidos:



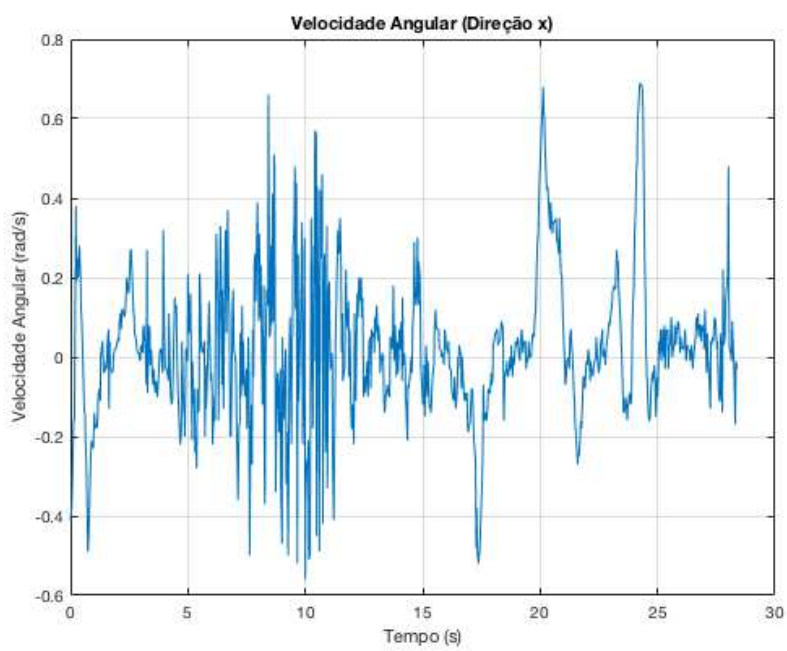
**Figura 3.3.1:** Aceleração linear na direção  $x$ , teste 4



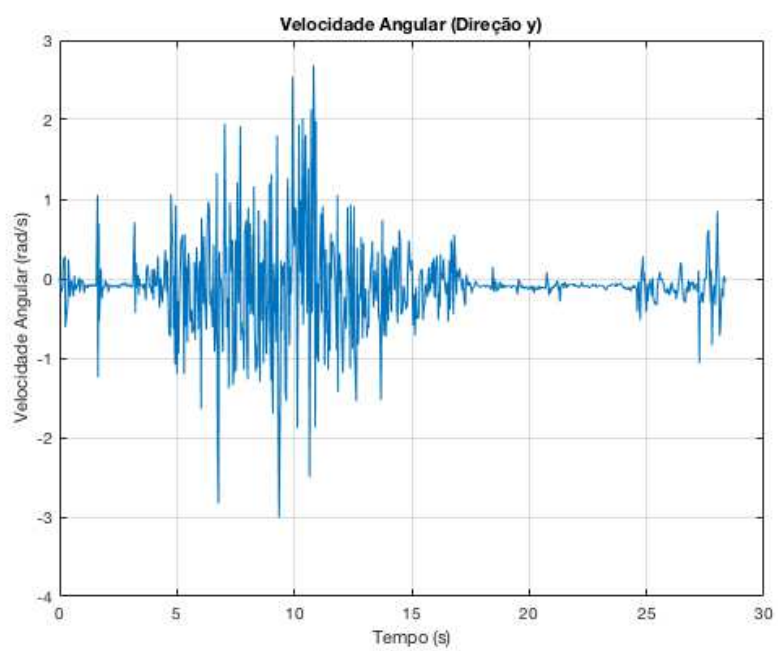
**Figura 3.3.2:** Aceleração linear na direção  $y$ , teste 4



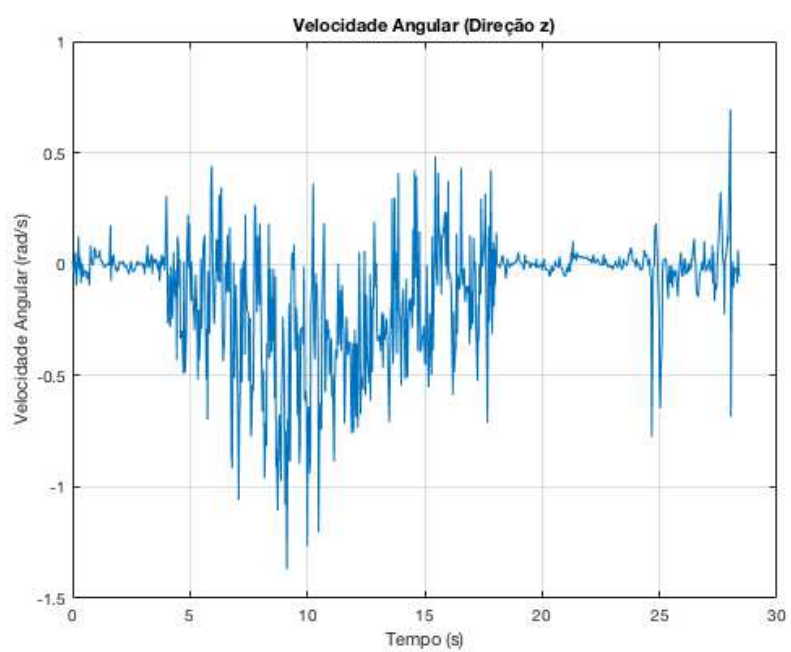
**Figura 3.3.3:** Aceleração linear na direção z, teste 4



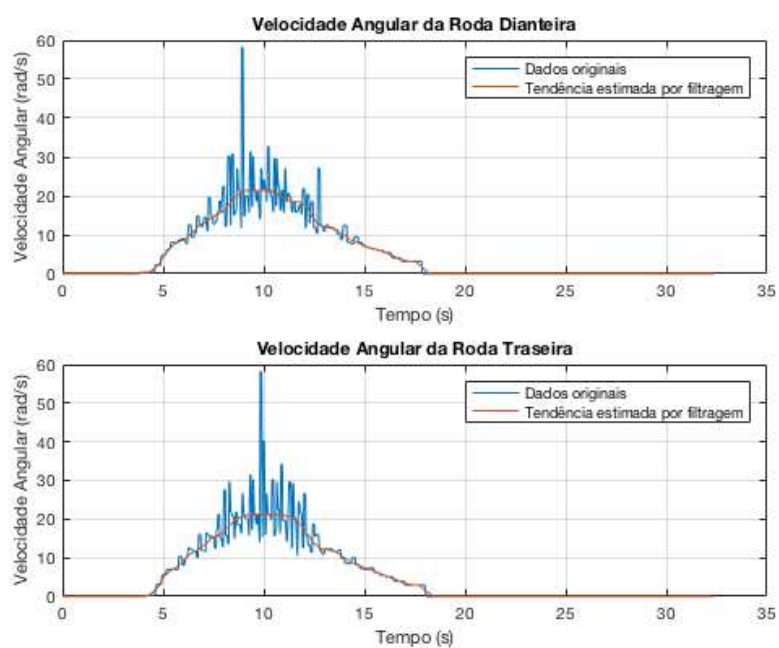
**Figura 3.3.4:** Velocidade angular na direção x, teste 4



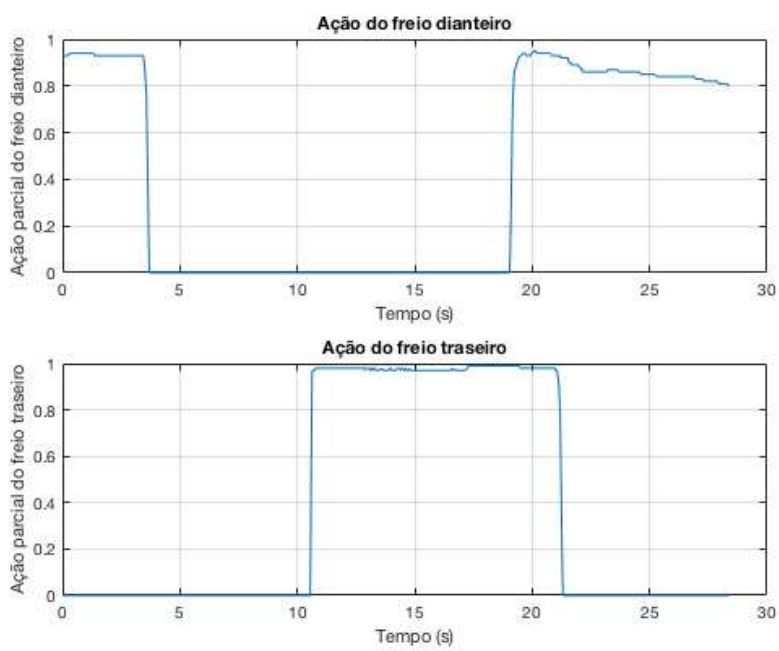
**Figura 3.3.5:** Velocidade angular na direção y, teste 4



**Figura 3.3.6:** Velocidade angular na direção z, teste 4

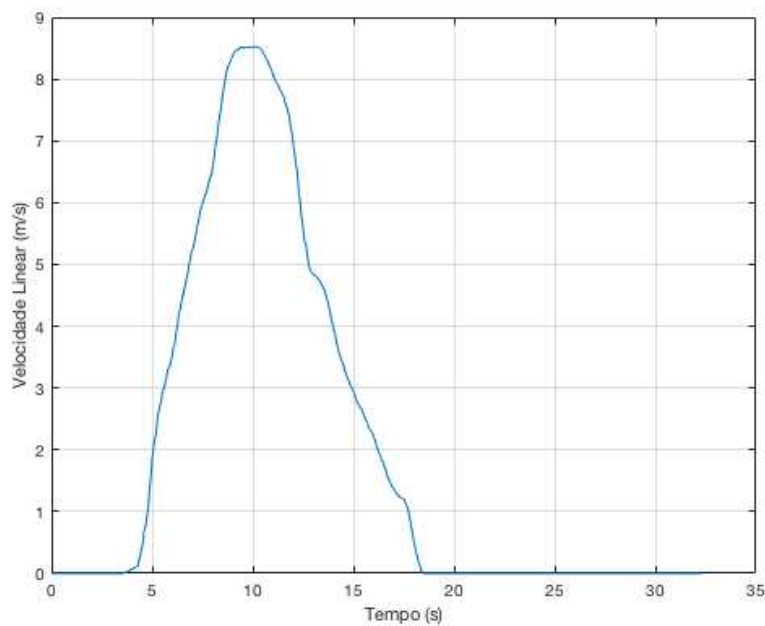


**Figura 3.3.7:** Velocidades angulares das rodas dianteira e traseira, dados originais e pós-filtragem, teste 4

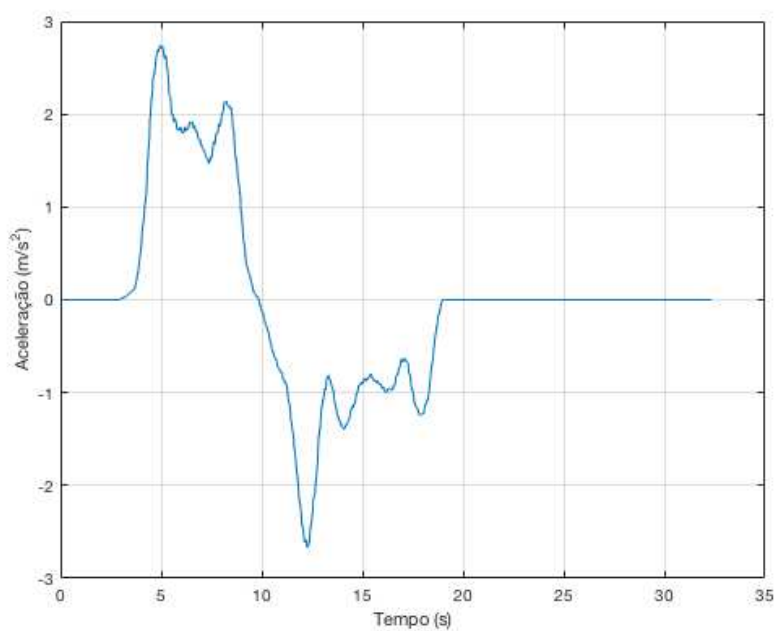


**Figura 3.2.8:** Ação dos freios dianteiro e traseiro, teste 4

A configuração na qual os testes foram realizados é conhecida a priori, conforme previamente mencionado, porém sem o devido conhecimento do raio da pista circular. O mesmo, portanto, deve ser estimado com auxílio das informações obtidas do conjunto de dados da IMU e a estimativa aferida com auxílio dos dados de referência. Primeiramente, se faz necessária a verificação das tendências estimadas à aceleração e velocidade lineares:



**Figura 3.3.9:** Sinal estimado para velocidade linear, teste 4



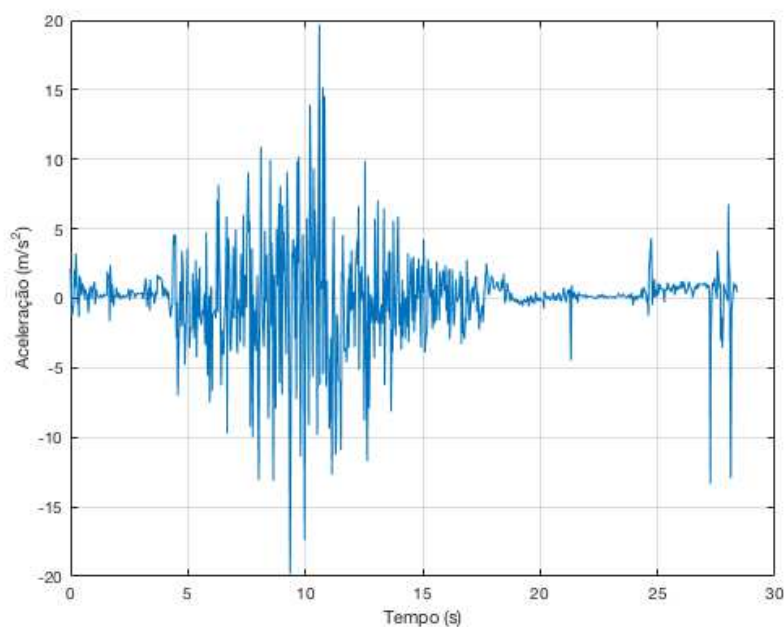
**Figura 3.3.10:** Sinal estimado para aceleração linear, teste 4

Avaliando as **Fig. 3.3.1** e **Fig. 3.3.10**, é possível observar que a medição de aceleração linear na direção  $x$  obtida pela IMU possui aspectos em comum com a tendência estimada. Valendo-se, portanto, da metodologia previamente utilizada para recuperação do sinal corrompido por ruído impulsivo, tem-se os resultados expressos na posterior **Tabela 3.3.1**:

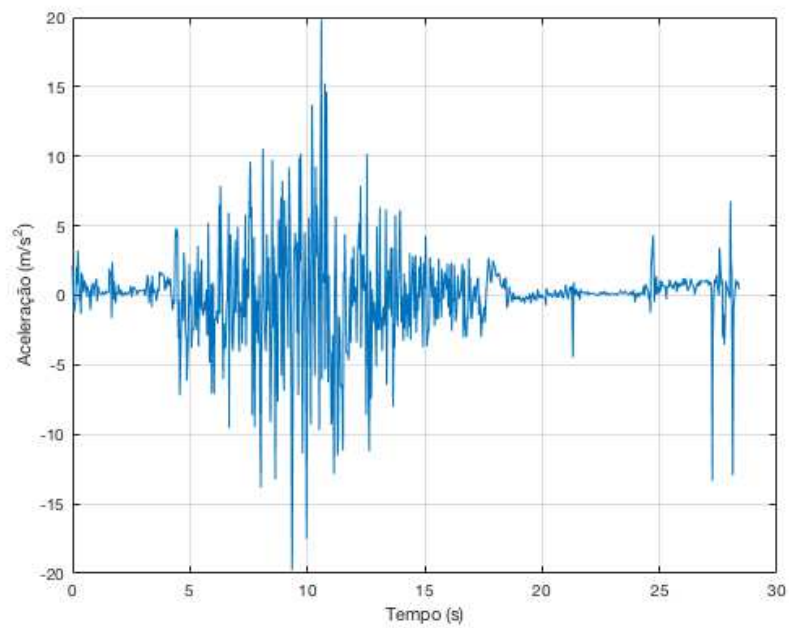
**Tabela 3.3.1:** Resultados obtidos aos estimadores do modelo autoregressivo, aceleração linear na direção  $x$

Parâmetro ( $a_m$ )	Estimativa ( $\hat{a}_m$ )	Erro Padrão
$a_1$	0.48	0.040
$a_2$	0.45	0.072
$a_3$	$3.41 \times 10^{-5}$	$3.57 \times 10^{-4}$
$a_4$	$9.32 \times 10^{-4}$	$8.93 \times 10^{-4}$

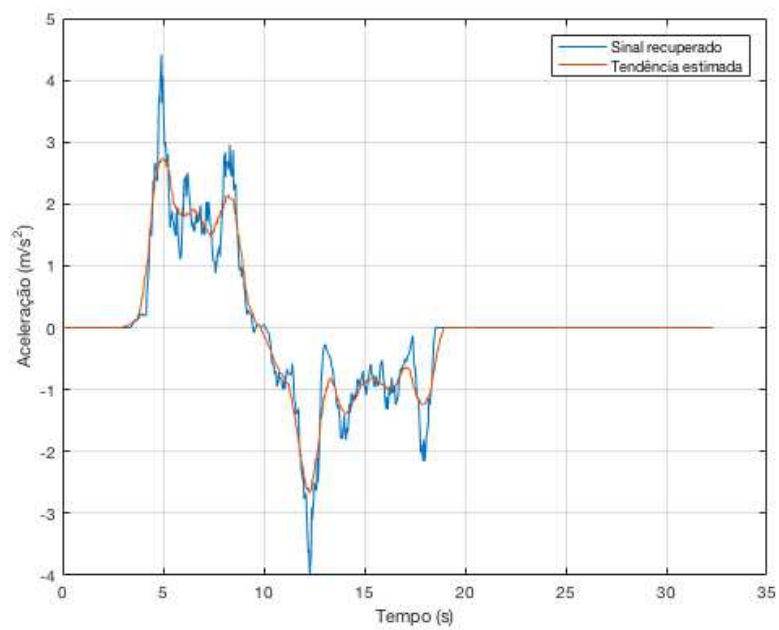
Conforme esperado, devido à semelhança na forma de onda estimada à tendência da aceleração linear nos 3 testes, os resultados retornados para os coeficientes do modelo auto-regressivo foram de semelhante magnitude, além do fato que os modelos seguem a mesma ordem (com exceção do segundo teste apresentado que, porém, apresenta um terceiro coeficiente pequeno, porém não estatisticamente insignificante). Abaixo, as **Fig. 3.3.11**, **Fig. 3.3.12** e **Fig. 3.3.13** apresentam os resultados gráficos:



**Figura 3.3.11:** Sinal obtido ao subtrair a tendência estimada da medição original da IMU



**Figura 3.3.12:** Sinal de excitação do processo autoregressivo, contaminado por impulsos



**Figura 3.3.13:** Sinal recuperado pelo sistema proposto, comparado à tendência estimada

Com a obtenção do sinal recuperado pelo sistema e sua clara proximidade da tendência previamente estimada, exposta na **Fig. 3.3.13**, tem-se fortes evidências da precisão do modelo. Sendo assim, deve existir associação direta da forma de onda estimada com a medida de aceleração lateral (aceleração linear na direção  $y$ ) que, em caso de teste em movimento circular, retornará a aceleração centrípeta à qual está sujeita a bicicleta em teste. Sabe-se, portanto, que:

$$a_c(t) = \frac{V^2(t)}{R} \quad (3.3.1)$$

A **Eq. 3.3.1** acima dita a relação entre a aceleração centrípeta ( $a_c$ ), a velocidade linear ( $V$ ) e o raio de curvatura ( $R$ ). Além disso, a medida de velocidade angular na direção  $z$  deve ser igual, em módulo, à velocidade angular de percorrimento do trajeto,  $\omega$ , que possui relação direta com a velocidade linear:

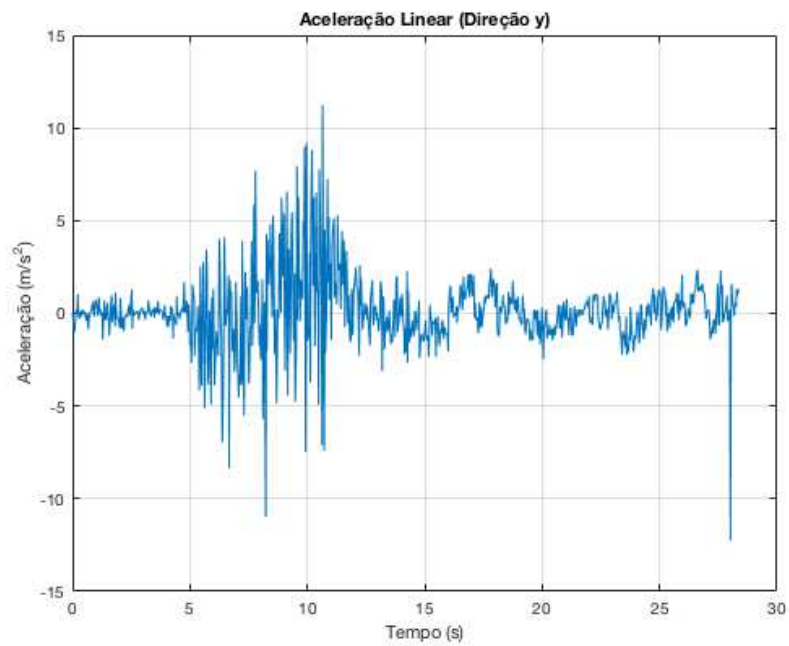
$$|\dot{\theta}(t)| = \omega(t) \quad (3.3.2)$$

$$\omega(t) = \frac{V(t)}{R} \quad (3.3.3)$$

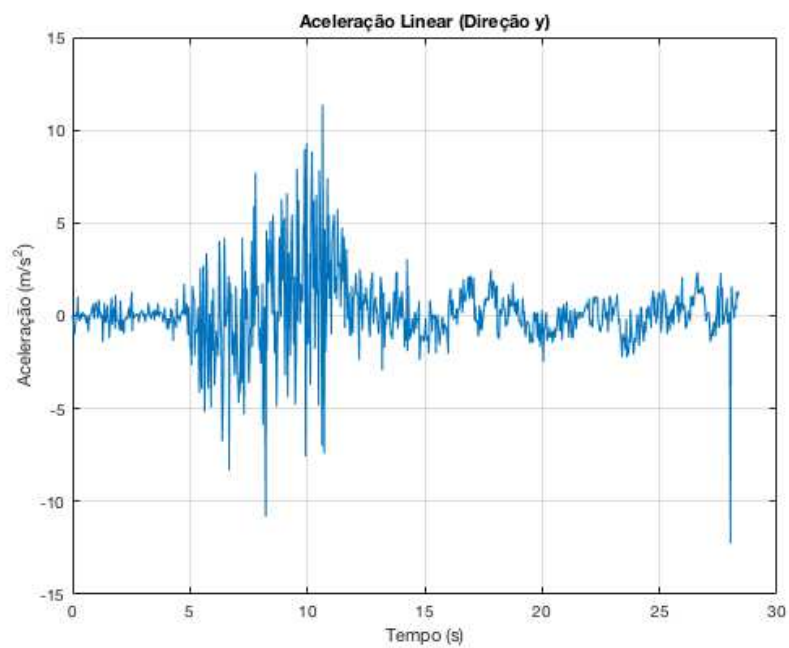
De forma a estimar consistentemente o raio  $R$ , portanto, o procedimento de detecção e supressão de ruído foi aplicado à medida de aceleração lateral da IMU, obtendo os resultados expostos a seguir:

**Tabela 3.3.2:** Resultados obtidos aos estimadores do modelo autoregressivo, aceleração linear na direção  $y$

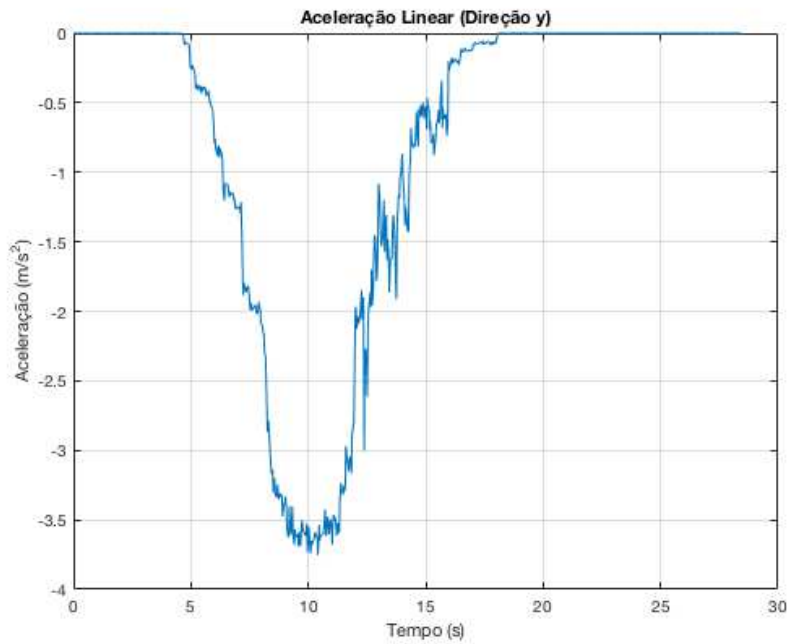
Parâmetro ( $a_m$ )	Estimativa ( $\hat{a}_m$ )	Erro Padrão
$a_1$	0.02	$6.46 \times 10^{-4}$
$a_2$	0.10	$5.37 \times 10^{-4}$
$a_3$	0.27	$7.27 \times 10^{-5}$
$a_4$	0.07	$4.63 \times 10^{-4}$
$a_5$	0.13	$3.38 \times 10^{-5}$
$a_6$	0.03	$2.73 \times 10^{-5}$
$a_7$	$7.91 \times 10^{-6}$	$8.54 \times 10^{-5}$
$a_8$	$6.43 \times 10^{-7}$	$9.68 \times 10^{-3}$
$a_9$	$5.08 \times 10^{-7}$	$7.64 \times 10^{-6}$
$a_{10}$	$8.82 \times 10^{-6}$	$4.20 \times 10^{-5}$



**Figura 3.3.14:** Sinal obtido ao subtrair a tendência estimada da medição original da IMU, aceleração lateral



**Figura 3.3.15:** Sinal de excitação do processo autoregressivo, contaminado por impulsos, aceleração lateral



**Figura 3.3.16:** Sinal recuperado pelo sistema proposto, aceleração lateral

Pode-se observar que o sinal recuperado pelo sistema, acima apresentado na **Fig. 3.3.16**, possui uma forma de onda um tanto quanto semelhante ao que seria o quadrado da velocidade linear, porém com uma atenuação em amplitude. Pela **Fig. 3.3.9**, espera-se um pico com módulo em torno de  $72 \text{ m}^2/\text{s}^2$  ao elevar a tendência estimada para a velocidade ao quadrado. Portanto, com os dados recém adquiridos, espera-se um raio de aproximadamente 20 m para o *SkidPad*. Além disso, o fato do sinal recuperado ser estritamente negativo provém fortes indícios de que a bicicleta está fazendo curva para a direita, de forma a medir uma aceleração lateral na direção oposta ao eixo y da IMU.

Visando, portanto, uma estimativa consistente do valor do raio, foi utilizado o estimador de mínimos quadrados [7]:

$$e[k] = -\frac{V^2[k]}{R} - x[k] \quad (3.3.4)$$

$$C(R) = \sum_{k=0}^n e[k]^2 = \sum_{k=0}^n \left( \frac{V^2[k]}{R} + x[k] \right)^2 \quad (3.3.5)$$

$$\hat{R} = \arg \max_R C(R) \quad (3.3.6)$$

$$\frac{\partial C}{\partial R}(\hat{R}) = 0 \Rightarrow \sum_{k=0}^n 2 \cdot \left( -\frac{V^2[k]}{\hat{R}^2} \right) \cdot \left( \frac{V^2[k]}{\hat{R}} + x[k] \right) = 0 \quad (3.3.7)$$

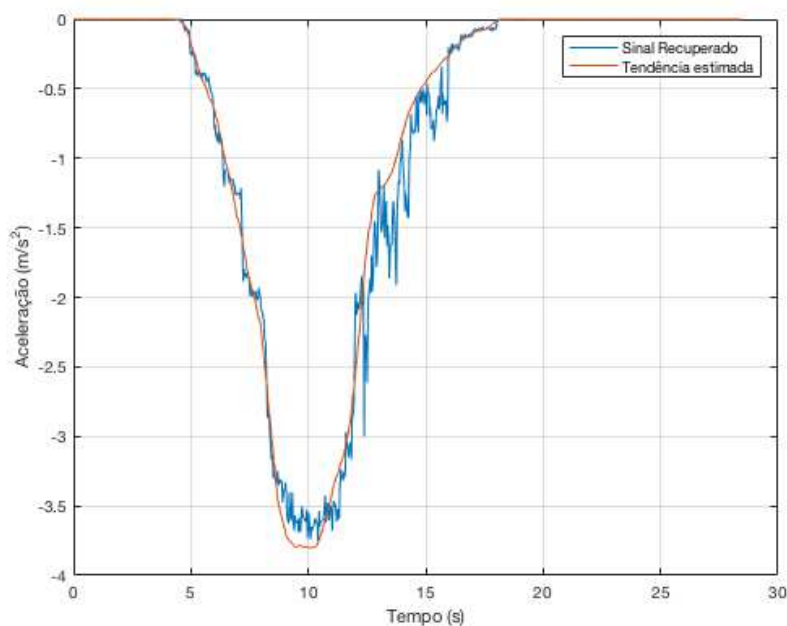
$$-\sum_{k=0}^n \left( \frac{V^4[k]}{\hat{R}^3} \right) = \sum_{k=0}^n \left( \frac{V^2[k] \cdot x[k]}{\hat{R}^2} \right)$$

$$\hat{R} = -\frac{\sum_{k=0}^n V^4[k]}{\sum_{k=0}^n V^2[k] \cdot x[k]} \quad (3.3.8)$$

Onde  $V[k]$  é a tendência estimada para a velocidade linear e  $x[k]$  é o sinal recuperado pelo sistema de detecção e supressão de ruído impulsivo. O resultado encontrado se encontra expresso na **Eq. 3.3.9**, abaixo:

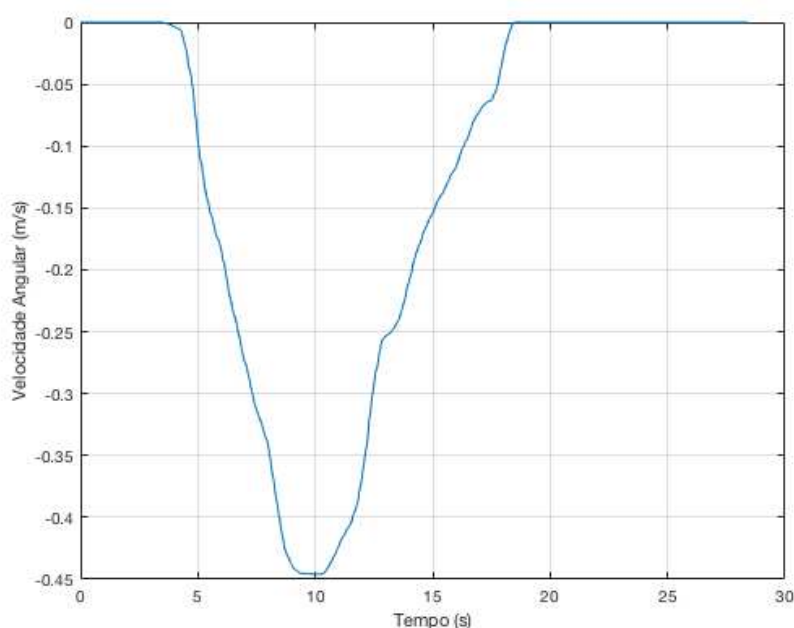
$$\hat{R} = 19.11 \text{ m} \quad (3.3.9)$$

A estimativa, portanto, se faz condizente com o esperado por análise gráfica. Utilizando o valor estimado para o raio, tem-se a seguinte forma de onda estimada ao sinal de aceleração centrípeta:



**Figura 3.3.17:** Sinal recuperado pelo sistema proposto, comparado à tendência estimada por mínimos quadrados, aceleração lateral

Conforme esperado, o sinal recuperado e sua tendência estimada se encontram um tanto quanto próximos, provendo indícios de que a estimativa utilizada para o raio da pista é consistente. Sendo assim, valendo-se das **Eq. 3.3.2** e **Eq. 3.3.3** e do valor estimado, é possível estimar a tendência da velocidade angular de *yaw*. Fica claro, pela própria medição disposta na **Fig. 3.3.6**, que a tendência de tal velocidade angular é majoritariamente negativa, reforçando a hipótese de que o movimento se daria em sentido horário de rotação. A **Fig. 3.3.18** abaixo mostra a tendência estimada:



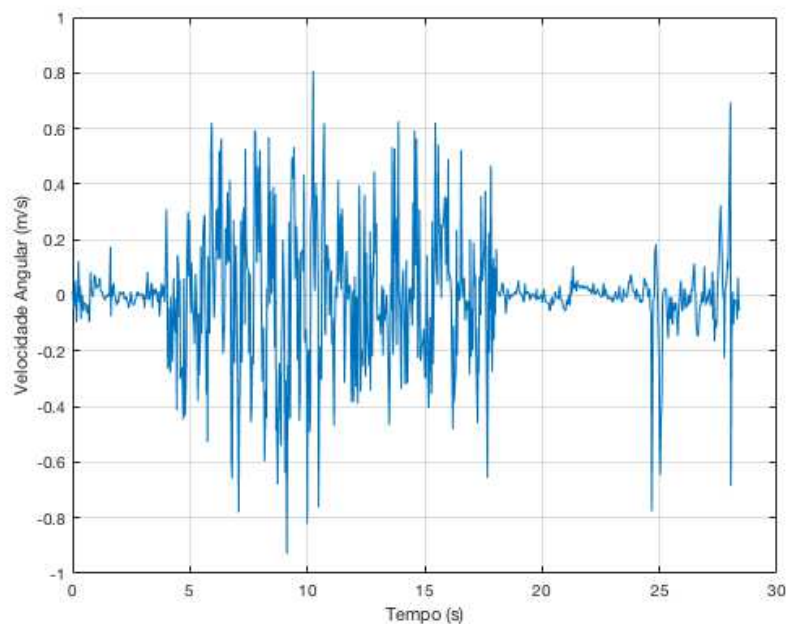
**Figura 3.3.18:** Tendência estimada à velocidade angular de *yaw*

Mais uma vez, utilizar-se-á a mesma metodologia de recuperação de sinal para verificar a consistência da forma de onda estimada, cujos resultados para as estimativas dos coeficientes do modelo autoregressivo se encontram expressos abaixo:

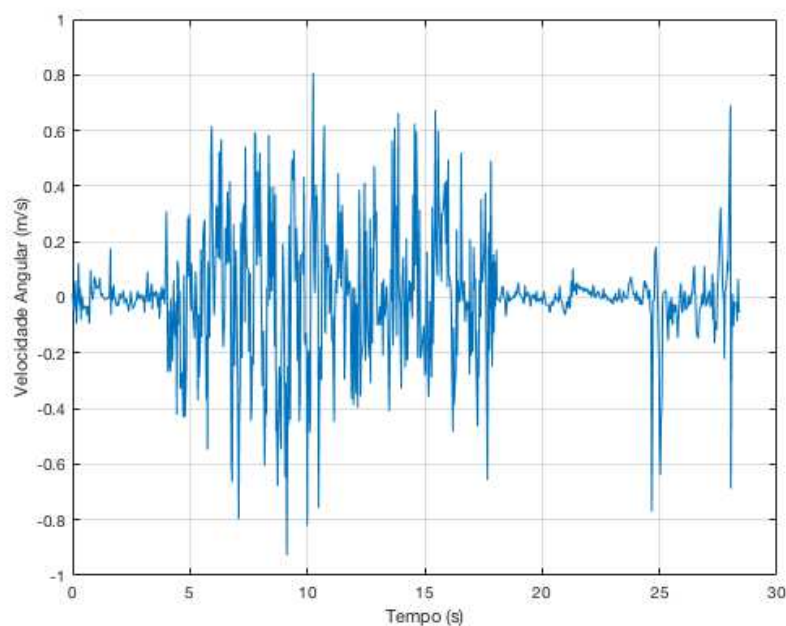
**Tabela 3.3.3:** Resultados obtidos aos estimadores do modelo autoregressivo, velocidade angular na direção *z*

Parâmetro ( $a_m$ )	Estimativa ( $\hat{a}_m$ )	Erro Padrão
$a_1$	0.04	$2.37 \times 10^{-3}$
$a_2$	0.12	$4.87 \times 10^{-4}$
$a_3$	0.35	$5.39 \times 10^{-4}$
$a_4$	0.03	$1.59 \times 10^{-3}$
$a_5$	0.21	$9.96 \times 10^{-5}$
$a_6$	0.01	$1.38 \times 10^{-7}$
$a_7$	$1.58 \times 10^{-6}$	$2.17 \times 10^{-6}$
$a_8$	$7.88 \times 10^{-8}$	$9.97 \times 10^{-5}$
$a_9$	$6.83 \times 10^{-6}$	$8.20 \times 10^{-6}$
$a_{10}$	$6.14 \times 10^{-7}$	$4.74 \times 10^{-4}$

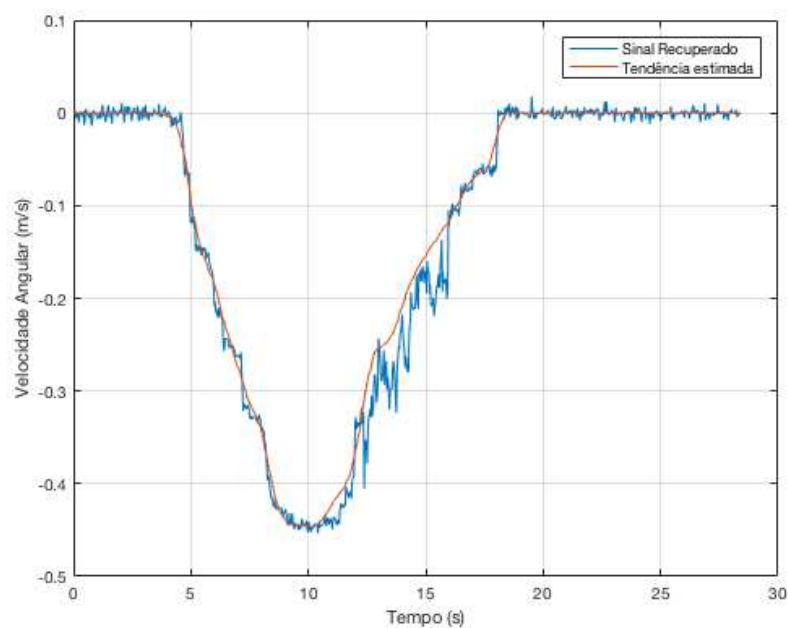
Se faz notável a semelhança entre os coeficientes obtidos para a aceleração centrípeta, porém com variações não desprezíveis. Isso se deve ao fato de ambos os sinais possuírem formas de onda semelhantes, porém as diferenças residindo no fator quadrático ou linear da velocidade que os diferencia. As **Fig. 3.3.19**, **Fig. 3.3.20** e **Fig. 3.3.21**, por sua vez, apresentam os resultados gráficos obtidos:



**Figura 3.3.19:** Sinal obtido ao subtrair a tendência estimada da medição original da IMU, velocidade angular na direção z



**Figura 3.3.20:** Sinal de excitação do processo autoregressivo, contaminado por impulsos, velocidade angular na direção z



**Figura 3.3.21:** Sinal recuperado pelo sistema proposto, comparado à tendência estimada por mínimos quadrados, velocidade angular na direção  $z$

Os resultados obtidos, portanto, reiteram as conclusões derivadas da análise da aceleração lateral. Conclui-se, portanto, que os testes foram realizados em uma pista circular com raio aproximado de 19.11 m, no sentido horário de rotação.

## 4 Conclusão

A metodologia implementada se mostrou, através dos resultados apresentados, eficiente na aferição das medidas realizadas pela IMU, desde que o operador possuísse conhecimento prévio dos regimes de teste. Os desafios expostos na compreensão das leituras de dados puderam ser eficientemente vencidos através de um sistema de estimação robusto e um modelo de eficácia previamente demonstrada. Para futuros trabalhos, propõe-se a construção de aferidor físico para acoplamento da IMU segundo as especificações propostas na **Seção 2.2** deste mesmo documento, sendo de interesse de ambos redator e seu orientador no desenvolvimento deste trabalho. Visando aumentar a robustez dos algoritmos utilizados, propõe-se também a implementação de métodos de otimização para definição de parâmetros de limiar na detecção de impulsos, bem como de métodos de classificação para definição do regime de teste sem conhecimento a priori.

## Referências bibliográficas

- [1] MEGGINSON; ROBERT, E. *An Introduction to Banach Space Theory*. New York, 1998.
- [2] ALUBQUERQUE, JOSÉ P.; FORTES, JOSÉ M.; FINAMORE, WELLER. *Probabilidade, Variáveis Aleatórias e Processos Estocásticos*, 1ª Edição, 2008.
- [3] OPPENHEIM, ALAN V.; WILLSKY, ALAN S. *Sinais e Sistemas*, 2ª Edição, 1983.
- [4] VASEGHI, SAEED V. *Advanced Digital Signal Processing and Noise Reduction*. John Wiley & Sons, 3<sup>rd</sup> Edition, 2006.
- [5] SOUZA, REINALDO C.; CAMARGO, MARIA E. *Análise e Previsão de Séries Temporais: os Modelos ARIMA*. 1ª Edição, 1980.
- [6] OPPENHEIM, ALAN. V.; SCHAFER, RONALD W. *Digital Signal Processing*. John Wiley & Sons, 2<sup>nd</sup> Edition, 1975.
- [7] CASELLA, GEORGE; BERGER, ROGER L. *Statistical Inference*. 2<sup>nd</sup> Edition, 1980.