Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro

Waldeir Azevedo Júnior

Funções Exponenciais e Logarítmicas
Ensinando Logaritmos através de suas tábuas

Dissertação de Mestrado

Dissertação apresentada ao programa de Pós-graduação em Matemática da PUC-Rio como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Matemática (opção profissional).

Orientadora: Prof.ª Renata Martins da Rosa

Rio de Janeiro
Setembro de 2017

Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro

Waldeir Azevedo Júnior

Funções Exponenciais e Logarítmicas
Ensinando Logaritmos através de suas tábuas

Dissertação apresentada como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre pelo programa de Pós-graduação em Matemática da PUC-Rio, aprovada pela Comissão Examinadora abaixo assinada.

Prof.ª Renata Martins da Rosa
Orientadora
Departamento de Matemática – PUC-Rio

Prof. Humberto José Bortolossi
Instituto de Matemática– UFF

Prof. José Victor Goulart Nascimento
Departamento de Matemática – PUC-Rio

Prof. Márcio da Silveira Carvalho
Coordenador Setorial do Centro
Técnico Científico – PUC- RIO

Rio de Janeiro, 22 de setembro de 2017

Waldeir Azevedo Júnior

Graduou-se em Licenciatura em Matemática pela Fundação Educacional da Região dos Lagos (FERLAGOS) em 2014. Atualmente é instrutor do Centro de Instrução e Adestramento Aeronaval Almirante José Maria do Amaral Oliveira (CIAAN), organização militar da Marinha do Brasil.

Ficha Catalográfica

Azevedo Júnior, Waldeir

Funções exponenciais e logarítmicas ensinando logaritmos através de suas tábuas / Waldeir Azevedo Júnior; orientadora: Renata Martins da Rosa. – 2017.
148 f. : il. color. ; 30 cm

Dissertação: (mestrado)–Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Matemática, 2017.
Inclui bibliografia

1. Matemática – Teses. 2. Matemática. 3. Construção de tabelas logarítmicas. 4. Funções. I. Rosa, Renata Martins da. II. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Matemática. III. Título.

CDD: 510

A Deus, pois sem Ele eu não teria forças para essa longa jornada, aos meus pais, irmãs, familiares e amigos que de muitas formas me incentivaram e ajudaram para que fosse possível este momento de vitória.

Agradecimentos

Aos meus pais e irmãs, pelo incentivo e por compreenderem que muitas vezes minha ausência não pôde ser evitada.

À minha orientadora, professora Dra. Renata Martins pela paciência e disponibilidade de tempo cedidas a mim, para que fosse possível a produção deste trabalho.

Aos professores Dr. José Victor Goulart, com quem tive o prazer tê-lo como professor durante este curso, e ao professor Dr. Humberto Bortolossi, participante da banca examinadora, pelo tempo dedicado.

Aos professores que contribuíram no decorrer do curso, pelo esforço na transmissão de novos conhecimentos em suas disciplinas, em especial à Dra. Emília Alves que foi muito importante para a finalização deste trabalho.

À todos os colegas de curso, pelo companheirismo, amizade e perseverança que se fortificava a cada sábado de estudos.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), pela bolsa de estudo.

À PUC-Rio, pela estrutura física, funcionários e professores disponibilizados aos alunos na realização desse curso.

Aos amigos Sérgio Frias e Keilla Castilho, pelo incentivo de chegar até ao final curso, por superar os 310 km de estrada em busca de crescimento profissional.

Aos amigos da Divisão de Planejamento do 1º Esquadrão de Helicópteros de Instrução por todo apoio dado a mim para que fosse possível concluir este curso.

Ao professor Lessandro Lessa que me ajudou com as traduções de textos para realização deste trabalho.

Enfim, à todas as pessoas que de alguma forma contribuíram de maneira positiva para que esta caminhada terminasse de forma vitoriosa.

Resumo

Júnior, Waldeir Azevedo; Rosa, Renata Martins da (Orientador). **Funções Exponenciais e Logarítmicas Ensinando Logaritmos através de suas tábuas**, Rio de Janeiro, 2017. 148p. Dissertação de Mestrado – Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

O estudo teve como objetivo abordar o ensino das Funções Exponenciais e Logarítmicas quanto ao aspecto teórico para o fortalecimento dos conceitos. Para alcançar este objetivo, este trabalho foi feito baseado em pesquisas bibliográficas em livros, artigos, dissertações entre outras fontes. Antes de abordarmos o assunto de exponenciais explanamos sobre o conceito de funções e citamos a importância das tabelas. Abordamos o assunto de exponenciais citando algumas de suas aplicações e algumas demonstrações. Mostramos também o processo de construção da tabela de logaritmos decimais. Para fortalecer o conhecimento sobre o assunto faremos uso de calculadoras e planilhas eletrônicas em algumas atividades propostas para mostrar propriedades das funções exponenciais e logarítmicas e a importante constante matemática e, que aparece naturalmente em fenômenos da Natureza. Esperamos contribuir de forma positiva para o interesse e aprimoramento de professores no assunto explanado e, principalmente, para a motivação dos alunos em estudar e compreender melhor a importância dos logaritmos.

Palavras-chave

Matemática; Construção de Tabelas Logarítmicas; Funções

Abstract

Júnior, Waldeir Azevedo; Rosa, Renata Martins da (Advisor). **Exponential and Logarithmic Functions Teaching Logarithms through tables**, Rio de Janeiro, 2017. 148p. Dissertação de Mestrado – Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

This study aims to approach the teaching of exponential and logarithmic functions regarding the theoretical aspects to the enhancement of concepts. In order to achieve this goal, this study was based on bibliographic research, articles, and dissertations, among other sources. Before we approached the issue on exponentials, we went over the concept of functions and highlited the importance of tables. We also approached the issue of exponentials citing from some of its applications and demonstrations. We brought up, as well, the process of setting up the decimal logarithmic table. In order to enhance the knowledge on the subject, we will make use of calculators and tables so as to reinforce the knowledge over the subject in some activities proposed to demonstrate the properties of the exponential and logarithmic functions as well as the important mathematical constant *e* which occurs naturally in natural phenomena. We hope to contribute positively to the bringing out of interest to teachers and likewise enhancement to their knowledge on the subject studied and, specially, motivation to students generating a better understanding over the importance of logarithms.

Keywords

Mathematics; Construction of Logarithmic Tables; Functions

Sumário

Lista de figuras

Lista de tabelas

A questão primordial não é o que sabemos, mas como o sabemos

Aristóteles

1 Introdução

Diante das diversas dificuldades encontradas no ensino-aprendizagem de Matemática por professores e alunos no Ensino Médio, o ensino relacionado à função exponencial e logarítmica muitas vezes tem sido realizado de forma mecânica nas salas de aula de nossas escolas.

Este tema é considerado bastante árduo devido a sua complexidade, o que torna a apresentação e o ensino aos alunos um grande desafio aos professores. Muitas vezes a falta de conhecimento de assuntos que deveriam ter sido abordados anteriormente, ou não tiveram o aproveitamento adequado por parte dos alunos, dificultam o desenvolvimento no aprendizado de Exponenciais.

Entender o conceito de funções antes de abordar o assunto de Exponenciais é de grande importância, visto que o conceito geral de funções se torna uma ferramenta fundamental quando estudamos funções exponenciais e logarítmicas.

1.1 Objetivos

1.1.1 Objetivo geral

- Avaliar o uso das tábuas das funções exponenciais e logarítmicas como ferramentas didáticas para alunos do Ensino Médio

1.1.2 Objetivos específicos

- Mostrar as aplicações das funções;
- Avaliar o atual uso de funções exponenciais e logarítmicas;
- Propor uma sequência de atividades como elementos facilitadores na relação ensino aprendizagem.

1.2
Estrutura da dissertação

1.2.1
Estrutura capitular

Ao dissertar sobre funções neste trabalho, esperamos que o capítulo 2 ajude a sanar dúvidas de alunos que não aprenderam ou tenham dificuldades em funções, bem como relembrar conceitos de funções a muitos professores de matemática que por algum motivo estiveram afastados dos assuntos de ensino médio e sintam a necessidade de relembrar estes conceitos para apresentar uma aula com mais qualidade.

Ainda dentro do segundo capítulo explanaremos sobre tabelas e leituras de gráficos pelo fato de serem importantes ferramentas para analisarmos gráficos de funções. Aproveitando a oportunidade de discorrer sobre tabelas, torna-se útil mostrar a importância de tabelas no nosso cotidiano, visto que elas estão espalhadas em diversos locais, desde uma simples tabela de nutrientes contida em uma embalagem de alimento até elaborados softwares computacionais.

Ainda no capítulo 2, abordaremos os gráficos estatísticos de setores, colunas e linhas. Abordar estes assuntos tem o objetivo de chamar a atenção dos alunos para mostrá-los que os gráficos estão presentes no nosso dia a dia, seja nas páginas de jornais e revistas, televisão, na internet etc. Portanto, a abordagem sobre a leitura de gráficos tem o objetivo de preparar o aluno para situações do seu cotidiano além de facilitar seu aprendizado em funções, ou outro assunto que porventura o aluno possa ter contato.

Após abordarmos todos os assuntos anteriormente mencionados, acreditamos que após vistos os assuntos o leitor tenha o mínimo conhecimento de tabelas, gráficos e sua interpretação. Desta forma, apresentaremos o Plano Cartesiano e as definições de funções crescente e decrescente, função inversa, funções par e ímpar. Para que pudéssemos abordar o assunto de função inversa, houve a necessidade de uma breve explicação sobre função sobrejetora, injetora e bijetora.

No capítulo 3, dissertaremos sobre o tema de Exponencial. Abordaremos sobre a sua importância no cotidiano, onde aparecem as funções exponenciais, suas escalas e suas aplicações. Chamaremos atenção para o fato da função exponencial ser constantemente confundida com a função afim em alguns problemas do nosso dia a dia e citaremos alguns exemplos de problemas. Dissertaremos ainda sobre o lema da caracterização de uma função exponencial e demonstraremos suas afirmações. Além disso, falaremos a respeito da definição, gráficos e aplicações da Função Exponencial.

No capítulo 4, explanaremos sobre a definição de função logarítmica e logaritmo natural, a aproximação de um número por áreas de figuras geométricas. Demonstraremos ainda a propriedade fundamental de $ln(a)$.

No capítulo 5, mostra-se a proposta de utilizar as atividades contidas neste trabalho, na qual seguem uma sequência progressiva que visa o aprendizado do aluno utilizando a comparação de tabelas que ajudam na fixação das propriedades logarítmicas.

1.2.2
Estrutura das atividades

A proposta das atividades sugeridas neste trabalho visa introduzir uma sequência de conteúdos que possibilite o aprendizado sobre funções exponenciais e logaritmos de forma organizada, possibilitando que o aluno consiga perceber a importância destes. O porquê de um logaritmo possuir um determinado valor e de onde vem este valor, além de posteriormente possibilitar uma visão lógica das propriedades logarítmicas.

2
Funções

"Sejam A e B subconjuntos não vazios de R. Uma função $f: A \rightarrow B$ é uma lei ou regra que a cada elemento de A faz corresponder um único elemento de B. O conjunto A é chamado $domínio\ de\ f$ e é denotado por $D(f)$, B é chamado de $contradomínio$ ou $campo\ de\ valores\ de\ f$." (FLEMMING, 1992)

Em outras palavras é a ideia de que a cada elemento x de um conjunto A se associa um único elemento $f(x)$ de outro conjunto B, segundo uma relação definida de A em B.

2.1
Domínio e imagem de uma função

2.1.1
Domínio

Como o próprio nome diz, domínio de uma função são os valores que temos domínio sobre eles, ou seja, são valores que temos controle sobre eles. Em outras palavras, são dados que podemos inserir numa função.

Quando usamos o controle remoto de uma TV para selecionar um canal, temos o domínio sobre aquelas teclas, e como resposta, temos a imagem de um canal. Porém se minha TV só possui entrada para canais de dois dígitos, podemos selecionar qualquer canal do 00 ao 99, portanto temos o domínio da TV somente neste intervalo, visto que não será possível selecionar um canal de três dígitos.

2.1.2
Imagem

A imagem de uma função é a resposta que se obtém sobre um valor dado.

Para a imagem podemos utilizar o mesmo exemplo do controle remoto: Para cada número que seleciono no controle remoto eu tenho como resposta a imagem de um canal. Isto porque há uma correspondência entre uma seleção no controle remoto e uma emissora de TV.

Vamos ver um exemplo de problema: Na produção de peças, uma fábrica tem um custo fixo de R$ 200,00 mais um custo não variável de R$ 1,20 por peça produzida. Qual o custo de produção de 10.000 peças? Quantas peças podem ser produzidas com R$ 20.000,00?

Repare que podemos modelar o problema pela seguinte função f de expressão:

$$f(p) = 200 + 1{,}2 \cdot p$$

Temos que ter em mente que independentemente da quantidade de peças produzidas, esta fábrica terá um custo mínimo de 200 reais.

Outro fator importante é perceber quais são as grandezas que variam: a quantidade de peças e o custo de toda a fabricação. Sabemos que quanto maior a quantidade de produtos fabricados, maior será o gasto. Portanto, verificamos uma relação de dependência entre a quantidade de peças fabricadas e o custo final. Daí, podemos montar uma função $peças \times custo\ final$.

Primeiramente vamos analisar o gráfico que modela esse problema.

Ao construir este gráfico precisamos nos perguntar:

Quanto gastarei para construir p peças?

Para responder esta pergunta faremos o seguinte raciocínio:

- Vamos definir quem é o domínio e a imagem desta função.

Domínio: é a quantidade de peças que desejamos fabricar. Afinal de contas, é sobre o número de peças que nós temos o controle. Portanto o número de peças é a entrada da função. Neste caso poderíamos colocar apenas valores inteiros não negativos, visto que ninguém produz $2{,}4$ peças e muito menos -5 peças.

- Vamos determinar quem será a imagem desta função.

A imagem é a resposta da pergunta que fizemos anteriormente. Se a fábrica produzir 0 peças ela terá um custo de 200 reais, mas se ela produzir 100 peças ela terá o custo fixo de R$ 200 mais o custo de 100 peças que é R$ 120,00 que totalizará R$ 320,00.

- Construindo o gráfico.

Analisando apenas a função f dada pela expressão:

$$f(p) = 200 + 1{,}2 \cdot p$$

que é a função que modelamos, poderíamos montar o gráfico da figura 2-1:

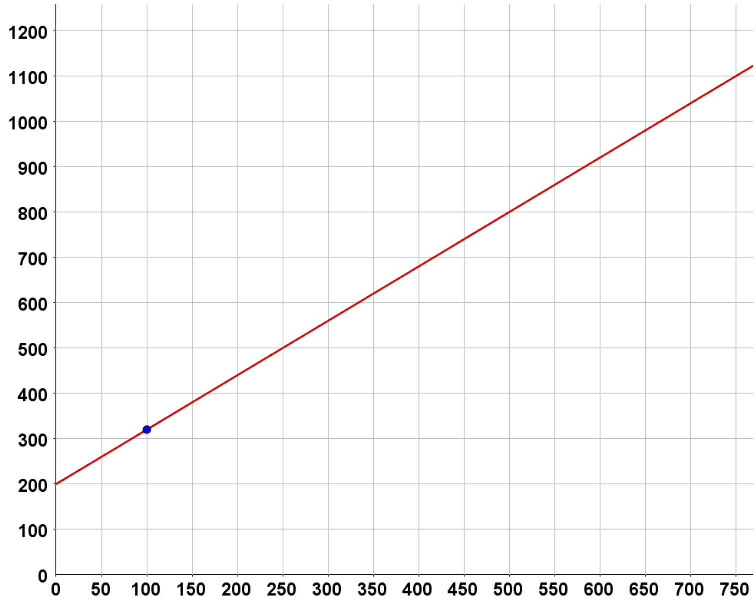


Figura 2-1: Gráfico da função $\mathrm{f}: \mathrm{R}^{+} \rightarrow \mathrm{R}^{+}$.

Porém, o gráfico que foi montado acima não representa o gráfico do problema proposto, visto que a função que foi esboçada representa uma função da forma $f: R^{+} \rightarrow R^{+}$. Mas o que o problema sugere é que, como o nosso domínio é o número de peças, certamente o domínio deve pertencer aos números naturais.

Já a nossa imagem, deve ser representada por números da forma $200 + 1{,}2 \cdot p$, ou seja, diferente do que foi visto no gráfico anterior que a imagem pertence a R^{+}, podemos limitar a imagem ao conjunto Q^{+}, pois nunca encontraríamos como imagem dessa função um número que supere uma casa decimal, já que o valor de p é sempre natural. Portanto, não encontraríamos na imagem um número irracional. Fazendo o gráfico do problema, teríamos a figura 2-2:

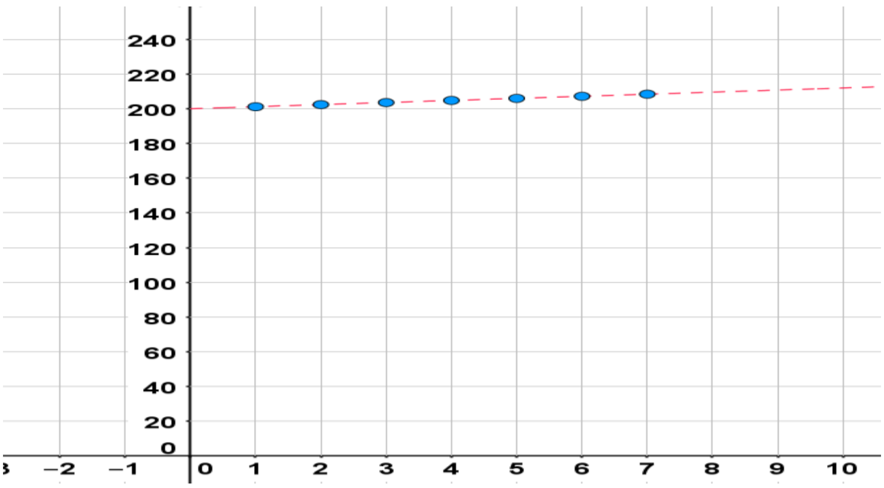


Figura 2-2: Gráfico da função $\mathrm{f}: \mathrm{N} \rightarrow \mathrm{Q}^{+}$.

Podemos observar que ao invés de traçarmos uma linha, o que esboçamos é um conjunto de pontos que está contido sobre a reta que traçamos anteriormente.

Diante dessas conclusões, podemos resolver a questão algebricamente percebendo que $f(p)$ é o custo total da produção, e p é a quantidade de peças fabricadas.

Daí, temos que:

$$f(p) = 200 + 1{,}2 \cdot p$$

Para $p = 10000$

$$f(10000) = 200 + 1{,}2 \cdot 10000$$

$$f(10000) = 200 + 12000$$

$$f(10000) = 12200$$

Resposta: O custo de 10000 peças é de R$ 12200,00.

Para descobrir quantas peças podemos produzir com R$ 20000,00 faremos:

$$f(p) = 20000$$

Logo

$$f(p) = 200 + 1{,}2 \cdot p$$

$$20000 = 200 + 1{,}2 \cdot p$$

$$19800 = 1{,}2 \cdot p$$

$$p = 16500$$

Resposta: Com 20000 podemos construir 16500 peças.

2.2
Interpretação gráfica e o ensino de funções

Discorrendo um pouco sobre o ensino de funções, e considerando que pelo fato deste assunto ser apresentado de forma tardia nos currículos de Matemática, o estudante só é apresentado à representação gráfica no final do ensino fundamental, encontrando grande dificuldade na interpretação de gráficos.

Contudo, é possível que este conteúdo seja comentado já nas primeiras séries do ensino fundamental, tendo como propósito a familiarização do aluno com a interpretação de gráficos e o conceito de função.

Evidente que o assunto não será abordado de forma tão contundente, por isso a ideia é passar um conceito de função de forma intuitiva, mas que não seja tão superficial.

Mas qual é o conceito de função que esperamos passar aos nossos alunos?

Função é uma lei ou associação entre dois conjuntos, que a cada elemento do primeiro conjunto associa um único elemento do outro. Intuitivamente, uma função é uma espécie de máquina na qual colocamos um certo dado (o elemento do primeiro conjunto) e ela atua sobre este dado e nos dá uma resposta que depende dele (elemento do segundo conjunto).

Focando nesta ideia, as atividades em sala de aula podem ser orientadas com o intuito de proporcionar aos alunos este tipo de conhecimento antes mesmo do estudo de funções, como são encontrados nos livros didáticos.

A proposta é, a partir de problemas concretos e interessantes, fazer com que o aluno construa e interprete tabelas e gráficos, sendo que as propostas apresentadas devem sempre se reportar ao universo mais próximo do aluno.

Quando introduzido nas primeiras séries escolares, a abordagem de gráficos proporciona um complemento nas atividades de classificação, ordenação e visualização de operações aritméticas simples.

É ideal propor atividades em que o aluno participe dos acontecimentos, seja com exercícios, experimentos ou pesquisas, pois a participação do aluno nos acontecimentos em sala de aula gera oportunidades que o motivam a formular leis e propriedades.

Vejamos o exemplo a seguir: São dados seis cartões coloridos, das cores: verde, azul, amarelo (2 cartões), laranja, roxo. Vamos estabelecer um modelo gráfico para representar a seguinte associação:

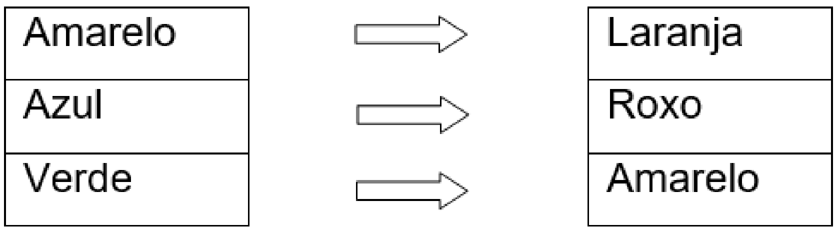


Figura 2-3: Relação entre as cores dos cartões.

O que esperamos obter é:

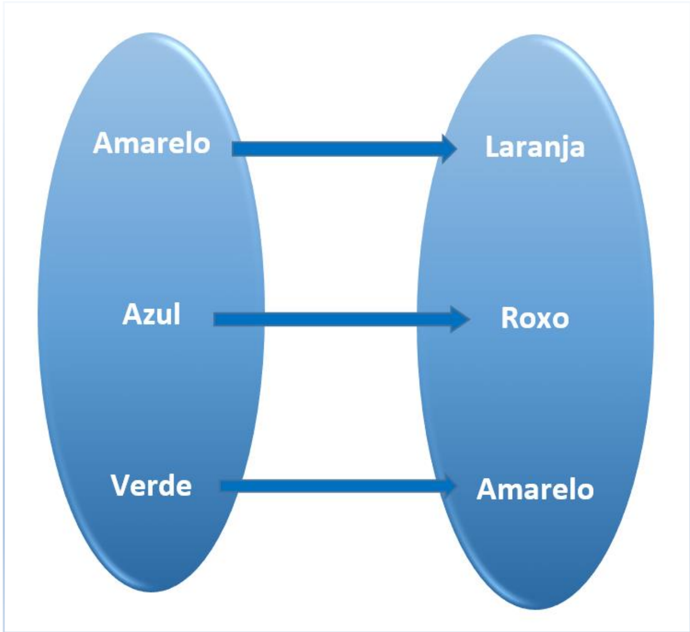


Figura 2-4: Gráfico obtido pela relação entre as cores dos cartões de acordo com a figura 2-3.

Vimos na figura que não foi necessário nada algébrico para que o aluno consiga montar o gráfico.

Vejamos este outro exemplo: João possui cartas numeradas e uma máquina com uma função muito especial: para toda carta numerada que é inserida nesta máquina, a máquina devolve o seu sucessor. Monte o gráfico dessa máquina.

O que esperamos obter é:

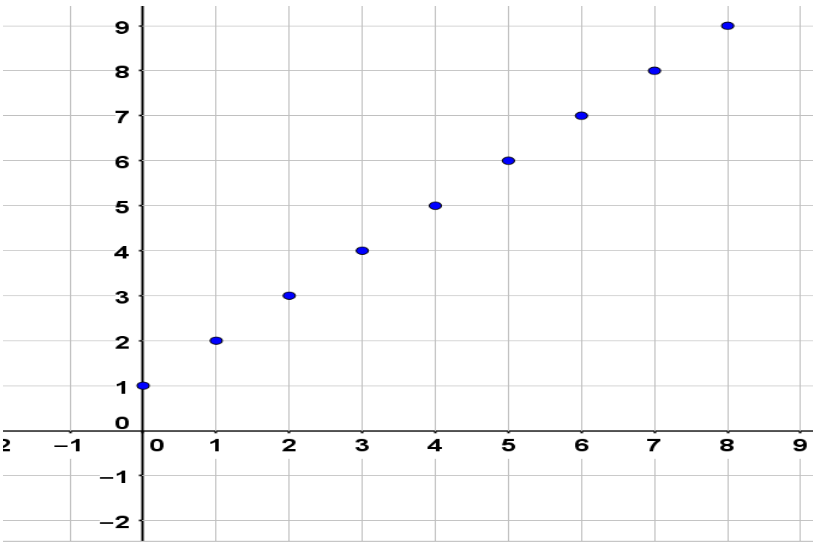


Figura 2-5: Gráfico da máquina.

2.3
Leitura e interpretação de tabelas

Segundo (DUARTE, s.d), uma tabela é um arranjo sistemático de dados numéricos dispostos de forma (colunas e linhas) para fins de comparação. A apresentação em formas de tabela deve expor os dados de modo fácil e que deixe a leitura mais rápida. A assimilação das informações geradas pelos dados de experimentos é mais fácil quando as mesmas estão dispostas em tabelas.

2.3.1
A importância das tabelas

Há uma grande necessidade de profissionais e do público em geral em trabalhar com uma enorme quantidade de informações, esta necessidade é cada vez mais frequente, devido ao avanço tecnológico e à rapidez com que as informações passam de países a outros países. Tabelas são poderosas ferramentas que podem auxiliar desde uma compra de supermercado a um computador capaz de realizar uma navegação por piloto automático de uma grande aeronave.

Planilhas eletrônicas, criação de softwares, classificação de um campeonato de futebol, são exemplos de aplicação de tabelas.

Embora as tabelas estejam vinculadas a matemática, não é difícil encontrar tabelas que não tenham relações com os números. Um grande exemplo é a tabela periódica. Além dela, poderíamos construir uma tabela que relacione países a suas capitais, como na figura 2-6.

	PAÍSES	Capitais
AMÉRICA DO SUL	ARGENTINA	Buenos Aires
	BOLÍVIA	La Paz
	BRASIL	Brasília
	CHILE	Santiago
	COLÔMBIA	Bogotá
	EQUADOR	Quito
	GUIANA	Georgetown
	GUIANA FRANCESA	Caiena
	PARAGUAI	Assunção
	PERU	Lima
	SURINAME	Paramaribo
	URUGUAI	Montevidéu
	VENEZUELA	Caracas

Figura 2-6: retirada do site GeoMundo.

Porém, tabelas que relacionam valores são muito comuns, como por exemplo as notas dos alunos de uma turma, uma fatura de cartão de crédito, a lista de classificação de um concurso público, entre outros.

#	Equipe	PJ	VIT	E	DER	GP	GC	SG	PTS
1	Corinthians	5	4	1	0	10	3	7	13
2	Grêmio	5	4	0	1	15	7	8	12
3	Coritiba	5	4	0	1	7	2	5	12
4	Fluminense	5	3	1	1	10	8	2	10
5	Chapecoense	5	3	1	1	9	7	2	10
6	Bahia	5	3	0	2	11	5	6	9
7	São Paulo	5	3	0	2	6	2	4	9
8	Ponte Preta	5	2	1	2	7	7	0	7
9	Botafogo	5	2	1	2	3	3	0	7
10	Cruzeiro	5	2	1	2	3	4	-1	7
11	Sport Recife	5	2	1	2	7	9	-2	7
12	Santos	5	2	0	3	4	6	-2	6
13	Vasco da Gama	5	2	0	3	7	14	-7	6
14	Flamengo	5	1	3	1	5	4	1	6
15	Atlético	5	1	3	1	5	5	0	6
16	Palmeiras	5	1	1	3	4	4	0	4
17	Avaí	5	1	1	3	1	5	-4	4
18	Atlético-GO	5	1	0	4	4	11	-7	3
19	Atlético-PR	5	0	2	3	4	11	-7	2
20	EC Vitória	5	0	1	4	1	6	-5	1

Figura 2-7: Tabela de Classificação do Brasileirão Série A 2017, após a realização da 5ª rodada do campeonato – Globo.com.

Na figura 2-7, percebemos o quanto é simples e rápido ler as informações contidas na tabela. Basta escolhermos um dos 20 times elencados e rapidamente constatamos sua pontuação, números de jogos, gols a favor, gols contra, vitórias, derrotas, empates e saldo de gols.

Resumindo, podemos dizer que tabelas são quadros que resumem um conjunto de observações.

Como já dissemos antes, a leitura de tabelas é de grande importância no nosso cotidiano, é encontrada de forma tão costumeira que às vezes nem percebemos que estamos lendo uma tabela.

Talvez por isso, muitos concursos públicos como o do Banco do Brasil, TCU, e até mesmo o Enem esbanjam em suas questões assuntos recheados de tabelas e gráficos.

Existe uma estreita relação entre tabelas e gráficos, assim como existe a relação entre domínio e imagem. Ou seja, numa tabela que contem valores quantitativos é possível construir um gráfico, e muitas vezes, através de um gráfico conseguimos construir uma tabela, desde que o gráfico nos dê informações suficientemente boas para tal.

Um exemplo de leitura de tabelas está na questão da prova do Enem de 2005, que se encontra abaixo.

Podemos estimar o consumo de energia elétrica de uma casa, considerando as principais fontes desse consumo. Pense na situação em que apenas os aparelhos que constam da tabela abaixo fossem utilizados diariamente da mesma forma.

Aparelho	Potência (KW)	Tempo de uso diário (horas)
Ar condicionado	1,5	8
Chuveiro elétrico	3,3	1/3
Freezer	0,2	10
Geladeira	0,35	10
Lâmpadas	0,10	6

Figura 2-8: Retirado da Prova do ENEM 2005.

OBS: A tabela fornece a potência e o tempo efetivo de uso diário de cada aparelho doméstico.

Supondo que o mês tenha 30 dias e que o custo de 1 KWh é de R$ 0,40, o consumo de energia elétrica mensal dessa casa, é de aproximadamente.

a) R$ 135

b) R$ 165

c) R$ 190

d) R$ 210

e) R$ 230

A resolução é simples, basta somar o produto entre o consumo de cada aparelho e tempo de uso de cada um deles para encontrar o consumo diário, ou seja

$$1{,}5 \cdot 8 + 3{,}3 \cdot \frac{1}{3} + 0{,}2 \cdot 10 \cdot 0{,}35 \cdot 10 + 0{,}10 \cdot 6 = 19{,}2.$$

Basta agora multiplicar o consumo diário com o valor do kWh e os 30 dias de consumo

$$19{,}2 \cdot 0{,}40 \cdot 30 = 230{,}40.$$

Logo o valor mensal desta conta é de aproximadamente R$ 230. Portanto alternativa E.

2.4 Plano Cartesiano

O plano cartesiano é um método criado pelo filósofo e matemático francês, René Descartes. Trata-se de dois eixos perpendiculares pertencentes a um plano em comum.

Descartes criou esse sistema de coordenadas para demonstrar a localização de alguns pontos no plano.

Esse método gráfico é utilizado em diversas áreas, sobretudo na matemática e na cartografia.

Para a interpretação de gráficos é necessário uma noção de Plano Cartesiano, isto é, de plano determinado pelo sistema de eixos ortogonais x e y, que o divide em quatro regiões.

Um ponto P é representado no plano cartesiano por uma referência horizontal (x) e uma referência vertical (y), que juntas formam o par ordenado (x, y). Dizemos que x e y são coordenadas do ponto $P(x, y)$.

2.4.1 O par ordenado

Num plano cartesiano, para localizar um ponto P qualquer, é necessário que tenhamos duas informações. Essas informações são dadas por dois números dentro dos parênteses e separados por uma vírgula. Como exemplo podemos citar $P(2{,}3)$, onde o primeiro elemento representa o eixo das abscissas e o segundo elemento o eixo das ordenadas.

É interessante ter a noção de localização a partir de coordenadas. Como estamos falando em planos, basta possuirmos duas informações, para que possamos encontrar um ponto neste plano. (QUINTELLA, 1967) citou um exemplo bem prático disso.

> “Do mesmo modo você localiza a casa de um amigo com **duas** indicações: o nome da rua e o número da casa.
> No estádio, você acha a cadeira que comprou para assistir a um jogo de futebol por meio de duas indicações – a letra da fila e o número da cadeira: “minha cadeira é o da fila J, número 17”, por exemplo.” (QUINTELLA, 1967, p. 134-135)

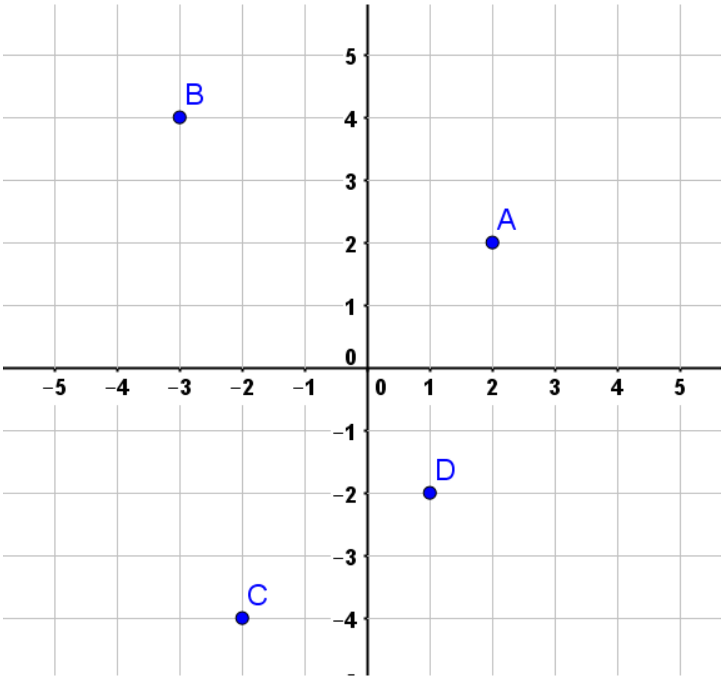


Figura 2-9: Utilização do Plano Cartesiano no GeoGebra.

2.5 Construção do gráfico de uma função

Para a construção de um gráfico de uma função, usamos o sistema de gráficos cartesianos. O gráfico da função fica determinado por todos os pontos do plano cartesiano representados por pares ordenados $(x, f(x))$, tal que $x \in D$, onde D é o domínio da função.

2.5.1 Reconhecendo os gráficos que representam uma função

De acordo com (BARROSO, 2010), quando observamos um gráfico, podemos perceber se a curva descrita corresponde ou não a uma função. Para isso basta lembrarmos o que define uma função é o fato de que para cada elemento do domínio há apenas um elemento no contradomínio.

Uma maneira bem prática de perceber isto é traçar retas paralelas ao eixo das ordenadas no decorrer do domínio da função, verificando se estas retas intersectam em apenas um ponto o gráfico da função. Caso isso não ocorra, o gráfico não representa uma função.

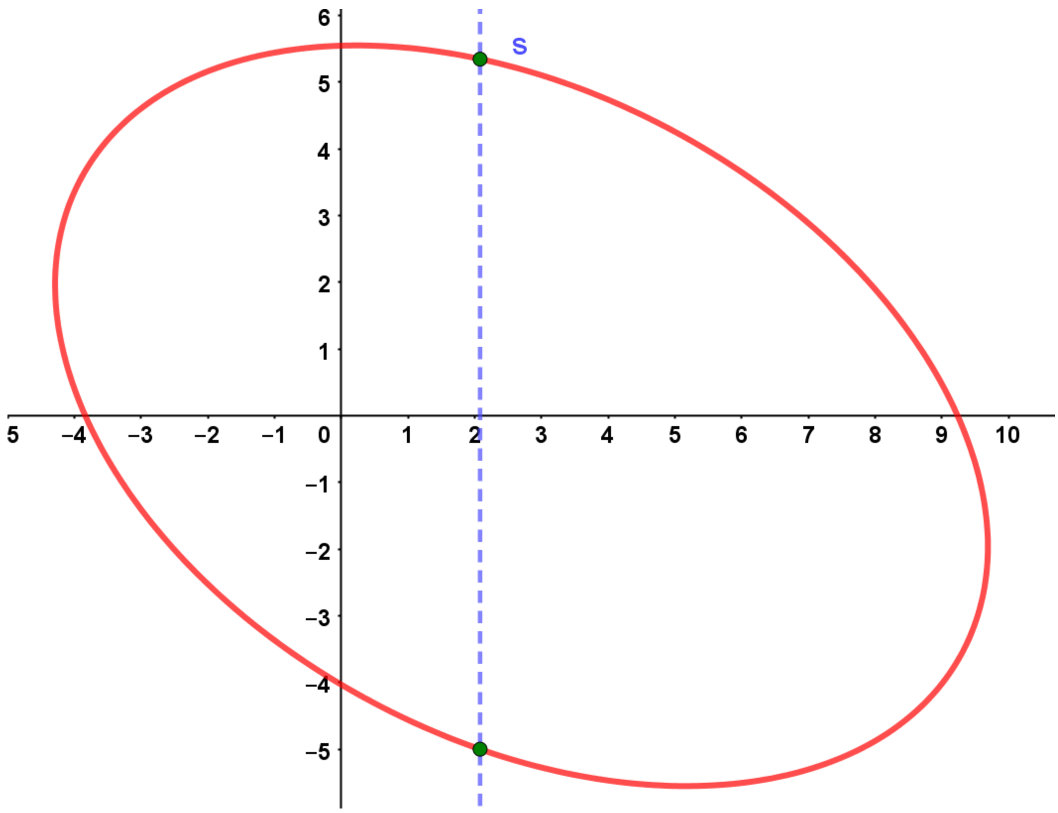


Figura 2-10: Exemplo de um gráfico feito no GeoGebra que não representa uma função

Veja na figura 2-10 que a reta s intersecta o gráfico em dois pontos. Isso significa que existe um elemento do domínio que se relaciona com dois elementos do contradomínio. Portanto o gráfico não representa uma função.

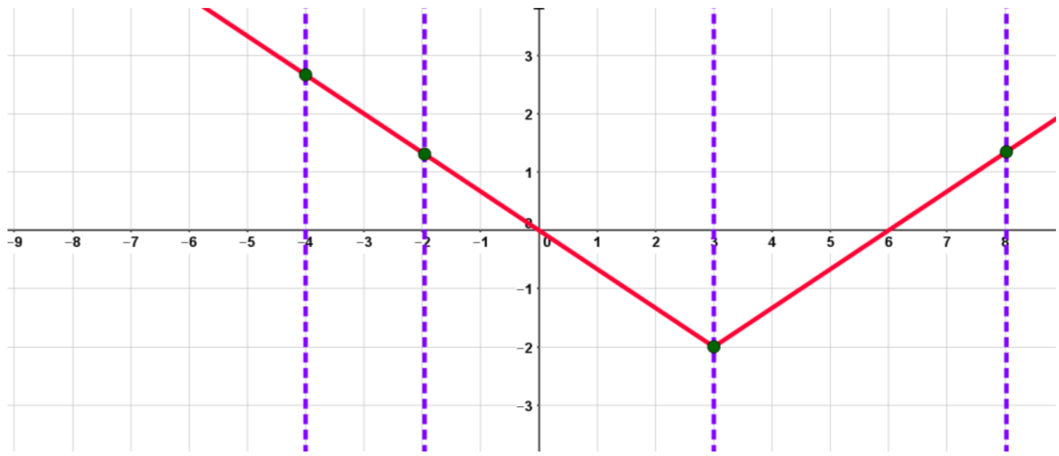


Figura 2-11: Exemplo de um gráfico feito no GeoGebra que representa uma função.

Já na figura 2-11, percebemos que para qualquer reta paralela ao eixo das ordenadas, teremos apenas uma intersecção com o gráfico. Desta forma concluímos que para cada elemento do domínio há relação apenas com um elemento do contradomínio.

Portanto essa relação representa uma função.

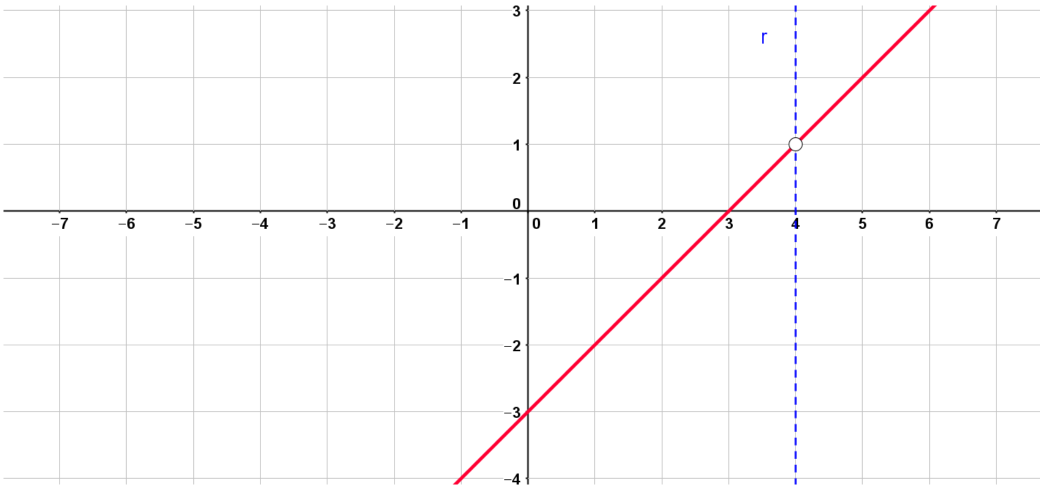


Figura 2-12: Exemplo de um gráfico feito no Geogebra onde o ponto (4,1) não pertence a função.

Repare na figura 2-12 que ao traçarmos a reta r paralela ao eixo das ordenadas, vemos que r não intersecta o gráfico em ponto algum, ou seja, existe um elemento do domínio que não se relaciona com nenhum elemento do contradomínio. Concluímos que a figura 2-12 representa um gráfico onde não existe relação quando $x = 4$. Portanto o gráfico não representa uma função se considerarmos o domínio todos os reais. Porém, se considerarmos o domínio deste gráfico todos os reais exceto o 4, ou seja, $D = \{x \in R | x \neq 4\}$, então o gráfico representará sim uma função, pois desta forma, todos os elementos do domínio terão relação com apenas um elemento do contradomínio.

Vimos que para chegar às conclusões dos exemplos anteriores, bastou que lembrássemos que o que define uma função é a característica de que para cada elemento do domínio existe uma, e somente uma relação com um elemento do contradomínio.

2.5.2
Análise de gráficos de funções

Vamos analisar o intervalo de crescimento e decrescimento de uma representação gráfica, onde (BARROSO, 2010) em seu livro Conexões com a Matemática, propõe uma análise do gráfico da figura 2-13.

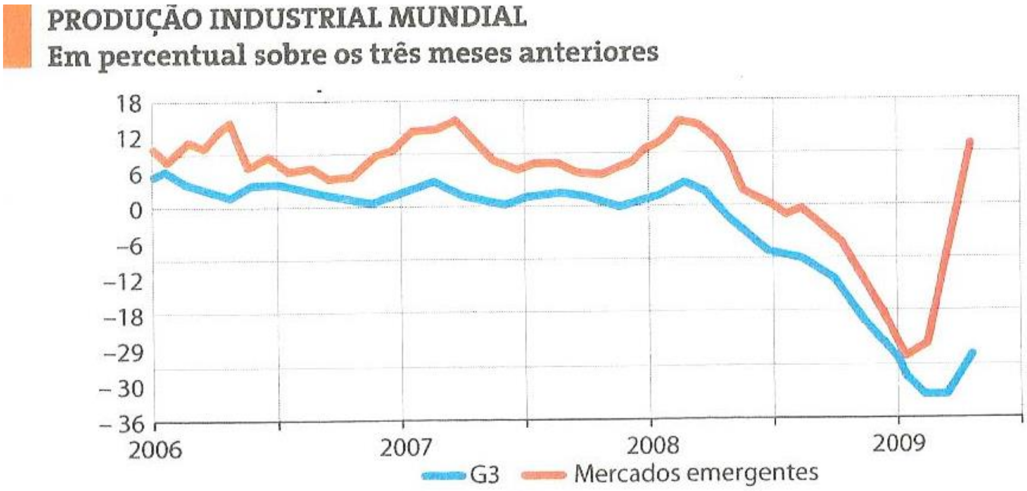


Figura 2-13: Gráfico retirado do livro Conexões com a Matemática.

Vemos na figura 2-13 um gráfico com comportamento de crescimentos e decrescimentos semelhantes. Percebemos que devido à crise mundial em 2008 houve uma acentuada diminuição da produção. No início de 2009 vemos sinais de crescimento mais acentuados nos países emergentes.

Assim como verificamos o crescimento e decrescimento desse gráfico, podemos fazer a análise de outros gráficos da mesma maneira. Vejamos alguns exemplos.

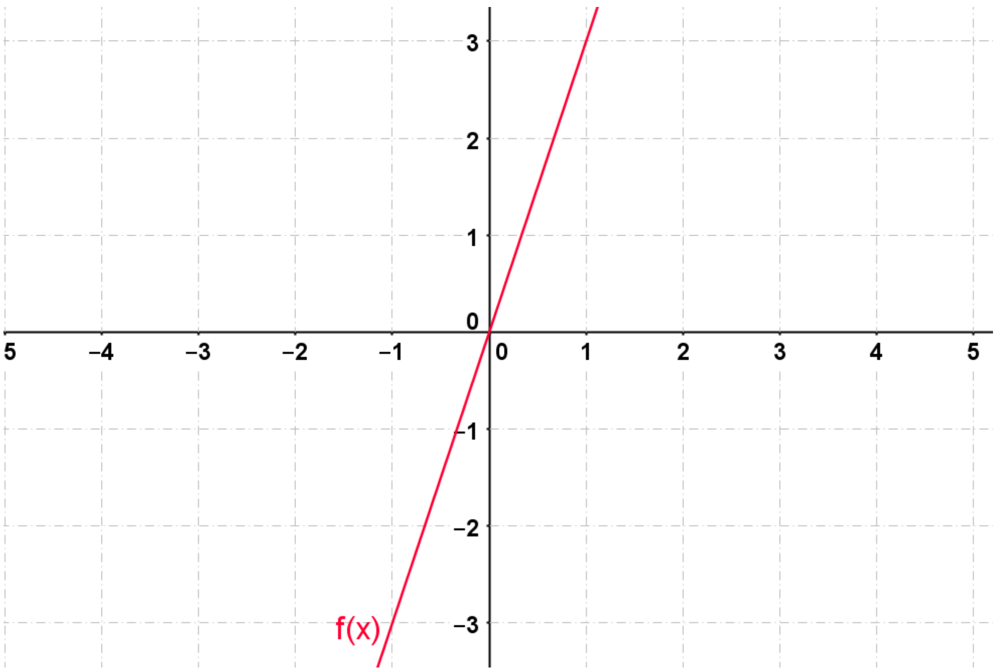


Figura 2-14 função crescente – GeoGebra.

A figura 2-14 representa o gráfico de uma função crescente, pois quanto maior o valor de x, maior o valor de y.

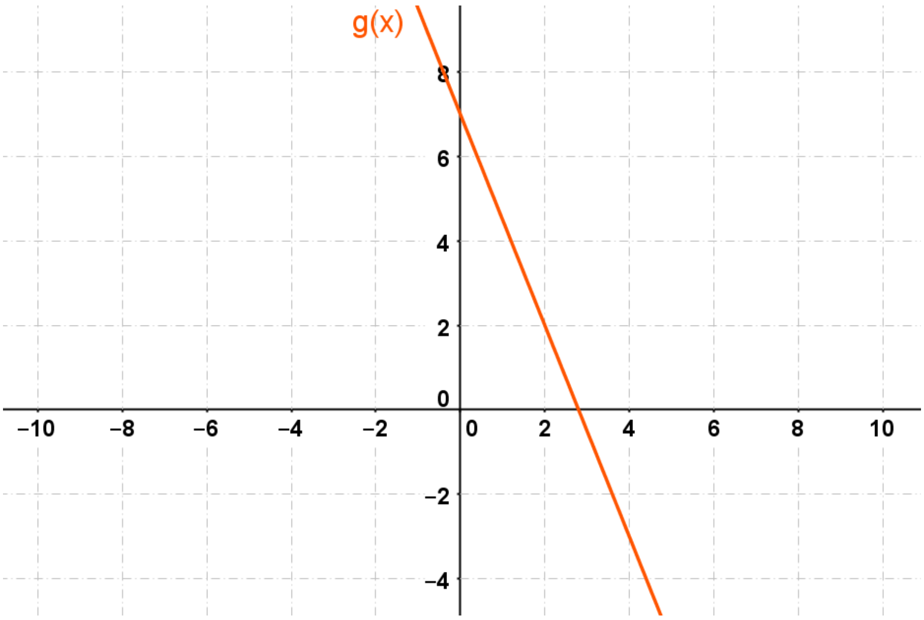


Figura 2-15: Função decrescente – GeoGebra.

A figura 2-15 mostra uma reta que representa uma função decrescente, pois quanto maior o valor de x, menor é o valor de y.

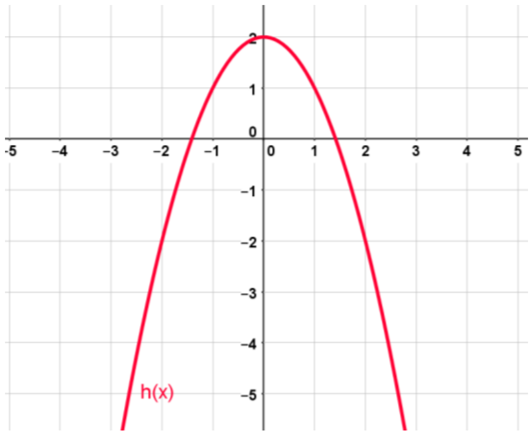


Figura 2-16: Função de 2º grau onde $a < 0$ – GeoGebra.

Na figura 2-16, a função é crescente quando $x \leq 0$ e decrescente quando $x \geq 0$.

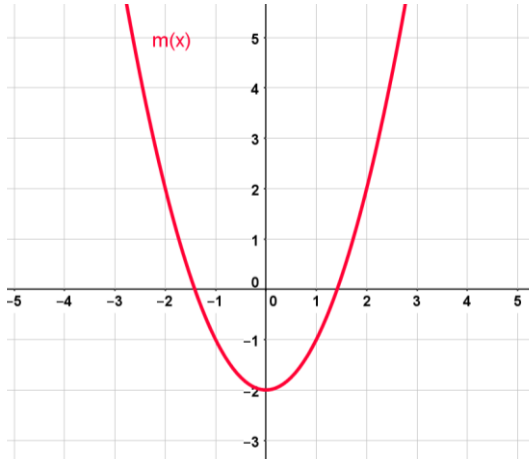


Figura 2-17 função de 2º grau onde a > 0 – GeoGebra

No caso da figura 2-17, pelo gráfico podemos verificar que a função é decrescente quando $x \leq 0$ e crescente quando $x \geq 0$.

Poderíamos analisar cada gráfico e verificar se há um valor máximo ou um valor mínimo. Perceberíamos que só existe valor máximo ou mínimo, se a função possuir um intervalo crescente e outro decrescente.

Portanto, podemos concluir que:

- Uma função f é crescente em um intervalo do domínio se, e somente se, para qualquer valor de x_1 e x_2 desse intervalo, com $x_1 < x_2$ tem-se $f(x_1) < f(x_2)$.
- Uma função f é decrescente em um intervalo do domínio se, e somente se, para qualquer valor de x_1 e x_2 desse intervalo, com $x_1 < x_2$ tem-se $f(x_1) > f(x_2)$.

2.6 Função Inversa

Para entendermos o conceito de função inversa, será necessário o entendimento de função sobrejetora, injetora e bijetora.

2.6.1 Função Sobrejetora

“Uma função $f: A \to B$ é sobrejetora quando, para qualquer $y \in B$, sempre temos $x \in A$ tal que $f(x) = y$, ou seja, quando $Im(f) = B$". (BARROSO, 2010)**.**

Para saber se uma função é sobrejetora, é preciso verificar se o conjunto imagem é igual ao contradomínio.

Exemplo:

$$f: A \rightarrow B, f(x) = x^2$$

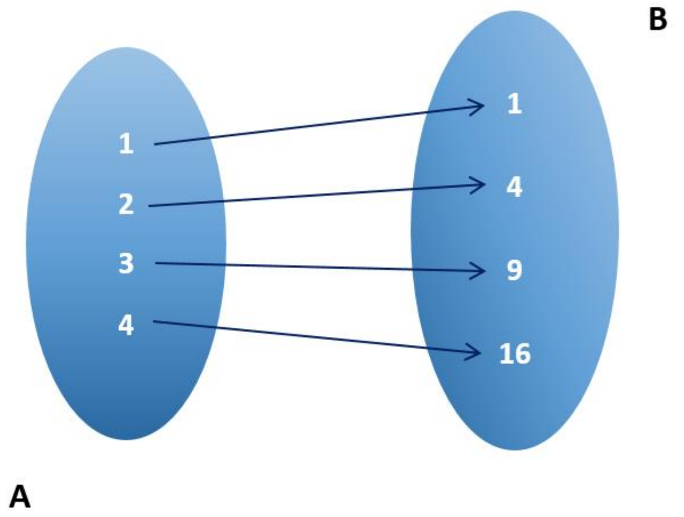


Figura 2-18: Representação de da função pelo diagrama de Venn.

Observe que todo elemento de A se relaciona com um elemento de B. Logo o contradomínio é igual ao seu conjunto imagem. Portanto $f: A \rightarrow B$, é uma função sobrejetora.

Contraexemplo

$$g: R \rightarrow R, f(x) = x^2.$$

Embora a equação dada função seja igual a anterior, podemos verificar que $Im(g) = R^+$ e o $C.D(g) = R$, logo $Im(g) \neq C.D(g)$, portanto esta função não é sobrejetora.

2.6.2 Função Injetora

Uma função $f: A \rightarrow B$ é injetora se, para quaisquer x_1 e x_2 de A, $x_1 \neq x_2$, temos $f(x_1) \neq f(x_2)$. (BARROSO, 2010)

Observe que quaisquer dois elementos de A têm como imagem elementos distintos de B.

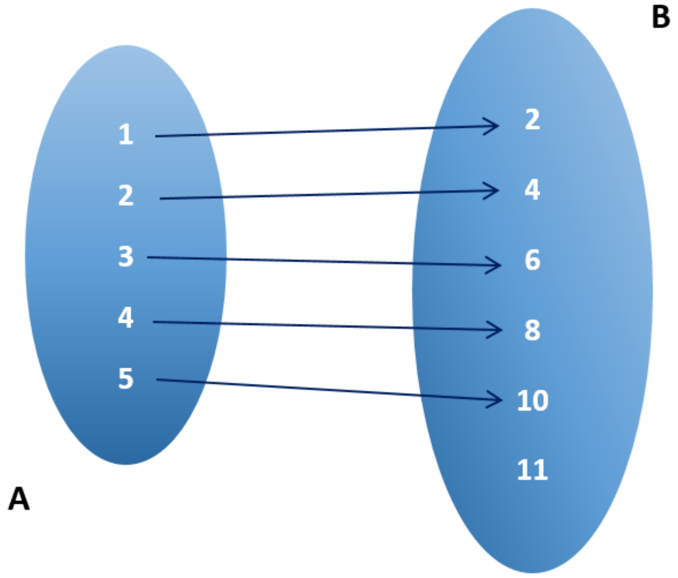


Figura 2-19: Representação de uma função pelo diagrama de Venn.

Quando uma reta paralela ao eixo das abscissas corta o gráfico em mais de um ponto, isso indica que no domínio da função existem elementos distintos com a mesma imagem. Desta forma a função não é injetora.

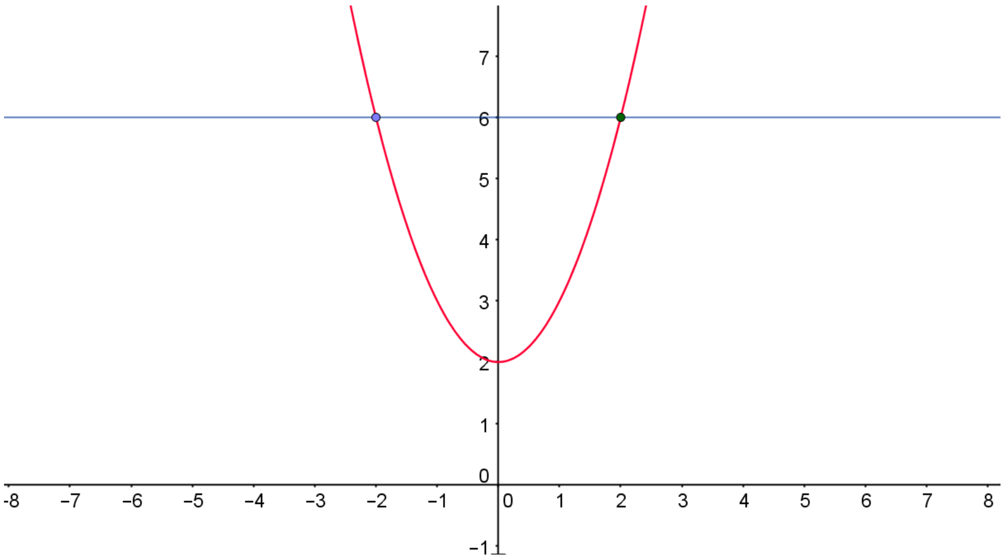


Figura 2-20: Reta paralela ao eixo x intercectando dois pontos do gráfico.

2.6.3
Função Bijetora

Uma função $f : A \to B$ é bijetora se for sobrejetora e injetora (BARROSO, 2010).

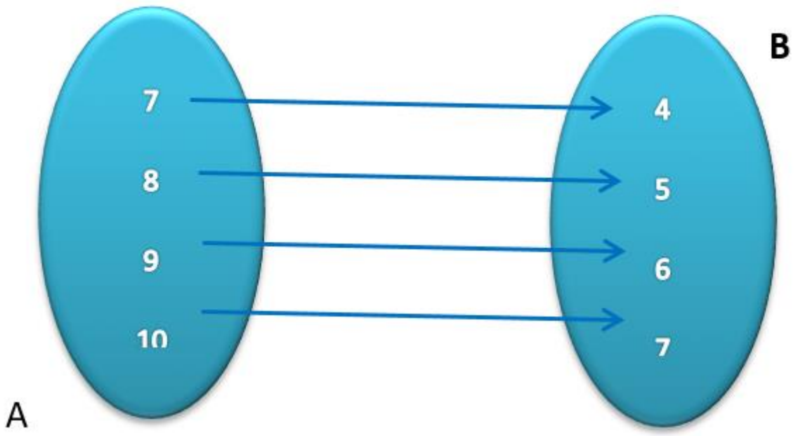


Figura 2-21: Representação de uma função pelo diagrama de Venn.

A figura 2-21 mostra um diagrama de uma função representada pela função $h: A \to B$ definida por $h(x) = x - 3$.

- O contradomínio é igual ao conjunto imagem (sobrejetora).
- Qualquer dois elementos distintos de A tem como imagem elementos distintos de B (injetora).

Portanto a função h é bijetora.

2.6.4 Definição de Função Inversa

Antes de abordar diretamente a definição de função inversa, (PAIVA, 2009) apresenta um problema que iremos analisar graficamente a seguir.

Um estudante fez um curso de línguas com duração de 4 meses. Ele pagou R$ 100,00 de matrícula mais R$ 200,00 de mensalidade. O gráfico 2-22 descreve o valor acumulado (v) pago no curso, em real, em função do tempo (t) em mês e o gráfico 2-23 descreve o tempo de curso (t), em mês, em função do valor acumulado (v), em real, pago o curso.

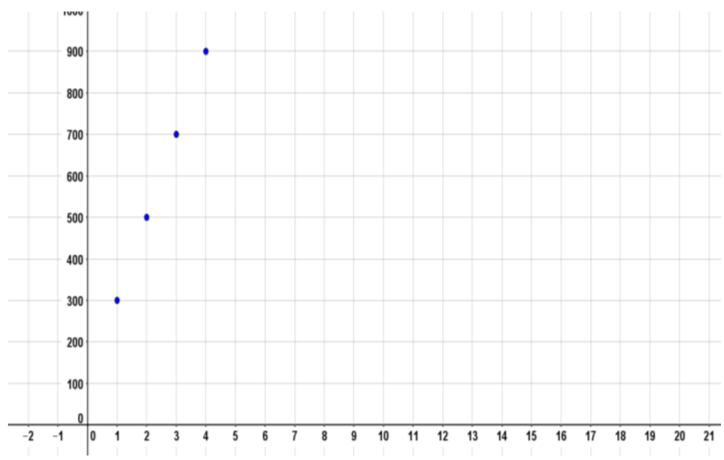


Figura 2-22: Gráfico do valor acumulado em função do tempo.

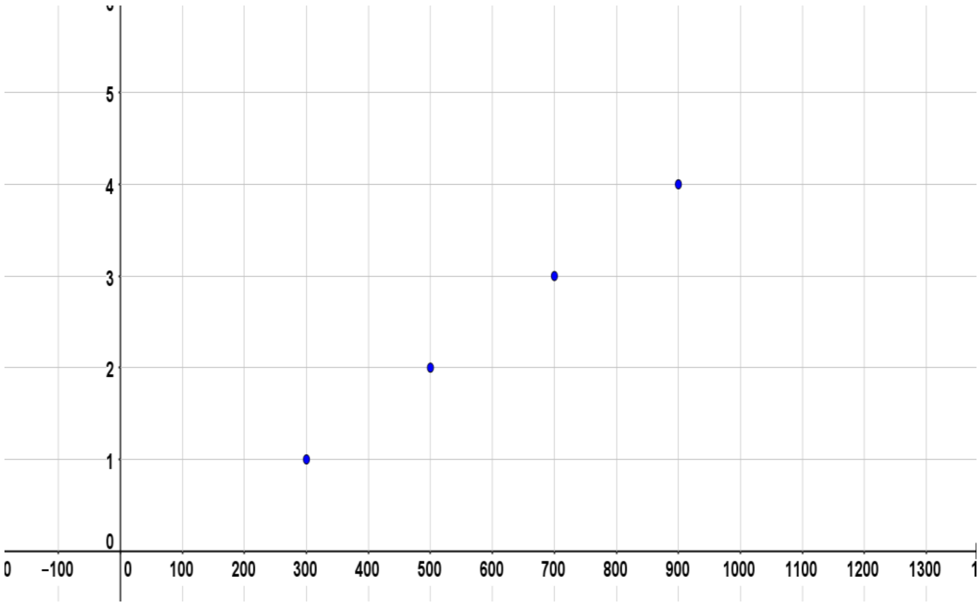


Figura 2-23: Gráfico do tempo em função do valor acumulado.
(PAIVA, 2009, p. 106)

Se verificarmos com atenção, perceberemos que o gráfico 2-22 apresenta uma função de domínio $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e o conjunto imagem $B = \{300, 500, 700, 900\}$. Já o gráfico 2-23 representa uma função de domínio $B = \{300, 500, 700, 900\}$ e conjunto imagem $A = \{1, 2, 3, 4\}$.

Como um número b é a imagem de um número a em um dos gráficos, assim a é imagem de b no outro, por exemplo, no gráfico 2-22, o número 700 é imagem do número 3 e, no gráfico 2-23, o número 3 é imagem do número 700.

Por esta razão podemos afirmar que as funções representadas pelos gráficos 2-22 e 2-23 possuem uma característica em que os pares ordenados dos seus pontos são inversos do outro, por exemplo os pares ordenados $(1, 100)$ da figura 2-31 e $(100, 1)$ da figura 2-23. Se indicarmos por f a função representada pelo gráfico 2-31, a função inversa de f será representada pelo gráfico 2-23, e será indicada por f^{-1}.

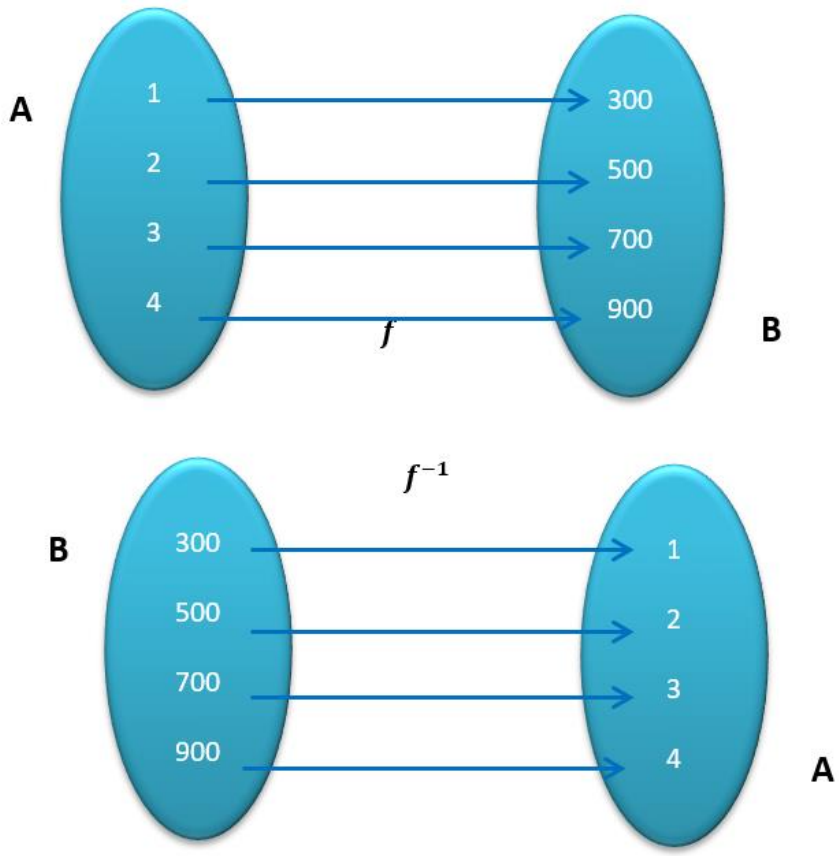


Figura 2-24: Representação de uma função e sua inversa pelo diagrama de Venn.

$$D(f) = Im(f^{-1}) = \{1, 2, 3,4\}$$
$$D(f^{-1}) = Im(f) = \{300, 500, 700, 900\}$$

“Dada uma função bijetora $\boldsymbol{f}: \boldsymbol{A} \rightarrow \boldsymbol{B}$, chamamos de função inversa de $\boldsymbol{f}$ a função $\boldsymbol{f^{-1}}: \boldsymbol{B} \rightarrow \boldsymbol{A}$ tal que para todo $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{B}$ temos $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{y}$ e $\boldsymbol{f^{-1}}(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x}$” (BARROSO, 2010).

Nem todas as funções admitem inversa.

É importante destacar que cada uma das funções f e f^{-1} é correspondência biunívoca entre os conjuntos A e B.

Se uma função g não é uma correspondência biunívoca entre seu domínio e contradomínio, então há pelo menos dois elementos no domínio com a mesma imagem ou há algum elemento do contradomínio sem correspondente através de g e, portanto, a correspondência g^{-1} não é função. Por exemplo:

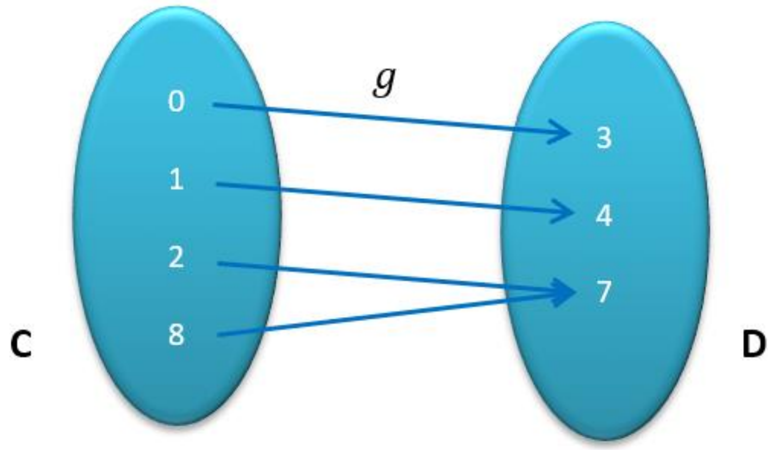


Figura 2-25: Representação de uma função g pelo diagrama de Venn.

É fácil perceber pela figura 2-25 que a relação $g: C \rightarrow D$ pode ser definida como função, embora não possua uma correspondência biunívoca entre seu domínio e contradomínio.

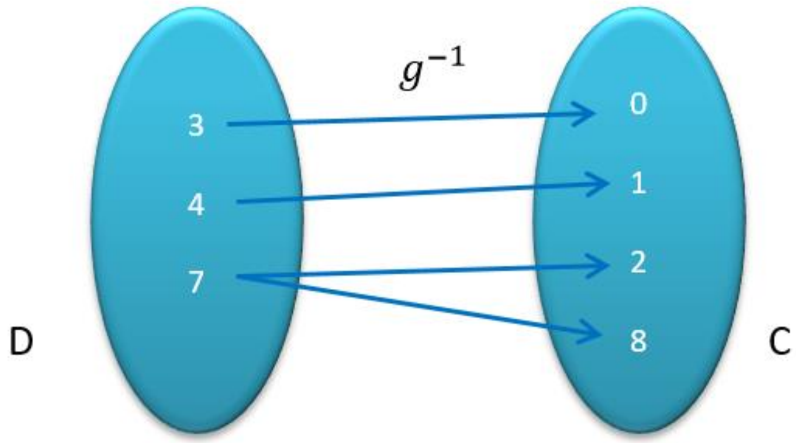


Figura 2-26: Representação de uma função não invertível pelo diagrama de Venn.

A figura 2-26 mostra que ao invertermos a ordem dos conjuntos, ou seja, o domínio passar a ser o conjunto D e o contradomínio o conjunto C, teremos a relação $g^{-1}: D \rightarrow C$. Note que g^{-1} não é função.

Nesse caso dizemos que a função g não admite inversa ou que a função g não é invertível.

2.6.5 Gráfico da Função Inversa

O objetivo deste tópico é verificar as relações existentes entre os gráficos de f e f^{-1}. Começaremos supondo um ponto $P(a, b)$ que pertença a função f e pode ser encontrada a partir de uma função f dada por $f(a) = b$. Desta forma, a função inversa de f é dada por $f^{-1}(b) = a$, no que através desta função encontramos um ponto $Q(b, a)$. Em outras palavras, o que estamos fazendo é inverter as coordenadas de um ponto de f, o que produzirá um outro ponto no gráfico de f^{-1}. Analogamente, inverter as coordenadas de um ponto de f^{-1}, gera um ponto no gráfico de f.

Os gráficos de uma função e de sua inversa são simétricos em relação ao gráfico da função identidade i, definida por $i(x) = x$, que é a bissetriz dos quadrantes ímpares e ainda explicita este fato nas figuras 2-27 e 2-28.

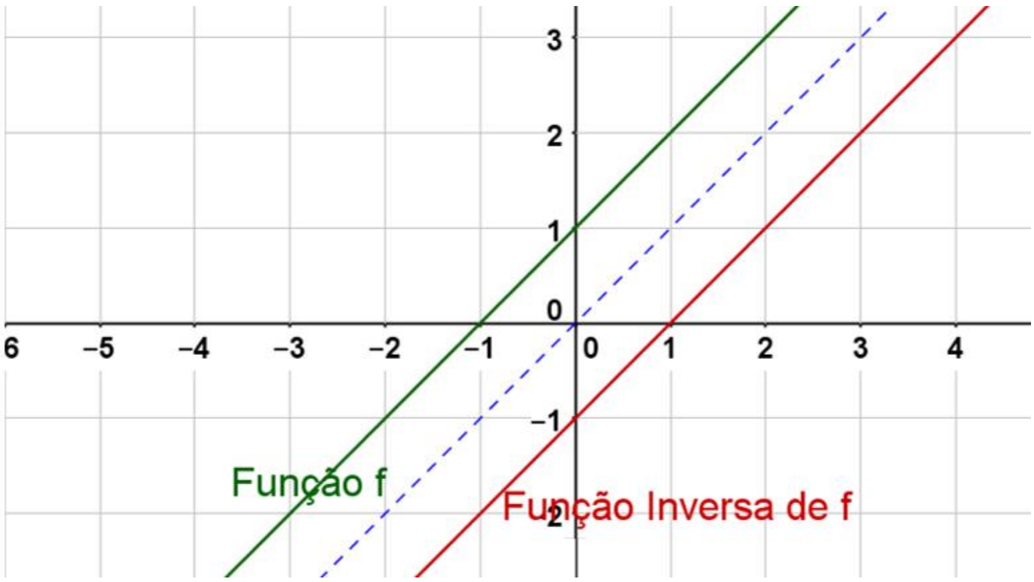


Figura 2-27: Simetria entre uma função invertível e sua função inversa – GeoGebra.

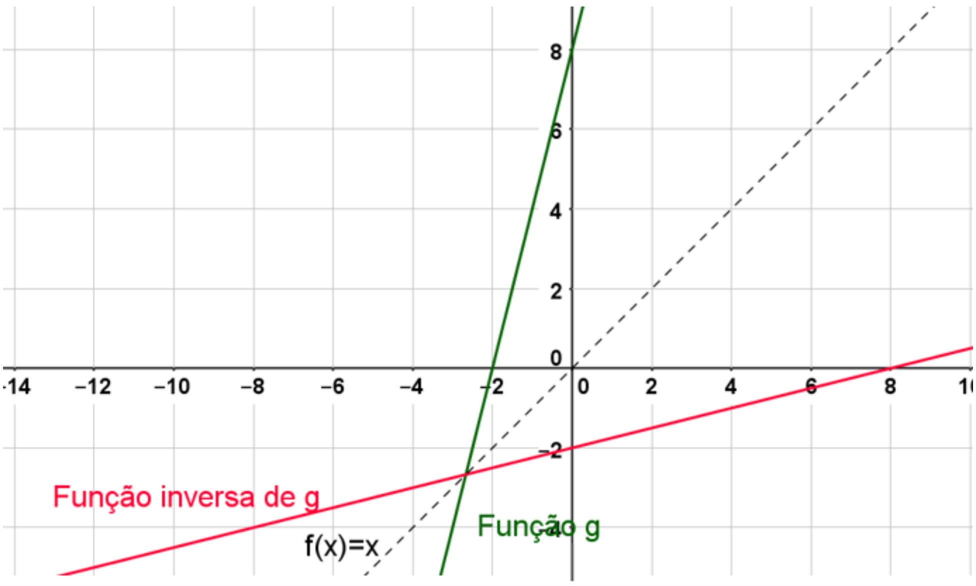


Figura 2-28: Simetria entre uma função invertível e sua função inversa – GeoGebra.

2.7 Função Par e Ímpar

2.7.1 Função Par

Uma função $\mathbf{f}: \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ é função par se para todo $\mathbf{x} \in \mathbf{A}, \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(-\mathbf{x})$.
Graficamente uma função par apresenta simetria em relação ao eixo das ordenadas, pois, para cada elemento $x \in D(f)$, as imagens de x e de seu oposto $-x$ são iguais.
Exemplo:
Na função $f: R \to R$ tal que $f(x) = x^2$, para todo $x \in R, f(x) = f(-x)$. Logo f é uma função par.

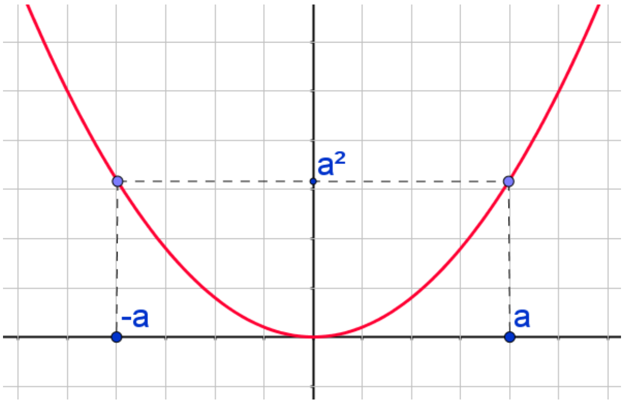


Figura 2-29: Função Par - Simetria em relação ao eixo y – GeoGebra.

Observe que o gráfico de f é simétrico em relação ao eixo de y, pois, para todo valor de $a \in R$, os pontos $(-a, a^2)$ e (a, a^2) são simétricos em relação ao eixo y.
(BARROSO, 2010, p. 100)

2.7.2 Função Ímpar

Uma função é ímpar se, $\mathbf{f}: \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ para todo $\mathbf{x} \in \mathbf{A}, \mathbf{f}(-\mathbf{x}) = -\mathbf{f}(\mathbf{x})$.
Graficamente uma função ímpar apresenta simetria em relação a origem, pois para cada elemento $x \in D(f)$, a imagem de $-x$ tem um sinal contrário à imagem de x.
Exemplo:
A função $f: R \to R$ tal que $f(x) = x^3$ é função ímpar, pois, para todo $x \in R, f(-x) = -f(x)$.

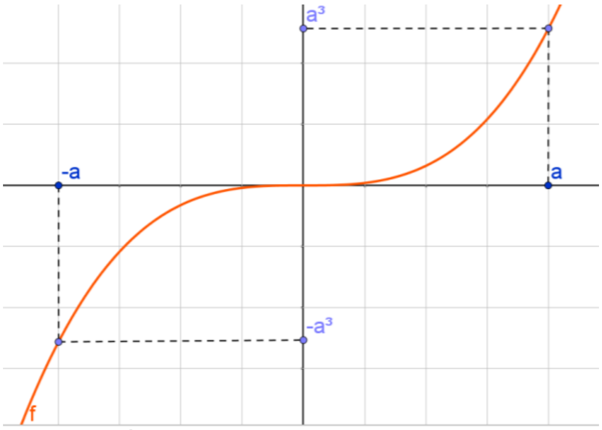


Figura 2-30 Função Ímpar - Simetria em relação a origem – GeoGebra

> Observe que o gráfico de f é simétrico em relação a origem, pois, para todo valor de $a \in R$, os pontos $(-a, -a^3)$ e (a, a^3) são simétricos em relação a origem.
> (BARROSO, 2010, p. 100)

Vale lembrar que existem funções que não são pares nem ímpares, e que a única função que é par e ímpar ao mesmo tempo é a função nula.

Um exemplo de função ímpar é a função seno ilustrada na figura 2-31.

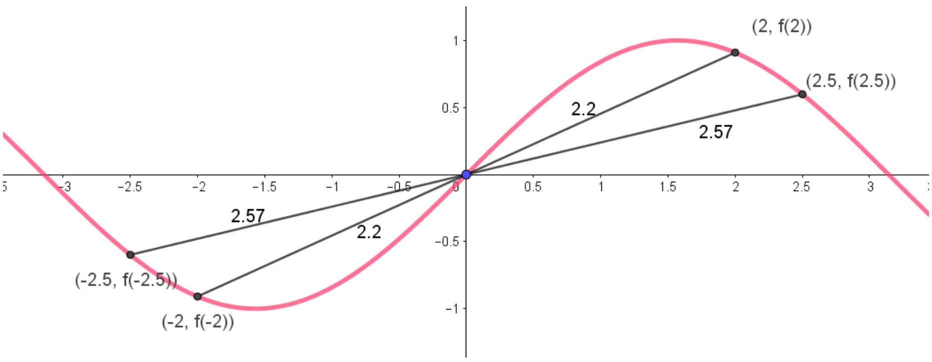


Figura 2-31: Função Seno - Simetria em relação a origem – GeoGebra.

3
Exponencial

A função exponencial tem sua aplicação em inúmeras áreas de conhecimento. Na biologia, por exemplo, é uma ferramenta utilizada para verificar o crescimento de qualquer espécie de uma população em um determinado ambiente, incluindo o crescimento de bactérias e células, que dobram de número a cada reprodução.

Já na eletrônica, os diodos, o cálculo de potências, a taxa de carregamento e descarregamento de um capacitor dentre inúmeras coisas também seguem um crescimento exponencial.

No ramo da economia, também podemos usar a função exponencial, pois quanto mais dinheiro temos disponível para investir, maior é o retorno. Além disso, o assunto sobre juros compostos também possui crescimento exponencial.

Na Informática os cálculos de *Bytes* e *Megabytes* também são exemplos de crescimento exponencial, pois os números digitais são binários e seguem a escala de potência de 2, exemplos: 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, ...

Figura 3-1: Na eletrônica o circuito Passa-faixa vista num osciloscópio mostra o gráfico de funções exponenciais.

É importante lembrar que a função logarítmica nada mais é do que a inversa da função exponencial.

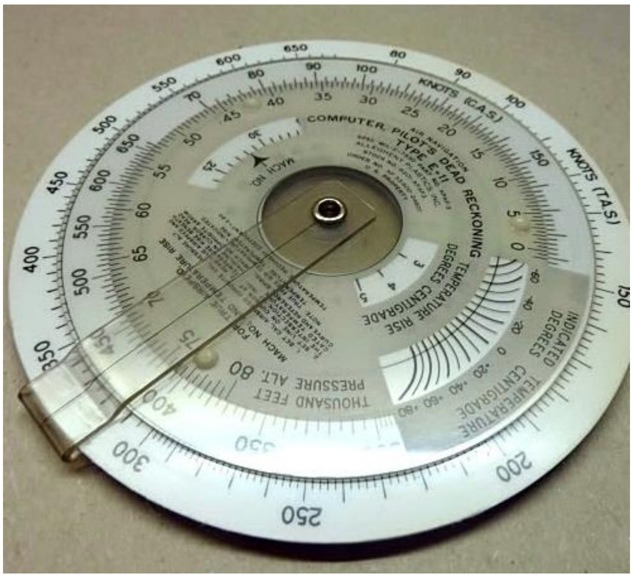


Figura 3-2: O Computador de Voo é um instrumento que resolve os principais cálculos de navegação aérea e utiliza escalas logarítmicas.

3.1
Função exponencial

A função exponencial é uma ferramenta matemática evidente em muitos fenômenos da vida real, tais como cálculos financeiros, datação de materiais arqueológicos por meios de técnicas que utilizam a radioatividade, estudo do crescimento ou decrescimento de uma população etc.

Para uma melhor análise do crescimento de uma função exponencial, analisaremos o cenário exposto a seguir.

Suponha que um investimento de R$ 1000,00 renda 5% por mês e por um tempo de 5 meses.

Para melhor visualizar este cenário, vamos fazer uma tabela.

Número de meses aplicados	Cálculo	Resposta
1	$1{,}05 \cdot 1000$	1050
2	$1{,}05 \cdot 1050$	$1102{,}50$
3	$1{,}05 \cdot 1102{,}50$	$1157{,}625$
4	$1{,}05 \cdot 1157{,}625$	$1215{,}50625$
5	$1{,}05 \cdot 1215{,}50625$	$1276{,}2815625$

Tabela 3-1: Investimento em 5 meses com juros de 5% ao mês.

Portanto, após os 5 meses de investimento, teríamos na conta o valor de R$ 1276,28.

Vamos construir uma outra tabela onde os valores de investimento $f(t)$ e rendimento q sejam quaisquer num tempo t.

Número de meses aplicados	Cálculo	Resposta
$\boldsymbol{t}$	$f(t)$	$f(t)$
$\boldsymbol{t+1}$	$q \cdot f(t)$	$q \cdot f(t)$
$\boldsymbol{t+2}$	$q \cdot f(t+1)$	$q^2 \cdot f(t)$
$\boldsymbol{t+3}$	$q \cdot f(t+2)$	$q^3 \cdot f(t)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\boldsymbol{t+h-1}$	$q \cdot f(t+h-2)$	$q^{h-1} \cdot f(t)$
$\boldsymbol{t+h}$	$q \cdot f(t+h-1)$	$q^h \cdot f(t)$

Tabela 3-2: Investimento em t meses com juros q ao mês.

Da tabela 3-2 podemos concluir que:

$$f(t+h) = q^h \cdot f(t).$$

Daí fica fácil perceber que este crescimento é exponencial, visto que uma variável independente aparece no expoente.

3.1.1 Definição de função exponencial

"Uma função $\boldsymbol{f: R \to R_+^*}$ chama-se função exponencial quando existe um número real $\boldsymbol{a}$, com $\boldsymbol{a > 0}$ e $\boldsymbol{a \neq 1}$, tal que $\boldsymbol{f(x) = a^x}$ para todo $\boldsymbol{x \in R}$." (BARROSO, 2010, p. 207)

3.1.1.1 Potência de Expoente Natural

Definição: Seja a um número real positivo e diferente da unidade ($a > 0$ e $a \neq 1$) para todo $a \in N$, a potência a^x, de base a e expoente x é definida como o produto de x fatores iguais a a. Para $a = 1$, teremos que a potência reduz-se à unidade, ou seja, $1^x = 1$; por outro lado, as condições $a > 0$ e $a \neq 1$ permitem considerar $0 < a < 1$ e $a > 0$. Note ainda que a potência a^x é definida para todos os valores naturais de x. Nesse primeiro momento estudaremos a potência a^x com $a > 0$ e $a \neq 1$, sendo x natural. Observe que para $x = 1$, como não há produto de um só fator, põe-se $a^1 = a$, por definição. Definiremos indutivamente a^x por $a^0 = 1$ e $a^{x+1} = a^x \cdot a$.

Seja $a > 0$ e $n \in N$

Podemos definir que:

$$a^n = a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a \quad (n \text{ fatores})$$

então

$$a^n = \begin{cases} a, \text{se } n = 1 \\ a \cdot a^{n-1}, \text{se } n > 1 \end{cases}$$

Obs:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}, \forall m, n \in N$$

$$a^m \cdot a^n = (a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a)_{m \text{ fatores}} \cdot (a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a)_{n \text{ fatores}}$$
$$= (a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a)_{m+n \text{ fatores}}$$

Isso ocorre porque em ambos os membros, nós temos um produto de $m + n$ fatores todos iguais a a.

3.1.1.2
Potência de Expoente Inteiro

Seja $a \neq 0$ um número real e n um número inteiro. Potência de base a e expoente n é o número a^n tal que

$$a^n = \begin{cases} 1, \text{se } n = 0 \\ a, \text{ se } n = 1 \\ a \cdot a^{n-1}, \text{se } n > 1 \\ \dfrac{1}{a^{-n}}, \text{se } n < 1 \end{cases}$$

Sejam $a \in R^*$ e $b \in R^*$, onde $R^* = \{x \in R | x \neq 0\}$, $m \in Z$ e $n \in Z$. Então valem as propriedades:

a) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
b) $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
c) $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^b$
d) $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$
e) $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$

Lema 3.1: Se $a > 1$ então $a^{n+1} > a^n$, $n \in N$

Demonstração:

Se $a > 1$.

Então multiplicando ambos os membros por a^n obteremos:

$$a^{n+1} > a^n.$$

Portanto teremos que

$$1 < a < a^2 < \cdots < a^n < \cdots$$

Em particular:

$$a^{-n} < 1 < a^n, \text{para } n \in N \text{ e } a^k < a^m \text{ para } k, m \in Z \text{ com } k < m.$$

De fato

$$a^k < a^m \text{ e } k < m < 0 \Rightarrow -k > -m > 0 \Rightarrow a^{-m} < a^{-k} \Rightarrow \frac{1}{a^{-m}} > \frac{1}{a^{-k}} \Rightarrow a^m > a^k$$

Lema 3.2: Se $0 < a < 1$ então $a^{n+1} < a^n$, $n \in N$

Demonstração:

Então multiplicando ambos os membros por a^n obteremos:

$$a^{n+1} < a^n.$$

Portanto teremos que

$$1 > a > a^2 > \cdots > a^n > \cdots.$$

Em particular:

$$a^n < 1 < a^{-n}, \text{para } n \in N \text{ e } a^k > a^m \text{ para } k, m \in Z \text{ com } k < m.$$

Lema 3.3: Se $a > 1$, a sequência formada pelas potências a^n, $n \in N$ é ilimitada superiormente, isto é, fixado um número real $c > 0$ existe $n_0 \in N$ tal que $a^{n_0} > c$,

Demonstração:

Como

$$a > 1,$$

basta escrever

$$a = 1 + d,\ d > 0.$$

Pela desigualdade de Benoulli temos que:

$$a^n = (1+d)^n > 1 + n \cdot d$$

para um n grande.

Logo, dado $c > 0$ e tomando

$$n_0 > \frac{c-1}{d}$$

obtemos que

$$a^n > 1 + n_0 d > c.$$

Portanto mostramos que a sequência é ilimitada superiormente.

Lema 3.4: Se $0 < a < 1$ então as potências de a^n decrescem abaixo de qualquer cota positiva. Ou seja, fixado $c > 0$ existe $n_0 \in N$ tal que $a^{n_0} < c$,

Demonstração:

Escrevendo $b = \frac{1}{a}$ teremos $b > 1$.

Pelo Lema 3.3 existe $n_0 \in N$ tal que

$$b^{n_0} < \frac{1}{c},$$

ou seja,

$$\frac{1}{n_0} > \frac{1}{c}$$

Daí

$$n_0 < c$$

3.1.1.3
Potência de Expoente Racional

Agora que já sabemos definir $a^n, n \in Z$, precisamos definir a^n para $n \in Q$ preservando $a^{r+s} = a^r \cdot a^s$.

Podemos observar que:

Se

$$r = \frac{m}{n}, m \in Z \ e \ n \in N$$

então temos que

$$(a^r)^n = a^r \cdot a^r \cdot \ldots \cdot a^r = a^{r+r+\ldots+r} = a^{r \cdot n}$$

como

$$r \cdot n = m,$$

temos que

$$a^{r \cdot n} = a^m.$$

Logo

$$(a^r)^n = a^m \Rightarrow a^r = \sqrt[n]{a^m}.$$

Vamos mostrar que dados os números racionais $r = \frac{m}{n}$ e $s = \frac{m`}{n`}$ tem-se $a^{r+s} = a^r \cdot a^s$ para todo $a > 0$.

Demonstração

Como

$$a^{r+s} = a^{\frac{m}{n}+\frac{m`}{n`}} = a^{\frac{mn`+m`n}{nn`}} = \sqrt[nn`]{a^{mn`+m`n}} = \sqrt[nn`]{a^{mn`} \cdot a^{m`n}} = \sqrt[nn`]{a^{mn`}} \cdot \sqrt[nn`]{a^{m`n}}$$

$$= a^{\frac{mn`}{nn`}} \cdot a^{\frac{m`n}{nn`}} = a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{m`}{n`}} = a^r \cdot a^s.$$

Propriedade: Se $a > 1$ e $r < s$ com $r, s \in Q$, então $a^r < a^s$.

Demonstração

Seja $r = \frac{m}{n}$ e $s = \frac{m`}{n`}$ números racionais com $n > 0$ e $n` > 0$. Temos que $r < s$ se e somente se $mn` < m`n$.

Por definição

$$(a^r)^{nn`} = a^{mn`} \text{ e } (a^s)^{nn`} = a^{nm`}.$$

como

$$mn` < m`n \text{ e } mn`, m`n \in Z,$$

temos que

$$a^{mn`} < a^{m`n},$$

ou seja

$$(a^r)^{nn`} < (a^s)^{n`n}$$

Portanto

$$a^r < a^s.$$

Propriedade: Se $0 < a < 1$ e $r < s$ com $r, s \in Q$, então $a^r < a^s$

Seja $r = \frac{m}{n}$ e $s = \frac{m`}{n`}$ números racionais com $n > 0$ e $n` > 0$. Temos que $r < s$ se e somente se $mn` < m`n$.

Por definição

$$(a^r)^{nn`} = a^{mn`} \text{ e } (a^s)^{nn`} = a^{nm`}.$$

como

$$mn` < m`n \text{ e } mn`, m`n \in Z,$$

temos que

$$a^{mn`} > a^{m`n},$$

ou seja

$$(a^r)^{nn`} > (a^s)^{n`n}$$

Portanto

$$a^r > a^s.$$

Lema 3.5: Fixado o número real positivo $a \neq 1$, em todo intervalo não degenerado de R^+ existe alguma potência de a^r, com $r \in Q$.

Demonstração:

Dados $0 < \alpha < \beta$, acharemos $r \in Q$ tal que a potência a^r pertença ao intervalo $[\alpha, \beta]$, ou seja, $\alpha \leq a^r \leq \beta$. Suporemos a e α maiores do que 1. Os demais casos podem ser demonstrados de maneira análoga. Como as potências de expoente natural de números maiores do que 1 crescem acima de qualquer cota prefixada, podemos considerar os números naturais M e n tais que

$$\alpha < \beta < a^M \text{ e } 1 < a < \left(1 + \frac{\beta - \alpha}{a^M}\right)^n.$$

Elevando a última relação por $\frac{1}{n}$ decorrem sucessivamente

$$1 < a^{\frac{1}{n}} < \left(1 + \frac{\beta - \alpha}{a^M}\right)$$

Subtraindo 1 da relação:

$$0 < a^{\frac{1}{n}} - 1 < \frac{\beta - \alpha}{a^M}$$

$$0 < a^M(a^{\frac{1}{n}} - 1) < \beta - \alpha$$

Seja

$$\frac{m}{n} \leq M \Rightarrow 0 < a^{\frac{m}{n}}(a^{\frac{1}{n}} - 1) < \beta - \alpha$$

$$0 < a^{\frac{m+1}{n}} - a^{\frac{m}{n}} < \beta - \alpha$$

Logo as potências

$$a^0 = 1, a^{\frac{1}{n}}, a^{\frac{2}{n}}, \cdots, a^M$$

são extremos de intervalos consecutivos, com comprimentos menores que β −α do intervalo $[\alpha, \beta]$. Como $[\alpha, \beta] \subset [1, a^M]$, pelo menos um desses extremos, digamos $a^{\frac{m}{n}} \supset [\alpha, \beta]$.

3.1.1.4
Potência de Expoente Real

Até aqui conseguimos definir a^x para qualquer número racional x, mas ainda não sabemos o que é a^x quando x não é racional.

Também devemos observar que precisamos definir uma função que seja contínua, já que as funções contínuas podem ser avaliadas por aproximações. Dessa forma queremos definir uma função $\beta: R \to R$ tal que x seja um número racional, assim $\beta(r) = a^r, a > 0$.

Essas duas propriedades que queremos para função β nos dizem como devemos definir $\beta(x)$ para x sendo um número irracional: se r_n é uma sequência de truncamentos de uma expansão decimal de x, como sabemos que $r_n \to x$, a continuidade que exigimos para β nos leva a definir

$$\beta(x) = \lim_{n\to\infty} \beta(r^n).$$

Como para cada n, o número r_n é racional, queremos

$$\beta(r_n) = a^{r_n}$$

ou seja, devemos definir

$$\beta(x) = \lim_{n\to\infty} a^{r_n}$$

Mas para isso mostraremos que a sequência $y_n = a^{r_n}$ seja convergente, ou seja, tenha um limite. Mostraremos que isso ocorre para qualquer número real x.

Suponha $x = c > 0$: já vimos anteriormente que r e s são números racionais com $r \leq s$ então

$$a^r \leq a^s$$

vomo s_n é uma sequência de truncamentos do número c então s_n é monótona crescente, isto é,

$$s_n \leq s_{n+1}$$

para cada n, e portanto

$$a^{s_n} \leq a^{s_{n+1}}$$

para cada $n \geq 1$.

Portanto a sequência $y_n = a^{s_n}$ é também uma sequência monótona crescente.

Por outro lado, podemos ver que y_n é limitada: Suponha p a parte inteira da expansão decimal de c, então $c < p + 1$, donde, para cada $n \geq 1$ temos que:

$$0 \leq s_n \leq x < p + 1.$$

Portanto

$$1 \leq a^{s_n} \leq a^{p+1}$$

ou seja, como c é qualquer número positivo, mostramos que

Se $x > 0$ e (r_n) é a sequência de truncamentos da expansão decimal de x, então a sequência $y_n = a^{r_n}$, para $a > 1$ e $n \geq 1$, é monótona e limitada.

Segundo o teorema: **"*Se a_n é uma sequência monótona e limitada, então a_n é convergente.*"** (MALTA, PESCO e LOPES, 2015, p. 106)

Podemos garantir que $(\mathrm{y_n})$ é uma sequência convergente, $\mathrm{y_n} \to y$. Como $y_n \geq 1$, sabemos que seu limite é $y \geq 1$, e portanto $y \neq 0$.

Suponha agora $x < 0$, então teremos que $c = -x > 0$, e que r_n é a sequência de truncamentos da expansão decimal de x, assim $s_n = -r_n$ é a sequência de truncamentos da expansão decimal de $c = -x$.

Como $c > 0$ podemos usar a informação que obtivemos acima, isto é, a sequência $y_n = a^{s_n}$ é convergente com

$$\lim_{n \to \infty} a^{s_n} = y \neq 0$$

Usando a propriedade temos

$$a^{r_n} = \frac{1}{a^{-r_n}} = \frac{1}{a^{s_n}}$$

Assim concluímos que

$$\lim_{n \to \infty} a^{r_n} = \frac{1}{y}.$$

Isto é, se $x < 0$ e r_n é uma sequência de truncamentos de x, então a sequência a^{r_n}, para $n \geq 1$, também e convergente.

Podemos então definir a função β da seguinte forma:

Se $x = r$ é racional, definimos

$$\beta(x) = a^r,$$

e, se x é um número irracional, definimos

$$\beta(x) = \lim_{n \to \infty} a^{r_n},$$

onde r_n é a sequência de truncamentos da expansão decimal de x.

Para $0 < a < 1$ a demonstração é análoga.

Desta forma vimos que se x é um número racional, então a^x é um número obtido pela operação que nos parece familiar, *elevar o número* a (que é positivo) a *uma potência racional* e, se x é irracional, a^x é um número real que pode ser tão bem aproximado quanto se necessite por números da forma a^r, desde que r seja uma aproximação racional suficientemente boa de x.

Exemplos:

- $f(x) = 2^x$
- $g(x) = (0{,}4)^x$
- $h(x) = \left(\frac{8}{5}\right)^x$
- $i(x) = (\sqrt{13})^x$

3.1.2
Propriedades da função exponencial

> Seja a um número real positivo, que suporemos sempre diferente de 1. A função exponencial de base a, $\mathrm{f}: \mathrm{R} \to \mathrm{R}^+$, indicada pela notação $\mathrm{f(x) = a^x}$, deve ser definida de modo a ter as seguintes propriedades para quaisquer $\mathrm{x, y} \in \mathrm{R}$:
>
> 1) $\mathrm{a^x \cdot a^y = a^{x+y}}$;
>
> 2) $\mathrm{a^1 = a}$;
>
> 3) $\mathrm{x < y \Rightarrow a^x < a^y}$ quando $\mathrm{a > 1}$ e
> $\mathrm{x < y \Rightarrow a^y < a^x}$ quando $\mathrm{0 < a < 1}$.
>
> (LIMA, 2013, p. 179)

(LIMA, 2013) chama atenção para a propriedade (1) onde é possível deduzir que $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$, portanto f não pode assumir o valor 0, a não ser que seja identicamente nula. Ou seja, caso exista um x_0 tal que $f(x_0) = 0$ então $f(x)$ será nula para qualquer valor de x.

> 4) A função $\mathrm{f: R \to R^+}$, definida por $\mathrm{f(x) = a^x}$, é ilimitada superiormente.
> Mais precisamente: Se $\mathrm{a > 1}$ então $\mathrm{a^x}$ cresce sem limites quando $\mathrm{x > 0}$ é muito grande. E se $\mathrm{0 < a < 1}$ então $\mathrm{a^x}$ torna-se arbitrariamente grande quando $\mathrm{x < 0}$ tem valor absoluto grande.
> 5) A função exponencial é contínua.
> 6) A função exponencial $\mathrm{f: R \to R^+, f(x) = a^x, a \neq 1}$, é sobrejetiva.
>
> (LIMA, 2013, p. 181-182)

A figura 3-3 exemplifica muito bem as três propriedades 4), 5) e 6), onde é possível verificar o crescimento e decrescimento das funções de acordo com o valor de a. Além disso, podemos verificar visualmente que:

$$\lim_{x \to +\infty} a^x = +\infty \ se\ a > 1$$

$$\lim_{x \to +\infty} a^x = 0 \ se\ 0 < a < 1$$

$$\lim_{x \to -\infty} a^x = 0 \ se\ a > 1$$

e

$$\lim_{x \to -\infty} a^x = +\infty \ se\ 0 < a < 1$$

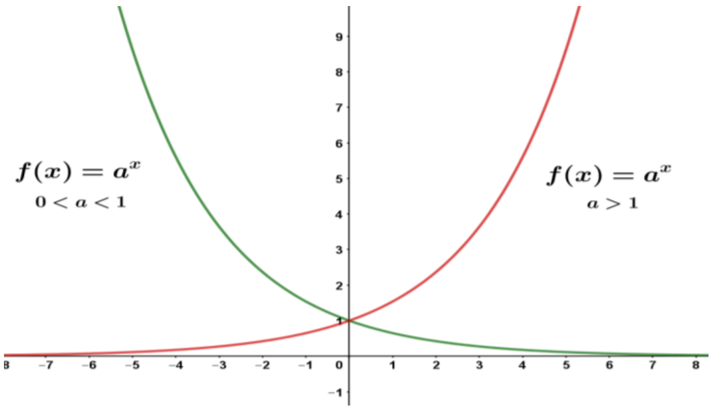


Figura 3-3: Crescimento e decrescimento de das funções exponenciais.

(LIMA, 2013) ainda faz uma reflexão interessante quando compara uma função polinomial com uma função exponencial. Ele afirma que para $a > 1$ temos que $a^x > x^b$ para valores grandes de x. O exemplo que ele utilizou na 3-4 mostra que a partir de um certo valor de x, temos que 2^x é sempre maior que x^{10}.

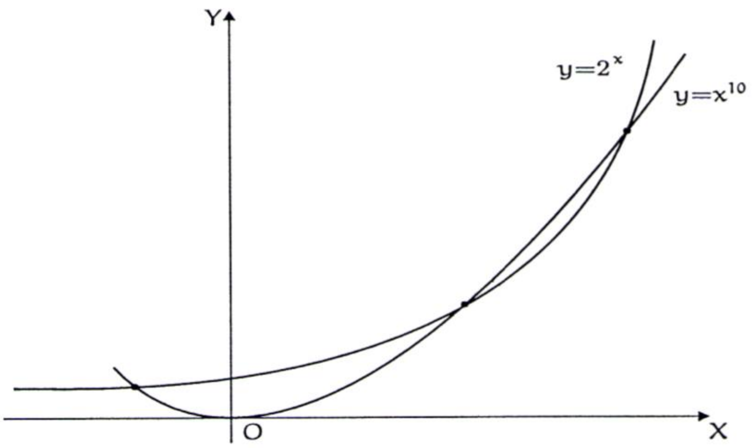


Figura 3-4: (LIMA, 2013, p. 183).

3.1.3
Caracterização de uma função exponencial

Lema: "Seja $f: R \to R^+$ uma função monótona injetiva (isto é, crescente ou decrescente). As seguintes afirmações são equivalentes:
1. $f(nx) = f(x)^n$ para todo $n \in Z$ e todo $x \in R$.

2. $f(x) = a^x$ para todo $x \in R$, onde $a = f(1)$.
3. $f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$ para quaisquer $x, y \in R$.

(LIMA, 2013, p. 184)

Vamos agora demonstrar que $\mathbf{1.} \Rightarrow \mathbf{2.} \Rightarrow \mathbf{3.} \Rightarrow \mathbf{1}$.

- $\mathbf{1.} \Rightarrow \mathbf{2.}$

Mostraremos inicialmente que para todo número racional $r = \frac{m}{n}$ (com $m \in Z$ e $n \in N$) tem-se $f(rx) = f(x)^r$.

Temos que

$$r = \frac{m}{n} \Rightarrow m = r \cdot n.$$

Portanto, pela afirmação **1,** temos:

$$f(r \cdot x)^n = f(n \cdot r \cdot x) = f(m \cdot x) = f(x)^m.$$

então,

$$f(r \cdot x)^n = f(x)^m \Rightarrow f(r \cdot x) = f(x)^{\frac{m}{n}}.$$

Logo

$$f(r \cdot x) = f(x)^{\frac{m}{n}} = f(x)^r.$$

Tomando $f(1) = a$, temos

$$f(r \cdot 1) = f(1)^r$$

$$f(r \cdot 1) = a^r$$

$$f(r) = a^r, \forall\, r \in Q.$$

Mostraremos agora que a igualdade anterior vale para todo $r \in R$, em vez de apenas $r \in Q$.

Suponha f crescente (caso f decrescente é análogo), logo, $1 = f(0) > f(1) = a$.

Vamos admitir, por absurdo, que exista um $x \in R^+$ tal que $f(x) \neq a^x$. Vamos supor que $f(x) > a^x$.

Usaremos o seguinte lema:

“Lema: Fixado um número real positivo $\boldsymbol{a \neq 1}$, em todo intervalo $\boldsymbol{R^+}$ existe alguma potência $\boldsymbol{a^r}$, com $\boldsymbol{r \in Q}$.” (LIMA, 2013, p. 178)

Assim, existe um número racional r tal que $f(x) > a^r > a^x$, ou seja, $f(x) > f(r) > a^x$.

Como f é crescente, tendo $f(x) > f(r)$, segue que $x > r$.

Logo $a^x > a^r$.

Mas se $f(x) > a^r > a^x$ e $a^x > a^r$, então isto é uma contradição.

Fazendo $f(x)$ decrescente, resolveremos de forma análoga e obteremos que se $f(x) < a^r < a^x$ então $a^x < a^r$ (onde $x > r\ e\ 0 < a < 1$).

Então, $f(x) = a^x$.

Portanto, $\mathbf{1.} \Rightarrow \mathbf{2.}$

- $\mathbf{2.} \Rightarrow \mathbf{3.}$

Tomemos $f(x) = a^x$ para $x, y \in R$ onde $a = f(1)$ e como $f(x) = a^x$ temos que

$$f(x+y) = a^{x+y}$$

onde $f(1) = a$.

Deste modo,

$$f(x+y) = a^{x+y} = a^x \cdot a^y = f(x) \cdot f(y)$$

Portanto

$$f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$$

- $\mathbf{3.} \Rightarrow \mathbf{1.}$

Tomemos $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$ para quaisquer $x, y \in R$. Temos que:

$$f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$$
$$f(x+y)^n = f(x)^n \cdot f(y)^n$$
$$f(x+y)^n = (a^x)^n \cdot (a^y)^n$$
$$f(x+y)^n = a^{xn} \cdot a^{yn}$$
$$f(x+y)^n = a^{n(x+y)}$$
$$f(x+y)^n = f\big(n(x+y)\big).$$

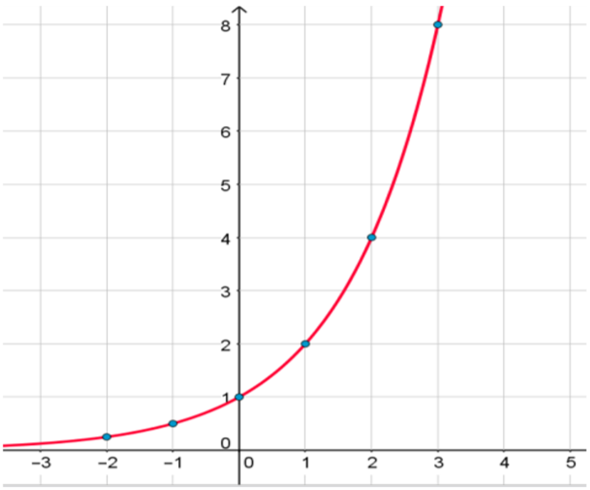
Portanto, $f(x+y)^n = f(n(x+y))$.

Assim terminamos a demonstração que tiramos como base o texto de (LIMA, 2016).

3.1.4
Gráfico da função exponencial

Primeiramente analisaremos duas funções, uma crescente representada por $f(x) = 2^x$ e outra decrescente representada por $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

- $f(x) = 2^x$



x	$f(x)$
-2	$\frac{1}{4}$
-1	$\frac{1}{2}$
0	1
1	2
2	4
3	8

Figura 3-5: Gráfico de uma função exponencial crescente – GeoGebra.

Com relação ao gráfico da função $f(x) = 2^x$, podemos dizer que:

a) A curva está acima do eixo x, pois $y = a^x > 0$, para todo $x \in R$.

b) Corta o eixo y no ponto de ordenada 1.

c) Como $a > 1$ é uma função crescente.

a. $x_1 < x_2 \Leftrightarrow a^{x_1} < a^{x_2}$

b. $x_1 > x_2 \Leftrightarrow a^{x_1} > a^{x_2}$

- $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

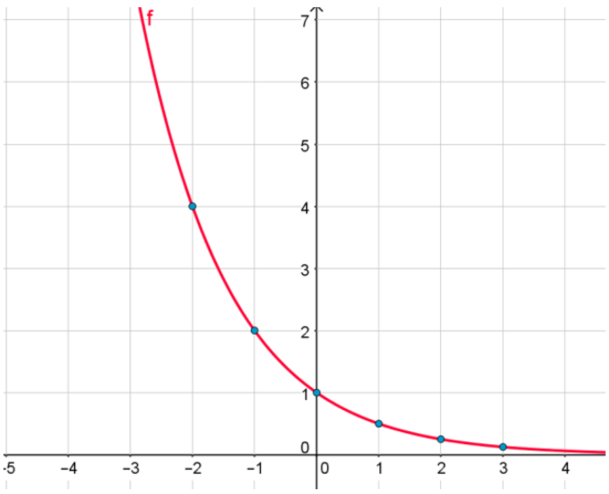
a) A curva está acima do eixo x, pois $y = a^x > 0$, para todo $x \in R$.

b) Corta o eixo y no ponto de ordenada 1.

c) Como $0 < a < 1$ é uma função decrescente.

a. $x_1 < x_2 \Leftrightarrow a^{x_1} > a^{x_2}$

b. $x_1 > x_2 \Leftrightarrow a^{x_1} < a^{x_2}$



x	$g(x)$
-3	$\frac{1}{8}$
-2	$\frac{1}{4}$
-1	$\frac{1}{2}$
0	1
1	2
2	4

Figura 3-6: Gráfico de uma função exponencial decrescente – GeoGebra.

3.1.5 Aplicações da função exponencial

Vastas são as áreas do conhecimento que se utilizam das funções do tipo exponencial para resolver situações rotineiras, como: Biologia, Engenharia, Finanças, Geologia e tantas outras.

Com tantos exemplos práticos de exponenciais em nosso cotidiano, é comum ainda encontrarmos pessoas que se confundem quando questionados sobre alguns tipos de problemas. A seguir, (BRANCO, 2010) nos fornece um exemplo de problema onde as pessoas geralmente se confundem ao tentar resolvê-lo.

Uma piscina tem capacidade para $100\ m^3$ de água. Quando a piscina está completamente cheia, é colocado $1\ kg$ de cloro na água. A água pura (sem cloro) continua a ser colocada na piscina a uma vazão constante, sendo o excesso de água eliminado por meio de um ladrão. Depois de 1 hora, um teste revela que ainda restam $900\ g$ de cloro na piscina.

a) Qual a quantidade de cloro restará na piscina 10 horas após sua colocação?

b) E após meia hora da aplicação?

c) E após t horas?

Uma resposta bem comum dada a primeira pergunta do problema é que, após 10 horas, não há mais cloro na piscina. Esta resposta é consequência da aplicação do modelo mais simples de variação de uma grandeza, expresso por uma função afim. Neste modelo, a variação sofrida a cada intervalo de 1 hora é sempre a mesma. Portanto, se na primeira hora foram eliminados 100 g de cloro, o mesmo deveria ocorrer em cada uma das 10 horas seguintes, fazendo com que todo o cloro seja eliminado nestas 10 horas. A figura 3-7 mostra o gráfico que ilustra esse raciocínio.

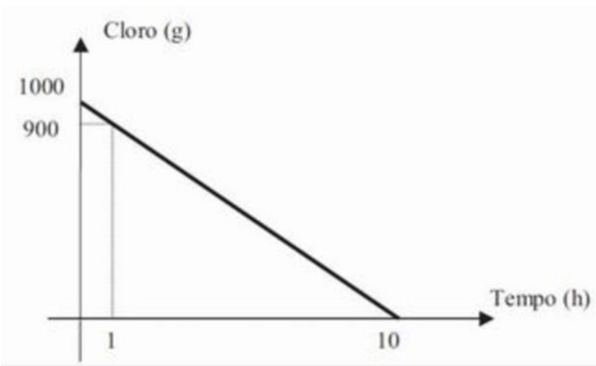


Figura 3-7: Figura retirada do site Portal do Professor.

No entanto, essa solução não está correta. Não é plausível assumir que a eliminação de cloro se dá a uma taxa constante. O mais coerente é que esta taxa dependa da quantidade de cloro presente na piscina, ou seja, quanto maior a quantidade de cloro, mais cloro é eliminado por unidade de tempo. Na verdade, parece intuitivo que a quantidade eliminada por unidade de tempo seja proporcional à quantidade existente de cloro. Um exemplo para verificar isso, é quando temos uma louça muito suja, e jogamos uma quantidade de água sobre ela, vemos que esta água retira muita sujeira; num segundo momento jogamos a mesma quantidade de agua sobre a referida louça e percebemos que a mesma quantidade de água retirou menos sujeira do que na primeira vez que este processo foi feito. Portanto, não é correto afirmar que uma determinada quantidade de água seja capaz de retirar sempre a mesma quantidade de sujeira.

A perda de cloro, dentro do período de 1 hora, não é a mesma. O que é constante, em cada um destes períodos, é a variação relativa: se 10% do cloro foi eliminado na primeira hora, o mesmo ocorre em cada hora a seguir. Equivalentemente, se 90% do cloro permanece após a primeira hora, o mesmo ocorre em cada hora a seguir. Logo, após 10 horas da aplicação, teremos a quantidade de cloro multiplicada por $(0{,}9)^{10} = 0{,}349$. Portanto, neste instante haverá 349 gramas de cloro na piscina. De modo geral, podemos expressar a quantidade de cloro ao final de n horas (onde n é natural) por:

$$c(n) = 1000 \cdot (0{,}9)^n, \text{ para } n = 0, 1, 2, \ldots$$

Portanto, a figura 3-8 é a que representa o gráfico deste problema.

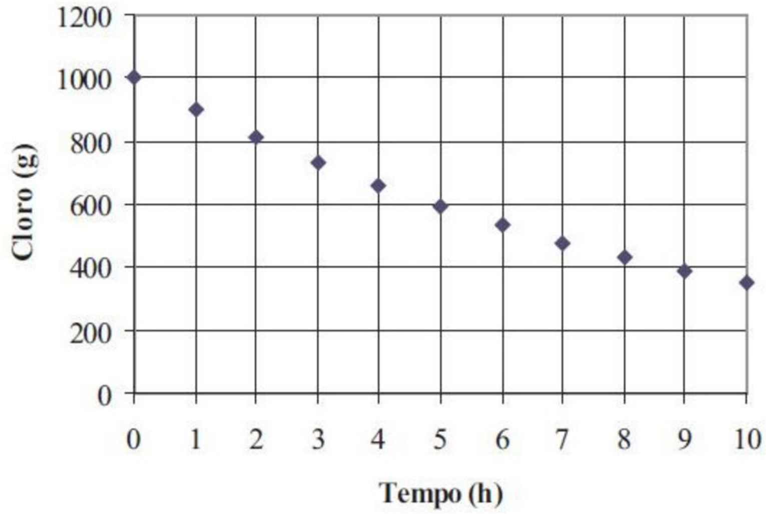


Figura 3-8: Figura retirada do site Portal do Professor.

O intuito deste capítulo, é mostrar ao professor as características de uma exponencial para que seus alunos percebam distintamente quando determinado acontecimento do nosso cotidiano deve ser modelado como uma expressão de uma função exponencial ou não.

Vamos mostrar mais uma aplicação com o exemplo de uma questão do vestibular da UFMG.

(UFMG) A população de uma colônia de bactérias E. Coli dobra a cada 20 minutos. Em um experimento colocou-se inicialmente, em um tubo de ensaio, uma amostra com mil bactérias por milímetro. No final do experimento obteve-se um total de $4{,}096 \cdot 10^6$ bactérias por milímetro. Assim, qual o tempo do experimento?

Modelando o problema, encontraríamos a seguinte expressão para a função que fornece a população de uma colônia de bactérias E. Coli em termos de t.

f fica dada pela expressão:

$$f(t) = 2^{\frac{t}{20}} \cdot 1000,$$

onde t é o tempo transcorrido desde o início do experimento.

Para resolver a questão, a modelagem foi de suma importância, pois basta considerarmos t tal que $f(t) = 4{,}096 \cdot 10^6$.

Logo,

$$4{,}096 \cdot 10^6 = 2^{\frac{t}{20}} \cdot 1000$$

$$2^{\frac{t}{20}} = 4096$$

$$2^{\frac{t}{20}} = 2^{12}$$

$$\frac{t}{20} = 12$$

$t = 240.$

Logo o tempo do experimento foi de 240 minutos, ou ainda 4 horas.

Porém, a seguir vamos analisar mais profundamente o problema.

Se pedíssemos que um aluno construísse o gráfico de crescimento da população dessa bactéria, o aluno poderia cair no erro de construir o gráfico analisando apenas a expressão da modelagem, não prestando atenção no domínio exigido no problema.

Daí ele poderia montar o gráfico $tempo \times quantidade\ por\ milímetro$ como na figura 3-9.

$g(t) = 2^{\frac{t}{20}} \cdot 1000.$

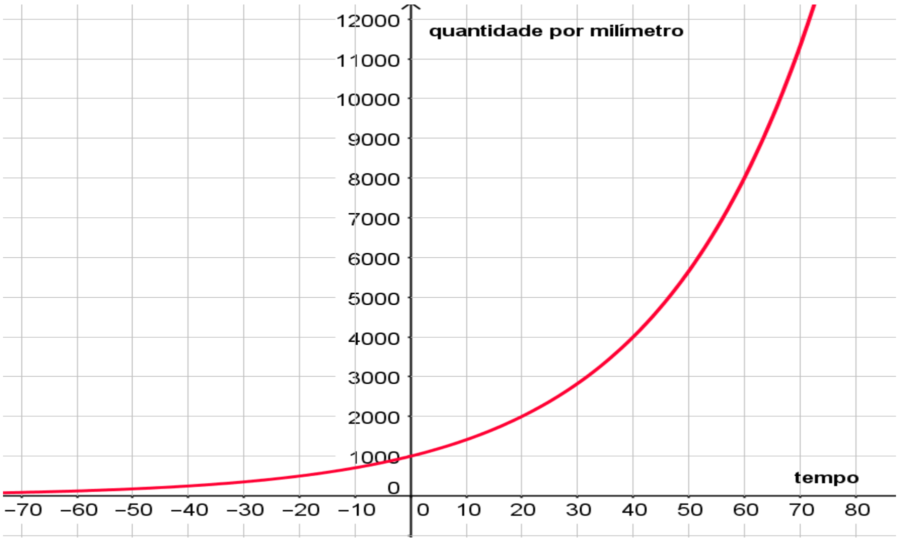


Figura 3-9: Gráfico $g: \mathrm{R} \to \mathrm{R}^{+}$.

Perceba que quando analisamos somente a expressão da função que modela o problema, construímos um gráfico de relação $R \to R^{+}$. Porém, se analisarmos o domínio que o problema nos exige, veremos que o tempo é contado a partir de $t = 0$. Então podemos concluir que a construção do gráfico da figura 3-9 não representa o gráfico do problema. Isso acontece porque embora duas ou mais funções tenham as mesmas expressões, não significa que elas sejam iguais. Vamos então construir o gráfico cujo domínio seja R^{+}, pois este é o domínio que o problema exige.

$$f(t) = 2^{\frac{t}{20}} \cdot 1000, \forall t \in R^{+}.$$

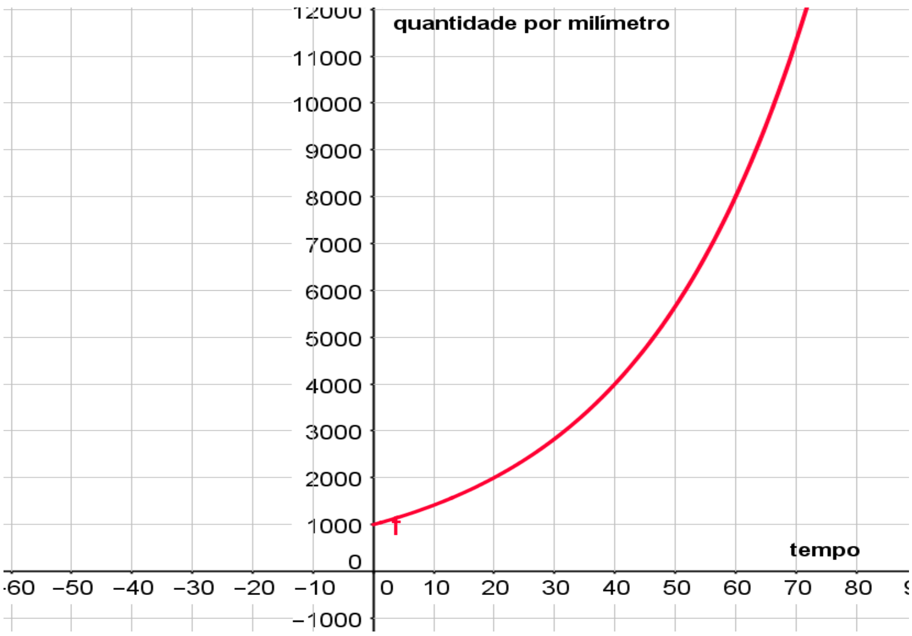


Figura 3-10: Gráfico $\mathrm{f}: \mathrm{R}^{+} \cup \{0\} \to [1000, +\infty)$.

No gráfico 3-10 temos a representação gráfica do problema proposto. Além disso, podemos observar que a função é bijetora.

Mas podemos montar o gráfico desta forma graças ao fato de que $f(x) \in R^{+}$, pois $f(x) = \frac{quantidade}{milímetro}$. Ora, se $f(x) \in N$, não teríamos o gráfico desta maneira.

Para exemplificar o fato em que a $Im(f) \subset N$, vamos utilizar a ideia do problema anterior, mas que ao invés de termos 1000 bactérias por milímetro, tenhamos apenas 1 bactéria num tubo de ensaio. Vamos fazer uma tabela deste problema:

t	$f(t)$
0	1
20	2
40	4
60	8
80	16
100	32

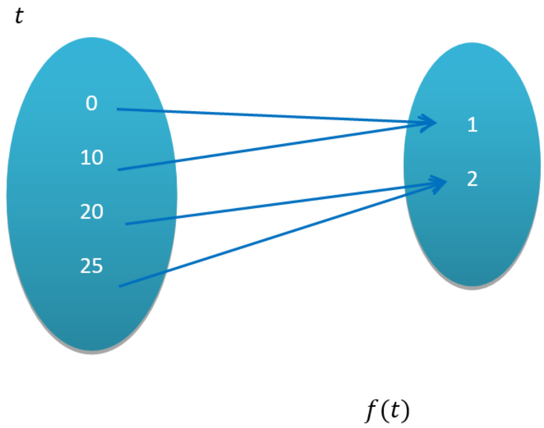


Figura 3-11: Representação do problema pela tabela e pelo diagrama de Venn.

Perceba que em $t = 0$, temos uma bactéria. Em $t = 1$, continuamos com uma bactéria e isso se repete até $t = 20$ onde temos 2 bactérias. Além disso, neste problema, $f(t) \in N$, visto que não existe 1,3 bactérias. Portanto, se antes tínhamos uma função bijetora, agora isto não mais ocorre. Para facilitar veremos o gráfico deste problema.

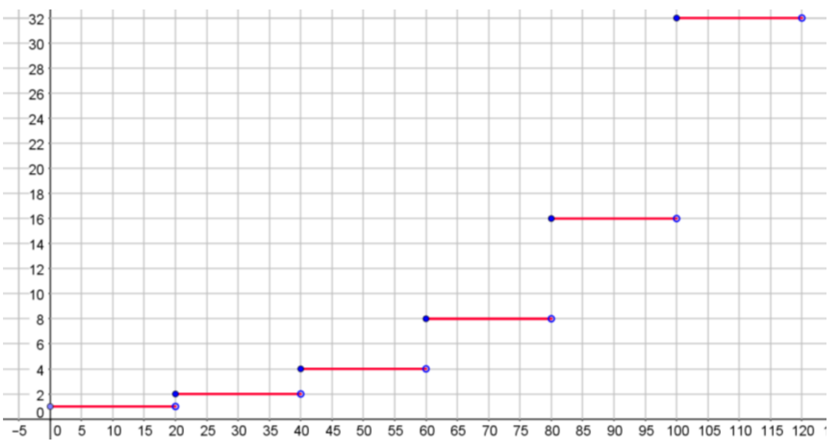


Figura 3-12: Representação do problema no Plano Cartesiano.

Portanto, um mínimo detalhe na construção de um problema pode retirar a característica de uma função exponencial.

4
Logaritmos

4.1
Surgimento dos Logaritmos

Por cerca de 3 séculos, os logaritmos, por meio de suas tábuas, tiveram um papel fundamental que foi responsável por simplificar os cálculos aritméticos, pois transformavam multiplicações de grandes números em operações mais simples com grande precisão para época.

Com base em (LIMA, 2016), durante o século XVI, as operações eram classificadas em três espécies, eram elas: 1ª espécie: adição e subtração; 2ª espécie: multiplicação e divisão e; 3ª espécie: potenciação e radiciação. Naquela época, não existiam as calculadoras existentes atualmente, então a única maneira de executar cálculos envolvendo adição e subtração, multiplicação e divisão, potenciação e radiciação era reduzir as operações de 2ª e 3ª espécies em operações de 1ª espécie. Para se ter uma ideia de como eram feitos os cálculos envolvendo a multiplicação, observe o exemplo de como era resolvida a multiplicação $1535 \cdot 325$.

Eles usavam a seguinte fórmula:

$$x \cdot y = \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 - \left(\frac{x-y}{2}\right)^2$$

Efetuava-se o cálculo

$$1535 \cdot 325 = \left(\frac{1535+325}{2}\right)^2 - \left(\frac{1535-325}{2}\right)^2 = \left(\frac{1860}{2}\right)^2 - \left(\frac{1210}{2}\right)^2$$

E utilizava-se a tabela a seguir:

$\boldsymbol{n}$	$\cdots$	**1210**	**1211**	**1212**	$\cdots$	**1860**
$\left(\boldsymbol{\frac{n}{2}}\right)^{\boldsymbol{2}}$	$\cdots$	366025	366630,25	367236	$\cdots$	864900

Tabela 4-1: Números naturais e os quadrados de suas metades.

Logo,

$$1535 \cdot 325 = \left(\frac{1860}{2}\right)^2 - \left(\frac{1210}{2}\right)^2 = 864900 - 366025 = 498875$$

Outro método bem interessante é o método que vamos abordar na atividade seguinte, que foi associar os termos de uma Progressão Geométrica (PG)

$$p^1, p^2, \cdots, p^3, \cdots$$

Aos termos de uma progressão aritmética (PA)

$$1,2,3, \cdots, n, \cdots$$

Colocando esses valores numa tabela para um caso particular, onde $p = 2$, temos.

$\mathbf{2^n}$	**2**	**4**	**8**	**16**	**32**	**64**	**128**	$\cdots$
$\boldsymbol{n}$	1	2	3	4	5	6	7	$\cdots$

Tabela 4-2: Correspondência onde 2^n é uma P.G e n uma P.A.

Por exemplo, para calcular $4 \cdot 16$ bastava efetuar a adição $2 + 4 = 6$ e verificar qual é o valor do termo da PG, correspondente ao termo 6 da P.A. Nesse caso, é o número 64. Logo, 4· $16 = 64$. Já para calcular a divisão, de dois números naturais o procedimento era o contrário do anterior. Por exemplo, para calcular a divisão $512 \div 128$, bastava fazer $9 - 7 = 2$ e verificar qual é o valor do termo da P.G, correspondente ao termo da P.A cujo valor é 2, nesse caso, encontramos o número 4. Logo, $512 \div 128 = 4$. Essas ideias são formalizadas atualmente pelas propriedades das potências que possuem mesma base.

Napier foi um dos que impulsionaram fortemente seu desenvolvimento, perto do início do século XVII. Ele é considerado o inventor dos logaritmos, muito embora outros matemáticos da época também tenham trabalhado com ele.

Enquanto Napier trabalhava com uma progressão geométrica, ao que parece, de forma independente, Bürgi também lidava com o problema dos logaritmos. Posteriormente, Napier, juntamente com Briggs, elaboraram tábuas de logaritmos mais úteis de modo que o logaritmo de 1 fosse 0 e o logaritmo de 10 fosse uma potência conveniente de 10, nascendo assim os logaritmos briggsianos ou comuns, ou seja, os logaritmos dos dias de hoje.

4.1.1
Construção da primeira tabela de logaritmos decimais

De acordo com (MARTINS, 2000), Briggs, partiu da ideia que, tendo os números primos escritos como potência de base 10, ele poderia escrever qualquer número composto como potência de base 10. Por exemplo, se quiséssemos descobrir para que valor de x encontramos $10^x = 6$, basta sabermos que $2 \cong 10^{0,301}$ e que $3 \cong 10^{0,477}$, desta forma temos que:

se

$$6 = 2 \cdot 3 \cong 10^x$$

e como

$$2 \cong 10^{0,301} \text{ e } 3 \cong 10^{0,477}$$

temos que:

$$10^{0,301} \cdot 10^{0,477} \cong 10^x.$$

Somando as potências por terem a mesma base temos;

$$10^{0,778} \cong 10^x.$$

Portanto, $x \cong 0,778$.

Desta forma, poderíamos escrever o número 6 como uma potência de base 10.

$$10^{0,778} \cong 6.$$

No entanto para descobrir as aproximações: $2 \cong 10^{0,301}$ e que $3 \cong 10^{0,477}$, Briggs usou a noção de média geométrica.

Dados dois números $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$ positivos, chamamos de média geométrica de a e b o número: $\sqrt{\boldsymbol{ab}}$.

Por exemplo:

- a média geométrica de 4 a 9 é igual a 6, pois $\sqrt{4 \cdot 9} = 6$
- a média geométrica de 2 a 8 é igual a 4, pois $\sqrt{2 \cdot 8} = 4$
- a média geométrica de 7 a 7 é igual a 7, pois $\sqrt{7 \cdot 7} = 7$

Dados dois números positivos a e b, com $a \neq b$, a média geométrica deles é sempre um número situado entre a e b. Então, na construção da primeira tabela de logaritmos decimais (base 10) publicada em 1617 para obter, por exemplo, o número 3 na forma de potência de base 10, Henry Briggs começou encontrando uma potência de 10 que é inferior a 3, e outra que é superior a 3. No caso, temos $10^0 = 1$ e $10^1 = 10$.

Observe o esquema abaixo: suponha uma reta real

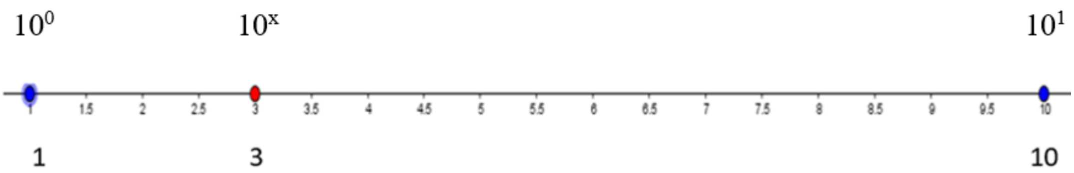


Figura 4-1: Reta real – GeoGebra.

Nesse esquema, abaixo de cada número considerado encontramos o seu valor escrito na forma de potência de base 10. A seguir Briggs obteve a média geométrica dos números que estão representados nas extremidades da figura 4-1, calculando essa média geométrica de dois modos diferentes: primeiro obteve o valor da média geométrica, depois obteve essa média escrita como uma potência de base 10. Observe:

$$\sqrt{\mathbf{1 \cdot 10}} = \sqrt{\mathbf{10}} \cong \mathbf{3,1623}$$

$$\sqrt{\mathbf{10^0 \cdot 10^1}} = \sqrt{\mathbf{10^1}} = \mathbf{10^{\frac{1}{2}}} = \mathbf{10^{0,5}}.$$

Como $\sqrt{1 \cdot 10} = \sqrt{10^0 \cdot 10^1}$, os resultados também são iguais, isto é, $3{,}1623 \cong 10^{0,5}$. Podemos, então, fazer o seguinte esquema:

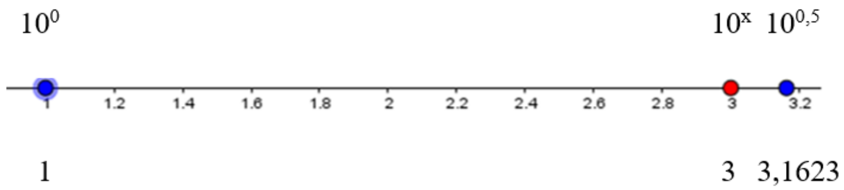


Figura 4-2: Reta real – GeoGebra.

Agora, repetindo o processo: Henry Briggs obteve a média geométrica dos números que estão nas extremidades da figura 4-2. Isso será feito de dois modos: primeiro, com os números que estão nas extremidades, mas acima da reta do esquema; depois, com os que estão abaixo. Não esqueça, porém, que acima de cada número está o seu próprio valor, mas escrito como uma potência de base 10.

$$\sqrt{\mathbf{10^0 \cdot 10^{0,5}}} = \sqrt{\mathbf{10^{1,5}}} = \mathbf{10^{\frac{0,5}{2}}} = \mathbf{10^{0,25}}$$

$$\sqrt{\mathbf{1 \cdot 3,1623}} = \sqrt{\mathbf{3,1623}} \cong \mathbf{1,7783},$$

logo $1{,}7783 \cong 10^{0,25}$.

Podemos, então, obter a figura 4-3:

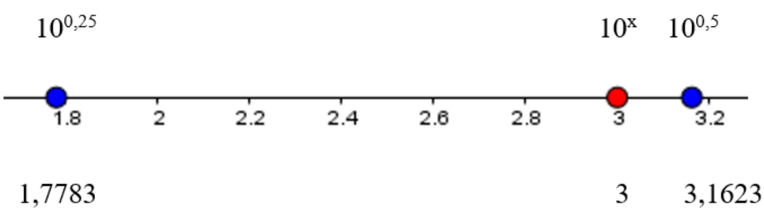


Figura 4-3: Reta real – GeoGebra.

Ao fazer a figura 4-3, utilizando, dentre os números que já se tem como potência de base 10, o que está mais próximo de 3, mas é menor que 3; e o que está mais próximo de 3, mas é maior que 3.

Repetindo o processo temos:

$$\sqrt{\mathbf{10^{0,25} \cdot 10^{0,5}}} = \sqrt{\mathbf{10^{0,75}}} = \mathbf{10^{\frac{0,75}{2}}} = \mathbf{10^{0,375}}$$

$$\sqrt{\mathbf{1,783 \cdot 3,1623}} \cong \sqrt{\mathbf{3,1623}} \cong \mathbf{2,3714}$$

o esquema fica assim:

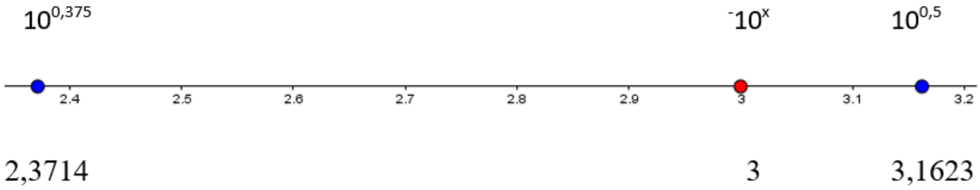


Figura 4-4: Reta real – GeoGebra.

Repetindo esse processo sucessivas vezes, temos:

$$\sqrt{\mathbf{10^{0,375} \cdot 10^{0,5}}} = \sqrt{\mathbf{10^{0,875}}} = \mathbf{10^{\frac{0,875}{2}}} = \mathbf{10^{0,4375}}$$

$$\sqrt{\mathbf{2,3714 \cdot 3,1623}} \cong \sqrt{\mathbf{7,4990}} \cong \mathbf{2,7384}$$

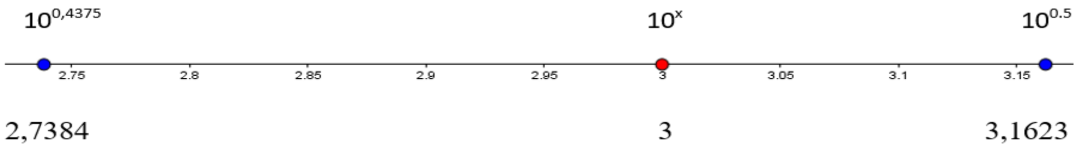


Figura 4-5: Reta real – GeoGebra.

$$\sqrt{\mathbf{10^{0,4375} \cdot 10^{0,5}}} = \sqrt{\mathbf{10^{0,9375}}} = \mathbf{10^{\frac{0,9375}{2}}} = \mathbf{10^{0,46875}}$$

$$\sqrt{\mathbf{2,7384 \cdot 3,1623}} \cong \sqrt{\mathbf{8,6596}} \cong \mathbf{2,9427}$$

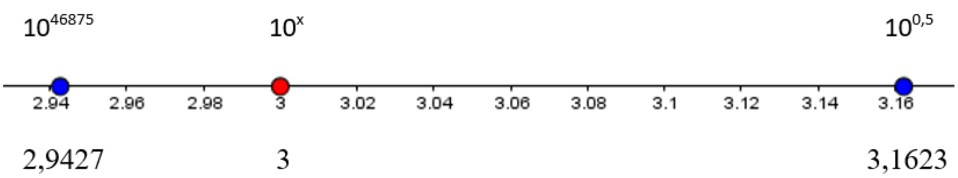


Figura 4-6: Reta real – GeoGebra.

$$\sqrt{\mathbf{10^{0,46875} \cdot 10^{0,5}}} = \sqrt{\mathbf{10^{0,96875}}} = \mathbf{10^{\frac{0,96875}{2}}} \cong \mathbf{10^{0,4844}}$$

$$\sqrt{\mathbf{2,9427 \cdot 3,1623}} \cong \sqrt{\mathbf{9,3057}} \cong \mathbf{3,0502}$$

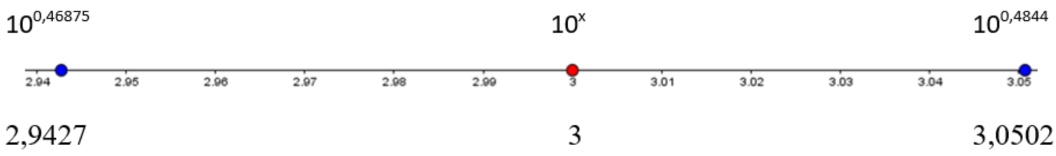


Figura 4-7: Reta real – GeoGebra.

$$\sqrt{\mathbf{10^{0,46875} \cdot 10^{0,4844}}} = \sqrt{\mathbf{10^{0,95315}}} = \mathbf{10^{\frac{0,95315}{2}}} \cong \mathbf{10^{0,4765}}$$

$$\sqrt{\mathbf{2,9427 \cdot 3,0502}} \cong \sqrt{\mathbf{8,9758}} \cong \mathbf{2,996}$$

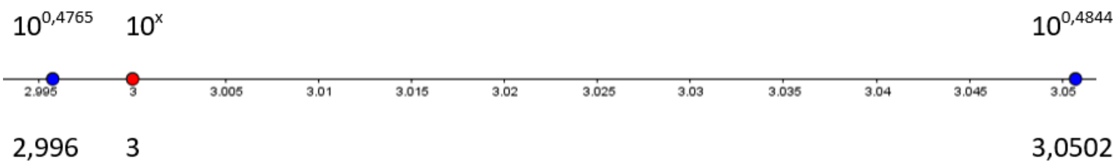


Figura 4-8: Reta real – GeoGebra.

$$\sqrt{\mathbf{10^{0,4765} \cdot 10^{0,4844}}} = \sqrt{\mathbf{10^{0,9609}}} = \mathbf{10^{\frac{0,9609}{2}}} \cong \mathbf{10^{0,4804}}$$

$$\sqrt{\mathbf{2,996 \cdot 3,0502}} \cong \sqrt{\mathbf{9,1384}} \cong \mathbf{3,023}$$

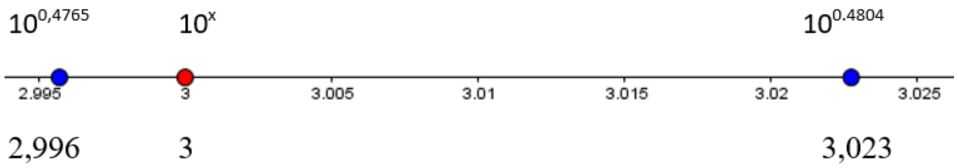


Figura 4-9: Reta real – GeoGebra.

$$\sqrt{\mathbf{10^{0,4765} \cdot 10^{0,4804}}} = \sqrt{\mathbf{10^{0,9569}}} = \mathbf{10^{\frac{0,9569}{2}}} \cong \mathbf{10^{0,4784}}$$

$$\sqrt{\mathbf{2,996 \cdot 3,023}} \cong \sqrt{\mathbf{9,057}} \cong \mathbf{3,009}$$

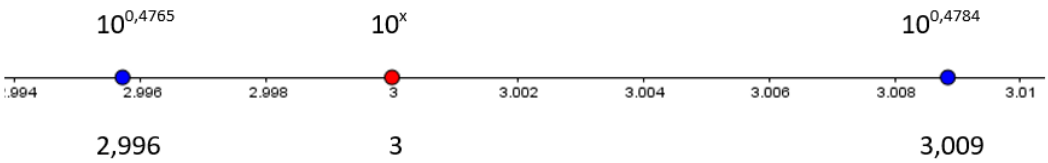


Figura 4-10: Reta real – GeoGebra.

No último esquema, os dois expoentes são 0,4765 e 0,4784 e as duas primeiras casas são iguais. Portanto, se quisermos apresentar o expoente com duas casas decimais, podemos interromper o processo de cálculo de médias geométricas. Nesse caso teremos $3 \cong 10^{0,47}$. No entanto, se quisermos apresentar o expoente com três casas decimais, devemos retomar o processo até que, nos dois expoentes as três primeiras casas sejam iguais. Teremos então: $3 \cong 10^{0,477}$. E se quiséssemos valores ainda mais precisos, deveríamos ter feito os cálculos das raízes quadradas com maior número de casas decimais. Para escrever o número 7 como uma potência de base 10, Briggs adotou o mesmo processo utilizado para o número 3, mas selecionando as potências mais próximas de 7, em vez de as mais próximas de 3. Para números que não são primos o cálculo é feito por outro caminho, bem mais simples, que consiste em decompor o número em seus fatores primos.

Em sua tabela de 1617, Briggs apresentou os logaritmos com 14 casas decimais. Todo esse trabalho realça a importância que os logaritmos assumiram naquela época, permitindo que se efetuassem cálculos trabalhosos, que emperravam o desenvolvimento do comércio, da astronomia e de inúmeras outras atividades.

Com o objetivo de que o aluno perceba a definição de logaritmos podemos planejar algumas atividades mostrando como se deu o surgimento da tábua de logaritmos.

Essa proposta se torna diferente das encontradas em livros didáticos mais utilizados. Geralmente os livros didáticos abordam a definição de logaritmos sem significado prático.

4.1.2
O número e (Euler)

No século XVIII, o matemático suíço Jacques Bernoulli apresentou o seguinte problema: “De que forma cresceria um depósito bancário ao longo do tempo se os juros, ao invés de serem creditados anualmente ou semestralmente, o fossem em intervalos de tempo cada vez menores, até que os acréscimos pudessem ser considerados instantâneos e sobre eles, imediatamente, também incidissem as mesmas taxas de juros?”

Como exemplo, (LIMA, 1983) utiliza um problema que possui o mesmo raciocínio onde é possível verificar mais facilmente a questão abordada por Jacques Bernoulli: Imagine que uma empresa pague juros de 100% ao ano. Após um ano, teríamos o montante de R$ 2,00 para cada R$ 1,00 aplicado. Se os juros fossem creditados semestralmente, após um ano, teríamos o montante de R$ 2,25 para cada R$ 1,00 aplicado. Se fosse crédito trimestral, após um ano, teríamos o montante de R$ 2,44141 para cada R$ 1,00 aplicado. O modelo matemático para esse cálculo é o seguinte:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$$

$\boldsymbol{n}$	$\cdots$	**1**	**2**	**12**	$\cdots$	**100**
$\left(\mathbf{1}+\dfrac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{n}}\right)^{\boldsymbol{n}}$	$\cdots$	2	2,25	2,6130	$\cdots$	2,704813

Tabela 4-3: Crescimento da função $\mathrm{M} = \left(1+\frac{1}{\mathrm{n}}\right)^{\mathrm{n}}$

Com base na tabela acima podemos de forma intuitiva observar que a função $M = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$ é crescente. Poderíamos, assim, pensar que temos um capital tão grande quanto queiramos, mas isso não é verdade: para calcular quanto seria o resultado para o crédito instantâneo, ou seja, com n tendendo ao infinito deveríamos calcular o limite da função, isto é:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}.$$

Esse número é a base dos logaritmos naturais e é denominado e.

A expressão acima pode ser explicada sem a necessidade de ver formalmente o conceito de limite. A ideia é simplesmente calcular o valor da expressão $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$ para um n cada vez maior.

- Para $n = 1$ temos $\left(1+\frac{1}{1}\right)^{1} = 2$
- Para $n = 2$ temos $\left(1+\frac{1}{2}\right)^{2} = 2,25$
- Para $n = 12$ temos $\left(1+\frac{1}{12}\right)^{12} = 2,6130352902$ (valor aproximado em 10 casas decimais)
- Para $n = 50$ temos $\left(1+\frac{1}{50}\right)^{50} = 2{,}691588029$
- Para $n = 100$ temos $\left(1+\frac{1}{100}\right)^{100} = 2{,}704813829$

Quanto maior for o número n mais perto de $e = 2,7182818284$ (valor aproximado na décima casa decimal) estará o resultado da expressão.

4.1.2.1
A expressão do valor de e

Já conseguimos reconhecer que o número e é dado por uma aproximação à qual chamamos de limite. Abordaremos agora a forma como surgiu esta expressão. Utilizando o que foi apresentado até aqui, iremos considerar duas ilustrações que, praticamente, podem nos evidenciar esta expressão. Vejamos a figura 4-11.

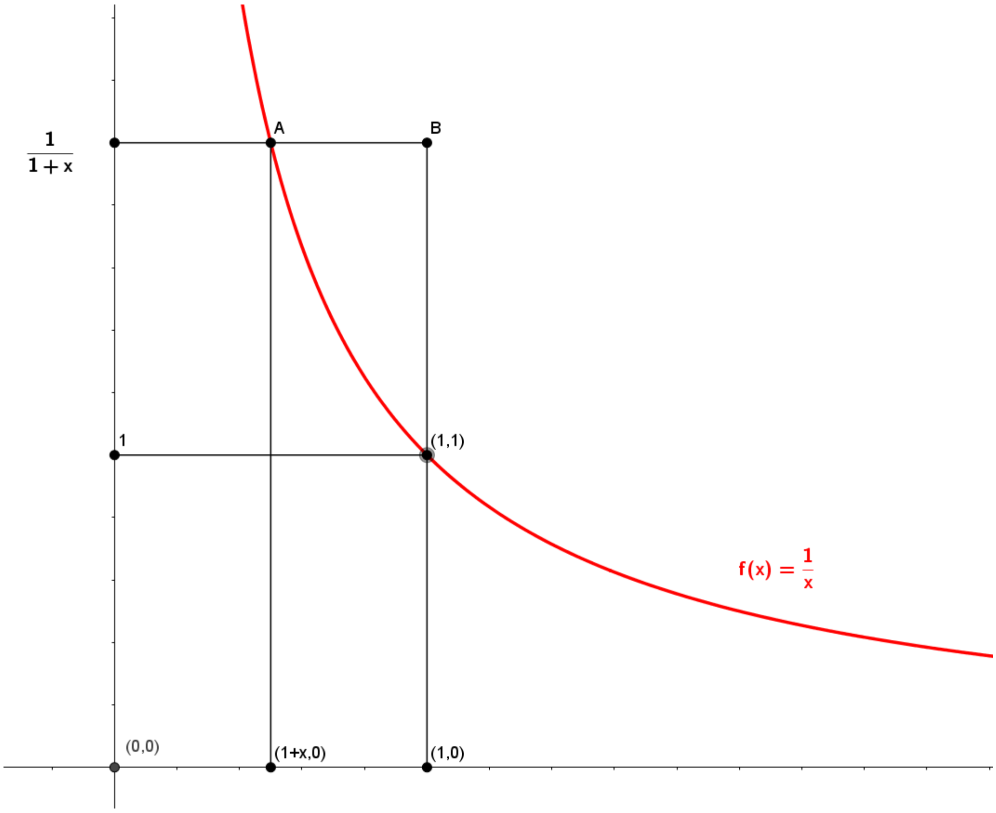


Figura 4-11: Gráfico de uma hipérbole – GeoGebra.

Na figura 4-11, temos que $0 < 1 + x < 1$, portanto $-1 < x < 0$. Note que a curva representa a função $f(x) = \frac{1}{x}$, onde $f: R_+^* \to R_+^*$.

Dados os pontos $A = (1 + x, \frac{1}{1+x})$ e $B = (1, \frac{1}{1+x})$, não é difícil verificar que a área composta pelo retângulo, cujos vértices são os pontos A, B, $(1, 0)$ e $(1 + x, 0)$, é maior do que a área da faixa H_{1+x}^{1}, onde a faixa H_{1+x}^{1} é formada por todos os pontos (x, y) do plano cujas coordenadas satisfazem as condições $1 + x < x < 1$ e $0 \leq y \leq \frac{1}{1+x}$. Da mesma forma, a área da faixa H_{1+x}^{1} é maior do que a área formada pelo retângulo cujos vértices são os pontos $(1, 1)$, $(1, 0)$, $(1 + x, 0)$ e $(1 + x, 1)$.

Lembremos que, se $0 < x < 1$, então $H_1^x = -ln(x)$. Fazendo o cálculo das áreas, temos, respectivamente:

Área 1

Área composta pelo retângulo, cujos vértices são os pontos A, B, $(1, 0)$ e $(1 + x, 0)$.

Base: $1 - (1 + x) = 1 - 1 - x = -x$

Altura: $f(1 + x) = \frac{1}{1+x}$

Área: base · altura = $-x \cdot \frac{1}{1+x} = \frac{-x}{1+x}$

Área 2

Área da faixa H_{1+x}^{1}

$H_{1+x}^{1} = -ln(1+x)$, note que $1 + x < 1$, pois como vimos acima: $-1 < x < 0$ (x é negativo).

Área 3

Área formada pelo retângulo cujos vértices são os pontos $(1,1)$, $(1,0)$, $(1+x, 0)$ e $(1+x, 1)$

Base: $1 - (1+x) = 1 - 1 - x = -x$

Altura: $f(1) = \frac{1}{1} = 1$

Área: base · altura = $-x \cdot 1 = -x$

Visualmente é possível afirmar que Área 1 $>$ Área 2 $>$ Área 3, portanto somos capazes de escrever a seguinte desigualdade:

$$\frac{-x}{1+x} > -ln(1+x) > -x$$

Dividiremos toda a desigualdade por $-x$ sem alterá-la, uma vez que $-x$ é positivo. Assim, teremos:

$$\frac{\frac{-x}{1+x}}{-x} > \frac{-ln(1+x)}{-x} > \frac{-x}{-x}$$

$$\frac{1}{1+x} > \frac{ln(1+x)}{x} > 1$$

$$\frac{1}{1+x} > ln(1+x)^{\frac{1}{x}} > 1$$

Fazendo $x = \frac{1}{n}$, chegamos a seguinte desigualdade:

$$\frac{1}{1+\frac{1}{n}} > ln\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right) > 1$$

Podemos tomar n tão grande quanto desejarmos. Para isso, somos obrigados a escrever:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{n}} > \lim_{n\to+\infty} ln\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right) > \lim_{n\to+\infty} 1$$

Claramente temos que o primeiro limite tende a 1, pois $\frac{1}{n}$ tende a 0 e portanto $\frac{1}{1+\frac{1}{n}}$ tende a 1. O último limite é trivial, pois não temos n na expressão. Então, a própria expressão é o resultado do limite. Concluímos que o limite de $ln\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right)$

também deverá ser igual a 1. Como $e = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, temos $ln(e) = 1$. Repare que passamos da desigualdade para a desigualdade dos limites. Isto pode ser feito, pois o teorema do confronto, narrado a seguir, garante tal passagem.

Teorema do confronto: Sejam $\mathbf{f}$, $\mathbf{g}$ e $\mathbf{h}$ funções reais contidas em um domínio $\mathbf{D} \subseteq \mathbf{R}$, seja $\mathbf{a}$ um ponto deste domínio tal que $\mathbf{f(x)} \geq \mathbf{g(x)} \geq \mathbf{h(x)}$ e seja $\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{a}} \mathbf{f(x)} = \lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{a}} \mathbf{h(x)} = \mathbf{t}$.
Então temos que:

$$\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{a}} \mathbf{g(x)} = \mathbf{t}$$

(LIMA, 2006)

Esse teorema não é o tema deste trabalho, portanto, não o demonstraremos, porém pode-se ver sua demonstração no livro de Análise Real do professor Elon Lages Lima.

Na figura 4-12, temos que $x > 0$ e portanto $1 + x > 1$. Note que a curva representa a função $f(x) = \frac{1}{x}$, onde $f: R_+^* \to R_+^*$. Dados os pontos $A = (1 + x, \frac{1}{1+x})$ e $B = (1, \frac{1}{1+x})$, é fácil ver que a área composta pelo retângulo, cujos vértices são os pontos $(1, 1)$, B, $(1 + x, 0)$ e $(1, 0)$, é maior do que a área da faixa H_{1+x}^1. Do mesmo modo, a área da faixa H_{1+x}^1 é maior do que a área formada pelo retângulo cujos vértices são os pontos $(1, \frac{1}{1+x})$, A, $(1 + x, 0)$ e $(1, 0)$. Lembremos que, se $x > 1$, então $H_1^x = ln(x)$. Fazendo o cálculo das áreas, temos, respectivamente:

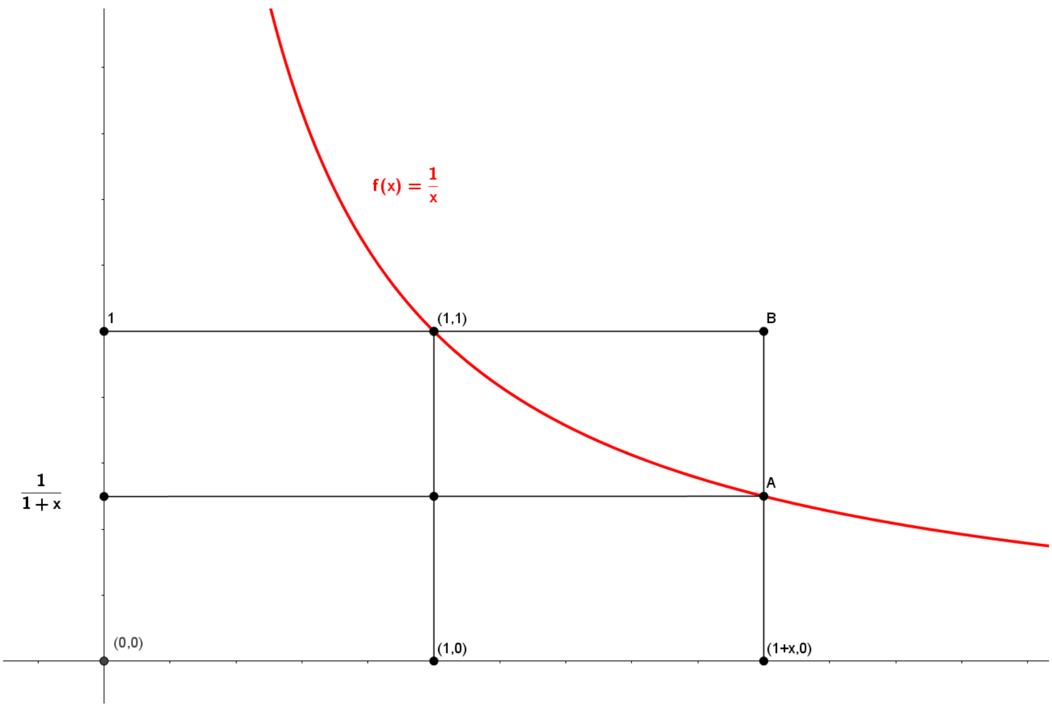


Figura 4-12: Gráfico de uma hipérbole – GeoGebra.

Área 1

Base: $1 + x - 1 = x$

Altura: $f(1) = \frac{1}{1} = 1$

Área: base · altura = $x \cdot 1 = x$

Área 2

$H_1^{1+x} = ln(1 + x)$, note que $1 + x > 1$.

Área 3

Base: $1 + x - 1 = x$

Altura: $f(1 + x) = \frac{1}{1+x}$

Área: base · altura = $x \cdot \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x}$

Somos capazes de escrever a seguinte desigualdade:

$$x > ln(1 + x) > \frac{x}{1 + x}.$$

Dividiremos toda a desigualdade por x sem alterá-la, uma vez que x é positivo. Com isso temos que:

$$\frac{x}{x} > \frac{ln(1 + x)}{x} > \frac{\frac{x}{1 + x}}{x}$$

$$1 > \frac{ln(1 + x)}{x} > \frac{1}{1 + x}$$

$$1 > ln(1 + x)^{\frac{1}{x}} > \frac{1}{1 + x}.$$

Fazendo $x = \frac{1}{n}$ teremos a desigualdade:

$$1 > ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n > \frac{1}{1 + \frac{1}{n}}.$$

Podemos tomar n tão grande quanto quisermos. Para isso somos obrigados a escrever:

$$\lim_{n\to+\infty} 1 > \lim_{n\to+\infty} ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n > \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{n}}.$$

Claramente, temos que o terceiro limite tende a 1, pois $\frac{1}{n}$ tende a 0 e, então, $\frac{1}{1+\frac{1}{n}}$ tende a 1. O primeiro limite é trivial pois não temos n na expressão, então a própria expressão é o resultado do limite. Claramente temos que o terceiro limite tende a 1, pois $\frac{1}{n}$ tende a 0 e portanto $\frac{1}{1+\frac{1}{n}}$ tende a 1. Concluímos que o limite de $ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ também deverá ser igual a 1. Como $e = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, substituindo o logaritmando por e encontramos $ln(e) = 1$.

4.1.3
Função Logarítmica

Vamos definir o logaritmo de um número real x de dois modos. As definições tradicionais vistas na maioria dos livros didáticos utilizados no ensino médio abordam o logaritmo do seguinte modo:

Definição 1:

Dado um número real $a > 0$, o logaritmo de um número $x > 0$ na base a é o expoente y a que se deve elevar a de tal modo que $a^y = x$.

Escreve-se:

$$y = log_a x,$$

lê-se y é o logaritmo de x na base a.

Podemos escrever então:

$$log_a x = y \Rightarrow a^y = x.$$

Faremos agora uma lista de propriedades das funções logarítmicas, isto é, propriedades que são consequências da definição:

1ª Propriedade:

Sendo a, b números reais positivos $a \neq 1$ temos:

$log_a a^b = b$.

Este resultado pode ser visto facilmente utilizando a definição.

Supomos que $log_a a^b = x$ isto é, $a^x = a^b$ pela injetividade da função exponencial segue que $x = b$ o que mostra o resultado.

2ª Propriedade:

Sendo a, b e c números reais positivos, $a \neq 1$, temos:

$$log_a(b \cdot c) = log_a b + log_a c$$

Demonstração:

Sejam

$$x = log_a b \Rightarrow b = a^x$$

$$y = log_a c \Rightarrow c = a^y.$$

Fazendo $b \cdot c$, temos:

$$b \cdot c = a^x \cdot a^y \Rightarrow b \cdot c = a^{x+y}.$$

aplicando o logaritmo na base a em ambos os membros da equação, temos:

$log_a(b \cdot c) = log_a a^{x+y} \Rightarrow log_a(b \cdot c) = x + y$ (1ª propriedade).

Como $x = log_a b$ e $y = log_a c$, implica:

$$log_a(b \cdot c) = log_a b + log_a c.$$

3ª Propriedade:

Sendo a, b e c números reais positivos, $a \neq 1$, temos:

$$log_a\left(\frac{b}{c}\right) = log_a b - log_a c$$

Demonstração:

Sejam

$$x = log_a b \Rightarrow b = a^x$$

$$y = log_a c \Rightarrow c = a^y.$$

Fazendo $\frac{b}{c}$ temos:

$$\frac{b}{c} = \frac{a^x}{a^y} \Rightarrow \frac{b}{c} = a^{x-y}.$$

Aplicando o logaritmo na base a em ambos os membros da equação, temos:

$log_a\left(\frac{b}{c}\right) = log_a a^{x-y}$ (1ª propriedade)

Como $x = log_a b$ e $y = log_a c$ implica:

$$log_a\left(\frac{b}{c}\right) = log_a b - log_a c.$$

4ª Propriedade:

Sendo a, b e c números reais positivos, $b \neq 1$ e $c \neq 1$, temos:

$$log_b a = \frac{log_c a}{log_c b}.$$

Demonstração:

Sejam

$$x = log_b a \Rightarrow a = b^x,$$

$$y = log_c a \Rightarrow a = c^y,$$

$$z = log_c b \Rightarrow b = c^z.$$

Vemos que $a = b^x$ e $a = c^y$ implica que $b^x = c^y$.

Como $b = c^z$ pela injetividade da função exponencial segue que $y = z \cdot x$.

Como

$y = log_c a$, $z = log_c b$ e $x = log_b a$.

Temos:

$$log_c a = log_c b \cdot log_b a \Rightarrow log_b a = \frac{log_c a}{log_c b}.$$

5ª Propriedade:

Sendo a, b; números reais positivos, a ≠1, temos:

$$a^{log_a b} = b.$$

Demonstração:

Seja

$$log_a b = x \Rightarrow b = a^x.$$

Agora façamos,

$a^{log_a b} = a^{log_a(a^x)} = a^x$ (1ª propriedade)

Isto implica que:

$$a^{log_a b} = b.$$

6ª Propriedade:

Sendo b e c números reais positivos, com $c \neq 1$ e m um número natural, temos:

$$log_c b^m = m \cdot log_c b.$$

Observação: Esta propriedade supõe m um número natural, mas nossa demonstração considera m um número racional e é dividida em três partes:

1ª Parte: Temos que a propriedade $log_a(b \cdot c) = log_a b + log_a c$ se estende para o produto de mais números, isto é:

$$log_c b^m = log_c bbb \dots b = log_c b + log_c b + log_c b + \cdots + log_c b$$
$$log_c b^m = m \cdot log_c b.$$

Portanto, a propriedade vale para m natural. Se não considerarmos 0 um número natural, a propriedade 6 também se verifica, pois: se $m = 0$, temos $b^0 = 1$,logo:

$$log_c b^0 = log_c 1 = 0 = 0 \cdot log_c b.$$

2ª Parte:

Consideremos agora o caso em que $m = -n$, com n pertencente ao conjunto dos números naturais, isto é, m sendo um inteiro negativo. Então, para todo $b > 0$, temos:

$$b^n \cdot b^{-n} = 1.$$

Como,

$$log_c 1 = 0 \Rightarrow log_c(b^n \cdot b^{-n}) = log_c b^n + log_c b^{-n} = 0$$
$$log_c b^{-n} = -log_c b^n.$$

Assim vem:

$$log_c b^{-n} = -n \cdot log_c b.$$

3ª Parte:

O caso geral em que $m = \frac{p}{q}$ onde p é um número inteiro e q um número natural.

Façamos:

$$(b^m)^q = \left(b^{\frac{p}{q}}\right)^q = b^p$$

$$log_c(b^m)^q = log_c b^p$$
$$q \cdot log_c(b^m) = log_c b^p$$
$$q \cdot log_c(b^m) = p \cdot log_c b$$
$$log_c(b^m) = \frac{p}{q} \cdot log_c b$$

Como $m = \frac{p}{q}$, isto resulta que:

$$log_c(b^m) = m \cdot log_c b.$$

Não consideramos m um número irracional, pelo fato de sabermos apenas definir potência com expoente racional.

A definição feita por (LIMA, 2016, p. 16) trata o logaritmo da seguinte maneira:

Definição 2:

Uma função real $\boldsymbol{L : R^+ \to R}$,cujo domínio é o conjunto $\boldsymbol{R^+}$ dos números reais positivos, chama-se uma função logarítmica ou sistema de logaritmo quando tem as seguintes propriedades:

a) $\boldsymbol{L}$ é uma função crescente ,isto é , $\boldsymbol{x < y \Rightarrow L(x) < L(y)}$

b) $\boldsymbol{L(x \cdot y) = L(x) + L(y)}$ para qualquer $\boldsymbol{x, y \in R^+}$

Para todo $x \in R^+$, o número $L(x)$ chama-se o logaritmo de x.

Demonstrando as propriedades por esta definição teremos:

Propriedade 1. “Uma função logarítmica $L: R^+ \to R$ é sempre injetiva, isto é, números positivos diferentes têm logaritmos diferentes” (LIMA, 2016, p. 17)

Suponha que $x, y \in R^+$ tal que $x \neq y$. Desta forma, se $x > y$, resultará pelo item a) que $L(x) > L(y)$; e se $y > x$ teremos como resultado $L(y) > L(x)$ também pelo item a). Ou seja, em qualquer hipótese em que $x \neq y$ concluiremos que $L(x) \neq L(y)$.

Propriedade 2. “O logaritmo de 1 é 0”. (LIMA, 2016, p. 17)

Pelo item b) podemos afirmar que $L(1) = L(1 \cdot 1) = L(1) + L(1)$. Daí temos que $L(1) = 0$.

Propriedade 3. “Os números maiores do que 1 têm logaritmos positivos e os números menores do que 1 têm logaritmos negativos.” (LIMA, 2016, p. 17)

Sendo L crescente, e $0 < x < 1 < y$ temos pelo item a) que $L(x) < L(1) < L(y)$, ou seja, $L(x) < 0 < L(y)$.

Propriedade 4. “Para todo $x > 0$, tem-se $L(1/x) = -L(x)$” (LIMA, 2016, p. 17)

Suponha a igualdade $x \cdot \frac{1}{x} = 1$, daí se resulta que $L(x) + L\left(\frac{1}{x}\right) = L(1) = 0$, portanto $L\left(\frac{1}{x}\right) = -L(x)$.

Propriedade 5. “Para qualquer $x, y \in R^+$, vale $L(x/y) = L(x) - L(y)$” (LIMA, 2016, p. 17)

Aplicando o item b) e a propriedade 4, temos:

$$L\left(\frac{x}{y}\right) = L\left(x \cdot \frac{1}{y}\right) = L(x) + L\left(\frac{1}{y}\right) = L(x) - L(y)$$

(LIMA, 2016) enfatiza que as propriedades de 1 a 5 valem para todas as funções logarítmicas, isto é, resultam apenas das propriedades a) e b) e não de maneira particular como os logaritmos possam ser definidos.

Propriedade 6. “para todo $x \in R^+$ e todo número racional $r = p/q$ tem-se $L(x^r) = r \cdot L(x)$.” (LIMA, 2016, p. 18)

Para demonstrar essa propriedade, precisamos mostra-la por etapas.

Estendendo a propriedade $L(x \cdot y) = L(x) + L(y)$ para n fatores, temos:

$$L(x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \dots \cdot x_{n-1} \cdot x_n) = L(x_1) + L(x_2) + L(x_3) + \dots + L(x_{n-1}) + L(x_n)$$

Se $n \in N$, então

$$L(x^n) = L(x \cdot x \cdot \dots \cdot x) = L(x) + L(x) + \dots + L(x) = n \cdot L(x)$$

Portanto a propriedade vale para $n \in N$.

Para $r = 0$ também vale, pois como $x^0 = 1$ temos que $L(x^0) = L(1) = 0 = 0 \cdot L(x)$.

Consideremos agora que r seja um número inteiro negativo, ou seja, $r = -n, n \in N$. Daí suponha a equação $x^n \cdot x^{-n} = 1$ e dela podemos obter:

$$L(x^n) + L(x^{-n}) = L(1) = 0 \Rightarrow L(x^{-n}) = -L(x^n),$$

daí temos

$$L(x^{-n}) = -nL(x)$$

Mostraremos agora o caso geral onde $r = \frac{p}{q}, p \in Z$ e $q \in N$.

Para $x \in R^+$ temos:

$$(x^r)^q = (x^{\frac{p}{q}})^q = x^p.$$

Daí

$$q \cdot L(x^r) = L[(x^r)^q] = L(x^p) = p \cdot L(x).$$

Como $q \cdot L(x^r) = p \cdot L(x)$, então disto resulta que

$$L(x^r) = \frac{p}{q} \cdot L(x).$$

Ou seja

$$L(x^r) = r \cdot L(x).$$

Assim terminamos a demonstração da Propriedade 6. Vale ressaltar que devido sabermos apenas definir potências com expoente racional, existe a restrição de que r seja racional, embora a teoria dos logaritmos nos forneça a melhor maneira de definir x^r quando r for irracional, como afirma (LIMA, 2016).

4.1.3.1
O gráfico de uma função Logarítmica

Nesta seção, veremos como é o formato do gráfico da função L. Abordaremos o gráfico em que a função L é crescente, isto é, tem como base um valor maior do que 1 e em que a função L é decrescente, ou seja, quando a base terá um valor real entre 0 e 1. O gráfico de uma função crescente L pode ser exemplificada pelas funções dadas por $f(x) = \log_{10} x$ e $g(x) = \log_{0,1} x$.

A ideia é verificar visualmente que a função $\log_a: R^+ \to R$ é crescente quando $a > 1$ e decrescente quando $0 < a < 1$. (LIMA, 2013, p. 193) ressalta que somente números positivos possuem logaritmos reais, visto que a função $x \mapsto a^x$ assume somente valores positivos.

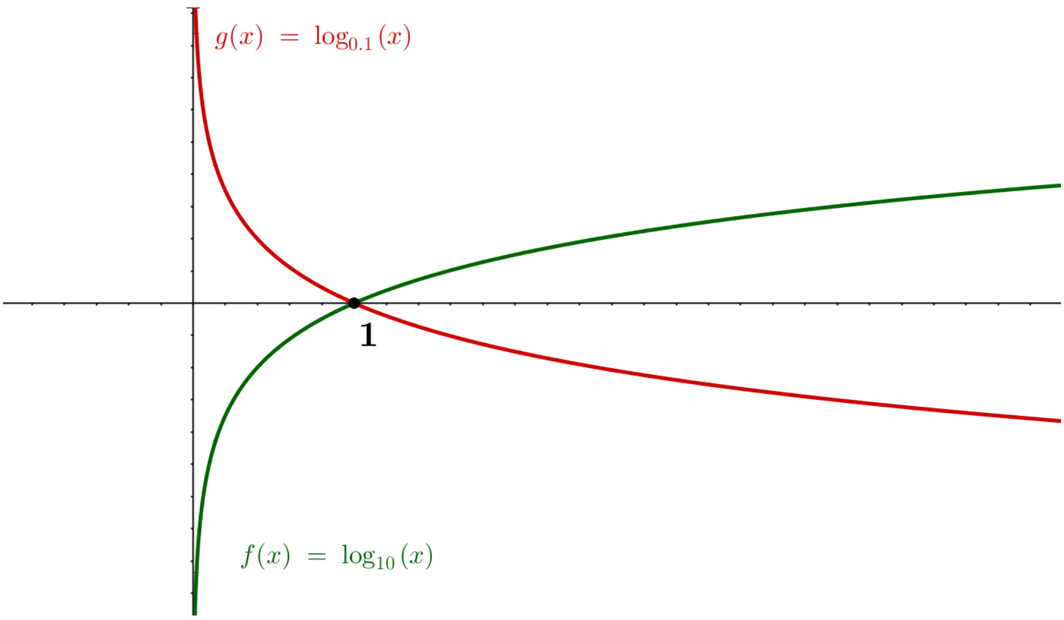


Figura 4-13: Comparação entre os gráficos f e g – GeoGebra.

- A função L crescente

Analisando os gráficos é evidente que a função f(x) é crescente. Além disso, podemos observar que estas funções estão definidas de maneira que $L: R_+^* \to R$. Além do mais, a reta $x = 0$ é uma assíntota vertical e todo o gráfico da função $f(x)$ está construído à direita dela. Além disso observamos que para os valores do intervalo $0 < x < 1$ temos $f(x) < 0$ e quando $x > 1$ temos $f(x) > 0$. É importante notar que a função f apresenta um crescimento cada vez mais lento quanto mais cresce o valor de x.

- A função L decrescente

Analisando os gráficos é evidente que a função $g(x)$ é decrescente. Além disso, podemos observar que estas funções estão definidas de maneira que $L: R_+^* \to R$. Além do mais, a reta $x = 0$ é uma assíntota vertical e todo o gráfico da função $g(x)$ está construído à direita dela. Além disso, observamos que para os valores do intervalo $0 < x < 1$ temos $f(x) > 0$ e quando $x > 1$ temos $f(x) < 0$. É importante notar que a função $f(x)$ apresenta um decrescimento cada vez mais lento quanto mais cresce o valor de x.

Uma função logarítmica apresenta sempre um crescimento ou decrescimento lento a longo prazo, já que um sistema de logaritmos tem a característica de transformar uma multiplicação em uma soma.

4.1.4 Logaritmo natural

Nesta seção veremos o logaritmo natural. Conheceremos um sistema de logaritmos que utilizaremos para realizar cálculos e resolver problemas práticos.

(LIMA, 2016) nos conta que o padre jesuíta belga Gregory Saint Vincent, em 1647, e o cientista Isaac Newton, em 1660, reconheceram uma relação estreita entre a área de uma faixa de hipérbole e o logaritmo. Embora nenhum dos dois tenha identificado realmente essa área com os logaritmos naturais, nem tenham reconhecido o número e. Foi Alphonse Antonio de Sarasa que primeiramente conectou essa proposta em 1649, mostrando que a área da hipérbole equilátera média era a diferença dos logaritmos dos números que formavam as abcissas dos extremos da faixa. Sarasa concluiu que as abcissas cresciam em progressão geométrica e suas respectivas áreas, em progressão aritmética.

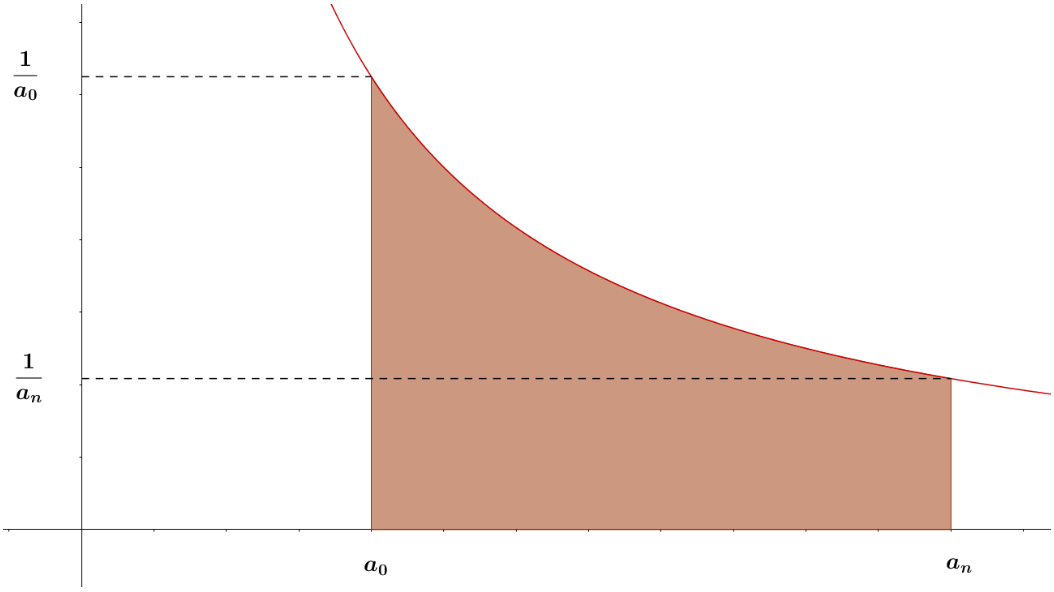


Figura 4-14: A faixa $H_{a_0}^{a_n}$ está representada pela região sombreada – GeoGebra.

4.1.4.1 Definição

Segundo (LIMA, 2016), o logaritmo natural pode ser definida como a área da faixa H_1^x. Assim, quando $x > 0$ podemos escrever o logaritmo natural ($\ln x$) da seguinte forma:

$$\ln x = \text{Área}\ (H_1^x).$$

É importante lembrar da convenção de sempre tomar $\text{Área}\ (H_1^x) < 0$ quando $0 < x < 1$.

Em particular, quando $x = 1$, $H_1^1 = 0$ pois neste caso se reduzirá a um segmento de reta. Portanto, possui área igual a zero.

Destas afirmações podemos escrever:

$$\ln 1 = 0$$

$$\ln x > 0 \ \ se\ x > 1$$

$$\ln x < 0 \ \ se\ 0 < x < 1$$

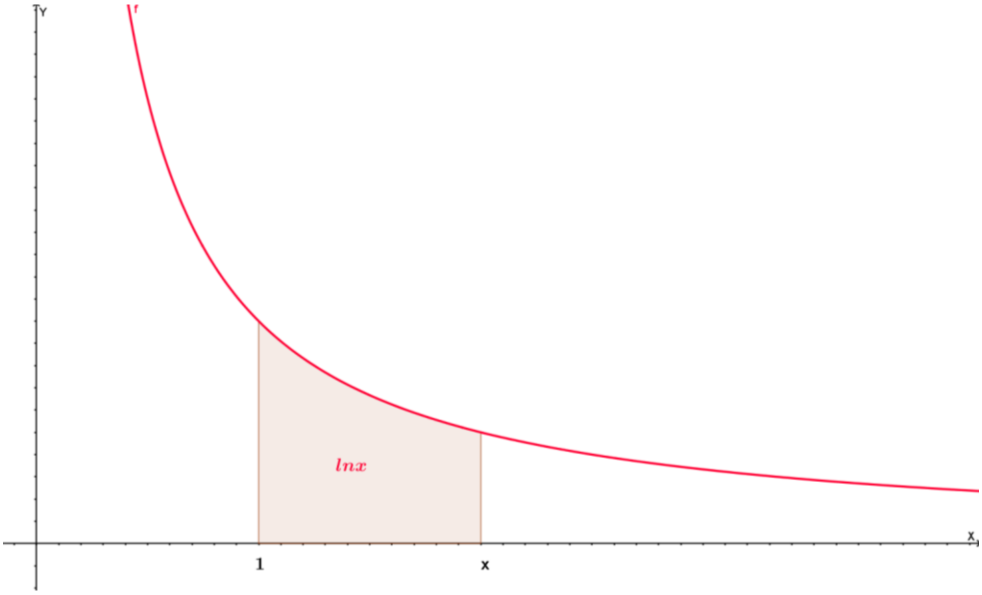


Figura 4-15: Área hachurada é igual a $\ln x$ quando $x > 1$.

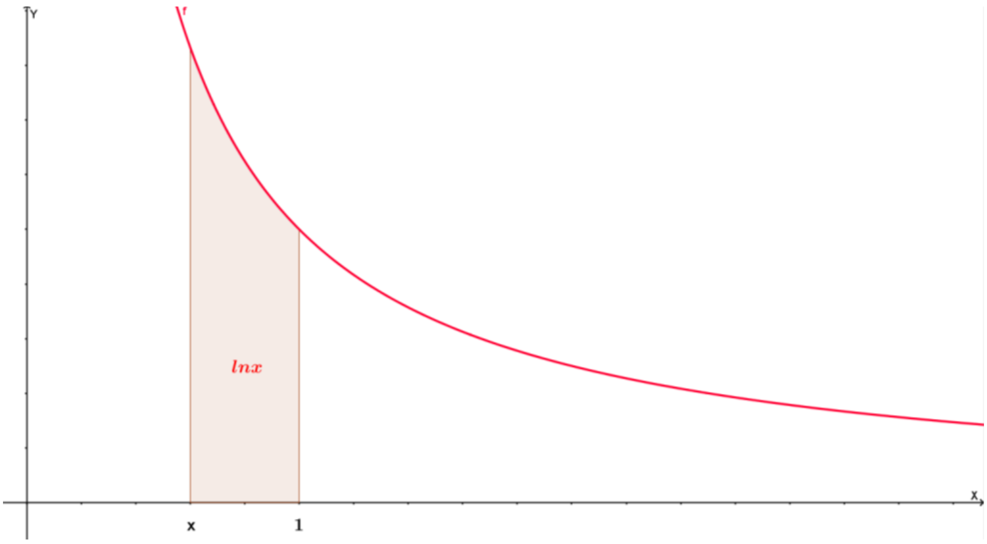


Figura 4-16: Área de lnx quando $0 < x < 1$.

Portanto o logaritmo que estamos definindo é chamado logaritmo natural.

4.1.4.2
Aproximação de $\ln(a)$ por áreas de retângulos

Uma forma interessante para que consigamos calcular a área da região $H_{a_0}^{a_n}$ é dividirmos o intervalo $H_{a_0}^{a_n}$ em um número finito de intervalos justapostos. Após uma divisão deste intervalo em n partes, teremos os intervalos $[a_0, a_1], [a_1, a_2], [a_2, a_3], \dots, [a_{n-1}, a_n]$.

Podemos aproximar a área da região $H_{a_0}^{a_n}$ através de retângulos de tal forma que a base de cada um desses retângulos são os intervalos $[a_1\,, a_{i+1}]$, onde i é um número inteiro tal que $0 \leq i < n$, e sua altura $\frac{1}{a_{i+1}}$. Desta forma é possível encontrar a área de cada retângulo em questão.

A área do retângulo, que tem como base o intervalo $[a_1\,, a_{i+1}]$ e altura $\frac{1}{a_{i+1}}$, pode ser dada pela seguinte expressão:

$$(a_{i+1} - a_i) \cdot \frac{1}{a_{i+1}}.$$

Desta forma, podemos dizer que o retângulo acima está inscrito na faixa $H_{a_0}^{a_n}$ e que o conjunto desses retângulos inscritos forma um polígono, que chamaremos de polígono retangular inscrito na faixa $H_{a_0}^{a_n}$. A área do polígono retangular inscrito pode ser calculada pela expressão:

$$\sum_{i=0}^{n-1} (a_{i+1} - a_i) \cdot \frac{1}{a_{i+1}}.$$

Uma ideia inicial importante é sobre o refinamento deste resultado. Quanto maior for o valor de n, mais refinado será o resultado para a área do polígono retangular inscrito. Com mais intervalos, é possível diminuir o erro existente no cálculo. Isso se torna bem evidente se dividirmos um intervalo qualquer ao meio. Esta ideia pode ser usada para todo o polígono retangular. Logo podemos dividir todos os intervalos ao meio e conseguir um valor superior ao que já tínhamos encontrado anteriormente para a área do polígono retangular inscrito. Para que a ideia inicial mencionada seja válida, precisamos prová-la. Provaremos este fato de forma bem simples. Basta realizarmos os cálculos de ambas as áreas.

Vamos provar que a área do retângulo que tem como base o intervalo $[a_1\,, a_{i+1}]$ e altura $\frac{1}{a_{i+1}}$, é menor do que a soma das áreas dos retângulos formados pela divisão deste intervalo ao meio, ou seja, da área do retângulo, cuja base é o intervalo $[a_1\,, \frac{a_1 + a_{i+1}}{2}]$ e altura $\frac{2}{a_1 + a_{i+1}}$, somada com a área do retângulo, cuja base é o intervalo $[\frac{a_1 + a_{i+1}}{2}, a_{i+1}]$ e altura $\frac{1}{ai+1}$. Embora os cálculos sejam bem simples, a prova pode ser intuitiva. As figuras seguintes poderão ser mais esclarecedoras

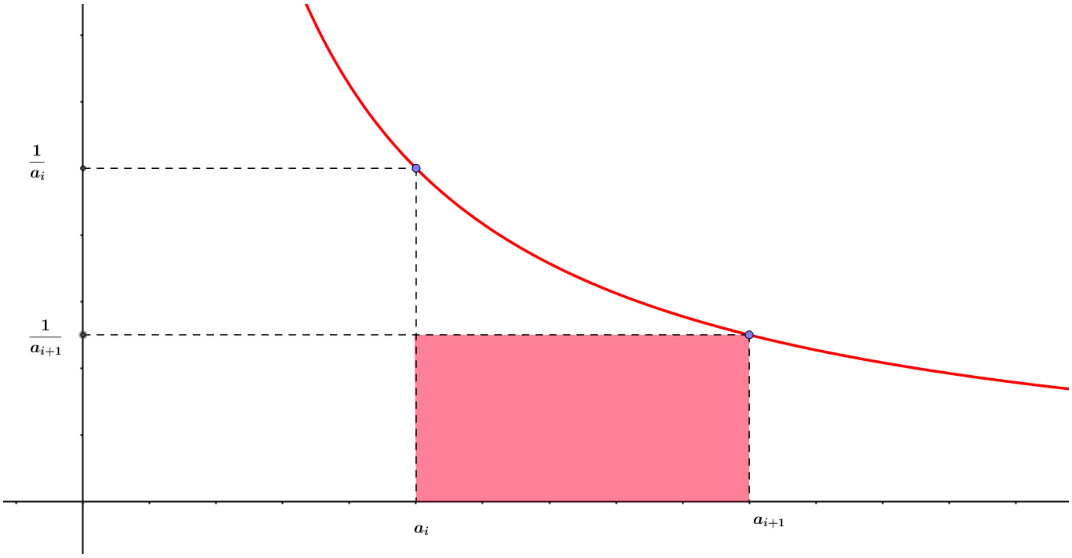


Figura 4-17: Figura criada no GeoGebra.

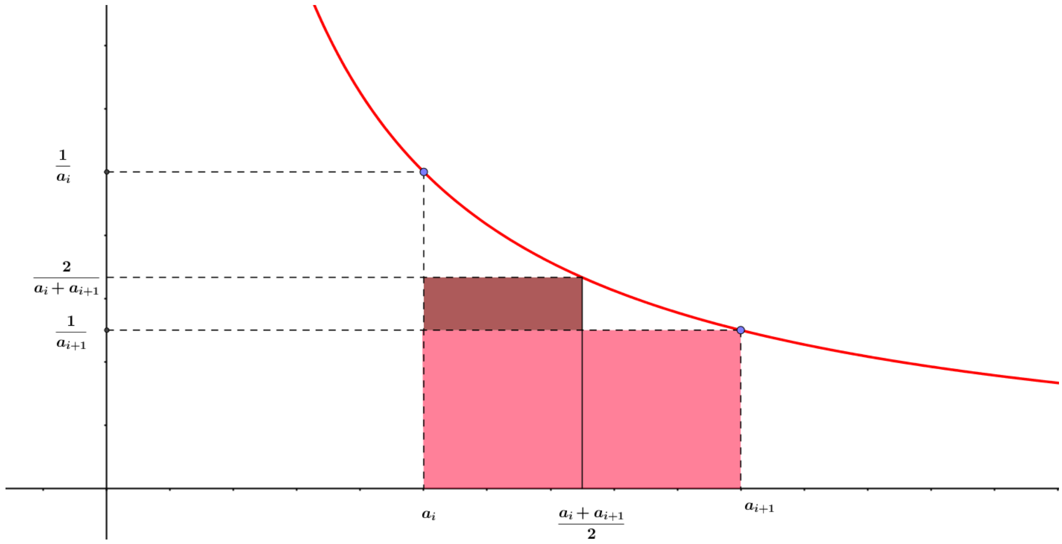


Figura 4-18: Figura criada no GeoGebra.

As imagens acima, nos dão uma "prova" visual. Podemos claramente perceber que a área da figura 4-18 é maior do que a área da figura 4-17. As figuras 4-17 e 4-18 dispensam os resultados algébricos.

Definição: Diremos que a área da faixa $H_{a_0}^{a_n}$ é o número real, cujas aproximações, por falta, são as áreas dos polígonos retangulares inscritos em $H_{a_0}^{a_n}$. Podemos pensar que, se tivermos $A = \text{área da faixa } H_{a_0}^{a_n}$, então poderemos dizer que, dado qualquer número real $a < A$, existe um polígono retangular P, inscrito em $H_{a_0}^{a_n}$, tal que $a \text{ área de P} < A$.

Fazer o cálculo da área de uma região desconhecida pode, por vezes, ser difícil, porém adotaremos a técnica de aproximação por retângulos. A partir dos polígonos retangulares inscritos, seremos capazes de aproximar o valor do $ln(a)$, por falta, tanto quanto desejarmos. A área não hachurada, embora faça parte da área que queremos, não faz parte do nosso cálculo. A diferença que essa área irá produzir no nosso resultado é dada como um valor de erro.

Aproveitando o exemplo de (LIMA, 2016, p. 49), vamos calcular o valor aproximado de $\ln 2$ subdividindo o intervalo $[1, 2]$ em dez partes iguais. Faremos então uma tabela da função $f(x) = \frac{1}{x}$.

x	$f(x)$	x	$f(x)$
1	1,000	**1,6**	0,625
1,1	0,909	**1,7**	0,588
1,2	0,833	**1,8**	0,556
1,3	0,769	**1,9**	0,526
1,4	0,714	**2**	0,500
1,5	0,667	**-**	-

Tabela 4-4: Valor aproximado de $\ln 2$.

Encontraremos uma aproximação inferior para $\ln 2$ para o polígono retangular inscrito na faixa H_1^2, formados por dez retângulos cujas bases medem 0,1 e cujas alturas são os dez últimos valores de $f(x)$ da tabela 4-4.

Portanto teremos

$$0{,}1 \cdot 0{,}909 + 0{,}1 \cdot 0{,}833 + 0{,}1 \cdot 0{,}769 + 0{,}1 \cdot 0{,}714 + \cdots + 0{,}1 \cdot 0{,}500$$

$$0{,}1 \cdot (0{,}909 + 0{,}833 + 0{,}769 + 0{,}714 + \cdots + 0{,}500) = 0{,}6688$$

A soma da área de todos estes retângulos será igual a 0,6685. Portanto, 0,6688 é o valor aproximado de $\ln 2$ por falta.

A figura 4-19 facilita a visualização deste polígono.

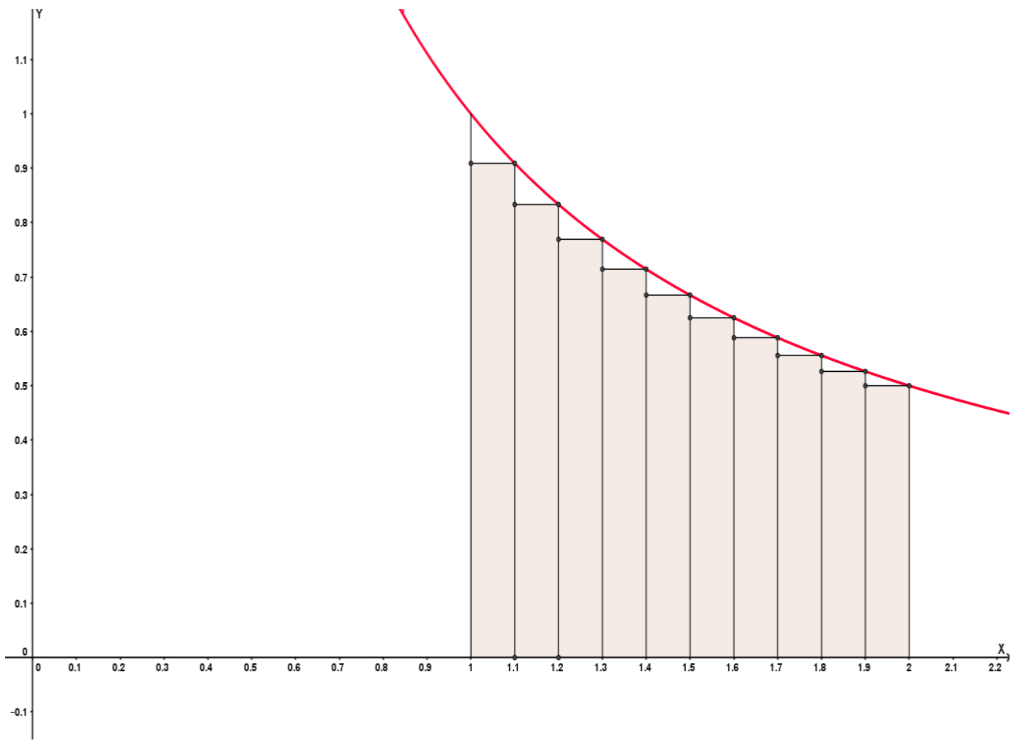


Figura 4-19: Aproximação por falta – GeoGebra.

Encontraremos uma aproximação por excesso para $\ln 2$ para o polígono retangular inscrito na faixa H_1^2, formados por dez retângulos cujas bases medem 0,1 e cujas alturas são os dez primeiros valores de $f(x)$ da tabela 4-4.

Portanto teremos

$$0{,}1 \cdot 1{,}000 + 0{,}1 \cdot 0{,}909 + 0{,}1 \cdot 0{,}833 + 0{,}1 \cdot 0{,}769 + 0{,}1 \cdot 0{,}714 + \cdots + 0{,}1 \cdot 0{,}526$$

$$0{,}1 \cdot (1{,}00 + 0{,}909 + 0{,}833 + 0{,}769 + 0{,}714 + \cdots + 0{,}526) = 0{,}7188$$

A soma da área de todos estes retângulos será igual a 0,7188. Portanto, 0,7188 é o valor aproximado de $\ln 2$ por excesso.

A figura 4-20 facilita a visualização do polígono inscrito na faixa H_1^2.

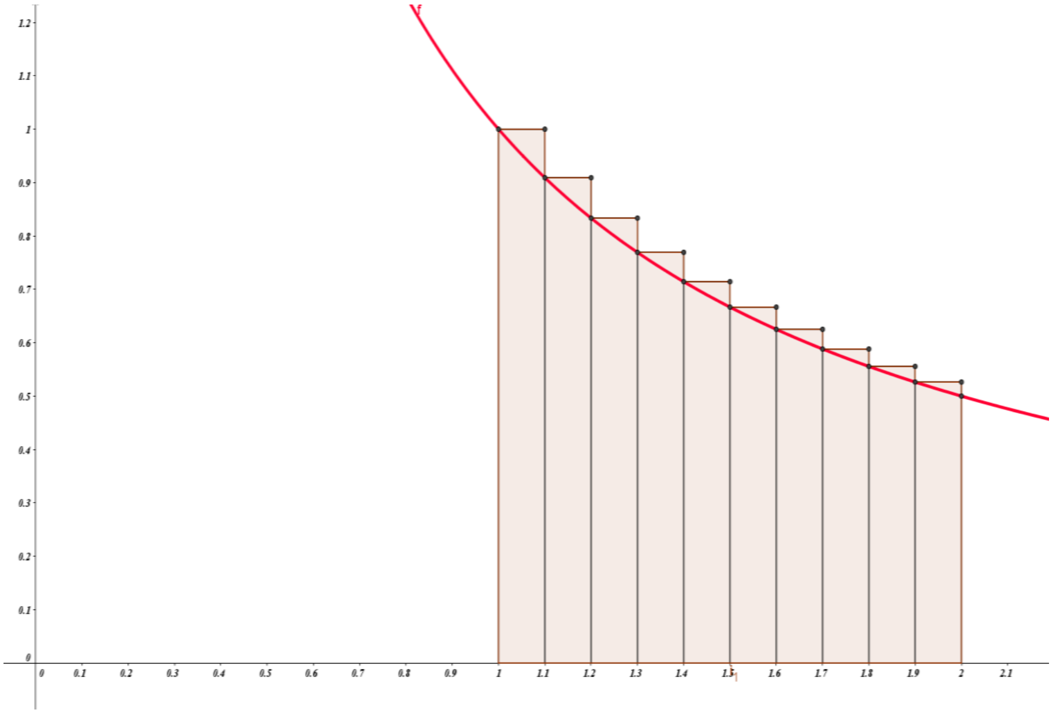


Figura 4-20: Aproximação por excesso – GeoGebra.

Daí podemos concluir que

$$0{,}6688 < \ln 2 < 0{,}7188$$

Vale lembrar que para retângulos cada vez mais estreitos, ou seja, quanto mais retângulos possuir neste intervalo, maior será a precisão do resultado encontrado.

4.1.4.3
Aproximação de $\ln(a)$ por áreas de trapézios

(LIMA, 2016) mostra-nos uma forma de encontrar aproximações mais precisas através do uso de trapézios ao invés de retângulos.

Veja na figura 4-21 que o trapézio ACK_1L_1 ocupa menos espaço que o retângulo ABK_1L_1, além do mais o seu cálculo não é difícil de ser realizado. Basta perceber que AL_1e CK_1 são respectivamente as bases maior e menor do trapézio e ainda possui altura L_1K_1 que é o intervalo constante, neste exemplo, de $0{,}1$. A ideia é a mesma nos trapézios inscritos nos demais intervalos. Portanto basta aplicar a fórmula da área do trapézio.

$$A_{Trapézio} = \frac{(B_{Base\ maior} + b_{Base\ menor}) \cdot h_{Altura}}{2}$$

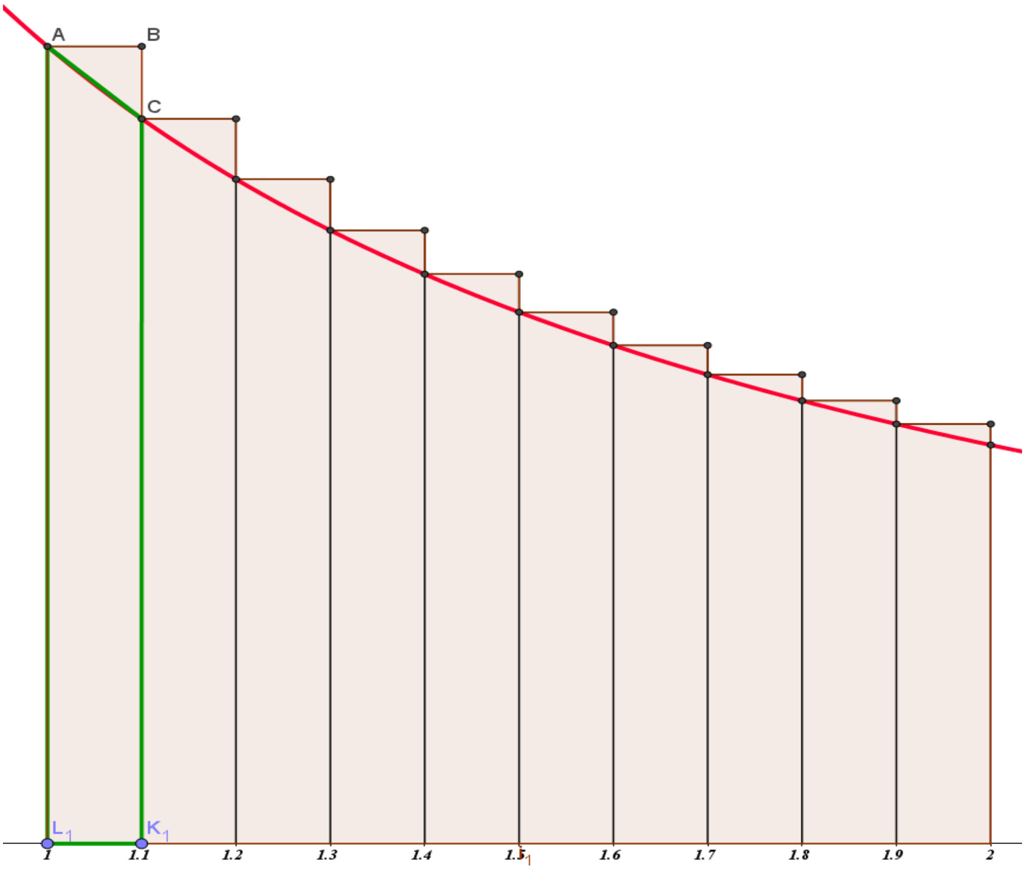


Figura 4-21: Aproximação por excesso através de trapézios.

Aplicando a referida fórmula e realizando a soma de todos os trapézios teremos a seguinte expressão:

$$A_{Total} = \frac{(f(1) + f(1,1)) \cdot 0,1}{2} + \frac{(f(1,1) + f(1,2)) \cdot 0,1}{2} + \cdots + \frac{(f(1,9) + f(2)) \cdot 0,1}{2}$$

$$A_{Total} = \frac{0,1}{2} \cdot [(f(1) + f(1,1)) + \big(f(1,1) + f(1,2)\big) + \cdots + (f(1,9) + f(2))]$$

$$A_{Total} = \frac{0,1}{2} \cdot [(1 + 0,909) + (0,909 + 0,833) + \cdots + (0,526 + 0,500)]$$

$$A_{Total} = \frac{0,1}{2} \cdot [(1 + 0,909) + (0,909 + 0,833) + \cdots + (0,526 + 0,500)] = 0,6938$$

Pela figura 4-22, podemos concluir que o valor que encontramos, embora bem menor que a aproximação por retângulos, ainda é uma aproximação por excesso, pois a reta AC está acima de linha vermelha que representa o gráfico da função f. Portanto $\ln 2 < 0,6938$.

Figura 4-22: Ampliação da figura 4-21.

Para calcularmos uma aproximação por falta, utilizaremos a figura 4-23 para analisar primeiramente o trapézio AQF_1V, pois neste trapézio podemos perceber com mais facilidade a curvatura de $f(x)$.

Encontrando o ponto médio O_1 de VF_1, podemos encontrar o ponto $I(O_1, f(O_1))$ e a partir deste ponto, traçar o segmento K_1L_1 que é paralelo ao segmento AQ. Desta forma, podemos verificar que o trapézio $K_1L_1VF_1$, semelhante ao trapézio AQF_1V, possui uma aproximação por falta, visto que o segmento K_1L_1 está abaixo da linha que representa $f(x)$.

Além disso, o segmento IO_1 é o ponto médio do trapézio $K_1L_1VF_1$, e obtendo $IO_1 = f(O_1)$, podemos aplicar a fórmula

$$A_{Trapézio} = Bm_{Base\ Média} \cdot h_{Altura}$$

Seguindo este raciocínio, podemos afirmar que para cada trapézio inscrito num intervalo chegaremos a mesma conclusão.

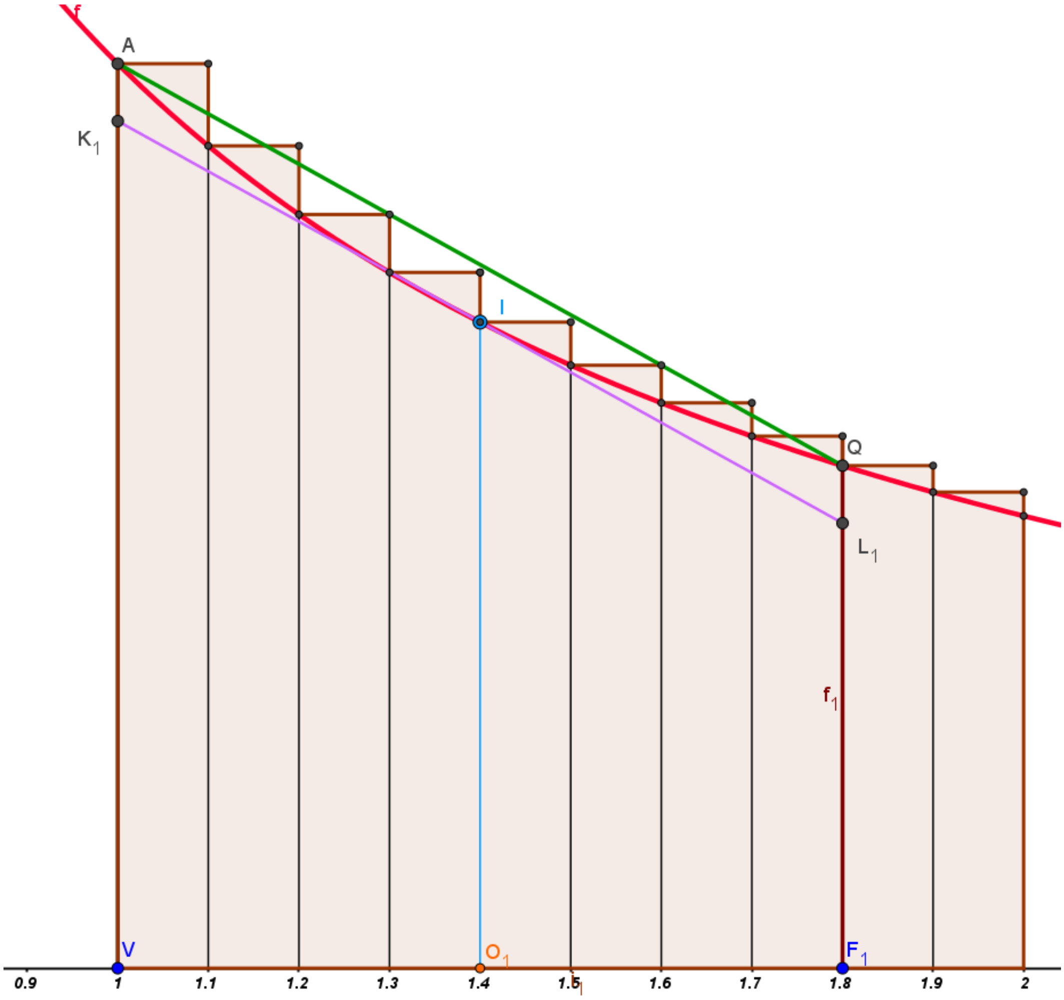


Figura 4-23: Aproximação por falta através de trapézios –GeoGebra.

Somando as áreas dos trapézios menores utilizando a tabela 4-4 resolveremos o seguinte cálculo

$$A_{Total} = f\left(\frac{(1+1{,}1)}{2}\right)\cdot 0{,}1 + f\left(\frac{(1{,}1+1{,}2)}{2}\right)\cdot 0{,}1 + \cdots + f(\frac{(1{,}9+2)}{2})\cdot 0{,}1$$

$$A_{Total} = 0{,}1\cdot[f(1{,}05) + f(1{,}15) + \cdots + f(1{,}95)]$$

$$A_{Total} = 0{,}1\cdot(0{,}952 + 0.870 + \cdots + 0{,}513)$$

$$A_{Total} = 0{,}1\cdot(6{,}928)$$

$$A_{Total} = 0{,}6928.$$

Assim, $\ln 2 > 0{,}6928$.

Portanto podemos concluir que:

$$0{,}6938 > \ln 2 > 0{,}6928.$$

Ao compararmos com o método em que utilizamos retângulos, observamos que o intervalo encontrado pelo método dos trapézios é bem menor, ou seja, é mais preciso. Para ser ainda mais preciso, tomaremos o valor de $\ln 2 \cong 0{,}6931$.

4.1.4.4
Propriedade Fundamental

(LIMA, 2016) destaca um fato importante a respeito das áreas da faixa de hipérbole e expressa pelo teorema abaixo:

"Seja qual for o número real, $K > 0$, as faixas H_a^b e H_{ak}^{bk} têm a mesma área"

Vamos demonstrar este teorema.

Demonstração: suponha um triângulo inscrito em H, cuja base é o segmento $[c, d]$ do eixo das abscissas, o retângulo inscrito em H e com base no segmento $[ck, dk]$ tem mesma área que o anterior. Com efeito, a área do primeiro é igual a

$$(d-c)\cdot\frac{1}{d} = 1 - \frac{c}{d}$$

Enquanto a área do segundo é

$$(dk-ck)\cdot\frac{1}{dk} = 1 - \frac{c}{d}$$

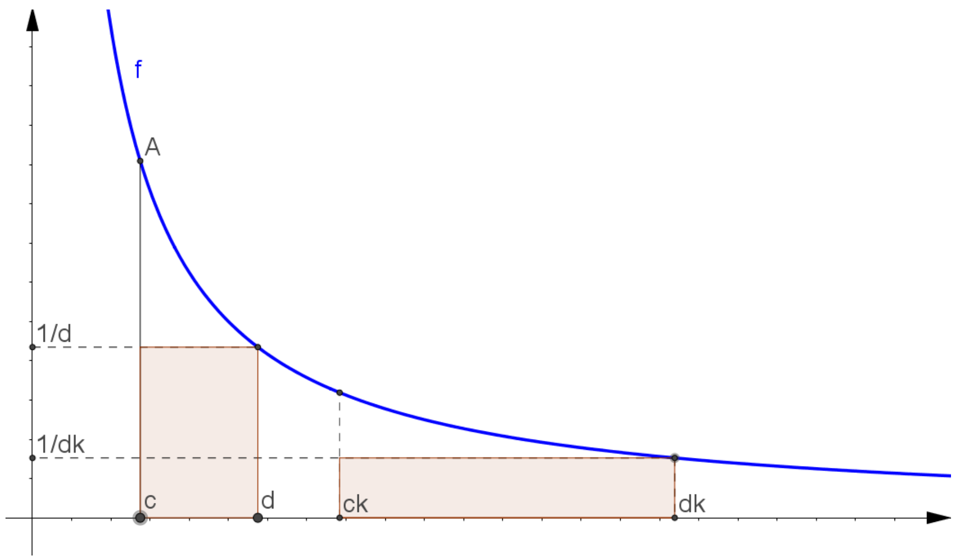


Figura 4-24: Os retângulos possuem a mesma área.

Suponha um polígono retangular P, inscrito em H_a^b. Se multiplicarmos por k cada uma das abscissas dos pontos de subdivisão de $[a, b]$, determinados por P, obteremos uma subdivisão do intervalo $[ak, bk]$ e portanto um polígono regular P' que está inscrito na faixa H_{ak}^{bk}.

Desta forma, podemos concluir que para cada polígono regular inscrito em H_a^b, existe um outro polígono regular de mesma área inscrito na faixa H_{ak}^{bk}. De maneira análoga (dividindo abscissas por k), veríamos que para cada polígono regular inscrito na faixa H_{ak}^{bk} encontraríamos outro de mesma área inscrito em H_a^b.

Isso nos permite dizer que as áreas dessas faixas são números que possuem exatamente as mesmas aproximações inferiores, ou seja, são iguais.

Deste teorema podemos afirmar que é uma consequência:

$$\text{Área}\left(H_a^b\right) = \text{Área}\left(H_1^{b/a}\right) = \text{Área}(H_1^c);\ c = \frac{b}{a}.$$

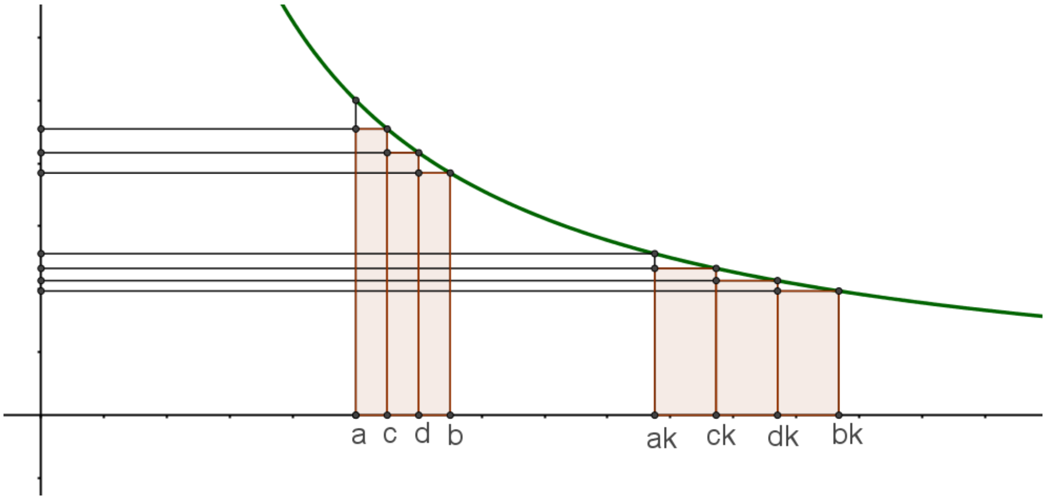


Figura 4-25.

Para $a < c < b$, podemos verificar com facilidade que

$$\text{Área}\left(H_a^b\right) = \text{Área}(H_a^c)+\text{Área}\left(H_c^b\right).$$

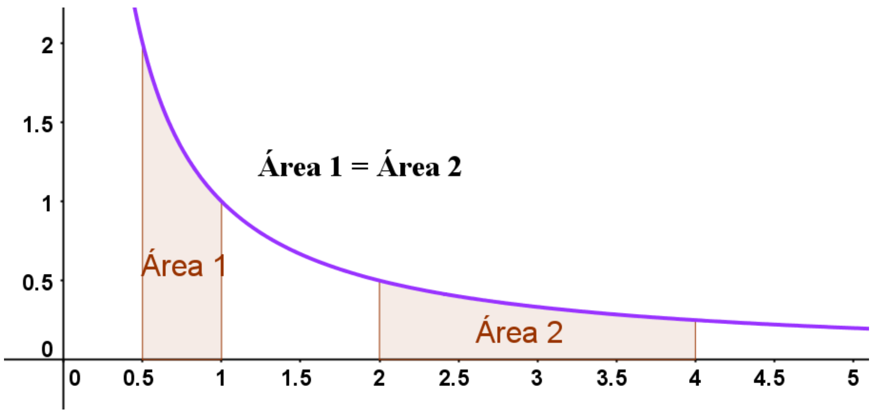


Figura 4-26: $\text{Área 1} = H_{0,5}^1$ e $\text{Área 2} = H_2^4$.

Para mantermos a validez de $\text{Área}\left(H_a^b\right) = \text{Área}(H_a^c)+\text{Área}\left(H_c^b\right)$ para qualquer que seja $a, b,$ e c reais, convencionaremos que:

$$\text{Área}(H_a^a) = 0 \text{ e } \text{Área}\left(H_a^b\right) = -\text{Área}(H_b^a).$$

Esta última convenção implica considerar áreas negativas. Desta forma $\text{Área}(H_2^1) = -\text{Área}(H_1^2) < 0$. Isto contraria a tradição, mas em compensação, a igualdade $\text{Área}(H_a^b) = \text{Área}(H_a^c)+\text{Área}(H_c^b)$ torna-se válida sem restrições. A seguir provaremos essa afirmação.

Suponha que $c < a < b$,

Logo,

$$\text{Área}(H_c^b) = \text{Área}(H_c^a)+\text{Área}(H_a^b).$$

Reorganizando os elementos encontraremos:

$$\text{Área}(H_a^b) - \text{Área}(H_c^b) = -\text{Área}(H_c^a).$$

ou seja,

$$\text{Área}(H_a^b) + \text{Área}(H_b^c) = \text{Área}(H_a^c).$$

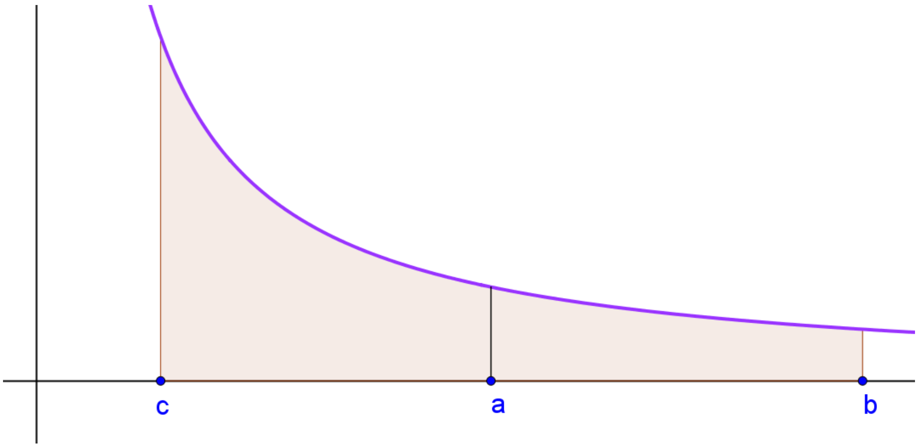


Figura 4-27.

Poderemos demonstrar da mesma maneira a validez da igualdade $\text{Área}(H_a^b) + \text{Área}(H_b^c) = \text{Área}(H_a^c)$ nos quatro demais casos que são:

$$a < c < b, \quad b < a < c, \quad b < c < a, \quad c < b < a,$$

Mesmo que tenhamos $a = b,\ a = c,\ b = c$, ou $a = b = c$ a igualdade $\text{Área}(H_a^b) + \text{Área}(H_b^c) = \text{Área}(H_a^c)$ ainda se mantem verdadeira. Isto é claro visto que se $a = c$, por exemplo, faz com que a igualdade se torne:

$$\text{Área}(H_a^b) + \text{Área}(H_b^a) = \text{Área}(H_a^a)$$

Consequentemente:

$$\text{Área}(H_a^b) + \text{Área}(H_b^a) = 0.$$

Os outros três casos deixaremos para que o leitor os realize.

5
Atividades propostas

5.1
Organização e objetivos das atividades

A atividade 1 tem o objetivo de fazer com que o aluno perceba, que muitas vezes é mais prático utilizar uma tabela para cálculos, do que fazer manualmente cálculos enormes. Dessa forma, é possível mostrar as tábuas logarítmicas como “calculadoras” no período anterior as invenções das calculadoras eletrônicas.

Sugerimos na atividade 2, que após o professor mostrar o contexto histórico dos logaritmos e explicar a construção das tabelas logarítmicas proposta por Briggs, a atividade busque fazer com que os alunos construam as tabelas logarítmicas na base 10. Após a criação da tabela, a atividade também chama atenção para as relações existentes entre os valores encontrados. Essa relação visa proporcionar um olhar lógico para as propriedades logarítmicas que serão vistas mais adiante.

A terceira atividade visa aproveitar o olhar crítico que o aluno obteve na atividade 2 e introduzir os conceitos das propriedades logarítmicas. A lista de exercícios desta atividade tem por objetivo possibilitar o fortalecimento das relações existentes entre, produto, divisão e potência de números utilizando as tabelas logarítmicas.

A atividade 4, visa trabalhar o conceito de bases logarítmicas utilizando tabelas logarítmicas dadas. Apresenta ainda o número e utilizando-o como parâmetro de comparação com o número π, visto que este já é um velho conhecido dos alunos. Além da atividade mostrar a possibilidade de termos um número irracional positivo como base logarítmica, a atividade também tem o objetivo de mostrar a relação de mudança de base fazendo a comparação entre as tabelas logarítmicas dadas nos exercícios.

Devido a importância do número e, a atividade 5 tem o objetivo de apresentar o número e ao aluno, visto que esta é uma base importantíssima nos estudos de logaritmos. A proposta é que o aluno não apenas decore o valor deste número mas trabalhe com este valor sabendo como este número surgiu. Portanto, mostrar a expressão do número e é algo agregador e futuramente útil.

Finalmente a sexta e última atividade visa trabalhar a linguagem matemática envolvendo logaritmos e massificar as propriedades logarítmicas. A linguagem matemática no assunto deve ser bem compreendida pelos alunos, pois é esta linguagem que será encontrada em diversos materiais didáticos disponíveis.

Vale destacar que todas atividades sugeridas neste trabalho estão disponíveis para qualquer professor e que podem ser modificadas a seu critério de forma que possam contribuir com o trabalho em sala de aula. Além disso, este trabalho também dispõe de todos os exercícios das atividades propostas resolvidas, a fim de possibilitar uma maior segurança no trabalho do professor.

Desta forma, esperamos através deste trabalho proporcionar aos professores do Ensino Médio uma maior segurança nos assuntos que serão apresentados, e que as atividades propostas possam servir de auxílio ou sugestão de outras atividades que possam propiciar um melhor aprendizado no assunto de exponenciais

5.1.1 Desenvolvendo a primeira atividade

A proposta desta atividade é colocar o aluno no mesmo raciocínio que Napier teve ao desenvolver as tábuas logarítmicas.

Certamente, seguindo o cronograma que normalmente é aplicado nas escolas, o aluno será capaz de resolver equações como:

$$2^{x+1} \cdot 2^{2x+4} = 128.$$

A abordagem de logaritmos necessita que o aluno tenha uma noção de funções exponenciais, propriedades de potência e função injetora.

Resolvendo a equação acima, teremos:

$$2^{3x+5} = 2^7.$$

Como as bases são iguais, podemos igualar os seus expoentes, logo

$$3x + 5 = 7$$

$$x = 2/3.$$

Para motivar o raciocínio do aluno a uma visão mais lógica das tábuas logarítmicas, aplicaremos a Atividade 1.

5.1.1.1 Estimulando o raciocínio do aluno

Ao se deparar com as questões abordadas na atividade 1, o aluno pode ficar temeroso ao ter que resolver questões com valores tão grandes. Porém, ao analisar com mais paciência as questões, ele pode observar as relações existentes entre as questões e a tabela dada. Ao substituir os valores envolvidos nas questões, o aluno tem a capacidade de perceber a correlação entre os problemas abordados nesta lista e o assunto que fora abordado anteriormente que é o assunto de exponencial.

Com a ideia de substituir os números grandes por potências de 2, fica muito mais fácil calcular divisões, produtos ou potências através das propriedades de potência do que resolver manualmente todos os cálculos. A utilização da tabela como referência de valores, facilita a sua resposta final.

Com isso, o aluno consegue perceber na prática que é muito mais simples resolver uma soma ou subtração do que realizar produtos e divisões (principalmente envolvendo números muito grandes).

5.1.1.2
Ao que o professor induz o aluno na atividade 1?

A proposta da Atividade 1 é mostrar ao aluno uma forma de evitar cálculos desgastantes. Pode ser que algum aluno resolva as questões de forma tradicional, o que neste caso não é ruim, pois estará verificando na prática o que Napier trabalhou tanto para desenvolver. Ao perceber que há uma forma simples e rápida de calcular números muito grandes através de uma ferramenta, o aluno pode se sentir motivado a aprender por este método ser mais simples e menos trabalhoso.

No decorrer da aula, algum aluno pode questionar o porquê de não encontrar na tabela números diferentes das que estão lá expostas, se esta aplicação só vale para um número que seja potência de 2 (neste caso) ou se vale para qualquer número, ou ainda questionar como ele faria o produto $16 \cdot 15$, por exemplo.

Seria interessante instigá-los a questionar sobre essas questões. Quando os questionamentos por parte dos alunos a respeito dessas questões se tornarem presentes é hora de mostramos o método que Napier e Briggs utilizaram para construção das primeiras tábuas de logaritmos que será explorado no futuro.

Atividade 1

Veja a tabela abaixo.

Número	Expoente	Resultado	Número	Expoente	Resultado	Número	Expoente	Resultado
2^0	0	1	2^{10}	10	1024	2^{20}	20	1048576
2^1	1	2	2^{11}	11	2048	2^{21}	21	2097152
2^2	2	4	2^{12}	12	4096	2^{22}	22	4194304
2^3	3	8	2^{13}	13	8192	2^{23}	23	8388608
2^4	4	16	2^{14}	14	16384	2^{24}	24	16777216
2^5	5	32	2^{15}	15	32768	2^{25}	25	33554432
2^6	6	64	2^{16}	16	65536	2^{26}	26	67108864
2^7	7	128	2^{17}	17	131072	2^{27}	27	134217728
2^8	8	256	2^{18}	18	262144	2^{28}	28	268435456
2^9	9	512	2^{19}	19	524288	2^{29}	29	536870912

Tabela de Atividades i

1 – Resolva os produtos abaixo, e se quiser utilize a tabela de atividade i:

a) $4 \cdot 32$

b) $4 \cdot 32 \cdot 256$

c) $1024 \cdot 4096$

d) $256 \cdot 1048576$

e) $4096 \cdot 65536$

f) $1024 \cdot 4096 \cdot 32$

2 – Resolva as divisões abaixo, e se quiser utilize a tabela de atividade i:

a) $536870912 \div 4$

b) $65536 \div 64$

c) $134217728 \div 131072$

d) $524288 \div 512$

e) $8388608 \div 32768$

f) $4194304 \div 65536$

3 – Resolva as potências abaixo, e se quiser utilize tabela de atividade i:

a) $536870912^2 \div 4^{20}$

b) $524288 \div 512^2$

c) $4^2 \cdot 32^3 \div 128$

d) $4^5 \cdot 32^3$

e) $134217728^2 \div 131072^2$

f) $1024 \cdot 4096 \div 32^2$

4 - Se fizéssemos as questões sem utilizar a tabela, seria possível fazer as contas? Caso afirmativo por que você desejou usar a tabela?

5 - A tabela acima nos permite fazer o produto de qualquer número? Por quê?

6 - Podemos dizer que esse tipo de tabela é um tipo de calculadora da época?

5.1.1.3 Respostas esperadas nos exercícios da atividade 1

O que se espera nas questões é que o aluno utilize as informações da tabela dada para resolver as questões 1, 2 e 3. Abaixo temos as respostas esperadas desta atividade.

Questão 1

a) $2^2 \cdot 2^5 = 2^{2+5} = 2^7 = 128$

b) $2^2 \cdot 2^5 \cdot 2^8 = 2^{2+5+8} = 2^{15} = 32768$

c) $2^{10} \cdot 2^{12} = 2^{10+12} = 2^{22} = 4194304$

d) $2^8 \cdot 2^{20} = 2^{8+20} = 2^{28} = 268435456$

e) $2^{12} \cdot 2^{16} = 2^{12+16} = 2^{26} = 67108864$

f) $2^{10} \cdot 2^{12} \cdot 2^5 = 2^{10+12+5} = 2^{27} = 134217728$

Questão 2

a) $536870912 \div 4 = 2^{29} \div 2^2 = 2^{29-2} = 2^{27} = 134217726$

b) $65536 \div 64 = 2^{16} \div 2^6 = 2^{16-6} = 2^{10} = 1024$

c) $134217728 \div 131072 = 2^{27} \div 2^{17} = 2^{27-17} = 2^{10} = 1024$

d) $524288 \div 512 = 2^{19} \div 2^9 = 2^{19-9} = 2^{10} = 1024$

e) $8388608 \div 32768 = 2^{23} \div 2^{15} = 2^{23-15} = 2^8 = 256$

f) $4194304 \div 65536 = 2^{22} \div 2^{16} = 2^{22-16} = 2^6 = 64$

Questão 3

a) $536870912^2 \div 4^{20} = (2^{29})^2 \div (2^2)^{20} = 2^{58} \div 2^{40} = 2^{58-40} = 2^{18} = 262144$

b) $524288 \div 512^2 = (2^{19})^2 \div (2^9)^2 = 2^{38} \div 2^{18} = 2^{38-18} = 2^{20} = 1048576$

c) $4^2 \cdot 32^3 \div 128 = (2^2)^2 \cdot (2^5)^3 \div 2^7 = 2^4 \cdot 2^{15} \div 2^7 = 2^{4+15-7} = 2^{12} = 4096$

d) $4^5 \cdot 32^3 = (2^2)^5 \cdot (2^5)^3 = 2^{10} \cdot 2^{15} = 2^{10+15} = 2^{25} = 33554432$

e) $134217728^2 \div 131072^2 = (2^{27})^2 \div (2^{17})^2 = 2^{54} \div 2^{34} = 2^{54-34} = 2^{20} = 1048576$

f) $1024 \cdot 4096 \div 32^2 = 2^{10} \cdot 2^{12} \div (2^5)^2 = 2^{10} \cdot 2^{12} \div 2^{10} = 2^{10+12-10} = 2^{12} = 4096$

Questão 4

Sim, é possível fazer o cálculo manualmente. Ao utilizar a tabela o somos capazes de resolver as questões evitando cálculos trabalhosos.

Questão 5

Não. A tabela dada contém apenas valores que são potências de dois. Não seria possível, por exemplo, realizar o produto $25 \cdot 14$ utilizando esta tabela.

Questão 6

Sim, como a principal função das calculadoras é agilizar o cálculo, a tabela exercia essa função para os matemáticos da época. Embora nesta tabela sejamos capazes de realizar apenas alguns cálculos.

Dadas essas expectativas de respostas, cabe ao professor analisar o raciocínio de cada aluno, de forma que as ideias, e erros mais comuns contidas nas suas resoluções sejam exploradas com todos os alunos.

5.1.2
Desenvolvendo a segunda atividade

O intuito desta atividade é mostrar a importância das tábuas logarítmicas para uma melhor compreensão do assunto de logaritmos. A construção de tábuas logarítmicas, nesta atividade, auxilia uma prévia observação das propriedades logarítmicas que serão vistas futuramente.

A proposta da atividade 2 é fazer com que o aluno resolva equações do tipo: $a^x = b$.

5.1.2.1
Estimulando o raciocínio do aluno

A primeira questão da atividade 2, tem o objetivo de despertar no aluno a curiosidade de encontrar um valor que satisfaça a igualdade. O aluno realizará essa questão por tentativas.

Tendo o aluno acesso a uma planilha eletrônica, ele realizará a questão de forma rápida e principalmente sem perder a lógica envolvida nesse processo.

Vejamos a realização da questão 1 a) utilizando o software Office Excel 2007.

O aluno pode utilizar a planilha criando 3 colunas, chamando-as, por exemplo, de base, expoente e resposta. O valor da base será 10, o expoente é o valor que queremos encontrar, portanto são valores que iremos “chutar”, ou seja, jogar valores; e a coluna resposta é valor que devemos encontrar (neste caso deve ser 2 ou um número muito próximo).

Na coluna de resposta deve ser inserida a fórmula "*=A2^B2*", como ilustra a figura 5-1

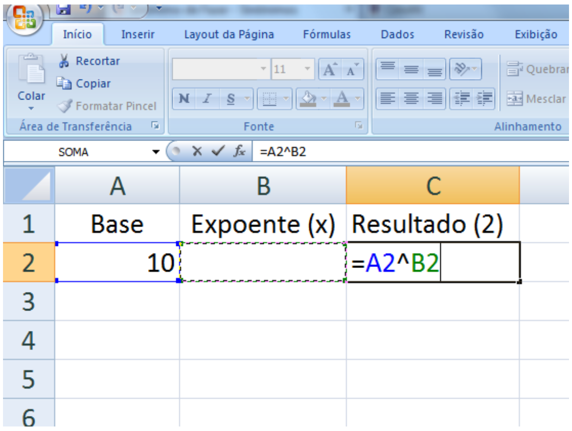


Figura 5-1: Inserindo a fórmula "=A2^B2" no Excel.

No campo B2, o aluno terá a liberdade de jogar valores para que em C2 ele encontre o melhor valor aproximado de 2.

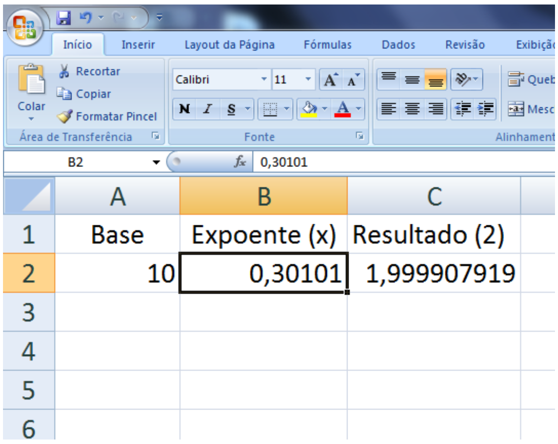


Figura 5-2: Jogando valores quaisquer na célula B2 (expoente) para obter um valor próximo de 2 em C2 (resultado).

Desta forma, os outros itens da questão 1 podem ser resolvidas seguindo a mesma analogia.

Na questão 2 a intenção é criar uma tábua de logaritmos decimais utilizando o método utilizado por Briggs. Porém, para agilizar o processo, o aluno pode utilizar uma calculadora que não seja científica que tenha função de raiz quadrada.

O aluno deve seguir os seguintes passos:

1 – Encontrar a média geométrica dos extremos de um intervalo que contém o ponto desejado;

2 – Transformar o radical em potência;

3 – Encontrar a nova média geométrica dos extremos do intervalo menor que contém o ponto desejado;

4 – Fazer estes processos sucessivamente.

Vamos exemplificar com $10^x \cong 2$

Como $10^0 < 2 < 10^1 \Longrightarrow 1 < 2 < 10$

$$\sqrt{10^0 \cdot 10^1} = \sqrt{1 \cdot 10}$$

$$10^{\frac{1}{2}} = \sqrt{10}$$

$$10^{0,5} \cong 3,16227$$

Logo, o próximo intervalo é $10^0 < 2 < 10^{0,5} \Longrightarrow 1 < 2 < 3,16227$

$$\sqrt{10^0 \cdot 10^{0,5}} \cong \sqrt{1 \cdot 3,16227}$$

$$10^{\frac{0,5}{2}} \cong \sqrt{3,16227}$$

$$10^{0,25} \cong 1,77828$$

Assim, o próximo intervalo que contém o 2 é $10^{0,25} < 2 < 10^{0,5} \Longrightarrow 1,77828 < 2 < 3,16227$

$$\sqrt{10^{0,25} \cdot 10^{0,5}} \cong \sqrt{1,77828 \cdot 3,16227}$$

$$10^{\frac{0,75}{2}} \cong \sqrt{5,62340}$$

$$10^{0,375} \cong 2,37137$$

Da mesma forma, o próximo intervalo onde o 2 se encontra é $10^{0,25} < 2 < 10^{0,375} \Longrightarrow 1,77828 < 2 < 2,37137$

$$\sqrt{10^{0,25} \cdot 10^{0,375}} \cong \sqrt{1,77828 \cdot 2,37137}$$

$$10^{\frac{0,625}{2}} \cong \sqrt{4,21696}$$

$$10^{0,3125} \cong 2,05352$$

Repetindo este processo várias vezes, o aluno encontrará que $10^{0,301} \cong 2$.

O aluno deverá fazer o procedimento para todos os valores da tabela.

Ao verificar a questão 3, o aluno perceberá que a tabela dada corresponde a tabela que ele construiu. A partir desses itens da questão, o aluno começa a perceber as relações entre os valores dos logaritmos, o que o ajudará a compreender futuramente as propriedades logarítmicas.

5.1.2.2
Questionamentos possíveis provocados pela atividade 2

Na construção da tabela de logaritmos feita pelo aluno, ele pode questionar por qual razão foi feita a média geométrica entre os extremos do intervalo, e não a média aritmética, já que a média aritmética lhe dá o ponto central do intervalo. A resposta é simples, a média geométrica envolve o produto dos números, e quando obtemos produtos de mesma base, a soma de expoentes se torna o método mais simples. Para elucidar isto, veremos a seguinte comparação: o produto de mesma base possui uma resolução simples $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$, já na forma $a^x + a^y$ não temos muito a aprimorar em relação a isso. Veja este exemplo:

$$10^2 \cdot 10^3 = 10^5$$

$$10^2 + 10^3 = 10^2(1 + 10) = 11 \cdot 10^2.$$

Portanto, neste caso, vemos que a importância de trabalhar com a média geométrica nos dá a possibilidade de somar os expoentes e obtermos cálculos mais simples que na média aritmética.

Para que o professor interessado nos exercícios tenha a possibilidade de imprimir as atividades para aplicação em sala de aula, a Atividade 2 estará disponível na próxima página.

Atividade 2

Vimos na atividade 1 que a tabela era a representação de números na base dois, ou seja, 2^x. Porém nem todos os números estavam disponíveis naquela tabela, visto que ali só estavam números que eram potência de 2.

Briggs quando construiu sua tabela, utilizou números na base 10. E se questionou sobre o seguinte fato:

Será que 10 elevado a algum número real poderia me dar como resposta um número de base diferente de 10? Ou seja, existe, por exemplo, algum x tal que $10^x = 2$?

Que tal utilizarmos nossas calculadoras ou planilhas eletrônicas para mostrar isso?

1 – Encontre o valor de x (aproximando 3 casas decimais) que satisfaça as seguintes igualdades.

a) $10^x = 2$

b) $10^x = 3$

c) $10^x = 4$

d) $10^x = 5$

e) $10^x = 6$

2 – Complete a tabela de logaritmos decimais seguindo os passos que Briggs utilizou. Para auxiliar seus cálculos, utilize apenas uma calculadora simples que tenha a função de raiz quadrada.

Base	Expoente	Resultado	Base	Expoente	Resultado
10		1	**10**		6
10		2	**10**		7
10		3	**10**		8
10		4	**10**		9
10		5	**10**		10

Tabela de Atividades ii

3 – Napier dedicou grande parte de sua vida no desenvolvimento de suas tábuas logarítmicas. Através de cálculos ele encontrou valores com precisão de 14 casas

decimais. Na tabela abaixo, temos uma tabela na base 10, em que são encontrados os valores de x que satisfazem uma igualdade da forma $10^x = b$.

Base	Expoente	Resultado	Base	Expoente	Resultado
10	**0**	1	10	**1,414973**	26
10	**0,30103**	2	10	**1,431364**	27
10	**0,477121**	3	10	**1,447158**	28
10	**0,60206**	4	10	**1,462398**	29
10	**0,69897**	5	10	**1,477121**	30
10	**0,778151**	6	10	**1,491362**	31
10	**0,845098**	7	10	**1,50515**	32
10	**0,90309**	8	10	**1,518514**	33
10	**0,954243**	9	10	**1,531479**	34
10	**1**	10	10	**1,544068**	35
10	**1,041393**	11	10	**1,556303**	36
10	**1,079181**	12	10	**1,568202**	37
10	**1,113943**	13	10	**1,579784**	38
10	**1,146128**	14	10	**1,591065**	39
10	**1,176091**	15	10	**1,60206**	40
10	**1,20412**	16	10	**1,612784**	41
10	**1,230449**	17	10	**1,623249**	42
10	**1,255273**	18	10	**1,633468**	43
10	**1,278754**	19	10	**1,643453**	44
10	**1,30103**	20	10	**1,653213**	45
10	**1,322219**	21	10	**1,662758**	46
10	**1,342423**	22	10	**1,672098**	47
10	**1,361728**	23	10	**1,681241**	48
10	**1,380211**	24	10	**1,690196**	49
10	**1,39794**	25	10	**1,69897**	50

Tabela de Atividades iii

Com um processo parecido como foi feito na questão 1, conseguimos fazer a tabela acima. Na matemática, o logaritmo de um número é o expoente a que outro valor fixo, a base, deve ser elevado para produzir este número. Por exemplo, o logaritmo de 1000 na base 10 é 3 porque 10 ao cubo é 1000 ($1000 = 10 \cdot 10 \cdot$

$10 = 10^3$). De maneira geral, para quaisquer dois números reais b e x, onde b é positivo e $b \neq 1$.

a) Com o auxílio de uma calculadora científica, confira se os valores da tabela acima estão bem aproximados do resultado.

b) Que relação obtemos quando comparamos o $log2$ com $log4$.

c) Qual relação obtemos quando comparamos o $log2$ com $log8$.

d) Que relação obtemos quando comparamos o $log3$ com $log27$.

e) Que relação obtemos ao compararmos o $log2$ e $log3$ com o $log6$.

f) Que relação obtemos ao compararmos o $log3$ e $log5$ com o $log15$? E ao compararmos o $log30$ e $log2$ com o $log15$?

5.1.2.3
Respostas esperadas nos exercícios da atividade 2

Questão 1

a) $10^x = 2 \Longrightarrow x \cong 0{,}301$

b) $10^x = 3 \Longrightarrow x \cong 0{,}477$

c) $10^x = 4 \Longrightarrow x \cong 0{,}602$

d) $10^x = 5 \Longrightarrow x \cong 0{,}698$

e) $10^x = 6 \Longrightarrow x \cong 0{,}778$

Questão 2

A tabela deverá conter os seguintes valores

Base	Expoente	Resultado	Base	Expoente	Resultado
10	**0**	1	**10**	**0,778**	6
10	**0,301**	2	**10**	**0,845**	7
10	**0,477**	3	**10**	**0,903**	8
10	**0,602**	4	**10**	**0,954**	9
10	**0,698**	5	**10**	**1**	10

Tabela de Atividades iv

Questão 3

a) Ao verificarmos os valores da tabela utilizando uma calculadora ou planilha eletrônica, encontraremos como resultado um valor muito próximo do desejado.

b) Podemos perceber que log4 é o dobro do log2

c) Podemos perceber que log8 é o triplo do log2

d) Podemos perceber que log27 é o triplo do log3

e) Podemos perceber que log6 é a soma entre o log2 e log3

f) Percebemos que a soma entre log3 e log5 é igual a log15 e que log15 é a diferença entre log30 e log2

5.1.3
Desenvolvendo a terceira atividade

A 3ª etapa do desenvolvimento de logaritmos tem como propósito, através da Atividade 3, desenvolver o conhecimento crítico dos alunos a respeito do assunto de logaritmos antes de apresentá-los algumas propriedades logarítmicas. Certamente se o professor apenas apresentar algumas propriedades logarítmicas aos alunos de forma direta, na melhor das hipóteses, teremos um aluno que vai simplesmente decorar as propriedades sem nenhum senso crítico, perdendo desta forma a lógica que se encontra por trás do assunto.

Para auxiliar no desenvolvimento da Atividade 3, uma forma interessante de mostrar a construção das tabelas logarítmicas é a utilização de planilhas eletrônicas como o Excel ou LibreOffice Calc. A partir delas, o aluno consegue montar suas tábuas de forma rápida e sem perder a lógica de sua construção.

O objetivo dos exercícios 1, 2 e 3 é fazer com que o aluno perceba uma relação existente entre o logaritmo de números primos e números compostos. Desta forma, ele pode perceber, por exemplo, que $\log 4$ é o dobro do $\log 2$. Da mesma forma, que $\log 6$ é a soma entre $\log 2$ e $\log 3$. Assim, ele tem a possibilidade de posteriormente fixar as propriedades logarítmicas com mais facilidade e raciocínio lógico.

O objetivo no exercício 4, é confirmar que a ideia que o aluno desenvolveu (ou percebeu até o momento) é uma propriedade logarítmica. Já no exercício 5 é fazer com que ele perceba que $\log a$ é o valor do expoente na base 10, ou seja, é o valor tal que $10^x = a$, onde x é o expoente na base 10 e a é o resultado.

O exercício 6, tem o propósito de confirmar as ideias utilizadas nos exercícios 1, 2 e 3 utilizando uma linguagem matemática. Além disso, ele pode utilizar as tabelas para verificar a veracidade das igualdades.

A inclusão de uma tabela envolvendo números decimais ao invés de inteiros, serve para mostrar que a tabela de logaritmos pode ser desenvolvida para infinitos resultados. Além disso, quando o aluno começar a exercitar com diferentes números o que foi aprendido até esta etapa, ele perceberá que a tabela que ele já tem, não lhe dá um resultado com tanta precisão. Desta forma ele sente a necessidade de uma tabela mais aproximada. Claro que com o desenvolvimento do assunto, ele vai perceber que em alguns caso isto não será necessário, visto que $\log 1{,}1 = \log \frac{11}{10} = \log 11 - \log 10$.

No exercício 7, temos o propósito de despertar nos alunos percepção de que todas as tábuas logarítmicas têm as mesmas propriedades independente de qual valor coloquemos como resposta. Já nos exercícios 8 e 9 temos exemplos de cálculos que não obtemos como resposta valores inteiros.

O objetivo do exercício 10 consiste em mostrar a necessidade de construirmos tabelas mais aproximadas, daí o motivo de ter sido apresentada anteriormente uma tabela com uma casa decimal ao invés de trabalharmos com números naturais apenas. Ainda que no decorrer de seu desenvolvimento, o aluno perceba que não necessitará de uma tábua com todos os valores, o exercício serve para consolidar em sua mente a ideia de que é necessário a utilização de uma ferramenta mais precisa, ou seja, onde não necessite da construção de tabelas para cada tipo de cálculo.

Sabendo que o processo de construção de uma tábua muito trabalhoso, o exercício 11, mostra através das propriedades logarítmicas que para encontrarmos resultados mais precisos, será necessário uma tábua logarítmica mas precisa, ou seja uma tábua que contenha casas decimais. Porém, é possível realizar os mesmos cálculos utilizando uma tábua de números naturais, o problema identificado neste caso é a precisão dos resultados encontrados.

Já nos exercícios 12, 13 e 14, é onde o aluno põe em prática a solução de cálculos, utilizando as propriedades logarítmicas e a tábua de números naturais, evitando desta forma a construção de uma nova tábua logarítmica.

5.1.3.1
Questionamentos possíveis provocados pela atividade 3

Ao realizar as 3 primeiras questões, o aluno pode sentir o desejo de realizar os cálculos de maneira direta, visto que é a forma usada com mais frequência. Mas como a questão pede para utilizar a tabela, a intenção é que ele proceda os cálculos utilizando as propriedades de potência observando a tabela de logaritmos que foi dada no exercício. Portanto, o professor deve mostrar a importância de fazer o processo de utilizar as tabelas ao invés de simplesmente multiplicar os números.

Nas questões 3 e 4, o aluno pode se confundir com um detalhe. Suponha o item a) da questão 3.

a) 3^2

Daí, ele pode resolver a questão da seguinte maneira:

Se $log3 \cong 0{,}477$, então $3^2 \cong (log3)^2 \cong 0{,}477^2 \cong 0{,}227529$

O que obviamente é um erro.

Portanto, para sanar esta dúvida o professor poderia resolver a questão da seguinte forma:

$$(3)^2 \cong (10^{0{,}477})^2 \cong 10^{0{,}477\cdot 2} \cong 10^{0{,}954}$$

Ao analisarmos a tabela, veremos que $10^{0{,}954} \cong 9$. Portanto é importante mostrar que o expoente multiplica o logaritmo, ou seja, $log3^2 = 2 \cdot log3$.

Atividade 3

Dada a Tabela de Atividades v, resolva as questões a seguir:

Resultado	Expoente na base 10	Resultado	Expoente na base 10	Resultado	Expoente na base 10
1	0	**21**	1,322219295	**91**	1,959041392
2	0,301029996	**22**	1,342422681	**104**	2,017033339
3	0,477121255	**23**	1,361727836	**105**	2,021189299
4	0,602059991	**24**	1,380211242	**120**	2,079181246
5	0,698970004	**25**	1,397940009	**156**	2,193124598
6	0,77815125	**26**	1,414973348	**162**	2,209515015
7	0,84509804	**27**	1,431363764	**182**	2,260071388
8	0,903089987	**28**	1,447158031	**187**	2,271841607
9	0,954242509	**29**	1,462397998	**195**	2,290034611
10	1	**30**	1,477121255	**210**	2,322219295
11	1,041392685	**31**	1,491361694	**221**	2,344392274
12	1,079181246	**32**	1,505149978	**247**	2,392696953
13	1,113943352	**33**	1,51851394	**255**	2,40654018
14	1,146128036	**34**	1,531478917	**270**	2,431363764
15	1,176091259	**35**	1,544068044	**272**	2,434568904
16	1,204119983	**36**	1,556302501	**306**	2,485721426
17	1,230448921	**37**	1,568201724	**323**	2,509202522
18	1,255272505	**38**	1,579783597	**392**	2,593286067
19	1,278753601	**39**	1,591064607	**399**	2,600972896
20	1,301029996	**40**	1,602059991	**399**	2,600972896

Tabela de Atividades v

1 - Resolva os seguintes produtos utilizando a Tabela de Atividades v.

a) $4 \cdot 7$

b) $15 \cdot 14$

c) $12 \cdot 13$

d) $13 \cdot 14$

2 - Resolva as seguintes divisões utilizando a Tabela de Atividades v.

a) $30 \div 15$

b) $28 \div 4$

c) $26 \div 13$

d) $24 \div 6$

3 - Resolva as seguintes potências utilizando a Tabela de Atividades v.

a) 3^2

b) 2^4

c) 3^3

d) 2^3

4 - O que você pôde perceber ao resolver as potências acima?

5 - De acordo com a Tabela de Atividades v, dê os valores de:

a) $\log_{10} 5$

b) $\log_{10} 7$

c) $\log_{10} 12$

d) $\log_{10} 17$

6 - Com base na Tabela de Atividades v, verifique se as igualdades são verdadeiras

a) $\log_{10} 6 = \log_{10}(2 \cdot 3) = \log_{10} 2 + \log_{10} 3$

b) $\log_{10} 10 = \log_{10}(2 \cdot 5) = \log_{10} 2 + \log_{10} 5$

c) $\log_b(p \cdot q) = \log_b p + \log_b q$

d) $\log_{10} 3 = \log_{10}\left(\frac{15}{5}\right) = \log_{10} 15 - \log_{10} 5$

e) $\log_{10} 6 = \log_{10}\left(\frac{30}{5}\right) = \log_{10} 30 - \log_{10} 5$

f) $\log_b\left(\frac{p}{q}\right) = \log_b p - \log_b q$

g) $\log_{10} 16 = \log_{10} 2^4 = 4 \log_{10} 2$

h) $\log_{10} 9 = \log_{10} 3^2 = 2 \log_{10} 3$

i) $\log_b j^k = k \log_b j$

Certamente, quando você resolveu as divisões reparou que o quociente era um número inteiro, porém, se fizéssemos uma divisão onde seu quociente fosse um número decimal, verificaríamos que a tabela anterior não nos auxiliaria na divisão, por isso, construiremos da mesma forma que a anterior a Tabela de Atividades vi.

Resultado	expoente na base 10	Resultado	expoente na base 10	Resultado	expoente na base 10
1,1	0,041392685	**2,6**	0,414973348	**4,1**	0,612783857
1,2	0,079181246	**2,7**	0,431363764	**4,2**	0,62324929
1,3	0,113943352	**2,8**	0,447158031	**4,3**	0,633468456
1,4	0,146128036	**2,9**	0,462397998	**4,4**	0,643452676
1,5	0,176091259	**3**	0,477121255	**4,5**	0,653212514
1,6	0,204119983	**3,1**	0,491361694	**4,6**	0,662757832
1,7	0,230448921	**3,2**	0,505149978	**4,7**	0,672097858
1,8	0,255272505	**3,3**	0,51851394	**4,8**	0,681241237
1,9	0,278753601	**3,4**	0,531478917	**4,9**	0,69019608
2	0,301029996	**3,5**	0,544068044	**5**	0,698970004
2,1	0,322219295	**3,6**	0,556302501	**5,1**	0,707570176
2,2	0,342422681	**3,7**	0,568201724	**5,2**	0,716003344
2,3	0,361727836	**3,8**	0,579783597	**5,3**	0,72427587
2,4	0,380211242	**3,9**	0,591064607	**5,4**	0,73239376
2,5	0,397940009	**4**	0,602059991	**5,5**	0,740362689

Tabela de Atividades vi

Sobre a Tabela de Atividades vi, responda as perguntas a seguir:

7 - A tabela envolvendo números da forma decimal tem as propriedades da tabela de números naturais? Justifique

8 - Resolva os produtos a seguir com uma casa decimal.

a) $2 \cdot 1{,}7$

b) $1{,}1 \cdot 3$

c) $1{,}4 \cdot 3{,}2$

d) $2{,}2 \cdot 1{,}5$

9 - Resolva as divisões a seguir

a) $5 \div 2$

b) $5{,}4 \div 2{,}7$

c) $3{,}9 \div 1{,}3$

d) $4{,}7 \div 3{,}5$

10 - Quais resultados da multiplicação e divisão com uma casa decimal foram exatos ou aproximados? Por que?

11 - Sabendo que:

- $\log_b(p \cdot q) = \log_b p + \log_b q$
- $\log_b\left(\frac{p}{q}\right) = \log_b p - \log_b q$
- $\log_b j^k = k \log_b j$

Há necessidade de construir uma tabela de números decimais? Poderíamos utilizar uma tabela que contenha apenas números naturais sem prejuízo na sua utilização?

Utilize as tabelas resolvendo os seguintes exercícios:

12 - Resolva os produtos a seguir com uma casa decimal.

a) $2 \cdot 1{,}7$

b) $1{,}1 \cdot 3$

c) $1{,}4 \cdot 3{,}2$

d) $2{,}2 \cdot 1{,}5$

13 - Resolva as divisões a seguir

a) $5 \div 2$

b) $5{,}4 \div 2{,}7$

c) $3{,}9 \div 1{,}3$

d) $4{,}7 \div 3{,}5$

14 - Resolva as seguintes potências utilizando a tabela

a) $3{,}2^2$

b) $2{,}5^4$

c) $3{,}1^3$

d) $2{,}1^3$

5.1.3.2
Respostas esperadas nos exercícios da atividade 3

Questão 1

a) $4 \cdot 7 \cong 10^{0,602} \cdot 10^{0,845} \cong 10^{1,447}$ pela tabela, 1,477 corresponde a 28.

b) $15 \cdot 14 \cong 10^{1,176} \cdot 10^{1,146} \cong 10^{2,322}$ pela tabela, 2,322 corresponde a 210 .

c) $12 \cdot 13 \cong 10^{1,0791} \cdot 10^{1,1139} \cong 10^{2,193}$ pela tabela, 2,193 corresponde a 156.

d) $13 \cdot 14 \cong 10^{1,1139} \cdot 10^{1,1461} \cong 10^{2,26}$ pela tabela, 2,26 corresponde a 182.

Questão 2

a) $30 \div 15 \cong 10^{1,477} \div 10^{1,176} \cong 10^{0,301}$ pela tabela, 0,301 corresponde a 2.

b) $28 \div 4 \cong 10^{1,477} \div 10^{0,602} \cong 10^{0,875}$ pela tabela, 0,875 corresponde a 7.

c) $26 \div 13 \cong 10^{1,414} \div 10^{1,113} \cong 10^{0,301}$ pela tabela, 0,301 corresponde a 2.

d) $24 \div 6 \cong 10^{1,380} \div 10^{0,778} \cong 10^{0,602}$ pela tabela, 0,602 corresponde a 4.

Questão 3

a) $3^2 = 3 \cdot 3 \cong 10^{0,477} \cdot 10^{0,477} \cong 10^{0,954}$ pela tabela, 0,954 corresponde a 9.

b) $2^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cong 10^{0,301} \cdot 10^{0,301} \cdot 10^{0,301} \cdot 10^{0,301} \cong 10^{4 \cdot 0,301} \cong 10^{1,204}$ pela tabela, 1,204 corresponde a 16.

c) $3^3 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cong 10^{0,477} \cdot 10^{0,477} \cdot 10^{0,477} \cong \cdot\, 10^{3 \cdot 0,477} \cong 10^{1,431}$ pela tabela, 1,431 corresponde a 27

b) $2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cong 10^{0,301} \cdot 10^{0,301} \cdot 10^{0,301} \cong 10^{3 \cdot 0,301} \cong 10^{0,903}$ pela tabela, 0,903 corresponde a 16.

Questão 4

Percebemos nesta questão que a potência multiplica o expoente da base 10. Assim podemos afirmar que $\log_b a^m = m \cdot \log_b a$

Questão 5

a) $\log_{10} 5 \cong 0,699$

b) $\log_{10} 7 \cong 0,845$

c) $\log_{10} 12 \cong 1,079$

d) $\log_{10} 17 \cong 1,230$

Questão 6

a) $\log_{10} 6 \cong 0{,}778$ e $\log_{10} 2 + \log_{10} 3 \cong 0{,}301 + 0{,}477 = 0{,}778$. Portanto é verdadeira.

b) $\log_{10} 10 = 1$ e $\log_{10} 2 + \log_{10} 5 \cong 0{,}301 + 0{,}699 = 1$. Portanto é verdadeira.

c) $\log_b(p \cdot q) = \log_b p + \log_b q$. Portanto esta propriedade é verdadeira.

d) $\log_{10} 3 \cong 0{,}477$ e $\log_{10} 15 - \log_{10} 5 \cong 1{,}176 - 0{,}699 \cong 0{,}477$. Portanto é verdadeira.

e) $\log_{10} 6 \cong 0{,}778$ e $\log_{10} 30 - \log_{10} 5 \cong 1{,}477 - 0{,}699 \cong 0{,}778$. Portanto é verdadeira.

f) $\log_b \left(\frac{p}{q}\right) = \log_b p - \log_b q$. Portanto esta propriedade é verdadeira.

g) $\log_{10} 16 \cong 1{,}204$ e $\log_{10} 2^4 = 4 \cdot \log_{10} 2 \cong 4 \cdot 0{,}301 \cong 1{,}204$. Portanto é verdadeira

h) $\log_{10} 9 \cong 0{,}954$ e $\log_{10} 3^2 = 2 \cdot \log_{10} 3 \cong 2 \cdot 0{,}477 \cong 0{,}954$. Portanto é verdadeira

f) $\log_b j^k = \mathrm{k} \cdot \log_b j$. Portanto esta propriedade é verdadeira.

Questão 7

Sim, pois possuem as propriedades $\log_b(p \cdot q) = \log_b p + \log_b q$, $\log_b \left(\frac{p}{q}\right) = \log_b p - \log_b q$ e $\log_b j^k = \mathrm{k} \cdot \log_b j$. Podemos afirmar isso testando os números da tabela nnestas propriedades.

Questão 8

a) $2 \cdot 1{,}7 \cong 10^{0{,}301} \cdot 10^{0{,}230} \cong 10^{0{,}531}$ pela tabela, 0,531 corresponde a 3,4.

b) $1{,}1 \cdot 3 \cong 10^{0{,}041} \cdot 10^{0{,}477} \cong 10^{0{,}518}$ pela tabela, 0,518 corresponde a 3,3 .

c) $1{,}4 \cdot 3{,}2 \cong 10^{0{,}146} \cdot 10^{0{,}505} \cong 10^{0{,}651}$ pela tabela, 0,651 corresponde a um valor entre 4,4 e 4,5

d) $2{,}2 \cdot 1{,}5 \cong 10^{0{,}342} \cdot 10^{0{,}176} \cong 10^{0{,}518}$ pela tabela, 0,518 corresponde a 3,3.

Questão 9

a) $5 \div 2 \cong 10^{0{,}699} \div 10^{0{,}301} \cong 10^{0{,}398}$ pela tabela, 0,398 corresponde a 2,5.

b) $5{,}4 \div 2{,}7 \cong 10^{0{,}732} \div 10^{0{,}431} \cong 10^{0{,}301}$ pela tabela, 0,301 corresponde a 2.

c) $3{,}9 \div 1{,}3 \cong 10^{0{,}591} \div 10^{0{,}114} \cong 10^{0{,}474}$ pela tabela, 0,477 corresponde a 3.

d) $4{,}7 \div 3{,}5 \cong 10^{0{,}672} \div 10^{0{,}544} \cong 10^{0{,}128}$ pela tabela, 0,128 corresponde a um valor entre 1,3 e 1,4.

Questão 10

Questões 8 c) e 9 d). Isso ocorre devido a aproximação das casas decimais utilizadas na tabela. Quanto mais casas decimais usarmos para os cálculos, mais precisa fica a resposta.

Questão 11

Não há necessidade, a não ser se quiséssemos encontrar valores com maiores precisões. Pois substituindo, por exemplo, $\log 1{,}1$ por $\log\frac{11}{10}$ bastaria aplicarmos a propriedade $\log_b\left(\frac{p}{q}\right) = \log_b p - \log_b q$ que encontraríamos o valor correto. Desta forma, utilizando o exemplo dado, temos:

$$\log 1{,}1 = \log\frac{11}{10} = \log 11 - \log 10$$

Portanto, bastaria uma tabela de números naturais para fazermos outra tabela de números decimais.

Porém para encontrarmos o valor dos produtos com maior precisão, precisaremos ainda de uma tabela com números mais precisos.

Questão 12

a) $\log(\,2\cdot 1{,}7) = \log 2 + \log 1{,}7 = \log 2 + \log\frac{17}{10} = \ \log 2 + \log 17 - \log 10 \cong 0{,}301 + 1{,}230 - 1 \cong 0{,}531.$

Para verificar o valor do produto com mais precisão, precisaremos nos orientar por uma tabela mais precisa. Numa tabela de números decimais encontraríamos o valor de 3,4, porém se nos orientarmos por uma tabela de números naturais, saberíamos que o valor está entre 3 e 4.

b) $\log(1{,}1\cdot 3) = \log 1{,}1 + \log 3 = \log\frac{11}{10} + \log 3 = log11 - log10 + log3 \cong 1{,}041 - 1 + 0{,}477 \cong 0{,}518.$

Para verificar o valor do produto com mais precisão, precisaremos nos orientar por uma tabela mais precisa. Numa tabela de números decimais encontraríamos o valor de 3,3, porém se nos orientarmos por uma tabela de números naturais, saberíamos que o valor está entre 3 e 4.

c) $\log(1{,}4\cdot 3{,}2) = \log 1{,}4 + \log 3{,}2 = \log\frac{14}{10} + \log\frac{32}{10} = log14 - log10 + log32 - \log 10 \cong 1{,}146 - 1 + 1{,}505 - 1 \cong 0{,}651.$

Para verificar o valor do produto com mais precisão, precisaremos nos orientar por uma tabela mais precisa. Numa tabela de números decimais encontraríamos que o valor se encontra entre 4,4 e 4,5, porém se nos orientarmos por uma tabela de números naturais, saberíamos que o valor está entre 4 e 5.

d) $\log(2{,}2 \cdot 1{,}5) = \log 2{,}2 + \log 1{,}5 = \log \frac{22}{10} + \log \frac{15}{10} = log22 - log10 + log15 - \log 10 \cong 1{,}342 - 1 + 1{,}176 - 1 \cong 0{,}518$.

Para verificar o valor do produto com mais precisão, precisaremos nos orientar por uma tabela mais precisa. Numa tabela de números decimais encontraríamos o valor de 3,3, porém se nos orientarmos por uma tabela de números naturais, saberíamos que o valor está entre 3 e 4.

Questão 13

a) $\log\left(\frac{5}{2}\right) = \log 5 - \log 2 \cong 0{,}699 - 0{,}301 \cong 0{,}398$.

Para verificar o valor do quociente com mais precisão, precisaremos nos orientar por uma tabela mais precisa. Numa tabela de números decimais encontraríamos o valor de 2,5, porém se nos orientarmos por uma tabela de números naturais, saberíamos que o valor está entre 2 e 3.

b) $\log\left(\frac{5{,}4}{2{,}7}\right) = \log 5{,}4 - \log 2{,}7 = \log \frac{54}{10} - \log \frac{27}{10} = \log 54 - \log 10 - (\log 27 - \log 10) \cong 1{,}732 - 1 - 1{,}431 + 1 \cong 0{,}301$.

Neste caso, uma simples tabela de números naturais resolveria, visto que ao nos orientarmos por ela, veríamos que $0{,}301$ faz referência a 2, que é um número natural.

c) $\log\left(\frac{3{,}9}{1{,}3}\right) = \log 3{,}9 - \log 1{,}3 = \log \frac{39}{10} - \log \frac{13}{10} = \log 39 - \log 10 - (\log 13 - \log 10) \cong 1{,}591 - 1 - 1{,}114 + 1 \cong 0477$.

Neste caso, uma simples tabela de números naturais resolveria, visto que ao nos orientarmos por ela, veríamos que $0{,}477$ faz referência a 3, que é um número natural.

d) $\log\left(\frac{4{,}7}{3{,}5}\right) = \log 4{,}7 - \log 3{,}5 = \log \frac{47}{10} - \log \frac{35}{10} = \log 47 - \log 10 - (\log 35 - \log 10) \cong 1{,}672 - 1 - 1{,}544 + 1 \cong 0{,}128$.

Para verificar o valor do quociente com mais precisão, precisaremos nos orientar por uma tabela mais precisa. Numa tabela de números decimais encontraríamos o valor entre 1,3 e 1,5, porém se nos orientarmos por uma tabela de números naturais, saberíamos que o valor está entre 1 e 2.

Questão 14

a) $\log(3{,}2)^2 = 2 \cdot \log\left(\frac{32}{10}\right) = 2 \cdot (\log 32 - \log 10) \cong 2 \cdot (1{,}505 - 1) \cong 1{,}010$.

Para verificar o valor do quociente com mais precisão, precisaremos nos orientar por uma tabela mais precisa. Numa tabela de números decimais encontraríamos o valor entre 10,2 e 10,3, porém se nos orientarmos por uma tabela de números naturais, saberíamos que o valor está entre 10 e 11.

b) $\log(2{,}5)^4 = 4 \cdot \log\left(\frac{25}{10}\right) = 4 \cdot \log\left(\frac{5}{2}\right) = 4 \cdot (\log 5 - \log 2) \cong 4 \cdot (0{,}699 - 0{,}301) \cong 1{,}592$.

Para verificar o valor do quociente com mais precisão, precisaremos nos orientar por uma tabela mais precisa. Numa tabela de números decimais encontraríamos o valor entre 39,0 e 39,1, porém se nos orientarmos por uma tabela de números naturais, saberíamos que o valor está entre 39 e 40.

c) $\log(3{,}1)^5 = 5 \cdot \log\left(\frac{31}{10}\right) = 5 \cdot (\log 31 - \log 10) \cong 5 \cdot (1{,}491 - 1) \cong 2{,}456$.

Para verificar o valor do quociente com mais precisão, precisaremos nos orientar por uma tabela mais precisa. Numa tabela de números decimais encontraríamos o valor entre 286,2 e 286,3, porém se nos orientarmos por uma tabela de números naturais, saberíamos que o valor está entre 286 e 287.

d) $\log(2{,}1)^3 = 3 \cdot \log\left(\frac{21}{10}\right) = 3 \cdot (\log 21 - \log 10) \cong 3 \cdot (1{,}322 - 1) \cong 0{,}966$.

Para verificar o valor do quociente com mais precisão, precisaremos nos orientar por uma tabela mais precisa. Numa tabela de números decimais encontraríamos o valor entre 9,2 e 9,3, porém se nos orientarmos por uma tabela de números naturais, saberíamos que o valor está entre 9 e 10.

5.1.4
Desenvolvendo a quarta atividade

O intuito da quarta atividade é mostrar que podemos ter a base de um logaritmo com qualquer número positivo, exceto 1. Mostrar o porquê de não escrevermos $\log_1 a$ é interessante. Vejamos

$$\log_1 a = x$$

$$1^x = a$$

Mas 1 elevado a qualquer número é 1, logo

$$a = 1$$

Portanto existe $\log_1 1$, porém ele admite infinitos valores. Portanto $\log_1 a = x$ é uma indeterminação.

Além disso, é necessário colocar o aluno no contexto do número e, já que é uma base importantíssima no estudo de logaritmos. Por isso, antes de mostrar a constante e, em que a maioria dos alunos possa nunca tê-lo visto, é interessante mostrar o logaritmo na base π, visto que essa constante foi apresentada no início do ensino fundamental. Portanto, se o aluno perceber que ele pode usar a constante π como base de um logaritmo, ele pode usar outra constante positiva qualquer, e nesse contexto podemos apresentar o número e.

Outra abordagem interessante que temos nesta atividade é o conceito de mudança de base. Já nos primeiros exercícios, a proposta é fazer com que os alunos verifiquem que existe uma razão entre os mesmos logaritmos em bases diferentes, ou seja, vamos mostrar que $\frac{\log_b c}{\log_a c} = \log_b a$.

Para que o professor interessado nos exercícios tenha a possibilidade de imprimir as atividades para aplicação em sala de aula, a Atividade 4 estará disponível na próxima página.

Atividade 4

Dadas as seguintes tabelas, resolva as questões a seguir:

Base 10					
Resultado	**expoente**	**Resultado**	**expoente**	**Resultado**	**expoente**
1	0	**16**	1,204119983	**31**	1,491361694
2	0,301029996	**17**	1,230448921	**32**	1,505149978
3	0,477121255	**18**	1,255272505	**33**	1,51851394
4	0,602059991	**19**	1,278753601	**34**	1,531478917
5	0,698970004	**20**	1,301029996	**35**	1,544068044
6	0,77815125	**21**	1,322219295	**36**	1,556302501
7	0,84509804	**22**	1,342422681	**37**	1,568201724
8	0,903089987	**23**	1,361727836	**38**	1,579783597
9	0,954242509	**24**	1,380211242	**39**	1,591064607
10	1	**25**	1,397940009	**40**	1,602059991
11	1,041392685	**26**	1,414973348	**41**	1,612783857
12	1,079181246	**27**	1,431363764	**42**	1,62324929
13	1,113943352	**28**	1,447158031	**43**	1,633468456
14	1,146128036	**29**	1,462397998	**44**	1,643452676
15	1,176091259	**30**	1,477121255	**45**	1,653212514

Tabela de Atividades vii

Base 2					
Resultado	**expoente**	**Resultado**	**expoente**	**Resultado**	**expoente**
1	0	**16**	4	**31**	4,95419631
2	1	**17**	4,087462841	**32**	5
3	1,584962501	**18**	4,169925001	**33**	5,044394119
4	2	**19**	4,247927513	**34**	5,087462841
5	2,321928095	**20**	4,321928095	**35**	5,129283017
6	2,584962501	**21**	4,392317423	**36**	5,169925001
7	2,807354922	**22**	4,459431619	**37**	5,209453366
8	3	**23**	4,523561956	**38**	5,247927513
9	3,169925001	**24**	4,584962501	**39**	5,285402219
10	3,321928095	**25**	4,64385619	**40**	5,321928095
11	3,459431619	**26**	4,700439718	**41**	5,357552005
12	3,584962501	**27**	4,754887502	**42**	5,392317423
13	3,700439718	**28**	4,807354922	**43**	5,426264755
14	3,807354922	**29**	4,857980995	**44**	5,459431619
15	3,906890596	**30**	4,906890596	**45**	5,491853096

Tabela de Atividades viii

Base π					
Resultado	**expoente**	**Resultado**	**expoente**	**Resultado**	**expoente**
1	0	**16**	2,422046246	**31**	2,999823143
2	0,605511561	**17**	2,475006007	**32**	3,027557807
3	0,959713119	**18**	2,524937799	**33**	3,05443896
4	1,211023123	**19**	2,572169221	**34**	3,080517569
5	1,405954306	**20**	2,616977429	**35**	3,105840168
6	1,56522468	**21**	2,659598981	**36**	3,13044936
7	1,699885862	**22**	2,700237402	**37**	3,154384241
8	1,816534684	**23**	2,739069063	**38**	3,177680783
9	1,919426237	**24**	2,776247803	**39**	3,20037215
10	2,011465868	**25**	2,811908612	**40**	3,22248899
11	2,094725841	**26**	2,846170593	**41**	3,24405968
12	2,170736241	**27**	2,879139356	**42**	3,265110542
13	2,240659032	**28**	2,910908985	**43**	3,285666044
14	2,305397424	**29**	2,941563658	**44**	3,305748964
15	2,365667425	**30**	2,971178986	**45**	3,325380543

Tabela de Atividades ix

Base e					
Resultado	**expoente**	**Resultado**	**expoente**	**Resultado**	**expoente**
1	0	**16**	2,772588722	**31**	3,433987204
2	0,693147181	**17**	2,833213344	**32**	3,465735903
3	1,098612289	**18**	2,890371758	**33**	3,496507561
4	1,386294361	**19**	2,944438979	**34**	3,526360525
5	1,609437912	**20**	2,995732274	**35**	3,555348061
6	1,791759469	**21**	3,044522438	**36**	3,583518938
7	1,945910149	**22**	3,091042453	**37**	3,610917913
8	2,079441542	**23**	3,135494216	**38**	3,63758616
9	2,197224577	**24**	3,17805383	**39**	3,663561646
10	2,302585093	**25**	3,218875825	**40**	3,688879454
11	2,397895273	**26**	3,258096538	**41**	3,713572067
12	2,48490665	**27**	3,295836866	**42**	3,737669618
13	2,564949357	**28**	3,33220451	**43**	3,761200116
14	2,63905733	**29**	3,36729583	**44**	3,784189634
15	2,708050201	**30**	3,401197382	**45**	3,80666249

Tabela de Atividades x

1 - Todas as tabelas estão dispostas da mesma maneira, se dividirmos o expoente do resultado 2 da Tabela de Atividades vii com o expoente do resultado 2 da Tabela de Atividades viii, obteremos que resultado?

2 - Se fizermos a mesma analogia com outros resultados, qual valor encontraremos?

3 - O valor encontrado pertence a alguma das tabelas? Caso afirmativo, este valor se refere a qual logaritmo?

4 - A mesma coisa ocorrerá quando fizermos este procedimento entre outras tabelas?

5 - Quando dividimos um expoente da Tabela de Atividades xiiii com um expoente na mesma posição da Tabela de Atividades xiii, encontraremos que logaritmo? Dê o seu valor.

6 - Pelos exercícios anteriores, podemos observar que:

$$\log_b a = \frac{\log_b c}{\log_a c}$$

e fazendo uma arrumação algébrica temos:

$\log_b a = \frac{\log_b c}{\log_a c} \Longrightarrow \boldsymbol{\log_a c = \frac{\log_b c}{\log_b a}}$**.**

Portanto, a partir desta propriedade, podemos mudar a base de qualquer logaritmo. Desta forma, faça a mudança de base dos seguintes logaritmos:

a) $\log_3 5$ para a base 10

b) $\log_4 3$ para a base 2

c) $\log_{10} 8$ para a base e

d) $\log_{e} 8$ para a base π

e) $\log_{\pi} 12$ para a base e

f) $\log_{12} 12$ para a base 6

5.1.4.1
Respostas esperadas nos exercícios da atividade 4

Questão 1

$$\frac{0,301}{1} = 0,301.$$

Obteremos 0,301

Questão 2

Para resultado 3

$$\frac{0,477}{1,584} \cong 0,301.$$

Para resultado 7

$$\frac{0,845}{2,807} \cong 0,301.$$

Para resultado 44

$$\frac{1,643}{5,459} \cong 0,301.$$

Fazendo a mesma analogia para outros resultados, encontraremos sempre um valor próximo a 0,301.

Questão 3

Sim. O valor encontrado é o valor de $\log 2$.

Questão 4

Exatamente. Para elucidar esta relação faremos o mesmo procedimento usado na questão 2 utilizando os valores da Tabela de Atividades viii com a Tabela de Atividades ix.

$$\frac{Tabela\ viii}{Tabela\ ix}.$$

Para resultado 3.

$$\frac{1,584}{0,959} \cong 1,651.$$

Para resultado 7.

$$\frac{2,807}{1,700} \cong 1,651.$$

Para resultado 44.

$$\frac{5,459}{3,305} \cong 1,651.$$

Fazendo a mesma analogia para outros resultados, encontraremos sempre um valor próximo a 1,651

$$\frac{Tabela\ ix}{Tabela\ x}.$$

Para resultado 3.

$$\frac{0,959}{1,098} \cong 0,873.$$

Para resultado 7.

$$\frac{1,700}{1,946} \cong 0,873.$$

Para resultado 44.

$$\frac{3,305}{3,784} \cong 0,873.$$

Fazendo a mesma analogia para outros resultados, encontraremos sempre um valor próximo a 0,873.

Questão 5

O valor encontrado quando efetuamos $\frac{Tabela\ ix}{Tabela\ x}$ é aproximadamente $0,873$. Porém, ao utilizarmos uma calculadora ou uma planilha eletrônica encontraremos que

$$\frac{\log_\pi a}{\log_e a} = \log_\pi e \cong 0,873.$$

Desta forma, $\log_\pi e \cong 0,873$.

Questão 6

a) $\log_3 5 = \frac{\log_{10} 5}{\log_{10} 3}$.

b) $\log_4 3 = \frac{\log_2 3}{\log_2 4}$.

c) $\log_{10} 8 = \frac{\log_e 8}{\log_e 10}$.

d) $\log_e 8 = \frac{\log_\pi 8}{\log_\pi e}$.

e) $\log_\pi 12 = \frac{\log_e 12}{\log_e \pi}$.

f) $\log_{12} 12 = \frac{\log_6 12}{\log_6 12}$.

5.1.5 Desenvolvendo a quinta atividade

Na etapa anterior, propomos a ideia onde aluno pôde começar a trabalhar com outras bases além da decimal. Mostramos que é possível trabalhar com logaritmos de base irracional como o número π e o número e.

Nesta 5ª etapa, o objetivo é apresentar o número e, mostrando que este número é uma base importantíssima nos estudos de logaritmos, portanto é preciso mostrar ao aluno de onde surgiu o número e, pois isto é fundamental para exercer um pensamento crítico, e principalmente, evitar que o aluno decore o valor deste número sem ter a mínima noção de onde surgiu.

A questão número 1, tem o objetivo de fazer com que o aluno perceba que embora o valor de n fique muito grande, o valor encontrado não se altera proporcionalmente. Já a questão 2, o aluno vai perceber que quanto maior for o valor de n, menor é a taxa de crescimento e mais este valor converge para um número.

O esboço do gráfico que o aluno construiu na questão 3, além de lembrar uma ferramenta vista em funções, mostra visualmente aquilo que o aluno pode ter percebido enquanto ele fez a questão 1 e 2. Apresentar o gráfico desta função no GeoGebra, por exemplo, mostra de maneira clara que quanto maior o valor de n, “mais paralela” fica o gráfico dessa função em relação ao eixo x, ou seja, semelhante a uma função constante.

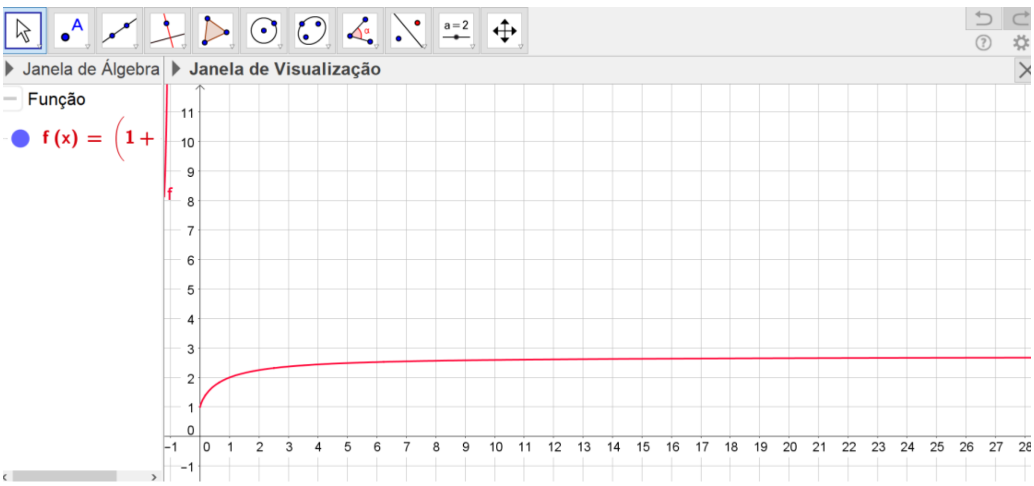


Figura 5-3: *Gráfico de* $(1+\frac{1}{n})^n$ *no GeoGebra.*

A questão 4 é basicamente para que o aluno perceba que quanto maior o valor de n, menor é o crescimento deste número.

Atividade 5

Sabendo que

$$e = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

1 – Preencha a tabela abaixo, com o auxílio de uma calculadora científica ou uma planilha eletrônica, e encontre o valor de e para cada n dado na tabela.

n	e	n	e	n	e	n	e
1		**50**		**100**		**1000**	
5		**55**		**105**		**2000**	
10		**60**		**200**		**3000**	
15		**65**		**300**		**4000**	
20		**70**		**400**		**5000**	
25		**75**		**500**		**6000**	
30		**80**		**600**		**7000**	
35		**85**		**700**		**8000**	
40		**90**		**800**		**9000**	
45		**95**		**900**		**10000**	

Tabela de Atividades xi

2 - Ao completar a tabela acima, percebemos que o número e se aproxima muito de um valor. Que valor é este?

3 – Vamos relembrar a construção de gráficos usando o plano cartesiano, fazendo um esboço do gráfico formado pela tabela 5.1.

4 – Sabendo que o valor que você descobriu na questão 2 é um valor aproximado do número e, analise o esboço do gráfico que você construiu, e responda se o valor de e se aproxima de forma lenta ou rapidamente, e por que?

5.1.5.1
Respostas esperadas nos exercícios da atividade 5

Sabendo que

$$e = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

1 – Preencha a tabela abaixo, com o auxílio de uma calculadora científica ou uma planilha eletrônica, e encontre o valor de e para cada n dado na tabela.

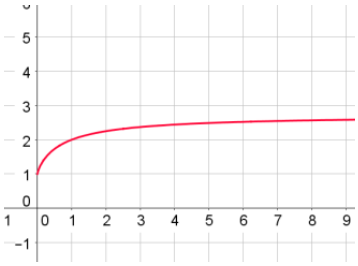
n	e	n	e	n	e	n	e
1	2	**50**	2,691588	**100**	2,704814	**1000**	2,716924
5	2,48832	**55**	2,693975	**105**	2,705450	**2000**	2,717603
10	2,593742	**60**	2,695970	**200**	2,711517	**3000**	2,717829
15	2,632879	**65**	2,697663	**300**	2,713765	**4000**	2,717942
20	2,653298	**70**	2,699116	**400**	2,714892	**5000**	2,718010
25	2,665836	**75**	2,700379	**500**	2,715569	**6000**	2,718055
30	2,674319	**80**	2,701485	**600**	2,716020	**7000**	2,718088
35	2,680439	**85**	2,702462	**700**	2,716343	**8000**	2,718112
40	2,685064	**90**	2,703332	**800**	2,716585	**9000**	2,718131
45	2,688681	**95**	2,704112	**900**	2,716773	**10000**	2,718146

Tabela de Atividades xii

2 - Ao completar a tabela acima, percebemos que o número e se aproxima muito de um valor. Que valor é este?

Este valor é próximo de 2,7181.

3 – Vamos relembrar a construção de gráficos usando o plano cartesiano, fazendo um esboço do gráfico formado pela tabela 5.1.



4 – Sabendo que o valor que você descobriu na questão 2 é um valor aproximado do número e, analise o esboço do gráfico que você construiu, e responda se o valor de e se aproxima de forma lenta ou rapidamente, e por que?

De forma lenta, pois a taxa de variação diminui cada vez mais à medida que n cresce.

5.1.6
Desenvolvendo a sexta atividade

O objetivo da atividade 6 é simplesmente proporcionar a fixação das propriedades logarítmicas e trabalhar a linguagem matemática exigida no assunto.

Para que o professor interessado nos exercícios tenha a possibilidade de imprimir as atividades para aplicação em sala de aula, a Atividade 6 estará disponível na próxima página.

Atividade 6

1 - Use a definição para calcular os seguintes logaritmos

a) $\log_8 4$

b) $\log_{0,25} 32$

c) $\log_{10} 1000$

d) $\log_7 \frac{1}{7}$

e) $\log_{\frac{1}{4}} 32$

f) $\log_9 \frac{1}{27}$

g) $\log_{25} 0{,}008$

h) $\log_2 \sqrt{2}$

i) $\log_{100} \sqrt[3]{10}$

j) $\log_{\sqrt{27}} \sqrt[3]{9}$

k) $\log_{\frac{1}{\sqrt{27}}} \sqrt{27}$

2 - Desenvolver usando as propriedades dos logaritmos, usando o fato de que a, b e c são reais positivos:

a) $\log_2(\frac{2ab}{c})$

b) $\log_3(\frac{a^3b^2}{c^4})$

c) $\log_5(\frac{a^3}{b^2\sqrt{c}})$

d) $\log_5(\frac{5a}{bc})$

e) $\log_2\left(\frac{a^2\sqrt{b}}{\sqrt[3]{c}}\right)$

f) $\log\sqrt{\frac{ab^3}{c^2}}$

g) $\log\sqrt[3]{\frac{a}{b^2\sqrt{c}}}$

3 - Se $\log 2 = a$ e $\log 3 = b$, colocar em função de a e b os seguintes logaritmos decimais:

a) $\log 6$

b) $\log 4$

c) $\log 12$

d) $\log\sqrt{2}$

e) $\log 0{,}5$ (sugestão: use que $0{,}5 = \frac{1}{2}$)

f) $\log 20$

g) $\log 5$ (sugestão: use que $5 = \frac{10}{2}$)

h) $\log 15$

4 - Sabendo que $\log_{30} 3 = a$ e $\log_{30} 5 = b$, calcule $\log_{30} 2$.

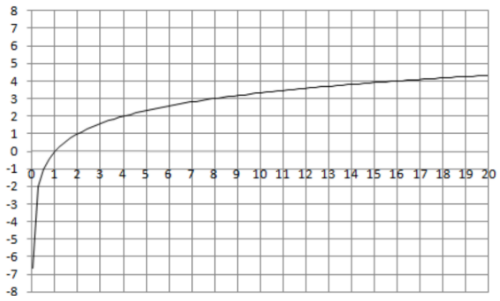
(use mudança de base no logaritmo fazendo $\log_{30} 2 = \frac{\log_{30} 30}{\log_{30} 15}$, em seguida escreva tanto $\log_2 30$ como $\log_{30} 10$ em função de $\log_{30} 3$, $\log_{30} 5$ e $\log_{30} 30$).

5 – Sabendo que $\log_{20} 2 = a$ e $\log_{20} 3 = b$, calcule $\log_6 5$

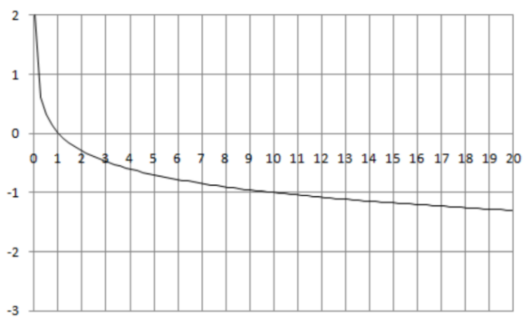
6 - Associe cada gráfico abaixo à cada uma das expressões também dadas abaixo

Gráficos:

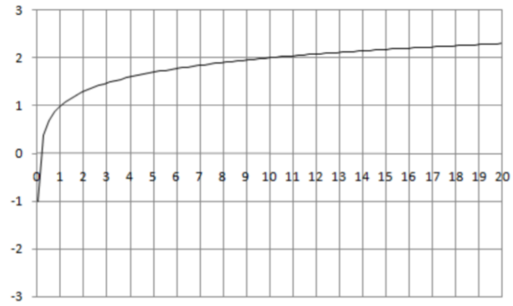
a)



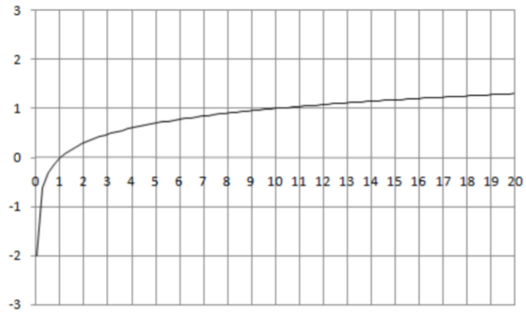
b)



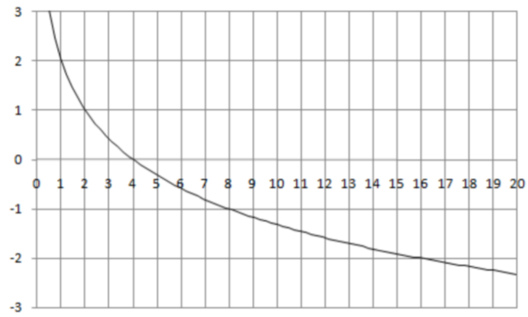
c)



d)



e)



Funções:

I	II	III	IV	V
$f(x) = \log_{10} x$	$f(x) = \log_2 x$	$f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x + 2$	$f(x) = \log_{0,1} x$	$f(x) = \log_{10} x + 1$

7 - Assinale Verdadeiro ou Falso em cada afirmação abaixo:

a) $\log_2 3 > \log_2 0{,}2$

b) $\log_3 5 > \log_3 7$

c) $\log_{\frac{1}{2}} 6 > \log_{\frac{1}{2}} 3$

d) $\log_{0,1} 0{,}13 > \log_{0,1} 0{,}32$

e) $\log_4 0{,}10 > \log_4 0{,}9$

f) $\log\frac{1}{2} > \log\frac{1}{3}$

g) $\log_{0,5}\frac{2}{3} > \log_{0,5}\frac{3}{4}$

8 – Resolver as equações logarítmicas

a) $\log_4(3x+2) = \log_4(2x+5)$

b) $\log_3(5x-6) = \log_4(3x-5)$

c) $\log_2(5x^2-14x+1) = \log_2(4x^2-4x-20)$

d) $\log_{\frac{1}{3}}(3x^2-4x-17) = \log_{\frac{1}{3}}(2x^2-5x+3)$

e) $\log_4(4x^2+13x+2) = \log_4(2x+5)$

9 – Resolver as equações logarítmicas

a) $\log_5(4x-3) = 1$

b) $\log_{\frac{1}{2}}(3+5x) = 0$

c) $\log_{\sqrt{2}}(3x^2+7x+3) = 0$

d) $\log_4(2x^2+5x+4) = 2$

10 – Resolver as equações logarítmicas

a) $(\log_4 x)^2 - 2\log_4 x - 3 = 0$

b) $6\,(\log_2 x)^2 - 7\log_2 x + 2 = 0$

c) $\log x \cdot (\log x - 1) = 6$

d) $\log_2 x \cdot (2\log_2 x - 3) = 2$

11 – Resolver as equações logarítmicas

a) $\log_x(3x^2-13x+15) = 2$

b) $\log_x(4-3x) = 2$

c) $\log_{x-2}(2x^2-11x+16) = 2$

5.1.6.1
Respostas esperadas nos exercícios da atividade 6

1 - Use a definição para calcular os seguintes logaritmos

a) $\log_8 4$

$$\log_8 4 = x \Longrightarrow 8^x = 4 \Longrightarrow (2^3)^x = 2^2 \Longrightarrow 2^{3x} = 2^2$$

$$3x = 2 \Longrightarrow x = \frac{2}{3}$$

Portanto $\log_8 4 = {}^2/_3$

b) $\log_{0,25} 32$

$$\log_{0,25} 32 = x \Longrightarrow 0{,}25^x = 32 \Longrightarrow (2^{-2})^x = 2^5 \Longrightarrow 2^{-2x} = 2^5$$

$$-2x = 5 \Longrightarrow x = -\frac{5}{2}$$

Portanto $\log_{0,25} 32 = -{}^5/_2$

c) $\log_{10} 1000$

$$\log_{10} 1000 = x \Longrightarrow 10^x = 1000 \Longrightarrow 10^x = 10^3$$

$$x = 3$$

Portanto $\log_{10} 1000 = 3$

d) $\log_7 \frac{1}{7}$

$$\log_7 \frac{1}{7} = x \Longrightarrow 7^x = \frac{1}{7} \Longrightarrow 7^x = 7^{-1}$$

$$x = -1$$

Portanto $\log_7 \frac{1}{7} = -1$

e) $\log_{\frac{1}{4}} 32$

$$\log_{\frac{1}{4}} 32 = x \Longrightarrow \frac{1^x}{4} = 32 \Longrightarrow (2^{-2})^x = 2^5 \Longrightarrow 2^{-2x} = 2^5$$

$$-2x = 5 \Longrightarrow x = -\frac{5}{2}$$

Portanto $\log_{\frac{1}{4}} 32 = -{}^5/_2$

f) $\log_9 \frac{1}{27}$

$$\log_9 \frac{1}{27} = x \Longrightarrow 9^x = \frac{1}{27} \Longrightarrow (3^2)^x = 3^{-3} \Longrightarrow 2^{2x} = 2^{-3}$$

$$2x = -3 \Longrightarrow x = -\frac{3}{2}$$

Portanto $\log_9 \frac{1}{27} = -{}^3/_2$

g) $\log_{25} 0{,}008$

$$\log_{25} 0{,}008 = x \Longrightarrow 25^x = \frac{8}{1000} \Longrightarrow (5^2)^x = \frac{2^3}{10^3} \Longrightarrow 5^{2x} = \left(\frac{2}{10}\right)^3 \Longrightarrow 5^{2x} = (5^{-1})^3$$

$$2x = -3 \Longrightarrow x = -\frac{3}{2}$$

Portanto $\log_{25} 0{,}008 = -\frac{3}{2}$

h) $\log_2 \sqrt{2}$

$$\log_2 \sqrt{2} = x \Longrightarrow 2^x = \sqrt{2} \Longrightarrow 2^x = 2^{\frac{1}{2}}$$

$$x = \frac{1}{2}$$

Portanto $\log_2 \sqrt{2} = \frac{1}{2}$

i) $\log_{100} \sqrt[3]{10}$

$$\log_{100} \sqrt[3]{10} = x \Longrightarrow 100^x = \sqrt[3]{10} \Longrightarrow 10^{2x} = 10^{\frac{1}{3}}$$

$$2x = \frac{1}{3} \Longrightarrow x = \frac{1}{6}$$

Portanto $\log_{100} \sqrt[3]{10} = \frac{1}{6}$

j) $\log_{\sqrt{27}} \sqrt[3]{9}$

$$\log_{\sqrt{27}} \sqrt[3]{9} = x \Longrightarrow (\sqrt{27})^x = \sqrt[3]{9} \Longrightarrow (3^{\frac{3}{2}})^x = 3^{\frac{2}{3}} \Longrightarrow 3^{\frac{3x}{2}} = 3^{\frac{2}{3}}$$

$$\frac{3x}{2} = \frac{2}{3} \Longrightarrow x = \frac{4}{9}$$

Portanto $\log_{\sqrt{27}} \sqrt[3]{9} = \frac{4}{9}$

k) $\log_{\frac{1}{\sqrt{27}}} \sqrt{27}$

$$\log_{\frac{1}{\sqrt{27}}} \sqrt{27} = x \Longrightarrow (\frac{1}{\sqrt{27}})^x = \sqrt{27} \Longrightarrow (3^{\frac{-3}{2}})^x = 3^{\frac{3}{2}} \Longrightarrow 3^{-\frac{3x}{2}} = 3^{\frac{3}{2}}$$

$$-\frac{3x}{2} = \frac{3}{2} \Longrightarrow x = -1$$

Portanto $\log_{\frac{1}{\sqrt{27}}} \sqrt{27} = -1$

2 - Desenvolver usando as propriedades dos logaritmos, usando o fato de que a, b e c são reais positivos:

a) $\log_2(\frac{2ab}{c})$

$$\log_2(\frac{2ab}{c}) = (\log_2 2ab) - \log_2 c \Longrightarrow (\log_2 2 + \log_2 a + \log_2 b) - \log_2 c$$

$$\Longrightarrow 1 + \log_2 a + \log_2 b - \log_2 c$$

b) $\log_3(\frac{a^3b^2}{c^4})$

$$\log_3(\frac{a^3b^2}{c^4}) = (\log_3 a^3b^2) - \log_3 c^4 \Longrightarrow (\log_3 a^3 + \log_3 b^2) - \log_3 c^4$$
$$\Longrightarrow 3 \cdot \log_3 a + 2 \cdot \log_3 b - 4 \cdot \log_3 c$$

c) $\log_5(\frac{a^3}{b^2\sqrt{c}})$

$$\log_5(\frac{a^3}{b^2\sqrt{c}}) = (\log_5 a^3) - \left(\log_5 b^2 + \log_5 \sqrt{c}\right) \Longrightarrow\ (\log_5 a^3) - \left(\log_5 b^2 + \log_5 c^{\frac{1}{2}}\right)$$
$$\Longrightarrow\ 3 \cdot \log_5 a - 2 \cdot \log_5 b - \frac{1}{2} \cdot \log_5 c$$

d) $\log_5(\frac{5a}{bc})$

$$\log_5(\frac{5a}{bc}) = \log_5 5a - \log_5 bc \Longrightarrow (\log_5 5 + \log_5 a) - (\log_5 b + \log_5 c)$$
$$\Longrightarrow 1 + \log_5 a - \log_5 b - \log_5 c$$

e) $\log_2\left(\frac{a^2\sqrt{b}}{\sqrt[3]{c}}\right)$

$$\log_2\left(\frac{a^2\sqrt{b}}{\sqrt[3]{c}}\right) = \log_2 a^2\sqrt{b} - \log_2 \sqrt[3]{c} \Longrightarrow \left(\log_2 a^2 + \log_2 b^{\frac{1}{2}}\right) - \log_2 c^{\frac{1}{3}}$$
$$\Longrightarrow 2 \cdot \log_2 a + \frac{1}{2} \cdot \log_2 b - \frac{1}{3} \cdot \log_2 c$$

f) $\log\sqrt{\frac{ab^3}{c^2}}$

$$\log\sqrt{\frac{ab^3}{c^2}} = \log a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{3}{2}} - \log c^{\frac{2}{2}} \Longrightarrow (\frac{1}{2} \cdot \log a + \frac{3}{2} \cdot \log b) - \log c$$
$$\Longrightarrow \frac{1}{2} \cdot \log a + \frac{3}{2} \cdot \log b - \log c$$

g) $\log\sqrt[3]{\frac{a}{b^2\sqrt{c}}}$

$$\log\sqrt[3]{\frac{a}{b^2\sqrt{c}}} = \log a^{\frac{1}{3}} - \left(\log b^{\frac{2}{3}} + \log c^{\frac{1}{6}}\right) \Longrightarrow \frac{1}{3} \cdot \log a - \frac{2}{3}\log b - \frac{1}{6}\log c$$

3 - Se $\log 2 = a$ e $\log 3 = b$, colocar em função de a e b os seguintes logaritmos decimais:

a) $\log 6$

$$\log 6 = \log(2 \cdot 3) = \log 2 + \log 3 = a + b$$

b) $\log 4$

$$\log 4 = \log 2^2 = 2 \cdot \log 2 = 2 \cdot a$$

c) $\log 12$

$$\log 12 = \log(2^2 \cdot 3) = \log 2^2 + \log 3 = 2 \cdot \log 2 + \log 3 = 2a + b$$

d) $\log \sqrt{2}$

$$\log \sqrt{2} = \log 2^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \log 2 = \frac{a}{2}$$

e) $\log 0{,}5$ (sugestão: use que $0{,}5 = \frac{1}{2}$)

$$\log 0{,}5 = \log \frac{1}{2} = \log 2^{-1} = -1 \cdot \log 2 = -\log 2 = -a$$

f) $\log 20$

$$\log 20 = \log(2 \cdot 10) = \log 2 + \log 10 = \log 2 + 1 = a + 1$$

g) $\log 5$ (sugestão: use que $5 = \frac{10}{2}$)

$$\log 5 = \log \frac{10}{2} = \log 10 - \log 2 = 1 - \log 2 = 1 - a$$

h) $\log 15$

$$\log 15 = \log \frac{30}{2} = \log 30 - \log 2 = \log(3 \cdot 10) - \log 2 = (\log 3 + \log 10) - \log 2$$

$$\Longrightarrow \log 3 + 1 - \log 2 \Longrightarrow b + 1 - a$$

4 - Sabendo que $\log_{30} 3 = a$ e $\log_{30} 5 = b$, calcule $\log_{30} 2$.

(use mudança de base no logaritmo fazendo $\log_{30} 2 = \frac{\log_{30} 30}{\log_{30} 15}$, em seguida escreva tanto $\log_2 30$ como $\log_{30} 10$ em função de $\log_{30} 3$, $\log_{30} 5$ e $\log_{30} 30$).

$$\mathbf{\log_{30} 2} = \log_{30} \frac{30}{15} = \log_{30} 30 - \log_{30} 15 = 1 - (\log_{30} 3 + \log_{30} 5) = \mathbf{1 - \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}}$$

$$\mathbf{\log_2 30} = \frac{\log_2 2}{\log_{30} 2} = \frac{1}{1 - a - b} = \frac{\mathbf{\log_{30} 30}}{\mathbf{1 - \log_{30} 3 - \log_{30} 5}}$$

$$\mathbf{\log_{10} 30} = \frac{\log_{30} 30}{\log_{30} 10} = \frac{\log_{30} 30}{\log_{30}(2 \cdot 5)} = \frac{\log_{30} 30}{\log_{30} 2 + \log_{30} 5}$$

$$= \frac{\log_{30} 30}{(\log_{30} 30 - \log_{30} 3 - \log_{30} 5) + \log_{30} 5}$$

$$\mathbf{\log_{10} 30} = \frac{\mathbf{\log_{30} 30}}{\mathbf{\log_{30} 30 - \log_{30} 3}}$$

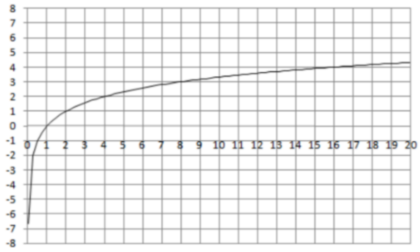
5 – Sabendo que $\log_{20} 2 = a$ e $\log_{20} 3 = b$, calcule $\log_6 5$

$$\log_6 5 = \frac{\log_{20} 5}{\log_{20} 6} = \frac{\log_{20}(\frac{20}{4})}{\log_{20}(2 \cdot 3)} = \frac{\log_{20} 20 - \log_{20} 4}{\log_{20} 2 + \log_{20} 3} = \frac{1 - 2 \cdot \log_{20} 2}{\log_{20} 2 + \log_{20} 3}$$

$$\Longrightarrow \log_6 5 = \frac{1 - 2a}{a + b}$$

6 - Associe cada gráfico abaixo à cada uma das expressões também dadas abaixo

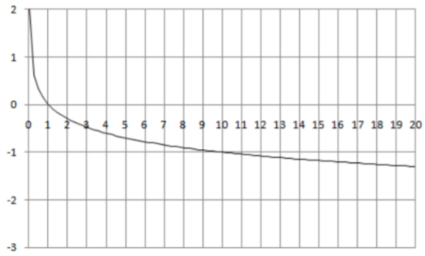
a)



1) A função é crescente, logo a base é maior que 1.

2) Quando $x = 2$, $y = 1$. Numa função logarítmica quando a base é igual ao logaritmando o resultado deste logaritmo é 1. Neste caso teremos que $\log_2 2 = 1$. Portanto a função correspondente a este gráfico é II - $f(x) = \log_2 x$.

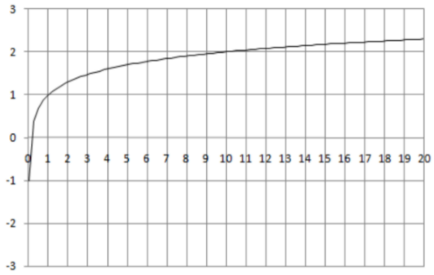
b)



1) A função é decrescente, logo a base está entre 0 e 1.

2) Quando $x = 10$, obtemos $y = -1$. Numa função logarítmica quando a base é igual ao inverso do logaritmando o resultado deste logaritmo é -1. Neste caso teremos que $\log_{0,1} 10 = 1$. Portanto a função correspondente a este gráfico é IV - $f(x) = \log_{0,1} x$.

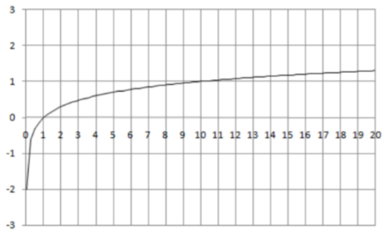
c)



1) A função é crescente, logo a base é maior que 1.

2) Quando $x = 1$, obtemos $y = 1$. Numa função logarítmica quando a base é igual ao logaritmando o resultado deste logaritmo é 1. Neste caso teríamos que $\log_1 1$. Porém isto não é possível. Porém, é possível pela função V - $f(x) = \log_{10} x + 1$.

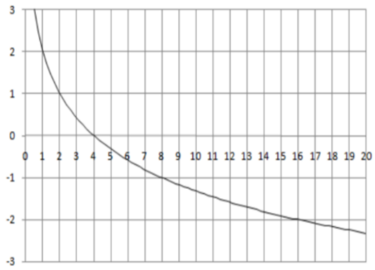
d)



1) A função é crescente, logo a base é maior que 1.

2) Quando $x = 10$, obtemos $y = 1$. Numa função logarítmica quando a base é igual ao logaritmando o resultado deste logaritmo é 1. Neste caso teríamos que $\log_{10} 10 = 1$. Portanto a função correspondente a este gráfico é I - $f(x) = \log_{10} x$.

e)



1) A função é decrescente, logo a base está entre 0 e 1.

2) Neste caso, podemos observar que o gráfico está deslocado para cima duas unidades em relação ao eixo x. Logo a função é da forma $f(x) = \log_b a + 2$. Assim a função que esboça este gráfico é III - $f(x) \log_{\frac{1}{2}} x$

Funções:

I	II	III	IV	V
$f(x) = \log_{10} x$	$f(x) = \log_2 x$	$f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x + 2$	$f(x) = \log_{0,1} x$	$f(x) = \log_{10} x + 1$

7 - Assinale Verdadeiro ou falso em cada afirmação abaixo:

a) $\log_2 3 > \log_2 0{,}2$

Bases iguais e maiores que 1 nos permite afirmar que $\log_2 3 > \log_2 0{,}2$; pois 3 está mais à direita do gráfico $f(x) = \log_2 x$ que é crescente. Portanto, verdadeiro

b) $\log_3 5 > \log_3 7$

Bases iguais e maiores que 1 nos permite afirmar que $\log_3 5 > \log_3 7$; pois 7 está mais à direita do gráfico $f(x) = \log_3 x$ que é crescente. Portanto, é falsa.

c) $\log_{\frac{1}{2}} 6 > \log_{\frac{1}{2}} 3$

Bases iguais entre 0 e 1 nos permite afirmar que $\log_{\frac{1}{2}} 6 < \log_{\frac{1}{2}} 3$; pois 6 está mais à direita do gráfico $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$ que é decrescente. Portanto, é falsa.

d) $\log_{0,1} 0{,}13 > \log_{0,1} 0{,}32$

Bases iguais entre 0 e 1 nos permite afirmar que $\log_{0,1} 0{,}13 > \log_{0,1} 0{,}32$; pois 0,32 está mais à direita do gráfico $f(x) = \log_{0,1} x$ que é decrescente. Portanto, verdadeiro.

e) $\log_4 0{,}10 > \log_4 0{,}9$

Bases iguais e maiores que 1 nos permite afirmar que $\log_4 0{,}10 < \log_4 0{,}9$; pois 0,93 está mais à direita do gráfico $f(x) = \log_4 x$ que é crescente. Portanto, é falsa.

f) $\log \frac{1}{2} > \log \frac{1}{3}$

Bases iguais e maiores que 1 nos permite afirmar que $\log \frac{1}{2} > \log \frac{1}{3}$; pois $\frac{1}{2}$ está mais à direita do gráfico $f(x) = \log_{10} x$ que é crescente. Portanto, verdadeiro.

g) $\log_{0,5} \frac{2}{3} > \log_{0,5} \frac{3}{4}$

Bases iguais entre 0 e 1 nos permite afirmar que $\log_{0,5}\frac{2}{3} > \log_{0,5}\frac{3}{4}$; pois $\frac{3}{4}$ está mais à direita do gráfico $f(x) = \log_{0,5} x$ que é decrescente. Portanto, verdadeiro.

8 – Resolver as equações logarítmicas

a) $\log_4(3x + 2) = \log_4(2x + 5)$

Como as bases são as mesmas, basta igualar os logaritmandos.

$$3x + 2 = 2x + 5$$

$$x = 3$$

Ao substituirmos o valor $x = 3$, verificaremos que o logaritmando encontrado é um número positivo. Desta forma, os logaritmos possuem valores reais. Portanto 3 é a solução deste problema.

b) $\log_4(5x - 6) = \log_4(3x - 5)$

Como as bases são as mesmas, basta igualar os logaritmandos.

$$5x - 6 = 3x - 5$$

$$2x = 1$$

$$x = \frac{1}{2}$$

Porém ao substituir o valor encontrado, encontraremos um logaritmando negativo, o que não o que não fornece logaritmo com um valor real. Portanto a equação não tem solução.

c) $\log_2(5x^2 - 14x + 1) = \log_2(4x^2 - 4x - 20)$

Como as bases são as mesmas, basta igualar os logaritmandos.

$$5x^2 - 14x + 1 = 4x^2 - 4x - 20$$

$$x^2 - 10x + 21 = 0$$

$$(x - 3)(x - 7) = 0$$

$$x = 3 \text{ ou } x = 7$$

Ao substituirmos os valores 3 e 7, verificaremos que os logaritmandos encontrados são número positivos. Desta forma, os logaritmos possuem valores reais. Portanto 3 e 7 são soluções deste problema.

d) $\log_{\frac{1}{3}}(3x^2 - 4x - 17) = \log_{\frac{1}{3}}(2x^2 - 5x + 3)$

Como as bases são as mesmas, basta igualar os logaritmandos.

$$3x^2 - 4x - 17 = 2x^2 - 5x + 3$$

$$x^2 + x - 20 = 0$$

$$(x + 5)(x - 4) = 0$$

$$x = -5 \text{ ou } x = 4$$

Ao substituirmos os valores -5 e 4, verificaremos que os logaritmandos encontrados são números positivos. Desta forma, os logaritmos possuem valores reais. Portanto -5 e 4 são soluções desta equação.

e) $\log_4(4x^2 + 13x + 2) = \log_4(2x + 5)$

Como as bases são as mesmas, basta igualar os logaritmandos.

$$4x^2 + 13x + 2 = 2x + 5$$

$$4x^2 + 11x - 3 = 0$$

$$(4x - 1)(x + 3) = 0$$

$$x = \frac{1}{4} \text{ ou } x = -3$$

Ao substituirmos os valores -3 e $\frac{1}{4}$, verificamos que o logaritmando encontrado para $x = -3$ não é um número positivo. Já ao verificamos para $x = \frac{1}{4}$ encontramos o valor do logaritmando positivo. Desta forma, os logaritmos possuem valor real apenas quando $x = \frac{1}{4}$. Portanto $x = \frac{1}{4}$ é a solução deste problema.

9 – Resolver as equações logarítmicas

a) $\log_5(4x - 3) = 1$

$$4x - 3 = 5^1$$

$$4x = 8$$

$$x = 2$$

Ao substituirmos o valor $x = 2$, verificaremos que o logaritmando encontrado é um número positivo. Desta forma, o logaritmo possui valor real. Portanto 2 é a solução deste problema.

b) $\log_{\frac{1}{2}}(3 + 5x) = 0$

$$3 + 5x = (\frac{1}{2})^0$$

$$3 + 5x = 1$$

$$5x = -2$$

$$x = -\frac{2}{5}$$

Ao substituirmos o valor $x = -\frac{2}{5}$ verificaremos que o logaritmando encontrado é um número positivo. Desta forma, o logaritmo possui valor real. Portanto $-\frac{2}{5}$ é a solução deste problema.

c) $\log_{\sqrt{2}}(3x^2 + 7x + 3) = 0$

$$3x^2 + 7x + 3 = (\sqrt{2})^0$$

$$3x^2 + 7x + 3 = 1$$
$$3x^2 + 7x + 2 = 0$$
$$(3x + 1)(x + 2) = 0$$
$$x = -\frac{1}{3} \text{ ou } x = -2$$

Desta forma, os logaritmos possuem valor real apenas quando $x = -\frac{1}{3}$ ou $x = -2$.

Portanto $x = -\frac{1}{3}$ e $x = -2$ são soluções deste problema.

d) $\log_4(2x^2 + 5x + 4) = 2$

$$2x^2 + 5x + 4 = 4^2$$
$$2x^2 + 5x + 4 = 16$$
$$2x^2 + 5x - 12 = 0$$
$$(2x - 3)(x + 4) = 0$$
$$x = \frac{3}{2} \text{ ou } x = -4$$

Desta forma, os logaritmos possuem valor real apenas quando $x = \frac{3}{2}$ ou $x = -4$.

Portanto $x = \frac{3}{2}$ e $x = -4$ são soluções deste problema.

10 – Resolver as equações logarítmicas

a) $(\log_4 x)^2 - 2\log_4 x - 3 = 0$

Chamando $\log_4 x = a$, temos:

$$a^2 - 2a - 3 = 0$$
$$(a - 3)(a + 1) = 0$$
$$a = 3 \; ou \; a = -1$$

Logo:

$\log_4 x = 1$

$x = 4$

ou

$\log_4 x = 3$

$x = 4^3 \Rightarrow x = 64$

Portanto 4 e 64 são soluções da equação.

b) $6\,(\log_2 x)^2 - 7\log_2 x + 2 = 0$

Chamando $\log_2 x = a$, temos:

$$6a^2 - 7a + 2 = 0$$
$$(3a - 2)(2a - 1) = 0$$
$$a = \frac{2}{3} \; ou \; a = \frac{1}{2}$$

Logo:

$\log_2 x = \frac{2}{3}$

$x = 2^{\frac{2}{3}} \Rightarrow x = \sqrt[3]{2^2}$

ou

$\log_2 x = \frac{1}{2}$

$x = 2^{\frac{1}{2}} \Rightarrow x = \sqrt{2}$

Portanto $\sqrt[3]{2^2}$ e $\sqrt{2}$ são soluções da equação.

c) $\log x \cdot (\log x - 1) = 6$

Chamando $\log x = a$, temos:

$$a(a-1) = 6$$
$$a^2 - a - 6 = 0$$
$$(a-3)(a+2) = 0$$
$$a = 3 \text{ ou } a = -2$$

Logo:

$\log x = 3$

$x = 10^3 \Rightarrow x = 1000$

ou

$\log x = -2$

$x = 10^{-2} \Rightarrow x = 0{,}02$

Portanto $0{,}02$ e 1000 são soluções da equação.

d) $\log_2 x \cdot (2\log_2 x - 3) = 2$

Chamando $\log_2 x = a$, temos:

$$a(2a-3) = 2$$
$$2a^2 - 3a - 2 = 0$$
$$(a-2)(2a+1) = 0$$
$$a = 2 \text{ ou } a = -\frac{1}{2}$$

Logo:

$\log_2 x = 2$

$x = 2^2 \Rightarrow x = 4$

ou

$\log_2 x = -\frac{1}{2}$

$x = 2^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow x = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Portanto $\frac{\sqrt{2}}{2}$ e 4 são soluções da equação.

11 – Resolver as equações logarítmicas

a) $\log_x(3x^2 - 13x + 15) = 2$

$$x^2 = 3x^2 - 13x + 15$$

$$2x^2 - 13x + 15 = 0$$

$$(x - 5)(2x - 3) = 0$$

$$x = 5 \; ou \; x = \frac{3}{2}$$

Ao substituir estes valores para x, verificamos que o logaritmando adquire valores positivos. Portanto as soluções da equação são 5 e $\frac{3}{2}$.

$b)$ $\log_x(4 - 3x) = 2$

$$x^2 = 4 - 3x$$

$$x^2 + 3x - 4 = 0$$

$$(x + 4)(x - 1) = 0$$

$$x = -4 \text{ ou } x = 1$$

Ao substituir $x = 1$, verificamos que a base do logaritmo é igual 1, e ao substituir $x = -4$ temos uma base negativa. Portanto não há solução para a equação.

c) $\log_{x-2}(2x^2 - 11x + 16) = 2$

$$(x - 2)^2 = 2x^2 - 11x + 16$$

$$x^2 - 4x + 4 = 2x^2 - 11x + 16$$

$$x^2 - 7x + 12 = 0$$

$$(x - 4)(x - 3) = 0$$

$$x = 4 \text{ ou } x = 3$$

Ao substituir $x = 3$, verificamos que a base do logaritmo é igual 1, e ao substituir $x = 4$ temos $\log_2 4$, que satisfaz a igualdade. Portanto a única solução para a equação é $x = 4$.

6
Considerações finais

A matemática representa um desafio para todos os educadores. Fazer com que a Matemática ensinada nas escolas se torne algo mais perceptível em nossas vidas requer muita dedicação e trabalho. É uma disciplina que provoca diferentes sensações, seja por parte dos alunos quanto por parte dos professores, mas mesmo com todas essas misturas de sensações que a Matemática desperta, todos sabem a importância desta disciplina em suas vidas. Muitas vezes os resultados negativos obtidos na vida escolar do indivíduo criam uma aversão à disciplina, pois muitos alunos não conseguem perceber a utilidade do assunto que é abordado em sala de aula. Dessa maneira, cada professor é responsável pelo procedimento de suas aulas e pelo desenvolvimento dos conceitos matemáticos.

Os professores exercem a função de mediadores no processo de ensino-aprendizagem, desenvolvendo o senso crítico dos alunos. Para tanto, é necessário criar situações apropriadas para o desenvolvimento dos conceitos matemáticos, estar preparados cientificamente, dominando o conteúdo a ser trabalhado, para que, assim, seja possível obter o reconhecimento dos alunos.

Muitos professores sentem dificuldades em ensinar logaritmo no 1° ano do Ensino Médio. Vários são os motivos encontrados, dentre eles podemos destacar o fato de muitos livros didáticos utilizados em nossas escolas abordarem logaritmos de forma mecânica e sem explorar o raciocínio dos alunos em cima de alguma problematização, priorizando apenas a resolução de equações com carência de contexto, desmotivando alunos e professores que não conseguem perceber a finalidade de ensinar e aprender logaritmo.

As atividades contidas neste trabalho são passíveis de ajustes que podem ser feitos pelos docentes de acordo com as características de cada turma. Espera-se que os professores que lecionarem no 1º ano do Ensino Médio possam utilizar essa sequência de atividades em suas aulas de modo que possa auxilia-lo a obter um ambiente propício para ocorrer uma aprendizagem significativa em sala de aula.

Desta forma, procuramos além de elaborar uma abordagem sobre o tema, conceituar assuntos de grande importância como: Noções de domínio e imagem, Plano Cartesiano, Funções, leitura de gráficos e tabelas entre outros que são necessários para o desenvolvimento de exponencial.

Além de explanarmos sobre o desenvolvimento histórico e aplicações de logaritmos a problemas do cotidiano e fenômenos naturais, esperamos também que este trabalho possa ser aplicado em turmas de 1° ano do Ensino Médio e que sirva de motivação para professores em busca de uma melhor maneira de desenvolver o processo de ensino e aprendizagem. Por fim, esperamos que esse trabalho seja apenas o começo de um estudo sólido e contínuo, sendo útil para outros docentes que desejam oferecer um ensino de qualidade.

7
Referências bibliográficas

BARROSO, J. M. **Conexões com a Matemática**. 1ª. ed. São Paulo: Moderna, v. 1, 2010.

BRANCO, E. S. Portal do Professor. **www.portaldoprofessor.mec.gov.br**, 2010. Disponivel em: <http://portaldoprofessor.mec.gov.br/fichaTecnicaAula.html?aula=26607>. Acesso em: 11 Julho 2017.

DUARTE, M. InfoEscola - Navegadno e Aprendendo. **www.infoescola.com**, s.d. Disponivel em: <http://www.infoescola.com/redacao/tabelas/>. Acesso em: 11 Julho 2017.

FLEMMING, D. M. **Cálculo A**. 5ª. ed. São Paulo: Makron, 1992.

LIMA, E. L. Conceitos e Controvérsias. **Revista do Professor de Matemática**, Rio de Janeiro, p. 10-12, 1983.

LIMA, E. L. **Análise Real - Funções de Uma Variável**. 8. ed. Rio de Janeiro: IMPA, v. 1, 2006.

LIMA, E. L. **Números e Funções Reais**. 1ª. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

LIMA, E. L. **Logaritmos**. 6ª. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2016.

MALTA, I.; PESCO, ; LOPES, H. **Cálculo a uma Variável**. 1. ed. Rio de Janeiro: Elsevier, v. 1, 2015. 470 p.

MARTINS, M. M. **Logaritmos**. Florianópolis: [s.n.], 2000.

PAIVA, M. **Matemática Paiva**. 1ª. ed. São Paulo: Moderna, v. 1, 2009.

PAIVA, M. **Matemática Paiva**. 1ª. ed. São Paulo: Moderna, v. 1, 2009. 108-109 p.

QUINTELLA, A. **Matemática - Curso Ginasial**. 3ª. ed. São Paulo: Companhia Editora Nacional, 1967. 134-135 p.