

3

Modelagem Micro-Mecânica Discreta de Solos Granulares

3.1.

Considerações Iniciais

Neste Capítulo será abordada a questão da modelagem numérica dos solos granulares e das fibras utilizadas como reforço, introdução ao método dos elementos discretos (MED), utilizando-se da micro-mecânica clássica utilizada na pesquisa.

Primeiramente, serão apresentados os conceitos de modelagem discreta destacando as diferenças entre as concepções contínuas e discretas. Em seguida, serão apresentados os fundamentos do MED e suas características.

3.2.

Modelagem Micro-Mecânica

Na engenharia, os modelos matemáticos constituem-se em ferramentas bastante utilizadas para descrever e prever o comportamento de fenômenos físicos. Em alguns casos, não é possível obter soluções exatas, sendo necessário uso de técnicas de aproximação. Os métodos numéricos são bastante utilizados atualmente para solução de problemas complexos devido à disponibilidade de equipamentos computacionais e softwares.

Existe uma variedade de técnicas na literatura para o cálculo de soluções aproximadas. O Método dos Elementos Finitos (MEF) e o Método dos Elementos de Contorno (MEC) estão atualmente em um estágio bastante avançado, sendo considerados os métodos mais tradicionais.

O Método dos Elementos Discretos (MED) encontra-se em um estágio de desenvolvimento. Mantêm-se as características básicas propostas por Cundall & Strack (1979), porém novidades nas formulações são frequentemente apresentadas e publicadas.

O método é bastante adequado para lidar com problemas de natureza descontínua e de grandes deformações.

O MED tem sido utilizado na engenharia geotécnica em problemas de mecânica das rochas (Cundall, 1971). Na mecânica dos solos o MED é utilizado o tanto para simulação de meios granulares (Cundall & Strack, 1979) como para analisar o comportamento de argilas (Anandarajah, 2003).

3.3.

Diferença entre Modelagem Contínua e Discreta

A modelagem contínua trabalha com a idéia de que o solo seja definido como um meio contínuo, sendo representado por um bloco em equilíbrio.

A análise mecânica de meios geológicos, utilizando a modelagem contínua, é baseada nos conceitos da mecânica dos meios contínuos, fundamentada pela teoria da elasticidade na primeira metade do Século XX. Posteriormente passaram a utilizar os conceitos de plasticidade do solo, verificados no estado crítico.

A junção dos dois conceitos originou o modelo elasto-plástico da mecânica dos solos clássica, muito utilizado para solucionar problemas geotécnicos.

Os métodos contínuos são bastante utilizados na engenharia, no entanto existem problemas onde a abordagem contínua não é satisfatória, como por exemplo quando as discontinuidades determinam o comportamento global.

No método dos elementos discretos, a solução dos problemas estáticos é resolvida por uma aproximação de relaxação dinâmica e o processo de cálculo através de pequenos incrementos de tempo, o meio é discretizado com partículas que se movem para posições de equilíbrio de acordo com as leis de Newton.

O método dos elementos discretos se propõe a modelar o material granular por meio de um conjunto de partículas discretas, cujo comportamento é governado por leis físicas e onde os contatos entre elas podem ser criados ou extintos à medida em que o conjunto de

partículas se deforma. A representação do meio contínuo como um sistema de partículas discretas ou descontínuas caracteriza-se como um processo altamente dinâmico e com mudanças rápidas da configuração do domínio. A natureza do comportamento do contato entre partículas também resulta em respostas altamente não-lineares. Isto salienta a necessidade de que a resolução da análise seja apropriada e envolva vários fenômenos físicos.

3.4.

Método dos Elementos Discretos

O método foi proposto por Cundall (1971) e desde então houve um crescente interesse por esse método. Inicialmente o Método dos Elementos Discretos (MED) tinha como objetivo o estudo de deslocamentos em sistema de blocos de rocha, porém logo suas aplicações se estenderam ao estudo de micro-mecanismos em materiais granulares e desenvolvimento de fraturas em rocha e concreto.

Dentre as etapas fundamentais para a construção da lógica do MED, primeiramente faz-se a seleção da geometria das partículas tanto para duas ou três dimensões. No presente trabalho, a simulação será feita em duas dimensões e serão utilizadas partículas circulares como elementos.

A etapa seguinte, a busca por contatos representa a etapa mais demorada, e depende do número de partículas e da forma destas. E posteriormente, determinação das condições iniciais e condições de contorno.

A imposição de condições de contorno num sistema de partículas pode ser realizada de várias formas. A forma mais utilizada é aquela que impõe a condição de contorno através da análise de interação com obstáculos, que freqüentemente são denominados de paredes.

Essas paredes são caracterizadas fisicamente e interagem por contato com os elementos. E através das equações de Newton, é possível determinar para cada elemento, partículas ou paredes, suas posições no espaço e no tempo.

O método de Elementos Discretos (MED) proposto por Cundall é baseado no conjunto de equações de equilíbrio de forças e momentos resultantes das partículas. As resultantes de forças e momentos são obtidas a partir das forças entre os contatos, da inércia e do amortecimento, que serão detalhados adiante. No entanto, o MED assume os seguintes princípios:

- As partículas possuem forma circular e são admitidas como corpos rígidos;
- Os contatos pontuais entre as partículas, ou entre partícula e parede ocorrem a partir de uma área infinitesimal;
- As partículas podem se sobrepor levemente nos pontos de contato;
- O quanto uma partícula pode se sobrepor a outra está relacionado linearmente com a força de contato entre elas;
- As partículas podem de separar ou deslizar umas sobre as outras;
- A condição de deslizamento entre as partículas é dada pela lei de Mohr-Coulomb.

O conjunto de equações que governa o MED pode ser expresso em forma de matriz:

$$M\Delta\ddot{X} + C\Delta\dot{X} + S\Delta X = \Delta F \quad (3.1)$$

Onde M é a matriz de massa, C é a matriz de amortecimento e S é a matriz rigidez. ΔX é o vetor deslocamento e ΔF é o vetor força.

Em alguns casos, como acontece em simulações de materiais granulares, a rigidez S geralmente varia a cada passo, pois para materiais granulares é comum utilizar análises não lineares (Hertz Mindlin), que será aprofundada mais adiante.

3.4.1.

Cinemática do Elemento

Os modelos representados por um conjunto de esferas ou discos comportam-se individualmente como um corpo rígido. Enquanto o elemento esférico possui seis graus de liberdade, o modelo em forma de disco possui apenas três graus de liberdade, definidos de acordo com um referencial no espaço.

A Figura 7 apresenta uma esfera, cuja posição é determinada pelo vetor r_i , a velocidade linear v_i e a velocidade angular w_i .

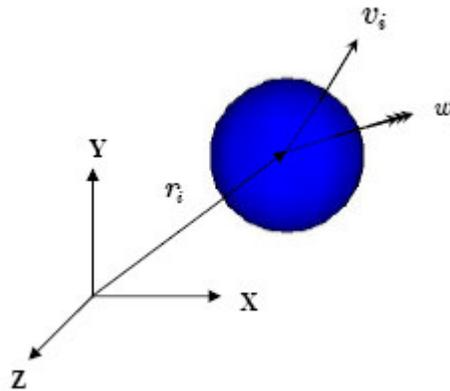


Figura 1: Cinemática de um elemento esférico

3.4.2.

Leis da Física Clássica

De acordo com a física Newtoniana, o deslocamento gerado é determinado pela física clássica. E nesta perspectiva pode-se agrupar em duas escolas: corpos deformáveis e não-deformáveis.

A escola de corpos deformáveis foi fundada por Cundall & Strack (1979) e neste enfoque o contato das partículas é modelado com uma composição de molas e amortecedores, simulando o efeito do atrito e da dissipação de energia gerado pela colisão entre partículas.

No entanto, na escola de corpos não deformáveis os contatos são pontuais e as partículas possuem coeficientes de atrito e de restituição, e são através destes coeficientes que são realizados os cálculos das velocidades após o choque. Neste caso, a probabilidade de duas partículas vizinhas estarem em contato é nula. Por este motivo a primeira escola melhor se adapta a soluções quase estáticas, enquanto a segunda é ideal para soluções dinâmicas.

3.4.2.1.

Leis Força - Deslocamento

Quando há um movimento relativo entre dois elementos ou entre um elemento e uma parede, uma força é gerada, e esta atua interferindo nas trajetórias de cada elemento.

Para dar continuidade no cálculo desta interação, é necessário estabelecer um sistema de coordenadas local, referente a cada partícula. O sistema local é definido pela direção normal à superfície de contato e pela rotação que esta sofre em torno da normal, para superfícies circulares a direção normal coincide com a ligação entre dois centróides.

Assim, de acordo com a Figura 8, o eixo \hat{X} local é dado pela direção normal no sentido do centróide i para o centróide j .

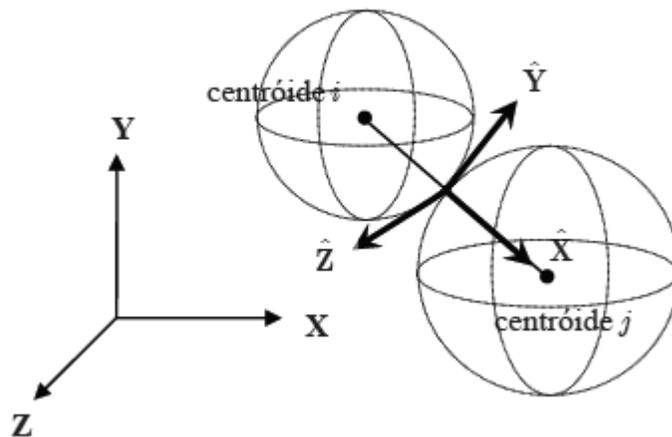


Figura 2: Sistema de referência local para o contato entre dois elementos esféricos.

O vetor deslocamento u de uma determinada partícula em um tempo t é determinado a partir dos vetores de posição com relação ao sistema global, inicial e final para um dado Δt .

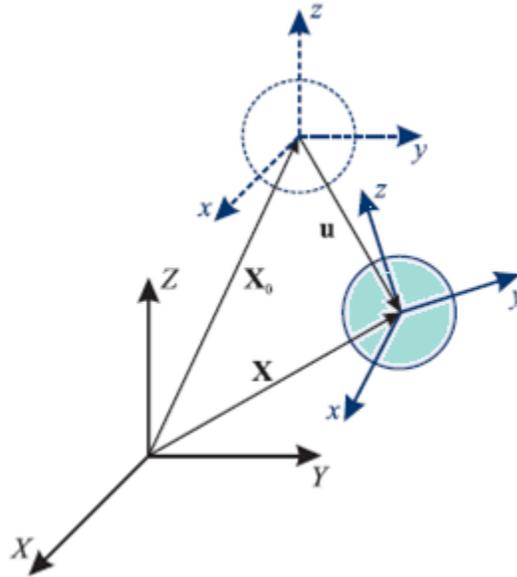


Figura 3: Sistema de coordenadas Local e Global (Huaman, 2008).

Os termos inerciais são definidos pela massa e pelos momentos de inércia de cada partícula, considerando que o sistema de coordenadas local de cada partícula é coincidente com os eixos principais de inércia.

As forças externas são convergidas para serem aplicadas diretamente no centróide de cada partícula. Os valores dessa forças são permanentes para a força peso, e variáveis com o tempo para as demais forças.

O contato entre as partículas é puntual, e sua interação se dá a partir do deslocamento, gerando uma força de contato segundo uma rigidez adotada, geralmente mola-amortecedor. Dessa forma, os contatos podem ser gerados ou destruídos em função dos movimentos relativos, possibilitando a simulação de grandes deslocamentos.

Durante a colisão ou contato entre os elementos, a condição cinemática de impenetrabilidade d_{ij} entre as partículas ocorre conforme apresentado na Figura 10.

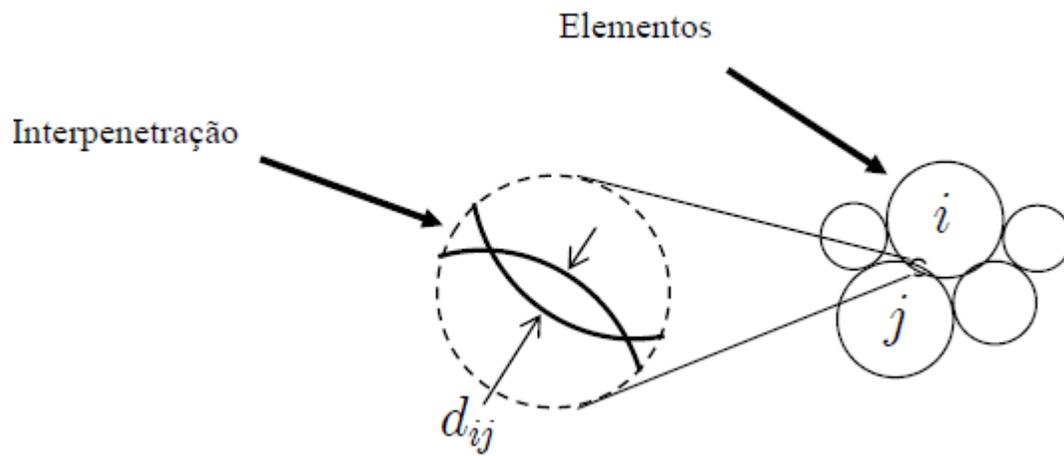


Figura 4: Penetração no contato entre elementos.

Da mesma forma, ocorre a impenetrabilidade entre uma partícula e a parede (Figura 11).

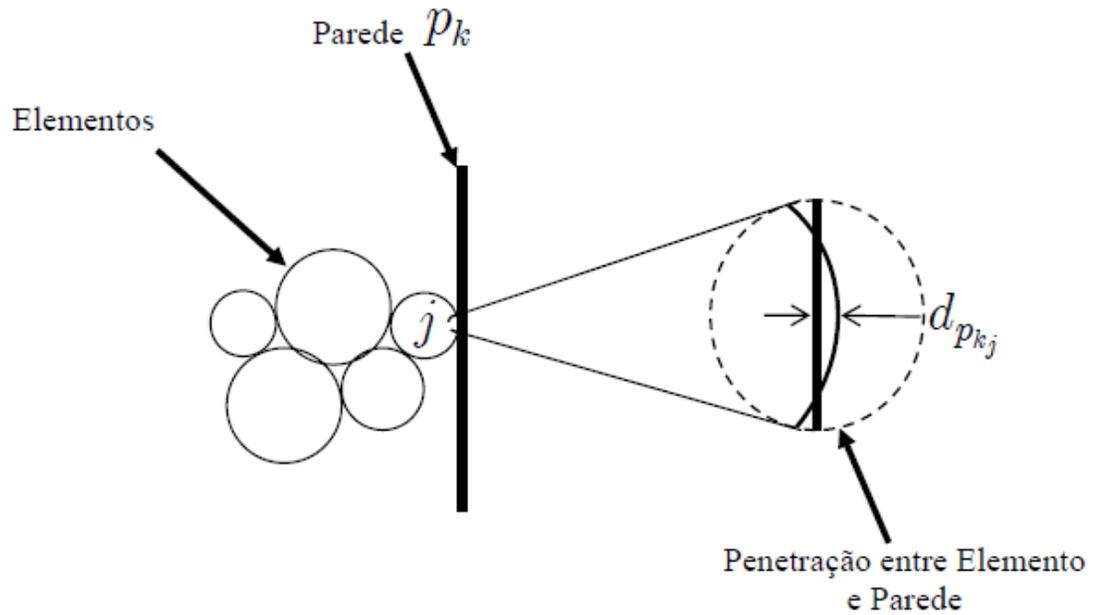


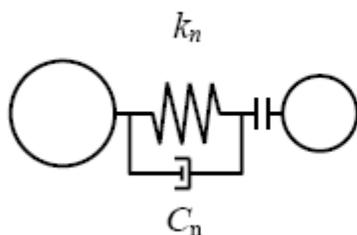
Figura 5: Penetração no contato entre elementos e parede.

Uma vez detectado um contato entre duas partículas torna-se necessário avaliar a força de contato mobilizada e posteriormente quantificar a interação entre os corpos.

Tanto a busca por contatos, bem como sua atualização compreende operações geométricas. Muitos autores têm se dedicado ao cálculo das relações de interação no contato entre partículas de formas variadas onde é necessário definir, entre outros elementos, planos, zonas, pontos de contato. Alguns trabalhos relacionados a esse tema são os artigos de Cundall (1988), Williams & O'Connor (1995), Williams & O'Connor (1999) e outros mais recentes como Zhao *et al.* (2006).

A Figura 12 apresenta o modelo mais comum de força de contato empregado no MED. A mola representa a contribuição elástica, o amortecimento e o deslizamento tangencial também estão representados na Figura 12. A mola pode apresentar comportamento linear ou não linear, e ainda possuir resistência a tração, quando existem forças adesivas, ou no caso contrário absorva apenas esforços de compressão.

Modelo da força normal



Modelo da força tangencial

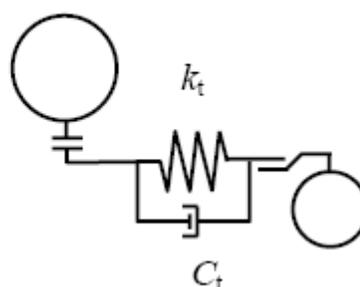


Figura 6: Modelo da força de contato.

As relações força-deslocamento são definidas em função das componentes normais e tangenciais dos deslocamentos e das velocidades relativas. A componente normal do deslocamento relativo U^n é dada pela penetração entre dois discos ou entre parede e bolinha.

A Figura 13 define o contato entre dois discos e a Figura 14 apresenta o contato entre um disco e a parede, onde n_i é a normal ao plano de contato.

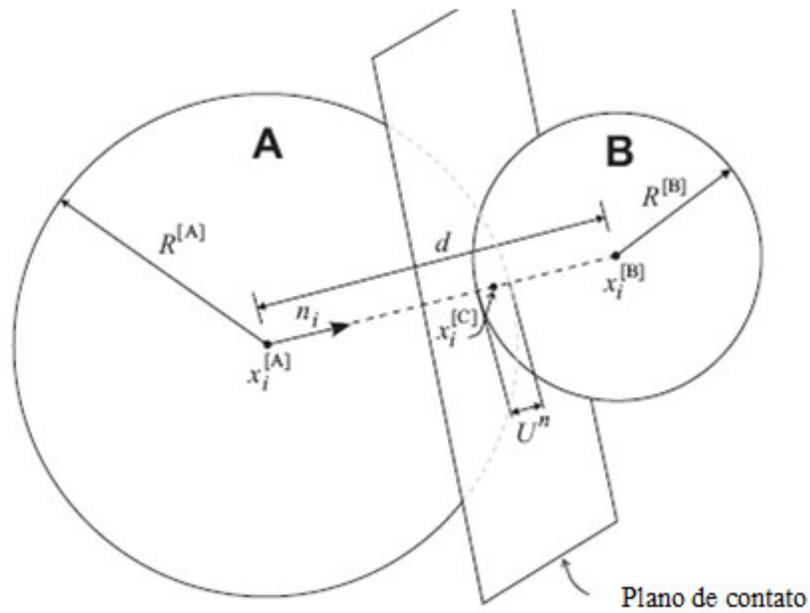


Figura 7: Esquema do mecanismo de força-deslocamento entre dois discos (ITASCA, Online Manual Table of Contents, Version 3.0, 1996).

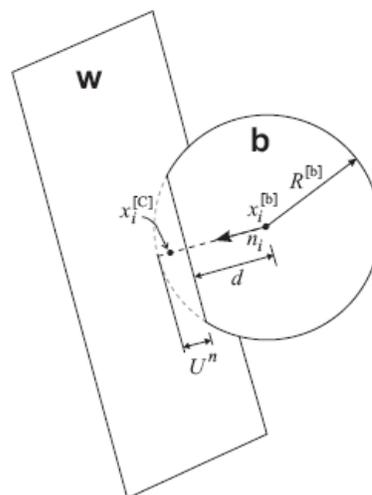


Figura 8: Esquema de mecanismo de força-deslocamento entre parede e disco (ITASCA, Online Manual Table of Contents, Version 3.0, 1996).

$$n_i = \frac{x_i^{[B]} - x_i^{[A]}}{d} \quad (3.2)$$

E $x_i^{[A]}$ e $x_i^{[B]}$ são os vetores posição dos centros dos discos, e d a distancia entre os centros:

$$d = |x_i^{[B]} - x_i^{[A]}| = \sqrt{(x_i^{[B]} - x_i^{[A]}) (x_i^{[B]} - x_i^{[A]})} \quad (3.3)$$

Para o contato disco-parede o n_i é definido com sendo a menor distancia d entre o centro do disco e a parede.

O deslocamento relativo é definido pela deformação na direção normal que ocorre entre dois discos ou entre a parede e um disco.

$$U^n = \begin{cases} R^{[A]} + R^{[B]} - d, & (\text{entre discos}) \\ R^{[b]} - d, & (\text{entre disco e parede}) \end{cases} \quad (3.4)$$

A partir do deslocamento relativo pode-se definir a força normal:

$$F^n = K^n U^n \quad (3.5)$$

Onde K^n é da rigidez normal (força/deslocamento) do contato.

A força de contato cisalhante é incremental, ou seja, inicialmente é igual a zero. E a cada incremento relativo à força cisalhante, ou seja a cada deslocamento cisalhante relativo, é adicionado ao valor corrente que é considerado a cada passo.

O deslocamento relativo cisalhante ou velocidade cisalhante do contato V^S é dado por:

$$V^S = (\dot{x}_i^{[\Phi^2]} - \dot{x}_i^{[\Phi^1]}) \mathbf{t}_i - \omega_3^{[\Phi^2]} |x_k^{[c]} - x_k^{[\Phi^2]}| - \omega_3^{[\Phi^1]} |x_k^{[c]} - x_k^{[\Phi^1]}| \quad (3.6)$$

Onde, $\dot{x}_i^{[\Phi^j]}$ e $\omega_3^{[\Phi^j]}$ são velocidade translacional e rotacional, respectivamente.

E $\mathbf{t}_i = \{-n_2, n_1\}$ e Φ^j é dado por:

$$\{\Phi^1, \Phi^2\} = \begin{cases} \{A, B\}, & \text{entre discos} \\ \{b, w\}, & \text{disco e parede} \end{cases} \quad (3.7)$$

A componente cisalhante do deslocamento do contato a cada passo Δt é calculada através da seguinte equação:

$$\Delta U^S = V^S \Delta t \quad (3.8)$$

E então usado para calcular o incremento de força cisalhante

$$\Delta F^S = -k^S \Delta U^S \quad (3.9)$$

Onde k^S é a rigidez cisalhante (força/deslocamento) do contato. E assim, a nova força cisalhante do contato é somada à força cisalhante já existente no início do passo.

$$F^S \leftarrow F^S + \Delta F^S \leq \mu F^n \quad (3.10)$$

Onde μ é o coeficiente de atrito.

A contribuição final da força de contato é dada pela força resultante:

$$F_i = F^n n_i + F^S t_i \quad (3.11)$$

3.4.2.2.

Lei de Movimento

O movimento rotacional e translacional de cada partícula é dado pela equação de movimento de corpos rígidos (Segunda Lei de Newton) para rotação e translação.

O movimento de translação do centro de massa de uma partícula é descrito em termos da posição x_i , da velocidade \dot{x}_i , e da aceleração \ddot{x}_i .

$$F_i = m(\ddot{x}_i - g_i) \quad (3.12)$$

Onde a força de translação resultante é representada por F_i , m a massa total da partícula, e g_i a gravidade.

O movimento rotacional pode ser escrito em forma de vetor:

$$M_i = \dot{H}_i \quad (3.13)$$

Onde, M_i é a resultante do momento atuante na partícula e \dot{H}_i é o momento angular da partícula. Esta relação refere-se ao sistema de coordenadas local. Porém, como o sistema de coordenadas local é orientado de acordo com os eixos principais de inércia da partícula, pode-se então utilizar a equação de movimento de Euler.

$$M_1 = I_1 \dot{\omega}_1 + (I_3 - I_2) \omega_3 \omega_2 \quad (3.14)$$

$$M_2 = I_2 \dot{\omega}_2 + (I_1 - I_3) \omega_1 \omega_3 \quad (3.15)$$

$$M_3 = I_3 \dot{\omega}_3 + (I_2 - I_1) \omega_2 \omega_1 \quad (3.16)$$

Onde I_1 , I_2 e I_3 são os momentos principais de inércia das partículas; $\dot{\omega}_1$, $\dot{\omega}_2$ e $\dot{\omega}_3$ são as acelerações angulares orientadas de acordo com os eixos principais; e M_1 , M_2 e M_3 são as componentes da resultante do momento em relação aos eixos principais.

Uma partícula em forma de esfera que possua o sistema de eixos locais coincidente com o sistema de eixos principais apresentará os três momentos de inércia iguais. E para as partículas em forma de discos, tem-se $\omega_1 = \omega_2 \equiv 0$.

3.4.3.

Amortecimento e Dissipação de Energia

A solução estática do problema depende do amortecimento do movimento. Dessa forma, a energia cinética pode ser dissipada, caso contrário, o movimento vibratório continuaria indefinidamente e o sistema nunca estaria em equilíbrio.

No entanto, para que o sistema entre em equilíbrio a energia deve ser dissipada através do atrito e do amortecimento, e este pode ser local ou global.

O amortecimento Local atua em cada elemento como uma força de amortecimento F_{dam} que é proporcional às forças desequilibradas, porém com sentido contrário, produzindo uma diminuição das oscilações.

$$F_i^{dam} = -\mu |F_i| v_i; \quad i = 1 \dots 3 \quad (3.17)$$

onde μ é o coeficiente de amortecimento e v a velocidade que pode ser translacional ou rotacional.

No amortecimento Global, as forças de amortecimento são calculadas a partir da velocidade das partículas, e dessa forma, mesmo as partículas que não estão em contato sofrem dissipação de energia. Oñate & Rojek (2004) e Shiu & Donzé (2005) apresentaram dois tipos de amortecimentos globais: viscoso e não-viscoso. O primeiro está relacionado com a magnitude da velocidade de cada partícula, e o segundo está relacionado com a magnitude das forças e momentos resultantes.

3.4.4.

Integração Numérica

A maioria dos pesquisadores adota o método explícito de integração no tempo, pois este possui muitas vantagens em relação aos métodos implícitos. Não há necessidade de armazenar a matriz rigidez global que, no caso do esquema de integração implícito, teria que ser atualizada a cada passo de tempo. No método explícito de integração os cálculos em um passo de tempo são bem mais rápidos, o sistema de equações gerado é desacoplado, não havendo, portanto, a necessidade de processos iterativos para obtenção da solução no passo $t + \Delta t$. Porém, freqüentemente requer passos de tempo muito pequenos.

De acordo com Cundall & Strack (1979), o Δt deve ser pequeno o suficiente para que as propagações não possam atingir as partículas vizinhas a cada passo. E por isso, os incrementos de tempo, $t + \Delta t$, possuem pequena ordem de grandeza.

O passo de tempo crítico pode ser estimado baseando-se na freqüência de oscilação de um sistema com um grau de liberdade. A estimativa proposta por Hart *et al* (1988) é dada por:

$$\Delta t = FRAC \cdot 2 \sqrt{\frac{M_{min}}{2K_{max}}} \quad (3.18)$$

Onde M_{min} é a menor massa e $K_{máx}$ é a maior constante elástica normal ou tangencial presente no modelo. O parâmetro $FRAC$ controla a possibilidade de um elemento participar de vários contatos. Cundall afirma, com base em vários experimentos numéricos, que o valor de $FRAC$ igual a 0,1 é suficiente para garantir a estabilidade numérica. Nesta implementação, o passo de tempo é calculado automaticamente através da equação acima utilizando o parâmetro $FRAC$ igual a 0,1.