

## 2

# O Problema Mecânico de Equilíbrio Estático em Condições Tridimensionais

Neste capítulo são apresentadas as equações de equilíbrio estático do problema mecânico em condições tridimensionais, as equações constitutivas, e a formulação em deslocamento do método dos elementos finitos juntamente com os algoritmos de solução de sistemas de equações algébricas não lineares, tanto em nível global, quanto em nível do ponto de Gauss.

### 2.1. Formulação em deslocamento do problema mecânico de equilíbrio estático

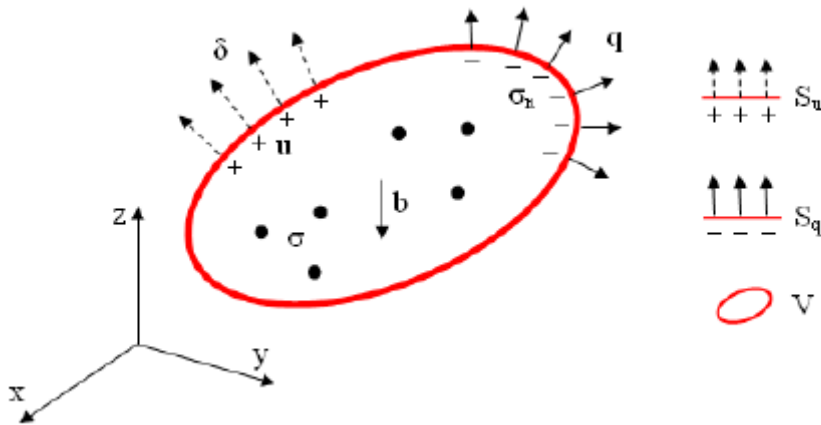


Figura 2.1 – Representação do domínio do problema e de fronteira (Adaptado de Yang, 2009)

A equação diferencial que representa o equilíbrio estático de um problema mecânico pode ser escrita como:

$$\nabla^T \sigma + b = 0 \text{ em } V \quad (2.1)$$

Em que  $V$  é o domínio do problema,  $\nabla$  é um operador diferencial de primeira ordem definido como:

$$\nabla^T = \begin{bmatrix} \partial/\partial x & 0 & 0 & \partial/\partial y & 0 & \partial/\partial z \\ 0 & \partial/\partial y & 0 & \partial/\partial x & \partial/\partial z & 0 \\ 0 & 0 & \partial/\partial z & 0 & \partial/\partial y & \partial/\partial x \end{bmatrix} \quad (2.1a)$$

e  $\boldsymbol{\sigma}$  é o vetor das componentes de tensão definido como:

$$\boldsymbol{\sigma}^T = [\sigma_x \quad \sigma_y \quad \sigma_z \quad \tau_{xy} \quad \tau_{yz} \quad \tau_{zx}] \quad (2.1b)$$

O vetor  $\mathbf{b}$  é o vetor de força de volume (força de corpo) definido como:

$$\mathbf{b}^T = [b_x \quad b_y \quad b_z] \quad (2.1c)$$

A Equação (2.1) deve atender às seguintes condições de contorno:

$$\boldsymbol{\sigma}\mathbf{n} = \mathbf{q} \text{ em } S_q \text{ (condição de contorno natural)} \quad (2.2a)$$

$$U_i = \delta \text{ em } S_u \text{ (condição de contorno essencial)} \quad (2.2b)$$

em que  $S_q$  e  $S_u$  são, respectivamente, os contornos do domínio do problema com força e deslocamentos prescritos. O vetor  $\mathbf{q}$  é o vetor de força de superfície,  $\mathbf{U}$  é o vetor de deslocamentos nodais e  $\delta$  é o valor do deslocamento nodal prescrito (nulo ou não) num ponto do contorno do domínio do problema.

A solução da Equação 2.1 não é trivial e às vezes só se torna possível para geometria, condições de contorno e carregamento muito simples. Portanto, procedimentos numéricos vêm sendo adotados para a obtenção de soluções ainda que aproximadas. Neste caso, a equação de equilíbrio (Equação 2.1) pode ser reescrita na forma do método dos elementos finitos como:

$$\mathbf{F}_{\text{int}} = \mathbf{F}_{\text{ext}} \quad (2.3)$$

em que  $\mathbf{F}_{\text{ext}}$  é o vetor de força externa que representa o arranjo global do vetor de força nodal equivalente às forças externa  $\mathbf{F}_{\text{ext}}^e$  definido como:

$$\mathbf{F}_{\text{ext}}^e = \mathbf{F}_s^e + \mathbf{F}_b^e + \mathbf{F}_\delta^e \quad (2.4)$$

O vetor de força externa  $\mathbf{F}_{\text{ext}}^e$  tem 3 parcelas: uma devida a forças de superfície:

$$\mathbf{F}_s^e = \int_{S_{qe}} \mathbf{N}^T \mathbf{q}^e dS_{qe} \quad (2.5a)$$

Outra devido a forças de peso próprio:

$$\mathbf{F}_b^e = \int_{V_e} \mathbf{N}^T \mathbf{b}^c dV_e \quad (2.5b)$$

E por fim, outra devido aos deslocamentos prescritos não nulos:

$$\mathbf{F}_\delta^e = -\mathbf{K}^e \boldsymbol{\delta} \quad (2.5c)$$

$\boldsymbol{\delta}$  é o vetor de deslocamentos prescritos e  $\mathbf{K}^e$  é a matriz de rigidez que será apresentada adiante. Nestas equações  $\mathbf{N}$  é a matriz de interpolação que contém as funções de interpolação  $N_i$  que dependem do tipo de elemento (ver Capítulo 3).

O vetor de força interna  $\mathbf{F}_{int}$  (Equação 2.3) representa o arranjo global do vetor de força nodal  $\mathbf{F}_{int}^e$  equivalente ao estado de tensão  $\boldsymbol{\sigma}$  em um dado elemento, o qual é definido como:

$$\mathbf{F}_{int}^e = \int_{V_e} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma} dV_e \quad (2.6)$$

O operador  $\mathbf{B}$  é a matriz cinemática que contém as derivadas das funções de interpolação  $N_i$  (ver Capítulo 3).

A equação de equilíbrio representada pela Equação 2.3 define um sistema de equações não lineares devido à não linearidade da parcela de força interna. Assim sendo, uma estratégia de solução deve ser adotada de modo a garantir a condição de equilíbrio global. Dentre as tantas estratégias encontradas na literatura, as que adotam um procedimento puramente incremental e incremental iterativo de Newton Raphson foram implementados no ANLOG e são descritas na Figura 2.2.

Em ambos os casos, a solução do problema é obtida atualizando-se o vetor de deslocamento nodal  $\hat{\mathbf{U}}_{n+1}$  no final de cada incremento de carga  $\Delta \mathbf{F}_{ext}$  fazendo:

$$\hat{\mathbf{U}}_{n+1} = \hat{\mathbf{U}}_n + \Delta \hat{\mathbf{U}} \quad (2.7)$$

em que  $\hat{\mathbf{U}}_n$  é o vetor de deslocamento nodal (a nível global) no início de um dado incremento de carga e  $\Delta \hat{\mathbf{U}}$  é o vetor de incremento de deslocamento nodal (a nível global) associado ao incremento de carga  $\Delta \mathbf{F}_{ext}$ .

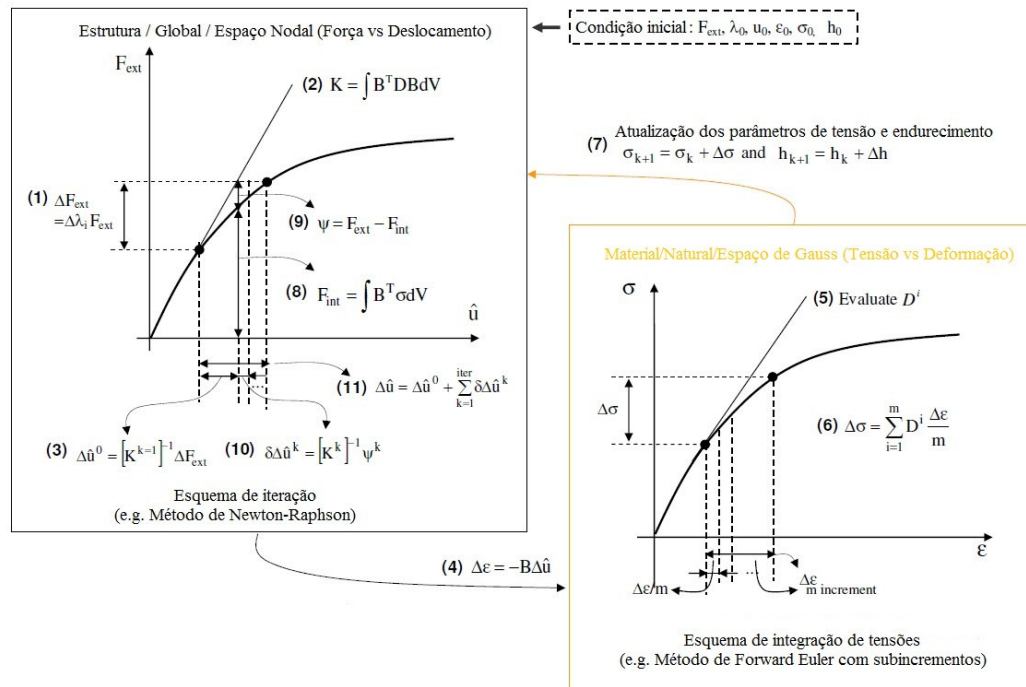


Figura 2.2 – Ilustração do processo de solução não linear (adaptado de Yang, 2009)

Assim como as componentes dos deslocamentos são atualizados a cada incremento, os vetores de deformação  $\boldsymbol{\epsilon}_{n+1}$  e tensão  $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}$  (avaliados a nível local de cada elemento), também são atualizados no final de cada incremento de carga fazendo:

$$\boldsymbol{\epsilon}_{n+1} = \boldsymbol{\epsilon}_n + \Delta \boldsymbol{\epsilon} \quad (2.8a)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \boldsymbol{\sigma}_n + \Delta \boldsymbol{\sigma} \quad (2.8b)$$

em que  $\boldsymbol{\epsilon}_n$  e  $\boldsymbol{\sigma}_n$  são, respectivamente, os vetores de deformação e tensão numa dada configuração de equilíbrio  $n$ , e:

$$\Delta \boldsymbol{\epsilon} = -\nabla \Delta \mathbf{u} \quad (2.9a)$$

$$\Delta \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}_t \Delta \boldsymbol{\epsilon} \quad (2.9b)$$

são, respectivamente, os vetores de incrementos de deformação e tensão no passo de carga corrente.  $\mathbf{D}_t$  é matriz constitutiva que depende do modelo constitutivo adotado para representar a relação tensão-deformação. O sinal negativo na Equação 2.9a define a convenção de sinal de compressão positiva. O operador diferencial  $\nabla$  é o mesmo apresentado na Equação 2.1a e o vetor de deformação  $\boldsymbol{\epsilon}$  é dado pelas componentes de deformação:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^T = [\boldsymbol{\varepsilon}_x \quad \boldsymbol{\varepsilon}_y \quad \boldsymbol{\varepsilon}_z \quad \boldsymbol{\gamma}_{xy} \quad \boldsymbol{\gamma}_{yz} \quad \boldsymbol{\gamma}_{zx}] \quad (2.10)$$

e o vetor de deslocamento  $\mathbf{u}$  é dado pelas suas componentes em relação ao sistema de referência xyz como:

$$\mathbf{u}^T = [u \quad v \quad w] \quad (2.11)$$

Usando o conceito de elemento isoparamétrico, os deslocamentos em ponto qualquer no interior de um elemento finito podem ser escrito em termos dos deslocamentos dos seus pontos nodais

$\hat{\mathbf{u}}^T = [u_1 \quad v_1 \quad w_1 \quad \cdots \quad u_{nnoel} \quad v_{nnoel} \quad w_{nnoel}]$  fazendo:

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \mathbf{N}\hat{\mathbf{u}} \quad (2.12)$$

Em que *nnoel* corresponde ao número de pontos nodais do elemento finito e  $\mathbf{N}$  é a matriz que contém as funções de interpolação para o elemento finito (ver Capítulo 3).

Em termos dos deslocamentos globais  $\mathbf{U}$  pode-se escrever:

$$\mathbf{u} = \mathbf{N}\mathbf{T}\hat{\mathbf{U}} \quad (2.13)$$

Em que

$$\hat{\mathbf{U}}^T = [U_1 \quad V_1 \quad W_1 \quad \cdots \quad U_{nnoel} \quad V_{nnoel} \quad W_{nnoel}] \quad (2.13a)$$

e  $\mathbf{T}$  é a matriz de transformação definida como:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_1^T & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{M}_{nnoel}^T \end{bmatrix} \quad (2.13b)$$

onde

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \partial X / \partial x & \partial X / \partial y & \partial X / \partial z \\ \partial Y / \partial x & \partial Y / \partial y & \partial Y / \partial z \\ \partial Z / \partial x & \partial Z / \partial y & \partial Z / \partial z \end{bmatrix} \quad (2.13c)$$

A matriz de transformação  $M$  relaciona o vetor posição no sistema de coordenada global  $\mathbf{X}^T = [X \ Y \ Z]$  com o vetor posição no sistema de coordenada local  $\mathbf{x}^T = [x \ y \ z]$ , como segue:

$$\mathbf{X} = \mathbf{M}\mathbf{x} \quad (2.14)$$

Quando o sistema de coordenada local  $(x,y,z)$  coincide com o sistema de coordenada global  $(X,Y,Z)$ , a matriz de transformação  $\mathbf{M}$  torna-se na matriz identidade  $\mathbf{I}$ .

A Equação 2.9a pode então ser reescrita em termos dos deslocamentos nodais como:

$$\Delta\boldsymbol{\varepsilon} = -\mathbf{B}\mathbf{T}\Delta\hat{\mathbf{U}} \quad (2.15)$$

em que  $\mathbf{B}$  é a matriz cinemática definida como

$$\mathbf{B} = [\mathbf{B}_1 \ \cdots \ \mathbf{B}_{\text{noel}}] \quad (2.16)$$

onde

$$\mathbf{B}_i = \nabla\mathbf{N}_i \quad (2.16a)$$

As componentes dos vetores de deslocamentos nodais e o operador  $\mathbf{B}_i$  são mostrados no Capítulo 3 para cada tipo de elemento.

Os dois procedimentos mencionados anteriormente podem ser adotados para se obter o incremento de deslocamento (Equação 2.7). Assim sendo, tem-se que:

a) Processo puramente incremental:

$$\Delta\hat{\mathbf{U}} = \Delta\hat{\mathbf{U}}^0 = [\mathbf{K}]^{-1} \Delta\mathbf{F}_{\text{ext}} \quad (2.17)$$

em que  $\mathbf{K}$  é a matriz de rigidez global que representa o arranjo global das matrizes de rigidez de cada elemento  $\mathbf{K}^e$  definida como:

$$\mathbf{K}^e = \int_{V_e} \mathbf{B}^T \mathbf{D}_t \mathbf{B} dV_e \quad (2.18)$$

que depende da matriz constitutiva tangente  $\mathbf{D}_t$  a qual é avaliada em função do estado de tensão  $\boldsymbol{\sigma}_n$  no início do incremento e em cada elemento.

b) Processo incremental iterativo:

$$\Delta\hat{\mathbf{U}} = \Delta\hat{\mathbf{U}}^0 + \sum_{k=1}^{\text{iter}} \delta\Delta\hat{\mathbf{U}}^k \quad (2.19)$$

Em que  $\Delta\hat{\mathbf{U}}^0$  é a solução predita obtida como indicado na Equação 2.17 e

$$\delta\Delta\hat{\mathbf{U}}^k = -[\mathbf{K}^k]^{-1} \boldsymbol{\Psi}^k \quad (2.20)$$

é a correção iterativa do incremento de deslocamento a nível global, em que

$$\boldsymbol{\Psi}^k = \mathbf{F}_{\text{ext}} - \mathbf{F}_{\text{int}}^k \quad (2.21)$$

é o vetor de força desequilibrada em cada iteração k. Este processo é interrompido quando numa dada iteração se verifica a convergência do processo através da comparação:

$$\text{ratio} \leq \text{toler} \quad (2.22)$$

A variável ratio é apresentada na Tabela 2.1 em função do critério de convergência.

Os vetores representados pelas Equações 2.4 a 2.6 são avaliados no sistema de coordenada local. Logo, antes de se efetuar o arranjo global destas quantidades deve-se proceder a seguinte transformação:

Tabela 2.1 – Critérios de Convergência

| Critério     | ratio   |
|--------------|---|
| Força        | $\ \mathbf{F}_{\text{ext}} - \mathbf{F}_{\text{int}}\  / \ \mathbf{F}_{\text{ext}}\ $   |
| Deslocamento | $\ \delta\Delta\hat{\mathbf{u}}\  / \ \Delta\hat{\mathbf{u}}\ $   |
| Energia      | $[\delta\Delta\hat{\mathbf{u}}^k (\mathbf{F}_{\text{ext}} - \mathbf{F}_{\text{int}}^k)] / [\Delta\hat{\mathbf{u}}^0 \Delta\mathbf{F}_{\text{ext}}]$ |

A matriz de rigidez (Equação 2.18) e o vetor de força interna (Equação 2.6) são obtidos através de um esquema de integração numérica tais como os de Gauss-Legendre. Este esquema é apresentado no Capítulo 3. As tensões e deformações (Equações 2.11 e 1.14) são avaliadas nos pontos de Gauss para cada elemento.

A solução predita indicada na Equação 2.12 é avaliada a partir do estado de tensão no início do incremento e fazendo:

$$\Delta \mathbf{F}_{\text{ext}} = \Delta \lambda_i \mathbf{F}_{\text{ext}} \quad (2.23)$$

em que  $\Delta \lambda_i$  é fator de incremento de carga.

Para problemas fortemente não-lineares o tamanho do passo pode inviabilizar a convergência do processo iterativo e, por outro lado, a utilização de passos muito pequenos pode tornar o processo de solução muito lento. Desta forma, a seleção automática do tamanho do incremento de carga é fator importante para o sucesso do processo de solução do sistema de equação (Nogueira, 1998). Uma estratégia eficiente de incremento automático de carga deve fornecer grandes incrementos quando a resposta da estrutura for quase linear e conduzir a pequenos incrementos quando a resposta da estrutura for fortemente não linear. Crisfield (1981) adotou o seguinte procedimento para calcular o fator de incremento de carga:

$$\Delta \lambda_i = \Delta \lambda_{i-1} \left( \frac{I_d}{I_{i-1}} \right)^\alpha \quad (2.24)$$

em que  $\Delta \lambda_{i-1}$  é o fator de incremento de carga no passo de carga anterior,  $I_d$  é o número de iterações desejadas para se obter a convergência;  $I_{i-1}$  é o número de iterações necessárias para a convergência do passo anterior; e,  $\alpha$  é um expoente usualmente tomados como 0.5 ou 2.0. Crisfield (1991) seguindo a sugestão de Ramm (1982) adotou  $\alpha$  igual a 0.5. O primeiro fator de incremento carga é definido como:

$$\Delta \lambda_0 = \frac{1}{\text{ninc}} \quad (2.25)$$

Em que  $\text{ninc}$  é uma variável definida pelo usuário.

Os fatores de incrementos de carga calculados automaticamente não poderão ser maiores ou menores que valores máximos e mínimos ( $\Delta \lambda_{\text{max}}$  e  $\Delta \lambda_{\text{min}}$ ) fornecidos pelo usuário para que o programa não entre num “loop” infinito.

Se a convergência não é verificada para um número máximo de iterações num dado passo, uma simples estratégia de corte do tamanho do passo é utilizada. Este corte é definido pela relação abaixo também sugerida por Crisfield (1981):



$$\Delta\lambda_i = \left( \frac{TOLER}{ratio} \right) \Delta\lambda_{i-1} \quad (2.26)$$

em que a variável ratio depende do critério de convergência adotado.

## 2.2. Equações Constitutivas

As equações constitutivas são utilizadas para representar, de forma ideal, o comportamento tensão-deformação dos materiais em geral. Para materiais geológicos como os solos e rochas, estas equações constitutivas devem levar em conta características tais como: não linearidade, plasticidade e dilatância.

A descrição das leis constitutivas que relacionem as tensões às deformações para os materiais que exibem comportamento elastoplástico é o objetivo da modelagem matemática da plasticidade, que define três pontos relevantes (Owen e Hinton, 1980):

- Leis constitutivas para o material antes da ocorrência de deformações plásticas, ou seja, durante o comportamento elástico do material;
- Um critério de plastificação que define o nível de tensões a partir do qual as deformações plásticas iniciam;
- Leis constitutivas para o material durante a ocorrência de deformações plásticas, ou seja, durante o fluxo plástico.

Um critério de plastificação indicando o nível de tensão, a partir do qual observa-se o fluxo plástico, ou seja, a ocorrência de deformações plásticas ou irreversíveis, pode ser representado através de uma relação do tipo

$$F(\boldsymbol{\sigma}, h) = f(\boldsymbol{\sigma}) - f(h) = 0 \quad (2.27)$$

onde  $f(\boldsymbol{\sigma})$  é uma função qualquer do tensor de tensão  $\boldsymbol{\sigma}$  e  $f(h)$  é uma função qualquer de um parâmetro de endurecimento  $h$  definido em função de alguma medida de deformação plástica a partir de dados ou observações experimentais.

Após iniciado o fluxo plástico, a variação infinitesimal da deformação  $d\boldsymbol{\epsilon}$  pode ser escrita como a decomposição aditiva de duas parcelas: uma elástica  $d\boldsymbol{\epsilon}_e$  e outra plástica  $d\boldsymbol{\epsilon}_p$ .

$$d\boldsymbol{\epsilon} = d\boldsymbol{\epsilon}_e + d\boldsymbol{\epsilon}_p \quad (2.28)$$

A parcela elástica da variação infinitesimal de deformação relaciona-se com a variação infinitesimal de tensão  $d\boldsymbol{\sigma}$  através de uma matriz constitutiva elástica  $\mathbf{D}_e$  como indicado na equação a seguir.

$$d\boldsymbol{\varepsilon}_e = \mathbf{D}_e^{-1} d\boldsymbol{\sigma} \quad (2.29)$$

Quando a resposta elástica é linear, a matriz constitutiva elástica possui coeficientes constantes, mas, quando a resposta elástica é não-linear, a matriz constitutiva elástica é dependente do estado de tensão efetiva, ou seja,  $\mathbf{D}_e = \mathbf{D}_e(\boldsymbol{\sigma})$ .

A parcela plástica da variação infinitesimal de deformação  $d\boldsymbol{\varepsilon}_p$  é obtida através de uma lei que governa o fluxo plástico, Lei de Fluxo, definida como:

$$d\boldsymbol{\varepsilon}_p = d\lambda \mathbf{b}(\boldsymbol{\sigma}, h) \quad (2.30)$$

onde  $\mathbf{b}(\boldsymbol{\sigma}, h)$  é o vetor que define a direção do fluxo plástico e  $d\lambda$  é o parâmetro plástico, um escalar não negativo, que define a magnitude da variação infinitesimal da deformação plástica.

A direção do fluxo plástico é definida, no estado de tensão efetiva corrente, como a direção normal à superfície potencial plástico,  $g(\boldsymbol{\sigma}, h) = 0$ , ou seja,

$$\mathbf{b}(\boldsymbol{\sigma}, h) = \frac{\partial g(\boldsymbol{\sigma}, h)}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad (2.31)$$

Quando a função potencial plástico é adotada como a própria função de plastificação, é dito que se tem uma Plasticidade Associada, ou que se tem uma Lei de Fluxo Associada.

Durante o fluxo plástico, as trajetórias de tensão devem ficar dentro ou, no máximo, sobre a superfície de plastificação. Com isto, tem-se que, se  $F(\boldsymbol{\sigma}, h) < 0$ , então  $d\lambda = 0$  e um comportamento elástico e, se  $d\lambda > 0$ , ocorre fluxo plástico e o critério de plastificação,  $F(\boldsymbol{\sigma}, h) = 0$ , deverá ser satisfeito. Assim sendo, durante o fluxo plástico tem-se que.

$$dF = \mathbf{a}^T d\boldsymbol{\sigma} + a_h dh = 0 \quad (2.32)$$

em que

$$\mathbf{a} = \frac{\partial F(\boldsymbol{\sigma}, h)}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad (2.33)$$

é o gradiente da função de plastificação e

$$a_h = \frac{\partial F(\boldsymbol{\sigma}, h)}{\partial h} \quad (2.34)$$

é uma função que indica a variação da superfície de plastificação com o parâmetro de endurecimento.

O endurecimento é incorporado no critério de plastificação através da função  $f(h)$  na qual a variável independente  $h$ , parâmetro de endurecimento, é função das deformações plásticas, ou seja,  $h(\boldsymbol{\epsilon}_p)$  (lei de endurecimento). A evolução das superfícies de plastificação, ou simplesmente o endurecimento, pode ser representado genericamente pela equação:

$$dh = \left\{ \frac{dh}{d\boldsymbol{\epsilon}_p} \right\}^T d\boldsymbol{\epsilon}_p = \left\{ \frac{dh}{d\boldsymbol{\epsilon}_p} \right\}^T d\lambda \mathbf{b}(\boldsymbol{\sigma}, h) \quad (2.35)$$

ou então,

$$dh = d\lambda M_p(\boldsymbol{\sigma}, h) \quad (2.36)$$

onde

$$M_p(\boldsymbol{\sigma}, h) = \left\{ \frac{dh}{d\boldsymbol{\epsilon}_p} \right\}^T \mathbf{b}(\boldsymbol{\sigma}, h) \quad (2.37)$$

é uma função que indica a variação da lei de endurecimento ao longo do incremento de deformação.

Pré-multiplicando a Equação 2.28 por  $\mathbf{a}^T \mathbf{D}_e$  e fazendo as substituições relativas às Equações 2.29, 2.30; 2.33, 2.34, 2.36 e 2.37, chega-se à seguinte expressão para o parâmetro plástico  $d\lambda$ :

$$d\lambda = \frac{\mathbf{a}^T \mathbf{D}_e}{\mathbf{a}^T \mathbf{D}_e \mathbf{b} + H} d\boldsymbol{\epsilon} \quad (2.38)$$

em que

$$H = -a_h M_p(\boldsymbol{\sigma}, h) \quad (2.39)$$

é o módulo de endurecimento que indica a variação do critério de plastificação com as deformações plásticas.

Substituindo-se as Equações 2.29 e 2.30 na Equação 2.28, e rearranjando os termos chega-se à seguinte equação constitutiva.

$$d\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}_t d\boldsymbol{\varepsilon} \quad (2.40)$$

em que

$$\mathbf{D}_t = \mathbf{D}_e - \mathbf{D}_p \quad (2.41)$$

é a matriz constitutiva tangente contínua, ou matriz constitutiva elastoplástica, constituída por duas parcelas: uma elástica  $\mathbf{D}_e$  e outra plástica  $\mathbf{D}_p$  dada por:

$$\mathbf{D}_p = \mathbf{D}_e^T \mathbf{C}_p \mathbf{D}_e \quad (2.42)$$

onde

$$\mathbf{C}_p = \frac{\mathbf{b}\mathbf{a}^T}{\mathbf{a}^T \mathbf{D}_e \mathbf{b} + H} \quad (2.43)$$

Da mesma forma, substituindo a Equação 2.38 na Equação 2.35, obtém-se

$$dh = \mathbf{E}(\boldsymbol{\sigma}, h) d\boldsymbol{\varepsilon} \quad (2.44)$$

onde  $\mathbf{E}$  é a matriz de endurecimento, uma matriz linha, definida como

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{a}^T \mathbf{D}_e}{\mathbf{a}^T \mathbf{D}_e \mathbf{b} + H} M_p \quad (2.45)$$

As Equações 2.40 e 2.44 só são válidas para incrementos infinitesimais de tensões  $d\boldsymbol{\sigma}$  e deformações  $d\boldsymbol{\varepsilon}$ . Na solução numérica de problemas de contorno, no entanto, estes incrementos não são infinitesimais e, portanto, erros são cometidos e acumulados durante a integração das tensões. Estes erros conduzem à violação do critério de plastificação em nível do ponto de Gauss (ou local), da mesma forma que os erros cometidos e acumulados quando se utiliza um esquema puramente incremental conduzem à violação do equilíbrio no nível da estrutura (ou global).

As funções,  $F(\boldsymbol{\sigma}, h)$ ,  $g(\boldsymbol{\sigma}, h)$  e  $h(\boldsymbol{\varepsilon}_p)$ , e suas derivadas,  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{a}_h$ ,  $\mathbf{b}$  e  $M_p$ , usadas na formulação do problema elastoplástico são dependentes do modelo constitutivo e devem ser contínuas e diferenciáveis para todo ponto no espaço das tensões.

Esta consideração é muito importante e afeta a exatidão do algoritmo de integração de tensão.

### 2.3. Modelos Constitutivos

O comportamento tensão-deformação dos solos depende de uma série de diferentes fatores, tais como: condição inicial de densidade e saturação do solo; estrutura do solo; condição de drenagem; tipo de equilíbrio (plano, triaxial, etc); história de tensão; duração do carregamento; temperatura, etc..

Através da obtenção de amostras indeformadas de solo, pode-se tentar reproduzir em laboratório as mesmas condições de campo e observar através de diferentes tipos de ensaios o comportamento do solo sob diversas condições de carregamento e drenagem. Desta forma, podem-se identificar características tais como: não linearidade, plasticidade (amolecimento, endurecimento, dilatância, etc.).

Vários autores vêm trabalhando na área de modelos constitutivos visando encontrar uma relação tensão-deformação-resistência que represente adequadamente o comportamento real dos solos levando em conta o maior número possível de fatores condicionantes.

#### 2.3.1. Modelo Linear Elástico

O modelo linear elástico adota a Lei de Hooke para definir a relação tensão deformação. Neste caso, os incrementos de tensão e deformação são avaliados a partir da matriz constitutiva elástica  $\mathbf{D}_e$  definida como:

$$\mathbf{D}_e = \begin{bmatrix} K + 4G/3 & K - 2G/3 & K - 2G/3 & 0 & 0 & 0 \\ K - 2G/3 & K + 4G/3 & K - 2G/3 & 0 & 0 & 0 \\ K - 2G/3 & K - 2G/3 & K + 4G/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G \end{bmatrix} \quad (2.46)$$

em que  $K$  é Bulk Modulus e  $G$  é o Módulo cisalhante definidos em termos do módulo de Young  $E$  e do Coeficiente de Poisson  $\nu$  como:

$$K = \frac{E}{3(1-2\nu)} \quad (2.46a)$$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (2.46b)$$

A matriz constitutiva pode ainda ser definida como:

$$\mathbf{D}_e = \begin{bmatrix} \lambda & \lambda+2G & \lambda+2G & 0 & 0 & 0 \\ \lambda+2G & \lambda+2G & \lambda+2G & 0 & 0 & 0 \\ \lambda+2G & \lambda+2G & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G \end{bmatrix} \quad (2.47)$$

Em que  $\lambda$  é a constante de Lamé definida por:

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad (2.47a)$$

### 2.3.2. Modelo não Linear Elástico – Hiperbólico

O modelo hiperbólico foi proposto por Duncan e Chang (1970) e tem sido amplamente utilizado na análise de problemas da engenharia geotécnica via MEF, em função de sua simplicidade e da facilidade de obtenção de seus parâmetros.

Este modelo leva em conta características do solo tais como, não linearidade e influência da tensão de confinamento e do nível de tensão. Ele é considerado um modelo pseudo-elástico por utilizar módulos de deformabilidade diferentes durante o carregamento primário e o descarregamento-recarregamento, induzindo, num ciclo de carregamento-descarregamento-recarregamento, a existência de deformações irreversíveis.

Uma relação incremental definida pela Equação 2.46 é adotada considerando-se apenas a parcela elástica da matriz  $\mathbf{D}_t$ . A matriz elástica  $\mathbf{D}_e$  adotada é a mesma apresentada na Equação 2.46 e 2.47, no entanto, o módulo de Young  $E$  é substituído pelo módulo de deformabilidade tangente  $E_t$ , de modo a se levar em conta o efeito do nível de tensão e da tensão de confinamento no comportamento tensão deformação.

Para definição do módulo de deformabilidade tangente a ser utilizado na avaliação da matriz  $\mathbf{D}_e$ , é necessário que se verifique a história de tensão com base no nível de tensão definido como:

$$F(\sigma) = (\sigma_1 - \sigma_3) \quad (2.48)$$

em que  $\sigma_1$  e  $\sigma_3$  são as tensões principais relativas ao estado de tensão  $\sigma$ . Desta forma, se:

a)  $F(\sigma)_{\text{corrente}} > F(\sigma)_{\text{max}}$ , tem-se um carregamento primário e o módulo de deformabilidade tangente é definido como:

$$E_t = E_i [1 - R_f S]^2 \quad (2.49)$$

em que  $R_f$  é um parâmetro do modelo conhecido como razão de ruptura que maioria dos solos este fator varia de 0.7 a 1.1,

$$S = \frac{(\sigma_1 - \sigma_3)}{(\sigma_1 - \sigma_3)_f} \quad (2.50)$$

é a razão de tensão que varia de zero, na condição isotrópica, à unidade na condição de ruptura,

$$(\sigma_1 - \sigma_3)_f = \frac{2c \cos \varphi + 2\sigma_3 \sin \varphi}{(1 - \sin \varphi)} \quad (2.51)$$

é nível de tensão na ruptura onde  $c$  e  $\varphi$  são os parâmetros de resistência do material de acordo com o critério de Mohr-Coulomb, e.

$$E_i = K_i p_a \left( \frac{\sigma'_3}{p_a} \right)^n \quad (2.52)$$

É o módulo de deformabilidade inicial definido como uma função exponencial da tensão de confinamento (Janbu, 1963).  $K_i$  e  $n$  são constantes obtidas empiricamente a partir de ensaios de laboratório e  $p_a$  é a pressão atmosférica.

b)  $F(\sigma)_{\text{corrente}} < F(\sigma)_{\text{max}}$  tem-se um descarregamento ou um recarregamento e o módulo deformabilidade tangente definido como:

$$E_t = K_{ur} p_a \left( \frac{\sigma'_3}{p_a} \right)^n \quad (2.53)$$

$K_{ur}$  e  $n$  são constantes obtidas empiricamente, a partir de ensaios de laboratório, em função do módulo de descarregamento-recarregamento  $E_{ur}$  adotando a mesma relação exponencial proposta por Jambu (1963) para o módulo de deformabilidade inicial  $E_i$ .

O modelo apresentado por Duncan e Chang (1970) adotava um coeficiente de Poisson  $\nu$  constante, o que limitava o seu uso. Reconhecendo esta deficiência, Duncan (1980) apresentou uma nova versão deste modelo, na qual o coeficiente de Poisson variava em função do módulo de deformabilidade volumétrica  $B$ , considerado constante com o nível de tensão e variável com a pressão de confinamento através da relação:

$$B = K_b p_a \left( \frac{\sigma'_3}{p_a} \right)^m \quad (2.54)$$

onde  $K_b$  e  $m$  são dois parâmetros adicionais que substituem o coeficiente de Poisson constante do modelo original.

Para esta nova versão tem-se a seguinte matriz constitutiva tangente:

Para o caso plano-

$$B = K_b p_a \left( \frac{\sigma'_3}{p_a} \right)^m \quad (2.55)$$

$$\mathbf{D}_t = \frac{3B}{(9B - E_t)} \begin{bmatrix} (3B + E_t) & (3B - E_t) & (3B - E_t) & 0 & 0 & 0 \\ (3B - E_t) & (3B + E_t) & (3B - E_t) & 0 & 0 & 0 \\ (3B - E_t) & (3B - E_t) & (3B + E_t) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E_t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & E_t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_t \end{bmatrix} \quad (2.56)$$

Os parâmetros  $K_i$ ,  $K_{ur}$ ,  $n$ ,  $c'$ ,  $\phi'$  e  $R_f$ , comuns às duas versões deste modelo, e os parâmetros  $\nu$  (para a versão original,  $\nu = \text{cte}$ ) e  $K_b$  e  $m$  (para a versão modificada,  $B = \text{cte}$ ) são obtidos com no mínimo dois ensaios CTC, drenados com



medição de variação de volume e pelo menos um ciclo de descarregamento-recarregamento, e um ensaio de compressão hidrostática (HC).

### 2.3.3. Modelo Mohr Coulomb Modificado

O modelo de Mohr-Coulomb é usado para descrever a relação tensão deformação de materiais com comportamento linear elástico perfeitamente plástico. Este modelo leva em conta o efeito da dilatação através do emprego da plasticidade não associado. O critério de plastificação deste modelo coincide com o critério de ruptura, não ocorrendo endurecimento durante o fluxo plástico.

A parcela elástica da matriz tangente é adotada tal como apresentada na Equação 2.47, considerando constantes os parâmetros elásticos  $E$  e  $\nu$ . A parcela plástica, no entanto, depende da função de plastificação  $F(\boldsymbol{\sigma})$  e da função potencial plástico  $G(\boldsymbol{\sigma})$ .

A função de plastificação  $F(\boldsymbol{\sigma})$  do modelo Mohr-Coulomb pode ser escrita, em termos dos invariantes de tensão e considerando a convenção de sinal de compressão positiva (Desai e Siriwardane, 1984; Owen e Hinton, 1980), como:

$$F = \sqrt{I_{2D}} K(\theta) - \frac{1}{3} I_1 \sin \phi - c \cos \phi = 0 \quad (2.57)$$

em que

$$K(\theta) = \left( \cos \theta + \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \theta \sin \phi \right) \quad (2.58)$$

e  $c$  e  $\phi$  são, respectivamente, a coesão e o ângulo de atrito interno do material; e

$$\theta = \frac{1}{3} \sin^{-1} \left( \frac{-3\sqrt{3}}{2} \frac{I_{3D}}{I_{2D} \sqrt{I_{2D}}} \right) \quad \theta \in [-\pi/6; \pi/6] \quad (2.59)$$

é o ângulo de Lode; e,  $I_1$  é o primeiro invariante do tensor de tensão, enquanto  $I_{2D}$  e  $I_{3D}$  são, respectivamente, o segundo e o terceiro invariante do tensor de tensão desviadora.

No espaço das tensões principais, a superfície de plastificação de Mohr-Coulomb tem a forma de uma pirâmide em que a seção normal ao eixo hidrostático em qualquer ponto é um hexágono irregular conforme o ilustrado na Figura 2.2. As arestas e o ápice (vértice) da superfície de Mohr-Coulomb formam

um conjunto de pontos singulares nos quais os gradientes da função de plastificação e da função potencial plástico não possuem definição única. Dificuldades numéricas podem aparecer quando o estado de tensão se aproxima dessas regiões.

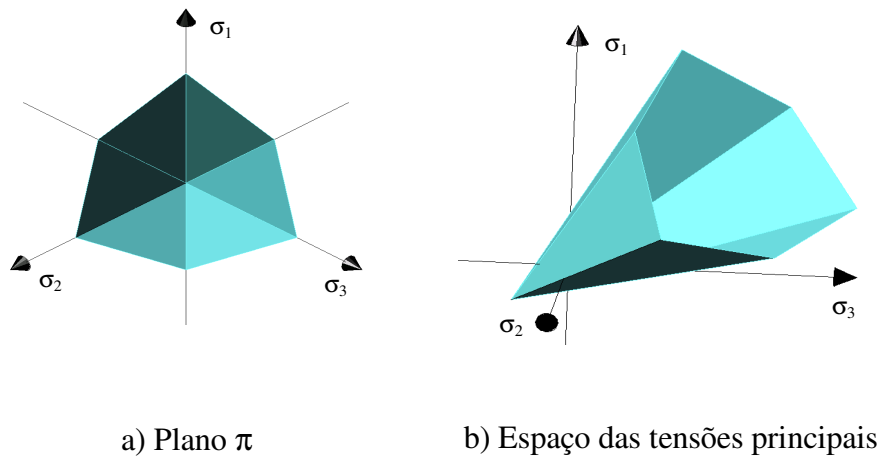


Figura 2.3 – Superfície de plastificação de Mohr Coulomb (Oliveira 2006)

Para contornar estes problemas, Sloan e Booker (1986) e Abbo e Sloan (1995) propuseram uma nova versão para o modelo Mohr-Coulomb na qual as singularidades relacionadas ao ápice e às arestas são removidas. A remoção da singularidade relacionada ao ápice do critério de Mohr-Coulomb pode ser feita determinando-se uma superfície aproximada que seja contínua e diferenciável em todos os pontos. Abbo e Sloan (1995) propuseram uma aproximação hiperbólica tal como ilustrado na Figura 2.3 que conduziu a seguinte função de plastificação:

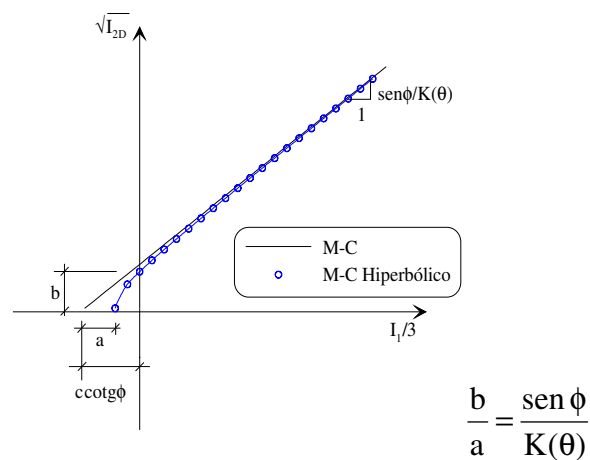


Figura 2.4 – Aproximação hiperbólica da superfície de plastificação de Mohr Coulomb

$$F = \sqrt{I_{2D} (K(\theta))^2 + (a \operatorname{sen} \phi)^2} - \frac{I_1}{3} \operatorname{sen} \phi - c \cos \phi \quad (2.60)$$

Nota-se que se o parâmetro “a” for tomado como nulo, a função de plastificação definida pela Equação 2.60 retorna à sua forma original dada pela Equação 2.57. Abbo e Sloan (1995) recomendam para o parâmetro “a” um valor em torno de 5%  $c \cot g \phi$ .

Para tratar as singularidades relacionadas às arestas, ou seja, para  $\theta = \pm 30^\circ$ , Sloan & Booker (1986) propuseram a seguinte aproximação trigonométrica para a expressão  $K(\theta)$ :

$$K(\theta) = A + B \operatorname{sen} 3\theta \quad \text{para } |\theta| > \theta_T \quad (2.61)$$

em que

$$A = \frac{1}{3} \cos \theta_T \left( 3 + \operatorname{tg} \theta_T \operatorname{tg} 3\theta_T + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{sen} \alpha(\theta) (3 \operatorname{tg} \theta_T - \operatorname{tg} 3\theta_T) \operatorname{sen} \phi \right) \quad (2.62a)$$

e

$$B = \frac{1}{3 \cos 3\theta_T} \left( -\operatorname{sen} \alpha(\theta) \operatorname{sen} \theta_T + \frac{1}{\sqrt{3}} \cos \theta_T \operatorname{sen} \phi \right) \quad (2.62b)$$

Para  $|\theta| \leq \theta_T$  emprega-se a Equação 2.58  $\theta_T$  é o ângulo de transição que pode assumir valores de  $25^\circ$  a  $29^\circ$  (Sloan e Booker, 1986).

A Figura 2.4 ilustra o procedimento adotado para tratar as arestas do modelo Mohr-Coulomb.

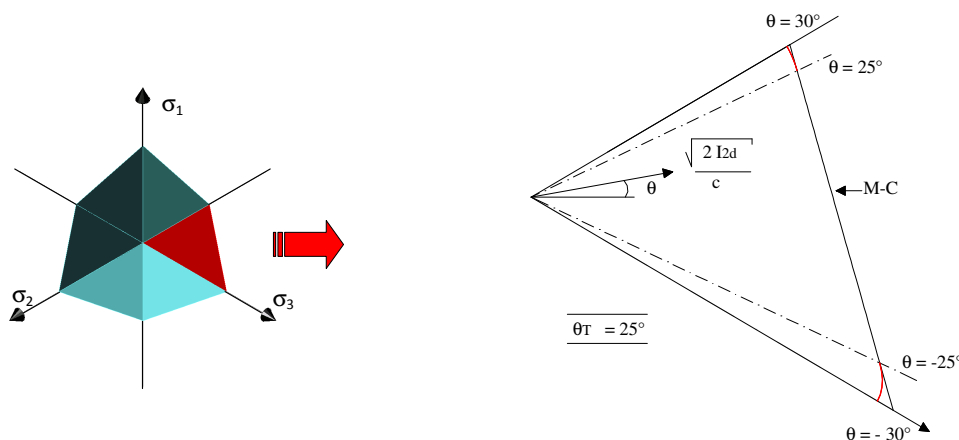


Figura 2.5 – Tratamento das arestas do modelo Mohr - Coulomb (Abbo e Sloan, 1986)

Ao critério de plastificação resultante do tratamento do ápice e das arestas do modelo original deu-se o nome de modelo Mohr-Coulomb Modificado. A este modelo está associado o seguinte vetor gradiente da função de plastificação (Owen e Hinton, 1980):

$$\mathbf{a} = \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \underbrace{\left( \frac{\partial F}{\partial I_1} \right)}_{C_1} \frac{\partial I_1}{\partial \boldsymbol{\sigma}} + \underbrace{\left( \frac{\partial F}{\partial I_{2D}} + \frac{\partial F}{\partial K} \frac{\partial K}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial I_{2D}} \right)}_{C_2} \frac{\partial I_{2D}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} + \underbrace{\left( \frac{\partial F}{\partial I_{3D}} + \frac{\partial F}{\partial K} \frac{\partial K}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial I_{3D}} \right)}_{C_3} \frac{\partial I_{3D}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad (2.63)$$

As constantes  $C_1$ ,  $C_2$  e  $C_3$  são definidas na Tabela 2.2 e os vetores  $\frac{\partial I_1}{\partial \boldsymbol{\sigma}}$ ,

$\frac{\partial I_{2D}}{\partial \boldsymbol{\sigma}}$  e  $\frac{\partial I_{3D}}{\partial \boldsymbol{\sigma}}$  contêm as derivadas dos invariantes de tensão.

O vetor  $\mathbf{b}$  que define o gradiente da função potencial plástico é definido de forma análoga ao vetor  $\mathbf{a}$ , adotando-se uma função potencial plástico similar à função de plastificação apresentada nas Equações 2.57 e 2.60, substituindo-se, no entanto, o ângulo de atrito  $\phi$  pelo ângulo de dilatância  $\psi$ .

Tabela 2.2 – Definição das constantes do vector  $\mathbf{a}$ , Modelo Mohr – Coulomb Modificado

|       | $ \theta  \leq \theta_T$   | $ \theta  > \theta_T$   |
|-------|--|---|
| $C_1$ | $-\frac{1}{3} \text{sen } \phi$  | $-\frac{1}{3} \text{sen } \phi$   |
| $C_2$ | $\alpha / 2 + \alpha I_{2D} \left( -\text{sen } \theta + \frac{1}{\sqrt{3}} \cos \theta \text{sen } \phi \right) \left( -\frac{\text{tg } 3\theta}{2I_{2D}} \right)$ | $\alpha_T K(\theta) / 2 + \alpha_T I_{2D} (3B \cos 3\theta) \left( -\frac{\text{tg } 3\theta}{2I_{2D}} \right)$ |
| $C_3$ | $\alpha I_{2D} \left( -\text{sen } \theta + \frac{1}{\sqrt{3}} \cos \theta \text{sen } \phi \right) \left( \frac{\text{tg } 3\theta}{3I_{3D}} \right)$               | $\alpha_T I_{2D} (3B \cos 3\theta) \left( \frac{\text{tg } 3\theta}{3I_{3D}} \right)$                           |
|       | $\alpha = \frac{1}{\sqrt{I_{2D}}}$   | $\alpha_T = \frac{K(\theta)}{\sqrt{I_{2D} K(\theta)^2 + (a \sin \phi)^2}}$                                      |

### 2.3.4. Modelo Elastoplástico Lade – Kim

O modelo constitutivo Lade-Kim (ou “single hardening”) (Lade e Kim 1988a, 1988b, 1995; Kim and Lade 1988; e Lade 1990; Lade e Jakobsen 2002) é bastante semelhante ao modelo de Lade (1977), porém, a diferença principal entre eles é o fato do primeiro utilizar apenas uma superfície de plastificação.

Este modelo é constituído das seguintes componentes: a relação constitutiva elástica, critério de ruptura, critério de plastificação, função potencial plástico e leis de endurecimento e amolecimento.

A parcela elástica da matriz tangente é adotada tal como apresentada na Equação 2.46 em função, no entanto, de um módulo de deformabilidade que varia com a tensão de confinamento (versão Lade-Kim 90) ou com o nível de tensão (versão Lade-Kim 1995).

Pela versão Lade-Kim 1990 o módulo de deformabilidade pode ser obtido através de uma função exponencial da tensão de confinamento tal que (Janbu, 1963)

$$E = K_{ur} p_a \left( \frac{\sigma_3}{p_a} \right)^n \quad (2.64)$$

onde  $K_{ur} = (2 \text{ a } 2,5)K_i$ ,  $K_i$  e  $n$  são constantes obtidas empiricamente a partir de ensaios de laboratório e  $p_a$  é a pressão atmosférica.

Pela versão Lade-Kim (1995) o módulo de deformabilidade elástico varia com o nível de tensão e foi derivado com base no princípio da conservação da energia

$$E = M p_a \left[ \left( \frac{I_1}{p_a} \right)^2 + 6 \frac{1+\nu}{1-2\nu} \left( \frac{I_{2D}}{p_a^2} \right)^2 \right]^\lambda \quad (2.65)$$

em que  $M$  e  $\lambda$  são parâmetros elásticos do modelo,  $\nu$  é o coeficiente de Poisson, e  $I_1$  é o primeiro invariante do tensor de tensão e  $I_{2D}$  é o segundo invariante do tensor de tensão desviador.

No modelo de Lade-Kim, o critério de plastificação é dado por:

$$F(\boldsymbol{\sigma}, W_p) = F(\boldsymbol{\sigma}) - F(W_p) = 0 \quad (2.66)$$

em que

$$F(\boldsymbol{\sigma}) = \left[ \psi_1 \frac{I_1^3}{I_3} - \frac{I_1^2}{I_2} \right] \left[ \frac{I_1}{p_a} \right]^h e^q \quad (2.67)$$

é a função de plastificação que define uma superfície convexa no espaço das tensões principais (ver Figura 2.6), em que  $I_1$  e  $I_2$  são os invariantes de tensão e a

variável  $\psi_1$  é definida empiricamente em função do parâmetro de resistência  $m$  do modelo anterior como

$$\psi_1 = 0.00155m^{-1.27} \quad (2.68)$$

$q$  é uma variável de estado definida em termos do nível de tensão ( $S$ ) como:

$$q = \frac{\alpha S}{1 - (1 - \alpha)S} \quad (2.69)$$

$\alpha$  e  $h$  os parâmetros de plastificação deste modelo.

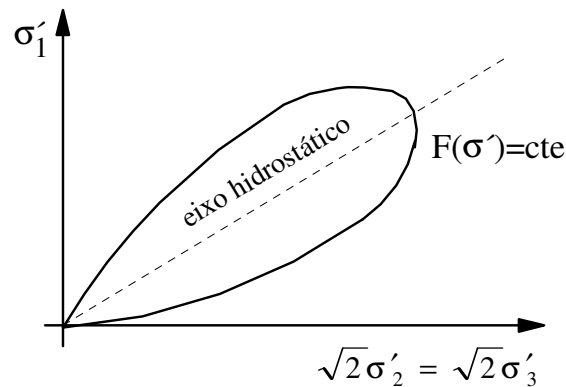


Figura 2.6 – Superfície de Plastificação do Modelo de Lade – Kim (Nogueira 1998)

O nível de tensão  $S$  é definido como

$$S = \frac{S_{cor}}{\eta_1} \quad (2.70)$$

Em que

$$S_{cor} = \left[ \frac{I_1^3}{I_3} - 27 \right] \left[ \frac{I_1}{p_a} \right]^m \quad (2.71)$$

$\eta_1$  e  $m$  são os parâmetros de resistência e  $I_1$  e  $I_3$  são os invariantes do tensor de tensão. O cálculo dos invariantes de tensão, para fins de verificação do nível de tensão de ruptura, é feito adicionando às componentes de tensão normal uma constante de magnitude  $a'p_a$ . Este artifício matemático é introduzido a fim de incluir uma coesão efetiva, a qual reflete o efeito da resistência à tração. Desta forma, além dos parâmetros  $\eta_1$  e  $m$ , é também necessário o parâmetro  $a'$ . De acordo com a Equação 2.70, o nível de tensão  $S$  varia de 0 a 1 durante o endurecimento (antes da ruptura).

O vetor gradiente da função de plastificação é obtido fazendo:

$$\mathbf{a} = \underbrace{\left( \frac{\partial F}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial S} \frac{\partial S}{\partial I_1} + \frac{\partial F}{\partial I_1} \right)}_{C_1} \frac{\partial I_1}{\partial \boldsymbol{\sigma}} + \underbrace{\left( \frac{\partial F}{\partial I_2} \right)}_{C_2} \frac{\partial I_2}{\partial \boldsymbol{\sigma}} + \underbrace{\left( \frac{\partial F}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial S} \frac{\partial S}{\partial I_3} + \frac{\partial F}{\partial I_3} \right)}_{C_3} \frac{\partial I_3}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad (2.72)$$

As constantes  $C_1$ ,  $C_2$  e  $C_3$  são definidas na Tabela 2.3 e os vetores  $\frac{\partial I_1}{\partial \boldsymbol{\sigma}}$ ,  $\frac{\partial I_2}{\partial \boldsymbol{\sigma}}$  e  $\frac{\partial I_3}{\partial \boldsymbol{\sigma}}$  contêm as derivadas dos invariantes de tensão.

Tabela 2.3 – Definição das constantes do vetor  $\mathbf{a}$  – Modelo de Lade – Kim

|       | Definição   |
|-------|---|
| $C_1$ | $\left\{ \left( \psi_1 \frac{I_1^3}{I_3} - \frac{I_1^2}{I_2} \right) \left( \frac{I_1}{p_a} \right)^h e^q \right\} \left\{ \frac{\alpha}{[1 - (1 - \alpha)S]^2} \right\} \left\{ \frac{1}{\eta_l} \left( \frac{I_1}{p_a} \right)^m \left[ (3 + m) \left( \frac{I_1^2}{I_3} \right) - 27m \left( \frac{1}{I_1} \right) \right] \right\}$ $+ \left\{ \left[ \psi_1 (h + 3) \left( \frac{I_1^2}{I_3} \right) - (h + 2) \left( \frac{I_1}{I_2} \right) \right] e^q \left( \frac{I_1}{p_a} \right)^h \right\}$ |
| $C_2$ | $e^q \left[ \frac{I_1}{p_a} \right]^h \left[ \frac{I_1}{I_2} \right]^2$   |
| $C_3$ | $\left\{ \left[ \psi_1 \frac{I_1^3}{I_3} - \frac{I_1^2}{I_2} \right] \left[ \frac{I_1}{p_a} \right]^h e^q \right\} \left\{ \frac{\alpha}{[1 - (1 - \alpha)S]^2} \right\} \left\{ -\frac{1}{\eta_l} \left( \frac{I_1^3}{I_3^2} \right) \left( \frac{I_1}{p_a} \right)^m \right\} +$ $\left\{ -\psi_1 e^q \left( \frac{I_1}{p_a} \right)^h \left( \frac{I_1^3}{I_3^2} \right) \right\}$   |

A lei de fluxo é definida em termos da função potencial plástico  $g(\boldsymbol{\sigma})$  definida como:

$$g(\boldsymbol{\sigma}) = \left[ \psi_1 \frac{I_1^3}{I_3} - \frac{I_1^2}{I_2} + \psi_2 \right] \left[ \frac{I_1}{p_a} \right]^\mu \quad (2.73)$$

$\psi_2$  e  $\mu$  são os parâmetros da função potencial plástico. O incremento de deformação plástica é então avaliado em função do gradiente da função potencial plástico  $\mathbf{b}$  definido como:

$$\mathbf{b} = \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \underbrace{\left( \frac{\partial g}{\partial I_1} \right)}_{C_1} \frac{\partial I_1}{\partial \boldsymbol{\sigma}} + \underbrace{\left( \frac{\partial g}{\partial I_2} \right)}_{C_2} \frac{\partial I_2}{\partial \boldsymbol{\sigma}} + \underbrace{\left( \frac{\partial g}{\partial I_3} \right)}_{C_3} \frac{\partial I_3}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad (2.74)$$

As constantes  $C_1$ ,  $C_2$  e  $C_3$  são definidas na Tabela 2.4 e os vetores  $\frac{\partial I_1}{\partial \sigma}$ ,  $\frac{\partial I_2}{\partial \sigma}$  e  $\frac{\partial I_3}{\partial \sigma}$  contêm as derivadas dos invariantes de tensão.

Tabela 2.4 – Definição das constantes do vetor b – Modelo Lade – Kim

|       | Definição  |
|-------|--|
| $C_1$ | $\left[ \psi_1 (\mu + 3) \left( \frac{I_1^2}{I_3} \right) - (\mu + 2) \left( \frac{I_1}{I_2} \right) + \psi_2 \mu \left( \frac{1}{I_1} \right) \right] \left[ \frac{I_1}{p_a} \right]^\mu$ |
| $C_2$ | $\left[ \frac{I_1}{I_2} \right]^2 \left[ \frac{I_1}{p_a} \right]^\mu$  |
| $C_3$ | $-\psi_1 \left[ \frac{I_1^3}{I_3^2} \right] \left[ \frac{I_1}{p_a} \right]^\mu$  |

A parcela  $F(W_p)$  do critério de plastificação (Equação 2.66) é uma função do trabalho plástico, tomado como parâmetro de endurecimento e/ou amolecimento, o qual define o aumento ou a diminuição da superfície de plastificação.

Para níveis de tensão abaixo do nível de ruptura, a superfície de plastificação cresce com o aumento do trabalho plástico como pode ser visto na Figura 2.6. Observa-se também, nesta figura, que a taxa de crescimento da função de plastificação diminui na medida em que o trabalho plástico aumenta e o nível de tensão se aproxima da unidade (estado de ruptura). A partir deste instante, um aumento do trabalho plástico causa uma diminuição na superfície de plastificação (ou amolecimento). Desta forma, para determinação da posição da superfície de plastificação é necessário que se estabeleça a lei de endurecimento e de amolecimento.



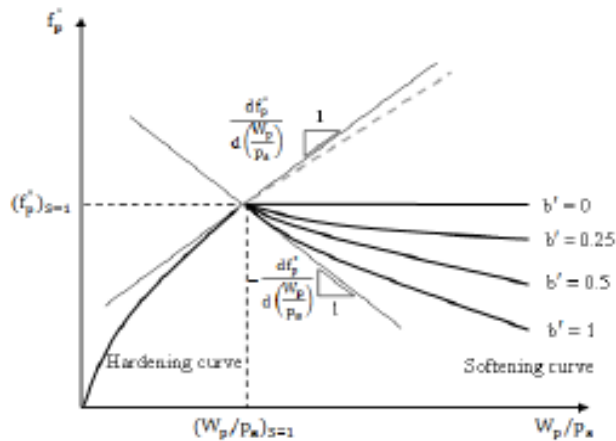


Figura 2.7 – Modelagem do endurecimento e amolecimento (Lade e Jacobsen 2002)

\* durante o endurecimento.

Para níveis de tensão abaixo da ruptura o crescimento da função de plastificação é definido pela lei de endurecimento definida como:

$$F(W_p) = \left( \frac{W_p}{p_a D} \right)^{1/\rho} \quad (2.75)$$

Em que

$$\rho = \frac{p}{h} \quad (2.76a)$$

$$D = \frac{C}{(27\psi_1 + 3)^\rho} \quad (2.76b)$$

C e p são parâmetros de endurecimento obtidos do trabalho plástico ocorrido durante a compressão isotrópica.

O módulo plástico  $M_p$  (Equação 2.37) é definido fazendo:

$$M_p(\boldsymbol{\sigma}, W_p) = \left\{ \frac{dW_p}{d\boldsymbol{\epsilon}_p} \right\}^T \mathbf{b}(\boldsymbol{\sigma}, h) = \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{b} \quad (2.77)$$

O módulo de endurecimento H definido pela Equação 2.39, é dado para esse modelo como:

$$H = - \frac{dF(\boldsymbol{\sigma}, W_p)}{dW_p} M_p = \frac{dF(W_p)}{dW_p} M_p = \frac{1}{p_a D \rho} \left( \frac{W_p}{p_a D} \right)^{\frac{1}{\rho} - 1} M_p \quad (2.78)$$

\* durante o amolecimento.

Para níveis de tensão após a ruptura a função de plastificação apresenta um decaimento exponencial definida como:

$$F(W_p) = Ae^{-BW_p/p_a} \quad (2.79)$$

Em que A e B são constantes positivas definidas em função da inclinação da reta tangente a curva da Figura 2.5 no instante da ruptura. Desta forma tem-se que:

$$B = b' \left[ \frac{df(\sigma)}{d(W_p/p_a)} \frac{1}{f(\sigma)} \right]_{S=1} \quad (2.80a)$$

$$A = \left[ f(\sigma) e^{BW_p/p_a} \right]_{S=1} \quad (2.80b)$$

$b'$  é o parâmetro de amolecimento tomado como constante e independente da tensão de confinamento ( $b' \geq 0$ ). Para um valor de  $b'$  igual a zero o material apresenta um comportamento perfeitamente plástico. Quanto maior o valor de  $b'$  maior o amolecimento. Neste caso o módulo de amolecimento H definido é dado como:

$$H = - \frac{dF(\sigma, W_p)}{dW_p} M_p = - \frac{dF(W_p)}{dW_p} M_p = - \frac{BA}{p_a} e^{-BW_p/p_a} M_p \quad (2.81)$$

Yang (2009) propôs a seguinte modificação para a lei de amolecimento:

$$F(W_p) = F(W_p)_{S=1} - \frac{1}{c + ae^{-b[W_p/p_a - (W_p/p_a)_{S=1}]}} \quad (2.82)$$

em que

$$c = \frac{1}{f(W_p)_{S=1} - f(W_p)_{\text{residual}}} \quad (2.83a)$$

$$H = \frac{-bae^{-b[W_p/p_a - (W_p/p_a)_{S=1}]}}{p_a \left\{ c + ae^{-b[W_p/p_a - (W_p/p_a)_{S=1}]} \right\}^2} M_p \quad (2.83b)$$

a, b e  $f(W_p)_{\text{residual}}$  são os parâmetros.

A Tabela 2.5 apresenta um resumo com os parâmetros do modelo os quais são obtidos com no mínimo três ensaios CTC, drenadas com medição de variação

de volume e pelo menos um ciclo de descarregamento-recarregamento, e um ensaio de compressão hidrostática (HC).

Tabela 2.5 – Parâmetros do Modelo Lade – Kim

| Parâmetro          | Parâmetros                                    |
|--------------------|---|
| Elásticos          | $K_{ur,n}$ e $\nu$ ou $M$ , $\lambda$ e $\nu$ |
| Ruptura            | $\eta_1$ e $m$                                |
| Plastificação      | $h$ e $\alpha$                                |
| Potencial plástico | $\Psi_2$ e $\mu$                              |
| Endurecimento      | $c$ e $p$                                     |
| Amolecimento       | $b'$ ou $a$ , $b$ e $f(W_p)_{residual}$       |

## 2.4. Algoritmo de Integração de Tensão

Um problema elastoplástico envolve a integração da tensão ao longo de um incremento de deformação conhecido. Ou seja,

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \boldsymbol{\sigma}_n + \int_n^{n+1} \dot{\boldsymbol{\sigma}} dt = \boldsymbol{\sigma}_n + \int_n^{n+1} \boldsymbol{\xi}(d\boldsymbol{\epsilon}) \quad (2.84)$$

onde  $\boldsymbol{\xi}(d\boldsymbol{\epsilon})$  é uma função do incremento de deformação.

Assim sendo, conhecendo-se o estado de deformação final  $\boldsymbol{\epsilon}_{n+1}$  e as variáveis de estado iniciais  $\boldsymbol{\sigma}_n$ ,  $\boldsymbol{\epsilon}_n$ ,  $\boldsymbol{\epsilon}_{p(n)}$  e  $h_n$ , deseja-se obter as variáveis de estado  $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}$  e  $h_{n+1}$  no final de um dado incremento de modo que um critério de plastificação seja atendido, ou seja

$$F(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}, h_{n+1}) = 0 \quad (2.85)$$

em que, supondo válida a decomposição aditiva de deformação,

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \boldsymbol{\sigma}_n + \mathbf{D}_e d\boldsymbol{\epsilon} - \mathbf{D}_e d\boldsymbol{\epsilon}_p \quad (2.86a)$$

$$h_{n+1} = h_n + dh \quad (2.86b)$$

onde  $d\boldsymbol{\epsilon}_p$  e  $dh$  são as variáveis plásticas incógnitas do problema. Estes variáveis deverão ser integradas ao longo da trajetória de deformação de modo que a condição de consistência seja atendida (ou seja, que o estado de tensão esteja dentro ou no máximo acima da superfície de plastificação).

A Equação 2.86c pode ainda ser escrita como:

$$\sigma_{n+1} = \sigma_{n+1}^* - \mathbf{D}_e d\epsilon_p \quad (2.87)$$

onde

$$\sigma_{n+1}^* = \sigma_n + \mathbf{D}_e d\epsilon \quad (2.88)$$

é a tensão predita elástica.

As Equações 2.86a e b podem ainda serem escritas como:

$$\sigma_{n+1} = \sigma_{n+1}^* - d\lambda \mathbf{D}_e \mathbf{b} \quad (2.89a)$$

$$h_{n+1} = h_n + d\lambda M_p \quad (2.89b)$$

A segunda parcela da Equação 2.89a, chamada de corretor plástico, retorna o ponto de tensão corrigindo a tensão predita elástica  $\sigma_{n+1}^*$ .

Uma característica desejável para o algoritmo de integração de tensão, do ponto de vista de conveniência de implementação, é que ele seja definido com base apenas nas funções da plasticidade e suas derivadas de primeira ordem e que não necessitem das derivadas de ordem superior. Isto devido à complexidade envolvida nestas funções para modelos constitutivos mais realísticos para solos.

Durante o fluxo plástico, o gradiente da função potencial plástico  $\mathbf{b}(\sigma, h)$  varia ao longo da trajetória de deformação incremental de modo não conhecido. Portanto, alguma hipótese deve ser adotada para possibilitar a integração da equação constitutiva (Ortiz e Popov, 1985; Nogueira, 1998; Sloan et al., 2001; Martins, 2001).

Uma hipótese simplificadora muito comumente usada é supor que a direção do fluxo plástico permanece constante ao longo da trajetória de deformação e que, portanto, pode ser avaliado em função do estado de tensão no início do incremento. O algoritmo de integração de tensão que avalia o incremento de tensão desta forma é chamado de algoritmo explícito.

O algoritmo de integração de tensão explícito pode ser escrito como:

$$\sigma_{n+1} = \sigma_n + d\sigma_n \quad (2.90a)$$

$$h_{n+1} = h_n + dh_n \quad (2.90b)$$

onde

$$d\sigma'_n = \mathbf{D}_{t_n} d\boldsymbol{\varepsilon} \quad (2.91a)$$

$$dh_n = \mathbf{E}_n d\boldsymbol{\varepsilon} \quad (2.91b)$$

em que  $\mathbf{D}_{t_n}$  e  $\mathbf{E}_n$ , respectivamente, a matriz constitutiva tangente e a matriz de endurecimento avaliadas no início do incremento e mantidas constante ao longo da trajetória de deformação.

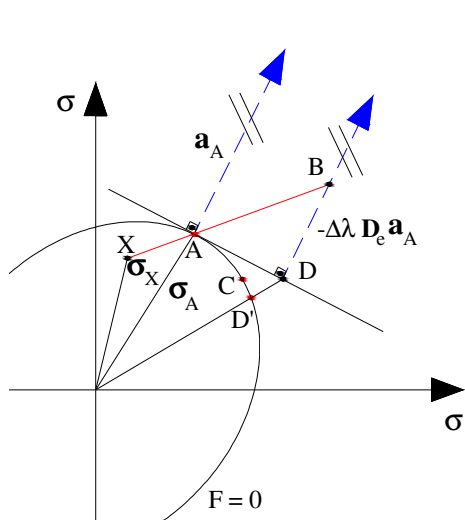
O Quadro 2.1 mostra os passos para o cálculo do incremento de tensão pelo esquema de integração de tensão explícito.

Quadro 2.1 – Esquema de integração de tensão – Algoritmo Explícito

|  |
|--|
| <p>dados: <math>\sigma_n</math> e <math>d\boldsymbol{\varepsilon}</math><br/>         calcule: <math>\sigma_{n+1}^*</math><br/>         verifique se: <math>f(\sigma_{n+1}^*) &gt; 0</math><br/>         se (NÃO): faça: <math>\sigma_{n+1} = \sigma_{n+1}^*</math><br/>         se (SIM): calcule: <math>\mathbf{D}_{t_n}</math><br/>             calcule: <math>\mathbf{E}_n</math><br/>             calcule: <math>d\sigma_n</math> e <math>dh_n</math><br/>             atualize: <math>\sigma_{n+1}</math> e <math>h_{n+1}</math></p> |
|--|

A hipótese adotada nesses algoritmos é aceitável, apenas, para incrementos de deformação infinitesimais. No entanto, na solução numérica de problemas de contorno, esses incrementos não são infinitesimais e erros serão cometidos e acumulados durante a integração das tensões.

Se não existir nenhum controle de erro neste procedimento, as tensões e a função de endurecimento no final do incremento,  $\sigma_{n+1}$  e  $h_{n+1}$ , podem estar violando o critério de plastificação. Este erro está intimamente relacionado ao tamanho do incremento adotado na solução incremental. A Figura 2.8 apresenta graficamente o processo de integração explícito.



A = ponto de contato com a superfície  
 B = ponto correspondente às tensões preditas elásticas  
 C = ponto de equilíbrio procurado  
 D = ponto resultante da parcela de correção plástica  
 D' = ponto final corrigido  
 X = ponto elástico do estado anterior  
 $\sigma_A$  = tensões de contato com a superfície no ponto A  
 $\sigma_X$  = tensões no estado anterior (elástico)  
 $\mathbf{a}_A$  = vetor normal à superfície no ponto A  
 F = Função de plastificação

Figura 2.8 – Representação gráfica do processo de integração explícito (Oliveira, 2006)

Pode-se observar na Figura 2.8, que após a correção plástica, o estado de tensão fica localizado no ponto D, fora da superfície de plastificação, exigindo, portanto, ainda mais correção até a determinação do ponto D', que ainda apresenta um pequeno deslocamento em relação ao ponto procurado C.

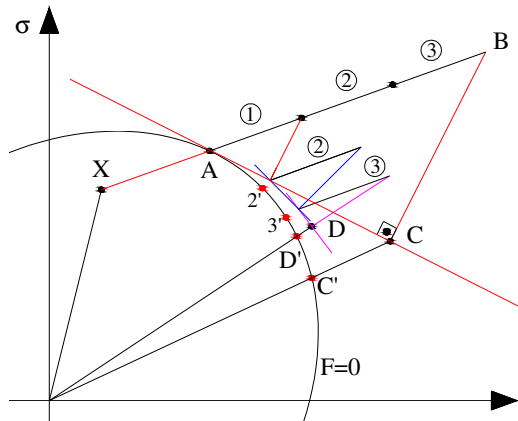
Nayak e Zienkiewicz (1972b) observaram que os erros cometidos pelo esquema de integração explícito poderiam ser significativamente reduzidos se a parcela do incremento de deformação que causa fluxo plástico fosse subdividida em pequenos subincrementos de igual tamanho, fazendo com que as componentes de deformação variassem proporcionalmente ao longo de um dado incremento. Desta forma, para um incremento finito de deformação  $\Delta \boldsymbol{\epsilon}$  pode-se obter o incremento finito de tensão e da função de endurecimento  $\Delta \boldsymbol{\sigma}$  e  $\Delta h$  fazendo:

$$\Delta \boldsymbol{\sigma}_n = \sum_{k=1}^{nsub} d\boldsymbol{\sigma}^k = \sum_{k=1}^{nsub} (\mathbf{D}_t)^k (\Delta \boldsymbol{\epsilon} / nsub) \quad (2.92a)$$

$$\Delta h_n = \sum_{k=1}^{nsub} dh^k = \sum_{k=1}^{nsub} (\mathbf{E}^T)^k (\Delta \boldsymbol{\epsilon} / nsub) \quad (2.92b)$$

com *nsub* sendo o número de subincrementos no qual o incremento finito de deformação deve ser dividido.

A Figura 2.9 apresenta o processo de integração em que o incremento de deformação é subdividido em subincrementos de igual tamanho (Nayak e Zienkiewicz,1972; Martins, 2001; Owen e Hinton,1980).



A = ponto de contato com a superfície  
 B = ponto correspondente às tensões previstas elásticas  
 C = Estado de tensões para o incremento total  
 C' = Estado de tensão corrigido para o incremento total  
 D = Estado de tensões para 3 subincrementos  
 D' = Estado de tensões corrigido p/ 3 subincrementos  
 X = ponto elástico do estado anterior  
 2' – Ponto p/ cálculo da normal p/ o 2º subincremento  
 3' – Ponto p/ cálculo da normal p/ o 3º subincremento

Figura 2.9 – Representação gráfica do processo de integração explícita com subincrementos (Oliveira, 2006)

Pode-se observar que o ponto D, resultante do processo subincremental, é mais próximo da superfície de plastificação que o ponto C, resultante da integração sobre toda a parcela plástica.

O algoritmo de integração explícito que subdivide o incremento de deformação em subincrementos de deformação é chamado de algoritmo explícito com subincrementos. O Quadro 2.2 apresenta a sequência de passos envolvidos nesta técnica.

Quadro 2.2 – Esquema de Integração de tensão – Algoritmo explícito com subincremento

|   |
|---|
| <p>dados: <math>\sigma_n</math> e <math>\Delta \epsilon</math><br/>         calcule: <math>\sigma_{n+1}^*</math><br/>         verifique se: <math>f(\sigma_{n+1}^*, h_n) &gt; 0</math><br/>         se (NÃO): faça: <math>\sigma_{n+1} = \sigma_{n+1}^*</math><br/>         se (SIM): define nsub</p> |
|---|

```

calcule:  $d\boldsymbol{\varepsilon} = \Delta\boldsymbol{\varepsilon}/n_{sub}$ 
Loop  $k=1, n_{sub}$ 
  Calcule:  $(\mathbf{D}_t)^k$ 
  Calcule:  $(\mathbf{E})^k$ 
  Calcule:  $d\boldsymbol{\sigma}^k$  e  $dh^k$ 
  Atualize:  $\boldsymbol{\sigma}^k$  e  $h^k$ 
faça:  $\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \boldsymbol{\sigma}'^{n_{sub}}$  e  $h_{n+1} = h^{n_{sub}}$ 

```

O número de subincrementos  $n_{sub}$  em cada ponto de integração é estimado empiricamente. Vários critérios têm sido sugeridos para a definição do seu tamanho. Nayak e Zienkiewicz (1972b) e Owen e Hinton (1980) utilizam um incremento cujo tamanho é obtido limitando a variação máxima da função de plastificação a uma fração da função de endurecimento. Nyssen (1981) usou o erro de truncamento estimado de um único passo para determinar o tamanho do incremento. Sloan (1987) propôs atualizar o tamanho do subincremento durante a integração da tensão analisando o erro relativo cometido em cada subincremento.

O processo de integração explícita é mais eficiente quando o número de subincrementos é calculado de forma automática, considerando-se o grau de não-linearidade do comportamento tensão-deformação e/ou o erro cometido durante o processo.

Sloan et. al. (2001) propuseram um algoritmo explícito com subincrementos em que o tamanho do subincremento é calculado em função do erro cometido na avaliação das tensões. Este algoritmo é chamado de algoritmo explícito com controle do erro.

A função de plastificação  $F(\boldsymbol{\sigma}, h)$  (Equação 2.27) é utilizada para verificar se o estado de tensão é aceitável ou não. Se  $F(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^*, h_n) \leq 0$ , o comportamento é elástico e o incremento de tensão está correto. Entretanto, se  $F(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^*, h_n) > 0$ , ocorreu escoamento plástico, e o incremento de tensão está incorreto. Neste caso, três situações em que a tensão predita elástica estará incorreta podem ocorrer:

Caso I - quando o estado de tensão inicial muda de elástico para plástico (Figura 2.10a);



Caso II - quando o estado de tensão inicial está no estado plástico e após o incremento elástico continua plástico (Figura 2.10b); e,

Caso III - quando o estado de tensão inicial está no estado plástico e o incremento promove um descarregamento elástico seguido de um fluxo plástico (Figura 2.10c).

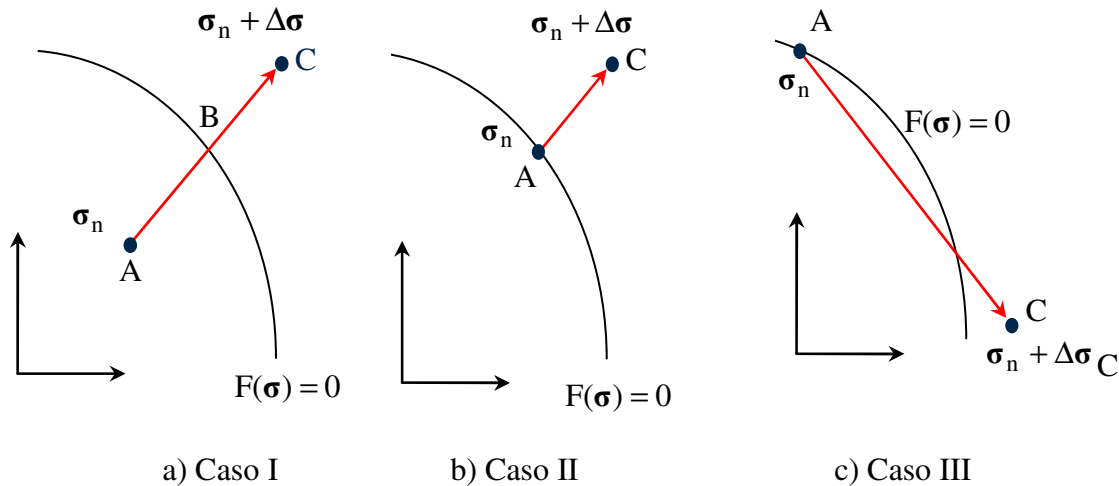


Figura 2.10 – Tensão predita elástica incorreta (Oliveira, 2006)

Em função dos problemas associados à precisão aritmética finita, uma aproximação da condição de plastificação é então utilizada no algoritmo de integração de tensão, e pode ser dada por:

$$|F(\sigma_{n+1}^*, h_n)| \leq \text{FTOL} \quad (2.93)$$

sendo FTOL uma pequena tolerância positiva. Sloan et al. (2001) sugerem valores de FTOL entre  $10^{-6}$  e  $10^{-9}$ . Com a aproximação proposta, a transição do estado elástico para plástico ocorre se  $F(\sigma_n, h_n) < -\text{FTOL}$  e  $F(\sigma_{n+1}^*, h_n) > \text{FTOL}$ .

Se durante o incremento de deformação a situação 1 ocorre (Figura 2.10a) é necessário a definição de uma constante  $\alpha$  (obtido através de algoritmos de busca apropriado, ver Oliveira 2006 para detalhes) a qual definirá a parcela do incremento que é puramente elástico e a parcela que será elastoplástica, ou seja

$$\Delta\sigma_e = \alpha\Delta\sigma \quad (2.94)$$

$$\Delta\varepsilon_e = \alpha\Delta\varepsilon \quad (2.95)$$

$$\sigma_{\text{int}} = \sigma_n + \Delta\sigma_e \quad (2.96)$$

O processo de integração é realizado a partir do estado de tensão  $\sigma_{int}$ . A parcela elastoplástica plástica das deformações,  $(1-\alpha)\Delta\epsilon$ , é dividida em uma série de subincrementos,  $\Delta T_k(1-\alpha)\Delta\epsilon$  ( $0 < \Delta T_k \leq 1$ ), e utiliza o esquema explícito para integrar as tensões.  $\Delta T_k$  é um valor obtido em função do erro cometido na avaliação das tensões e da tolerância STOL ( $10^{-6}$  a  $10^{-2}$ ) adotada para esse erro. O processo é controlado pelo pseudotempo  $T$  ( $0 \leq T \leq 1$ ) e termina quando  $\sum \Delta T = T = 1$ .

O Quadro 2.3 apresenta o algoritmo explícito com controle de erro sugerido por Sloan et al. (2001) para os materiais sem e com endurecimento. Por este algoritmo, para cada subincremento de deformação, são calculadas duas estimativas de variação de tensão,  $\Delta\sigma_1$  e  $\Delta\sigma_2$ :

$$\Delta\sigma_1 = \mathbf{D}_t(\sigma_{k-1}, h_{k-1})[\Delta T_k(1-\alpha)\Delta\epsilon] \quad (2.97)$$

$$\Delta\sigma_2 = \mathbf{D}_t(\tilde{\sigma}_k, \tilde{h}_k)[\Delta T_k(1-\alpha)\Delta\epsilon] \quad (2.98)$$

e duas estimativas de variação do parâmetro de endurecimento,  $\Delta h_1$  e  $\Delta h_2$ :

$$\Delta h_1 = \mathbf{E}^T(\sigma_{k-1}, h_{k-1})[\Delta T_k(1-\alpha)\Delta\epsilon] \quad (2.99)$$

$$\Delta h_2 = \mathbf{E}^T(\tilde{\sigma}_k, \tilde{h}_k)[\Delta T_k(1-\alpha)\Delta\epsilon] \quad (2.100)$$

Em que

$$\tilde{\sigma}_k = \sigma_{k-1} + \Delta\sigma_1 \quad (2.101)$$

$$\tilde{h}_k = h_k + \Delta h_1 \quad (2.101)$$

Para o primeiro subincremento ( $T=0$ ), a primeira estimativa da variação de tensão, é avaliada com o estado de tensão no limite da região elástica, ou seja,  $\sigma_{k-1} = \sigma_{int}$  e  $h_{k-1} = h_n$ . O estado de tensão, ao final do intervalo  $\Delta T_k$ , é calculado utilizando-se a média das duas estimativas anteriores e pode ser dado pela expressão abaixo:

$$\sigma_k = \sigma_{k-1} + \frac{1}{2}(\Delta\sigma_1 + \Delta\sigma_2) \quad (2.103a)$$

$$h_k = h_{k-1} + \frac{1}{2}(\Delta h_1 + \Delta h_2) \quad (2.103b)$$

Sloan et al. (2001) sugerem a seguinte expressão para o erro relativo na integração das tensões do subincremento corrente:

$$R_k = \frac{\|\sigma_k - \tilde{\sigma}_k\|}{\|\sigma_k\|} \quad (2.104a)$$

em que

$$\sigma_k - \tilde{\sigma}_k = \frac{1}{2}(\Delta\sigma_2 - \Delta\sigma_1) \quad (2.104b)$$

O subincremento corrente será aceito se o erro relativo calculado  $R_k$  for menor que uma tolerância prescrita STOL, do contrário será rejeitado e o processo reinicia com um novo valor de  $\Delta T_k$  calculado em função do erro local e da tolerância adotada. Independentemente de o subincremento corrente ser aceito ou não, os próximos valores de  $\Delta T$  são dados pela expressão:

$$\Delta T_{k+1} = q\Delta T_k \quad (2.105)$$

em que

$$q \leq 0.9\sqrt{STOL/R_k} \quad (2.106)$$

Pode-se observar que o processo de integração inicia no pseudo tempo  $T=0$  com um valor de  $\Delta T=1$ . Através da avaliação do erro local cometido na integração das tensões e da tolerância STOL adotada, o algoritmo determina os valores adequados para  $\Delta T$  que deverão ser maiores ou iguais a  $\Delta T_{\text{mínimo}}$ . Esta última condição é utilizada para limitar o número máximo de subincrementos (Para  $\Delta T_{\text{mínimo}} = 10^{-4}$ , o número máximo de subincrementos será 10000).

Pode-se observar ainda, que um valor mínimo para  $q$  ( $q_{\text{mín}}=0,1$ ) é determinado como mais uma forma de se evitar subincrementos muito pequenos e o elevado custo computacional. Um valor máximo para  $q$  também é utilizado. Sloan et al. (2001) sugerem ( $q_{\text{máx}}=1,1$ ), isto significa que subincrementos subsequentes serão no máximo 10% maiores. Esse valor máximo é utilizado com a finalidade de se reduzir o número de falhas (quando o erro local  $R$  é maior que a tolerância STOL).

Quadro 2.3 – Esquema de integração de tensão – Algoritmo explícito com controle de erro (Sloan et al, 2001)

|  |
|--|
| <p>Dados de entrada: <math>\sigma = \sigma_n + \alpha D_e \Delta \epsilon</math>, <math>h_n</math>, <math>\Delta \epsilon = (1 - \alpha) \Delta \epsilon</math>, STOL, FTOL, LTOL, <math>\Delta T_{\text{mínimo}}</math></p> <p>(1) Faça <math>T=0</math> e <math>\square T=1</math></p> <p>(2) Enquanto <math>T &lt; 1</math>, faça (8) a (15)</p> <p>(3) calcule as estimativas de incremento de tensão:<br/> avalie: <math>d\epsilon = \Delta T \Delta \epsilon_p</math><br/> <math>d\sigma_1 = D_t(\sigma, h) d\epsilon</math> e <math>dh_1 = E_t^T(\sigma, h) d\epsilon</math><br/> <math>d\sigma_2 = D_t(\sigma + d\sigma_1, h + dh_1) d\epsilon</math> e <math>dh_2 = E_t^T(\sigma + d\sigma_1, h + dh_1) d\epsilon</math></p> <p>(4) calcule o estado de tensão final temporário conforme a equação<br/> <math>\sigma_{\text{temp}} = \sigma + \frac{1}{2}(d\sigma_1 + d\sigma_2)</math></p> <p>(5) calcule o erro relativo para o corrente subincremento :<br/> <math>R = \max\{\ 0.5(d\sigma_2 - d\sigma_1)\  / \ \sigma_{\text{temp}}\ , \text{EPS}\}</math> ! <math>\text{EPS} \approx 10^{-16}</math></p> <p>(6) se <math>R &gt; \text{STOL}</math><br/> <ul style="list-style-type: none"> <li>• calcule : <math>q = \max\{0.9(\text{STOL}/R)^{1/2}, 0.1\}</math> ! <math>\text{STOL} \approx 10^{-6}</math> a <math>10^{-2}</math></li> <li>• calcule: <math>\Delta T = \max\{q\Delta T, \Delta T_{\text{mínimo}}\}</math></li> <li>• retorne para a posição (8)</li> </ul> </p> <p>(7) O subincremento foi um sucesso, atualize as tensões : <math>\sigma = \sigma_{\text{temp}}</math></p> <p>(8) se <math> F(\sigma)  &gt; \text{FTOL}</math><br/> Chame a subrotina Corrige_tensão e entre com as tensões incorretas <math>\sigma_0 = \sigma</math><br/> Saia da subrotina Corrige_tensão com as tensões corrigidas <math>\sigma</math></p> <p>(9) Calcule o tamanho do próximo subincremento<br/> <ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>q = \min\{0.9(\text{STOL}/R)^{1/2}, 1.1\}</math></li> <li>• se o subincremento anterior falhou, limite o tamanho do próximo: <math>q = \min\{q, 1\}</math></li> <li>• calcule o tamanho do novo subincremento : <math>\Delta T = q\Delta T</math></li> <li>• atualize <math>T = T + \Delta T</math></li> </ul> </p> <p>(10) Garantir que o próximo subincremento não seja menor que o tamanho mínimo estipulado e checar se o processo de integração não ultrapasse <math>T = 1</math>.<br/> <ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>\Delta T = \max\{\Delta T, \Delta T_{\text{mínimo}}\}</math></li> <li>• <math>\Delta T = \min\{\Delta T, 1 - T\}</math></li> </ul> </p> <p>(11) <math>T = 1</math>, saia com as tensões no final do incremento <math>\sigma_{n+1} = \sigma</math></p> |
|--|

EPS = menor erro relativo calculado pela máquina