Pontifícia Universidade Católica
do Rio de Janeiro

Maria Isabel Afonso Melo

Razão Áurea e Números de Fibonacci:
da teoria à prática através da fotografia

Dissertação de Mestrado

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da PUC-Rio como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientadora: Profª. Christine Sertã Costa

Rio de Janeiro
Agosto de 2017

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA
DO RIO DE JANEIRO

Maria Isabel Afonso Melo

Razão Áurea e Números de Fibonacci:
da teoria à prática através da fotografia.

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós-graduação em Matemática da Puc-Rio. Aprovada pela Comissão Examinadora abaixo assinada.

Profa. Christine Sertã Costa
Orientadora
Departamento de Matemática - PUC-Rio

Prof. José Victor Goulart Nascimento
Departamento de Matemática – PUC-Rio

Prof. Agnaldo da Conceição Esquincalha
Departamento de Matemática – UERJ

Prof. Márcio da Silveira Carvalho
Coordenador Setorial do Centro
Técnico Científico - PUC-Rio

Rio de Janeiro, 15 de agosto de 2017

Maria Isabel Afonso Melo

Graduou-se em Licenciatura em Matemática pela Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ) em 2003. Atualmente é professora da rede municipal de ensino do Rio de Janeiro e da rede privada.

Ficha Catalográfica

Melo, Maria Isabel Afonso

Razão áurea e números de Fibonacci : da teoria à prática através da fotografia / Maria Isabel Afonso Melo ; orientadora: Christine Sertã Costa. – 2017.

80 f. : il. color. ; 30 cm

Dissertação (mestrado)–Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Matemática, 2017.

Inclui bibliografia

1. Matemática – Teses. 2. Geometria. 3. Razão áurea. 4. Fibonacci. 5. Fotografia. 6. Ensino. I. Costa, Christine Sertã. II. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Matemática. III. Título.

CDD: 510

Para meus pais, Antonio (in memorian) e
Maria, por sempre acreditarem em mim
e na educação.

Agradecimentos

Agradeço à minha família, em especial minha mãe por ser tão carinhosa e compreensiva nos meus momentos de ausência. E por sempre me mostrar o lado bom da vida e incentivar meu crescimento pessoal e profissional. .

Ao meu companheiro Guilherme por entender meus momentos de ansiedade e stress. Sua dedicação e carinho foram fundamentais nessa jornada. Obrigada por estar sempre ao meu lado e me fazer sorrir todos os dias.

Á minha orientadora Christine Sertã Costa por toda sua parceria, competência e cuidado. Suas colocações enriqueceram muito este trabalho. Sorte a minha tê-la como professora novamente.

Aos meus amigos, em especial aos do grupo The North Remembers, pelo grande incentivo e por compartilhar momentos tão divertidos e especiais.

Aos alunos, professores e equipe de direção da Escola Municipal Ceará por acreditarem e proporcionarem uma educação pública de qualidade.

Aos colegas e professores do PROFMAT por compartilharem seus conhecimentos e experiências.

Aos membros da banca por aceitarem o convite.

A CAPES e à PUC-Rio pelo auxílio concedido que foi fundamental para a conclusão do trabalho.

Resumo

Melo, Maria Isabel Afonso; Costa, Christine Sertã. **Razão áurea e Números de Fibonacci: da teoria à prática através da fotografia**. Rio de Janeiro, 2017. 80p. Dissertação de Mestrado – Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Este trabalho teve o intuito de conciliar o ensino de matemática com práticas muito presentes no cotidiano dos alunos nos dias atuais: o uso da tecnologia e a comunicação através da fotografia. Com esse objetivo, foram selecionados conteúdos matemáticos que historicamente estão relacionados com a beleza e harmonia: a razão áurea e a sequência de Fibonacci. Tais enfoques permitem associações diretas em outros campos do conhecimento como por exemplo, a arte, a natureza, o estudo do corpo humano que trouxeram significância, cultura, interdisciplinaridade e criticidade ao presente estudo. Por outro lado, a fotografia também carrega na sua essência conceitos de harmonia, beleza, composição e enquadramento e possibilita o desenvolvimento da criatividade e da inovação propiciando uma quebra dos métodos tradicionais na sala de aula. Por fim, a proposta aqui apresentada defende o uso da tecnologia a favor do desenvolvimento de propostas pedagógicas que incrementem o processo de ensino e aprendizagem, através do incentivo ao uso orientado de celulares na escola. A proposta foi experimentada com alunos do 9º ano de uma escola da rede municipal de ensino do Rio de Janeiro e, pôde-se perceber que, a dinâmica empregada motivou os alunos, possibilitou um crescimento acadêmico e social e permitiu a construção de aulas criativas e cooperativas. Conceitos básicos, matemáticos e históricos, dos temas escolhidos assim como a descrição da proposta e os resultados alcançados na experimentação são expostos ao longo desse trabalho que pretende ser mais uma proposta a colaborar para o crescimento da educação básica no país.

Palavras-Chave

Geometria; Razão Áurea; Fibonacci; Fotografia; Ensino.

Abstract

Melo, Maria Isabel Afonso; Costa, Christine Sertã (Advisor). **Golden ratio and Fibonacci Numbers: from theory to practice through photography**. Rio de Janeiro, 2017. 80p. Dissertação de Mestrado – Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

This work had the intention to conciliate the teaching of mathematics with very common practices in student's daily routine nowadays: the use of technology and communication through photography. With this objective, mathematical topics historically related to beauty and harmony were selected: the golden ratio and the Fibonacci sequence. Such approaches allow direct associations in other fields of knowledge like art, nature, the study of the human body which brought significance, culture, interdisciplinarity and criticism to the present study. On the other hand, photography also brings in its essence concepts of beauty, harmony and framing, making the development of creativity and innovation possible and allowing a break of the traditional methods in classroom. At last, the presented proposal defends the use of technology favoring the development of pedagogic proposals that boost the process of teaching and learning through the incentive of the guided use of cellphones in school. The proposal was experimented with 9th (ninth) grade students from a Rio de Janeiro municipal school and, it can be noticed that, the employed dynamics motivated the students, enabled academical and social growth and allowed the construction of creative and cooperative classes. Basic, mathematical and historical concepts of the chosen themes, as the proposal description and the results achieved in the experiments are exposed in the course of this work, which intends to be one more proposal to collaborate to the growth of basic education in the country.

Keywords

Geometry; Golden Ratio; Fibonacci; Photography; Teaching.

Sumário

Lista de Figuras

"A maioria dos homens e mulheres, por nascimento ou natureza, não tem os meios para progredir na riqueza e no poder, mas todos têm a capacidade de progredir no conhecimento."

Pitágoras

1
INTRODUÇÃO

Cada vez mais nossos alunos nos questionam sobre aplicações dos conteúdos aprendidos na escola. A necessidade de contextualizações, muitas vezes se faz necessária e urgente e aproxima a relação aluno-professor. Atualmente, o grande desafio do professor é ser dinâmico, inovador e trabalhar com propostas que instiguem os alunos. Assim, a escolha de trabalhar conteúdos matemáticos aliados à fotografia despertou nos alunos uma certa curiosidade. O famoso "Como assim?".

A proposta deste trabalho teve como objetivo ensinar os conceitos sobre razão áurea e sequência de Fibonacci de uma forma lúdica e interessante, sem perder as formalidades envolvidas. Para isso, procuramos unir a fotografia às atividades matemáticas estabelecidas, proporcionando uma conexão com o cotidiano do aluno. Muitas vezes os alunos necessitam disso, algo concreto para entender o porquê do objeto de estudo. É claro que devemos tomar o cuidado de mostrar que o conhecimento não deve ser obtido apenas desta maneira (também existe beleza no aprender a aprender) mas quando há um link com a vida do aluno, o processo de ensino aprendizagem se torna mais fácil e motivador.

Apesar de não ser um conteúdo obrigatório no currículo do ensino fundamental e médio, a razão áurea pode ser estudada de uma maneira atrativa e bem conectada com outros temas desta etapa escolar tais como razão e proporção, números irracionais, estudo do círculo e da circunferência e equação do 2º grau, por exemplo.

Levando em consideração a presença da matemática em diversas áreas não exatas e o desconhecimento dessa relação, a ideia da realização deste trabalho é justamente aproximar a matemática e instigar os alunos a compreenderem que a matemática pode sim dialogar com as mais diferentes áreas do conhecimento.

Aliados a isso, o uso de tecnologias tem sido visto como um fator positivo na hora da elaboração de uma aula. Hoje em dia, a grande maioria dos jovens em idade escolar, mesmo os de escola pública, possuem celular e contas em redes sociais. Unir essas ferramentas a uma atividade matemática só irá contribuir para o despertar desse interesse e curiosidade.

Desta maneira, o uso de uma ferramenta tecnológica aliada à fotografia deixa a atividade mais dinâmica e prazerosa. Sem contar que a participaçao dos alunos em todo o processo, contribui substancialmente ao resultado final do trabalho.

Nos capítulos seguintes, apresentaremos as definições básicas e demonstrações relevantes dos conteúdos matemáticos abordados além de algumas curiosidades que dão graça, beleza e cultura ao estudo.

Posteriormente apresentamos o trabalho do fotógrafo que inspirou essa proposta e descrevemos a atividade desenvolvida, sua metodologia e os resultados alcançados.

.

2
RAZÃO AÚREA

2.1
Um pouco de história

A razão áurea é uma razão estudada desde a antiguidade por matemáticos, físicos, astronômos, artistas, biológos e por todos aqueles que acreditam na sua relação com a arte, natureza, música e geometria.

Segundo Livio (2006), a primeira definição clara que se tornou conhecida como razão áurea foi dada em torno de 300 a.C. por Euclides de Alexandria em Os Elementos. Eis as palavras de Euclides: “Diz-se que uma linha reta é cortada na razão extrema e média quando,assim como a linha toda está para o maior segmento, o maior segmento está para o menor.” (LIVIO, 2006, p.14).

Figura 1: Segmento $\overline{AB}$ dividido na razão áurea.
Fonte: Elaborada pela autora.

Assim, dado um segmento AB dividido por um ponto C de tal forma que $\overline{AC}$ seja o segmento maior e $\overline{CB}$ o menor, temos que a razão entre os segmentos $\overline{AC}$ e $\overline{CB}$ seja igual à razão dos segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$.

Algebricamente, façamos:

$\overline{AC}$ = a, $\overline{CB}$ = b e

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} \qquad \therefore \qquad \frac{a}{b} = \frac{a+b}{a}$$

Desenvolvendo, temos: $a^2 = ab + b^2$.

Dividindo a equação por b^2:

$$\frac{a^2}{b^2} = \frac{ab}{b^2} + \frac{b^2}{b^2}$$

Assim,

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a}{b} + 1 \qquad (*)$$

Porém, chamando a proporção $\frac{a}{b} = \frac{a+b}{a} = \varphi$ e substituindo $\frac{a}{b}$ por φ, temos:

$$\varphi^2 = \varphi + 1$$

$$\varphi^2 - \varphi - 1 = 0 \qquad (**)$$

Resolvendo a equação do 2º grau, utilizando a Fórmula de Bhaskara, temos:

$$\Delta = (-1)^2 - 4.1.(-1)$$

$$\Delta = 5$$

$$\varphi = \frac{-(-1) \pm \sqrt{5}}{2.1} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Como o valor de φ refere-se à razão entre medidas, ficaremos com o resultado positivo: $\frac{1+\sqrt{5}}{2} \cong 1{,}6180$ ... Já o valor negativo é chamado de conjugado de φ.

A escolha da letra φ seria uma homenagem a Fídias (490-430 a.C.), famoso arquiteto e escultor grego que viveu em Atenas e foi o responsável pela ornamentação do Partenon[1].

[1] É um templo erguido no século V a.C. em Acrópolis na cidade de Atenas. Sua construção teve como objetivo homenagear a deusa Atenas.

Podemos ressaltar que os números π e φ são ambos números irracionais. Ou seja, são números que não podem ser expressos como uma divisão de dois números inteiros. O mais conhecido pelos alunos é o π. Alguns matemáticos sugerem que os pitagóricos foram os primeiros a descobrirem a razão áurea e a incomensurabilidade.

Em Livio (2006), vemos que a descoberta desses números levou a uma verdadeira crise filosófica. Os pitagóricos acreditavam que a existência de tais números devia representar a existência de um erro cósmico.

Muitos alunos conhecem o número π quando começam a estudar círculo e circunferência. Esse conhecimento prévio e a definição de número irracional fazem com que os alunos não criem estranheza ao serem apresentados ao número φ, pois já conhecem a natureza desses números.

Além disso, o número de ouro aparece em curiosas expressões matemáticas que surpreendem os alunos e que podem ser apresentadas como motivação. Vejamos duas delas a seguir.

Desejamos calcular a o valor da expressão $\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\cdots}}}$.

Chamando-a de x, temos:

$$x = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\cdots}}}$$

Elevando ambos os lados ao quadrado:

$$x^2 = 1 + \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\cdots}}}.$$

Note que teremos infinitamente a expressão inicial, à qual chamaremos de x. Assim, podemos novamente fazer esta substituição na equação acima, encontrando a equação

$$x^2 = 1 + x,$$

cujas raízes já conhecemos.

A segunda expressão a ser apresentada é $1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\cdots}}}}$.

Chamando novamente a expressão de x, temos:

$$x = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\cdots}}}}.$$

Observe que o denominador da segunda parcela do lado direito é exatamente a expressão inicial. Desse modo, fazendo a substituição seguimos com:

$$x = 1 + \frac{1}{x}$$

Multiplicando a equação por x, em ambos os lados, temos:

$$x^2 = x + 1 \ \therefore x^2 - x - 1 = 0.$$

Novamente, chegamos à equação que define a razão áurea.

Nas duas expressões foram trabalhados conceitos matemáticos que um aluno de 9° ano já estudou: fração, radiciação e equação do 2°grau. Porém, o mais interessante é o fator “magia”. Trabalhar com expressões que repetem um padrão indefinidamente torna possível fazer as substituições vistas e apresentar aos alunos que estes passos que mais parecem um “passe de mágica” são, na verdade, técnicas algébricas que ratificam a beleza da matemática.

2.2
O retângulo áureo

Chama-se retângulo áureo qualquer retângulo ADGF (Fig. 2) com a seguinte propriedade: se dele suprimirmos um quadrado, como ABCD, o retângulo restante, BCGF, será semelhante[2] ao retângulo original, (ÁVILA,1985).

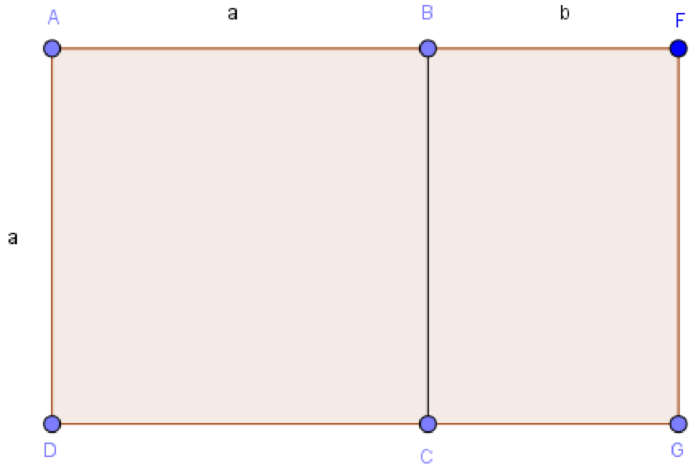


Figura 2: Retângulo áureo ADGF.
Fonte: Elaborada pela autora.

Se a + b e a são as medidas dos comprimentos dos lados do retângulo original, a definição acima se traduz na relação:

$$\frac{a}{a+b} = \frac{b}{a}$$

Segundo Hunley (1985), a construção de um retângulo áureo é simples, acompanhe os passos na figura 3:

- sobre o lado AB de um quadrado ABCD, toma-se o ponto E, ponto médio do segmento AB;
- com um compasso, com o centro em E e raio EC, desenha-se um arco de círculo que corte o prolongamento de AB - chame de F esse ponto;
- a partir de F, trace uma perpendicular a AF, até que encontre o prolongamento de DC – chame de G esse ponto.

[2] Retângulos semelhantes são retângulos que possuem as medidas dos lados correspondentes proporcionais e os ângulos correspondentes congruentes.

- AFGD é um retângulo áureo.

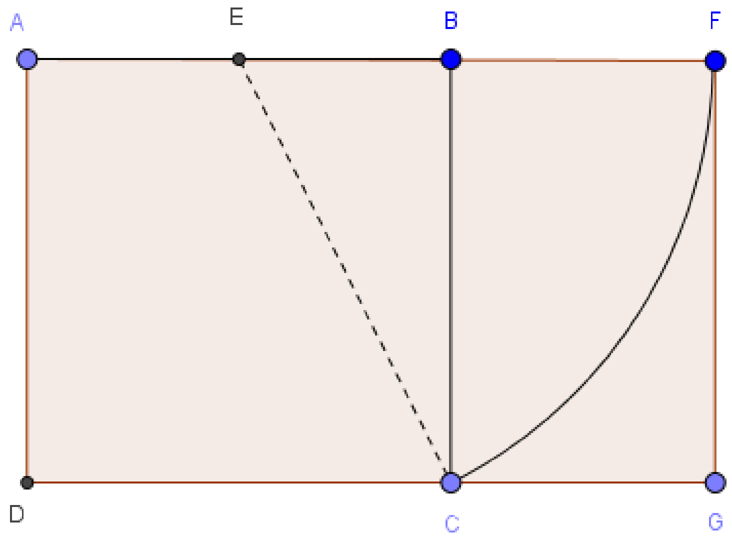


Figura 3: Retângulo áureo – construção.
Fonte: Elaborada pela autora.

Nomeando alguns segmentos da figura acima, temos:

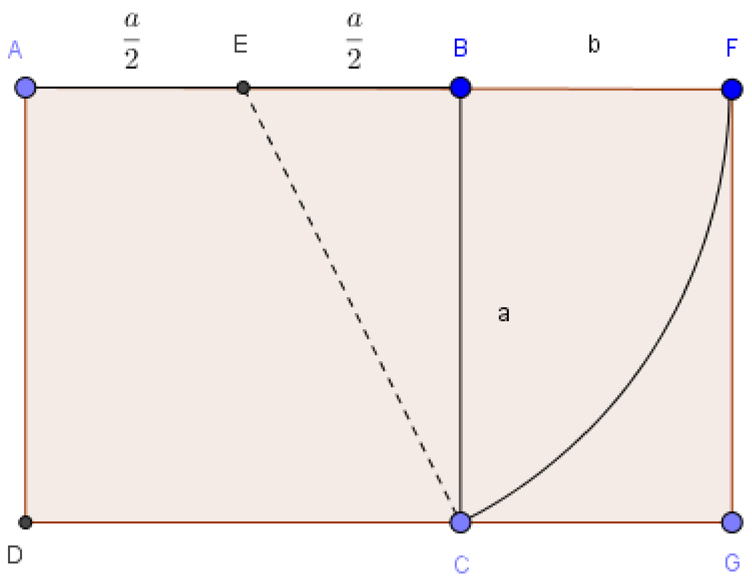


Figura 4: Retângulo áureo .
Fonte: Elaborada pela autora.

Para mostrar que este processo nos leva a um retângulo áureo, chamemos a medida do lado do quadrado ABCD de a, donde AE = EB = $\frac{a}{2}$. E como $EC = EF = b + \frac{a}{2}$, aplicando o Teorema de Pitágoras no triangulo retângulo EBC temos:

$$\left(b+\frac{a}{2}\right)^2 = a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

Desenvolvendo:

$$b^2 + ba + \frac{a^2}{4} = a^2 + \frac{a^2}{4}\ ,$$

$$a^2 - ba - b^2 = 0 \quad \text{, dividindo ambos os lados por } b^2$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 - \frac{a}{b} - 1 = 0.$$

Ou seja, simplificando a equação acima, obtemos daqui a relação (*) que, como vimos, equivale à relação (**). Logo AFGD é um retângulo áureo.

A partir dessa construção podemos, com régua e compasso, produzir novos retângulos áureos encaixados como na figura abaixo. Esse processo nos ajudará, em breve, na construção de uma aproximação da espiral áurea.

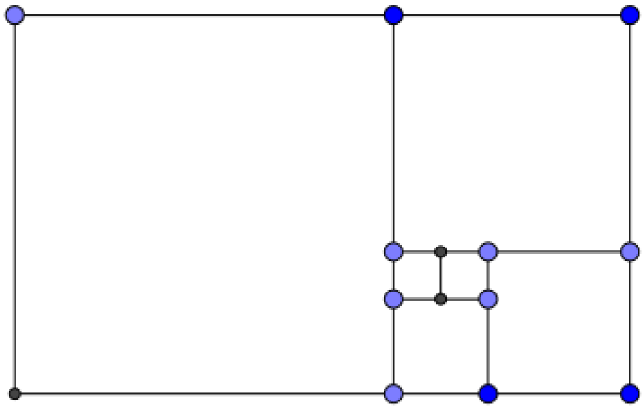


Figura 5: Retângulos áureos consecutivos.
Fonte: Elaborada pela autora.

Observe que escolhendo quaisquer dois retângulos consecutivos, ou seja, um maior e outro imediatamente menor que ele, as suas diagonais irão se cruzar sempre num mesmo ponto. Por este ponto ser inatingível e devido às propriedades "divinas" atribuídas à razão áurea, segundo Livio (2006), este ponto foi chamado pelo matemático Clifford A. Pickover[3] de "O Olho de Deus".

[3] Cliffordd A. Pickover fez o seu doutorado no Departamento de Biofísica Molecular e Bioquímica da Universidade de Yale, é autor de muitos livros e artigos nos quais trabalha na divulgação científica.

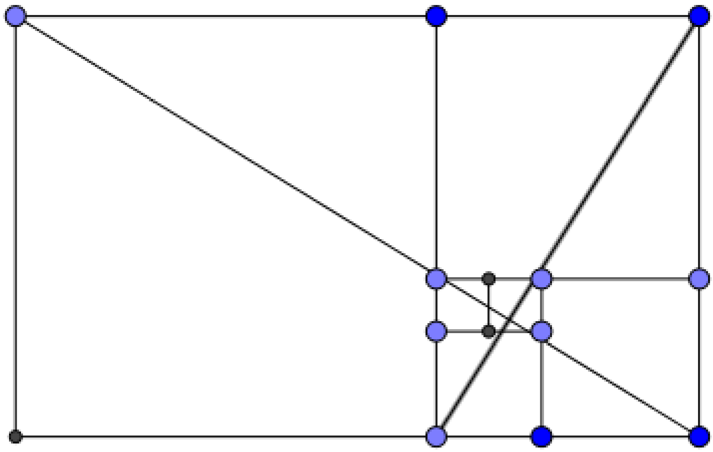


Figura 6: Encontro das diagonais.
Fonte: Elaborada pela autora.

Uma demonstração para tal relação foi vista em Santos (2013) e diz que para prová-la devemos considerar três de seus retângulos áureos consecutivos.

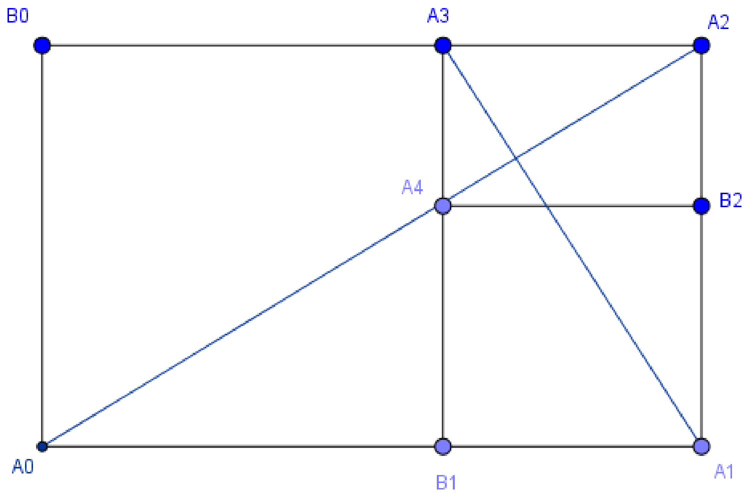


Figura 7: Encontro das diagonais (demonstração).
Fonte: Elaborada pela autora.

Considerando o sistema cartesiano de coordenadas OXY com centro A_0=(0,0) de modo que o eixo OX contenha o lado $\overline{A_0A_1}$ e seja ainda a medida $A_0B_0 = k$. Assim, as coordenadas dos pontos A_i, i ∈ {1, 2, 3, 4} são:

$$A_1 = (\varphi k, 0),$$

$$A_2 = (\varphi k, k),$$

$$A_3 = (k, k),$$

$$A_4 = (k, k\varphi - k).$$

Dessa maneira, queremos mostrar que as retas $\overleftrightarrow{A_0A_2}$, $\overleftrightarrow{A_1A_3}$ e $\overleftrightarrow{A_2A_4}$ são tais que $\overleftrightarrow{A_0A_2} \cap \overleftrightarrow{A_1A_3} = \overleftrightarrow{A_2A_4} \cap \overleftrightarrow{A_1A_3}$.

Para isso, tomemos os coeficientes angulares das retas $\overleftrightarrow{A_0A_2}$, $\overleftrightarrow{A_1A_3}$ e $\overleftrightarrow{A_2A_4}$, respectivaente, m_1, m_2 e m_3 como:

$$m_1 = \frac{k}{\varphi k} = \frac{1}{\varphi},$$

$$m_2 = \frac{k}{k - \varphi k} = \frac{1}{1 - \varphi},$$

$$m_3 = \frac{\varphi k - k - k}{k - \varphi k} = \frac{\varphi - 2}{1 - \varphi}$$

Lembrando que $\varphi^2 - \varphi = 1$, e tomando o coeficiente m_3, substituindo o valor 1 do denominador pelo 1º membro da igualdade, temos:

$$\frac{\varphi - 2}{1 - \varphi} = \frac{\varphi - 2}{\varphi^2 - \varphi - \varphi} = \frac{\varphi - 2}{\varphi(\varphi - 2)} = \frac{1}{\varphi}$$

Logo, as retas $\overleftrightarrow{A_0A_2}$ e $\overleftrightarrow{A_2A_4}$ são coincidentes pois possuem o mesmo coeficiente angular e o ponto A_2 é comum às duas. Portanto,

$$\overleftrightarrow{A_0A_2} \cap \overleftrightarrow{A_1A_3} = \overleftrightarrow{A_2A_4} \cap \overleftrightarrow{A_1A_3} = P,$$

onde P é o ponto obtido a partir das equações das retas $\overleftrightarrow{A_0A_2}$ e $\overleftrightarrow{A_1A_3}$, respectivamente dadas por:

$$y - 0 = m_1(x - 0) \Rightarrow y = \frac{1}{\varphi}x,$$

$$y - 0 = m_2(x - k\varphi) \Rightarrow y = \frac{1}{1 - \varphi}x - \frac{k\varphi}{1 - \varphi}.$$

Igualando as duas equações acima e fazendo os cálculos necessários, chegamos ao ponto P = $\left(\frac{k\varphi^2}{2\varphi - 1}, \frac{k\varphi}{2\varphi - 1}\right)$.

2.3
A espiral áurea

Para falarmos sobre a espiral áurea também devemos citar a espiral logarítmica. Uma vez que, segundo Livio (2006), a duas espirais caminham de mãos dadas.

Segundo a definição vista em Santos (2013), temos:

Definição: A espiral logarítmica é a curva cuja equação polar é

$$r = a \,.\, e^{b.\theta},$$

onde r é a distância do ponto P, pertencente à espiral, até a origem O, também chamada de raio $(\vec{r} = \overrightarrow{OP})$; θ é o ângulo que $\overrightarrow{OP}$ faz com o eixo x; e a e b são constantes arbitrárias.

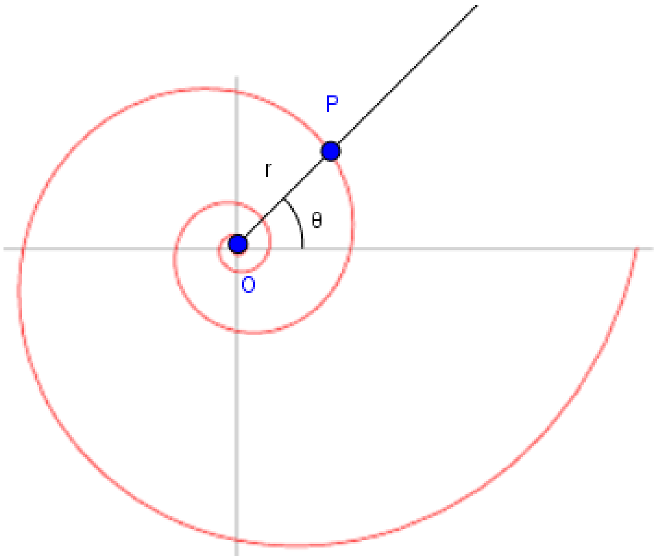


Figura 8: Espiral logarítmica 1.
Fonte: http://mathworld.wolfram.com/LogarithmicSpiral.html modifcada no Geogebra pela autora.

A espiral logarítimica áurea é um caso particular da logarítimica quando esta expande pelo fator áureo $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ a cada quarto de volta e possui um valor específico para o fator de crescimento b: b = $\frac{2ln\varphi}{\pi}$ com θ em radianos. Neste caso, teremos $\theta \approx 1{,}27\ rad \approx 73°$.

Nota-se que a espiral áurea é uma espiral logarítimica mas nem toda espiral logarítimica é uma espiral áurea.

Segundo o site mathworld[4], a espiral logarítmica foi primeiramente estudada por Decartes[5] em 1638 e posteriormente por Jakob Bernoulli[6].

A espiral logarítmica foi chamada por Decartes de espiral equiangular já que o ângulo em que um raio vetor corta a curva, em qualquer ponto, é constante. Isto quer dizer que conforme a curva vai aumentando, o seu formato permanece inalterado. Esta característica é chamada de auto-similaridade. Por conta disso, Bernoulli chamou a espiral logarítmica de "spira mirabilis" (do latim, espiral maravilhosa). Em suas palavras: "Pode ser usada como um símbolo tanto de vigor e constância na adversidade quanto do corpo humano, o qual, após todas as mudanças, até mesmo após a morte, será restaurada ao seu exato e perfeito ser." (LIVIO, 2006, p.137).

O fascínio pelas espirais não é exclusivo de Bernoulli. Outros estudiosos também se dedicaram ao assunto por conta da presença desse tipo de curva em fenômenos da natureza, como veremos adiante.

Um outro processo interessante de construção de uma espiral logarítmica é observar que qualquer reta que passa pela origem formará com as retas tangentes a ela nos pontos de interseção, um ângulo de medida constante, que, no caso da figura a seguir, chamamos de $\propto$.

[4] Disponível em <http://mathworld.wolfram.com/LogarithmicSpiral.html>. Acesso em abril, 2017.

[5] Descartes (1596-1650) foi um filósofo e matemático francês. Foi criador do pensamento cartesiano, sistema filosófico que deu origem à Filosofia Moderna. Autor da obra "*O Discurso sobre o Método*", um tratado filosófico e matemático, publicado na França em 1637. Uma das mais famosas frases do seu Discurso é "Penso, logo existo**".**

[6] Jakob Bernoulli (1654-1705) foi o primeiro matemático a desenvolver o cálculo infinitesimal para além do que fora feito por Newton e Leibniz. É considerado o pai do cálculo exponencial. Foi professor em Basileia e sua contribuição foi importantíssima para a geometria analítica, à teoria das probabilidades e ao cálculo das variações.

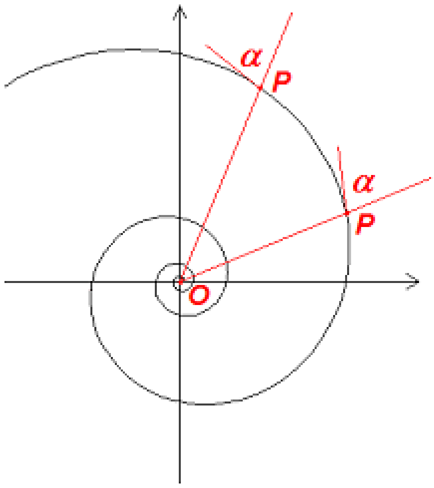


Figura 9: Espiral logarítmica 2
Fonte: http://www.mat.uc.pt/~picado/conchas/espiral.html

Sendo assim, é possível obter várias retas concorrentes em um único ponto, denominado ponto de origem, e a partir de um raio escolhido, em sua extremidade, traçar o segmento perpendicular até a próxima reta concorrente. Repetindo esse processo indefinidamente, à medida que o número de retas tende ao infinito, a sequência de segmentos perpendiculares tende à uma espiral logarítmica, conforme a figura abaixo.

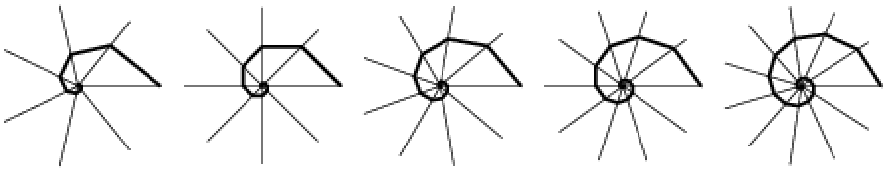


Figura 10: Processo de construção da espiral
Fonte: http://mathworld.wolfram.com/LogarithmicSpiral.html

Já a espiral áurea, pode ser obtida através de um processo de construção geométrica que parte de um retângulo áureo, e traça, em cada quadrado, um quarto de circunferência de raio igual à medida do lado do quadrado correspondente e centro respectivamente nos vértices F, G, H, I e assim por diante, conforme a figura 11.

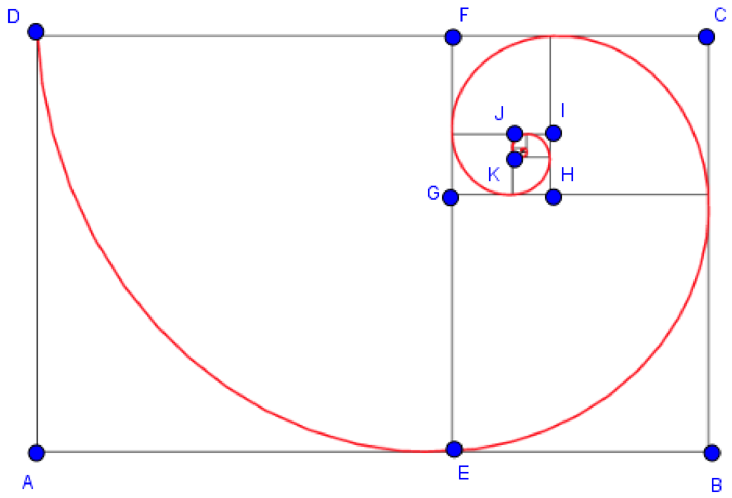


Figura 11: Espiral logarítmica no retângulo áureo.
Fonte: http://mathworld.wolfram.com/GoldenRectangle.html (modificada pela autora)

Vale ressaltar que esta construção é apenas uma aproximação da espiral logarítmica áurea. Além disso, observe que o centro da espiral é o ponto de encontro das diagonais dos retângulos como visto anteriormente na figura 7.

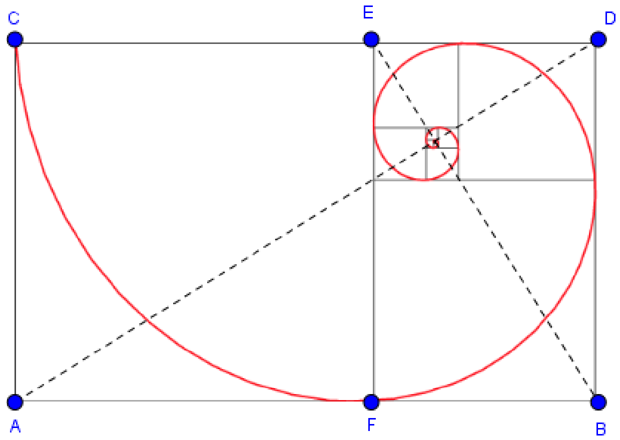


Figura 12: Centro da espiral.
Fonte: A autora.

3
A SEQUÊNCIA DE FIBONACCI

Leonardo de Pisa nascido na década de 1170, mais conhecido como Leonardo Fibonacci, foi um matemático italiano que contribuiu muito para a introdução dos algarismos indo-arábicos, dentre outras coisas.

Figura 13: Leonardo Fibonacci.
Fonte: https://aula365.wordpress.com/tag/educacion/

3.1
Fibonacci e o Problema dos Coelhos

Em 1202, foi publicado o seu livro Liber Abaci (Livro do ábaco). Esse livro teve um grande valor na introdução do sistema de numeração que até hoje conhecemos e também contribuiu no desenvolvimento da álgebra na Europa e no mundo ocidental.

Segundo Livio (2006), foi justamente neste livro que Fibonacci expôs um problema que o tornou famoso entre matemáticos, cientistas e artistas.

> Um homem pôs um par de coelhos num lugar cercado por todos os lados por um muro. Quantos pares de coelhos podem ser gerados a partir deste par em um ano se, supostamente, todo mês cada par dá à luz a um novo par, que torna-se fértil a partir do segundo mês? (LIVIO, 2006, p. 116)

Antes de resolver o problema devemos observar que um par de coelhos necessita de 2 meses para dar a luz e que não há nenhuma interferência interna ou externa no cercado.

Assim, no 1ª mês há 1 par de coelhos, no 2º somente este mesmo par se mantém. No 3º mês, este par dará à luz a um outro par, totalizando 2 pares de coelhos. Já no 4º mês, teremos 3 pares de coelhos, pois o primeiro par terá dado a luz a mais um par.

Seguindo este raciocínio podemos facilmente chegar à resposta procurada. Porém com o uso de uma tabela, as informações ficam melhor organizadas. A figura a seguir ilustra a situação proposta pelo problema.

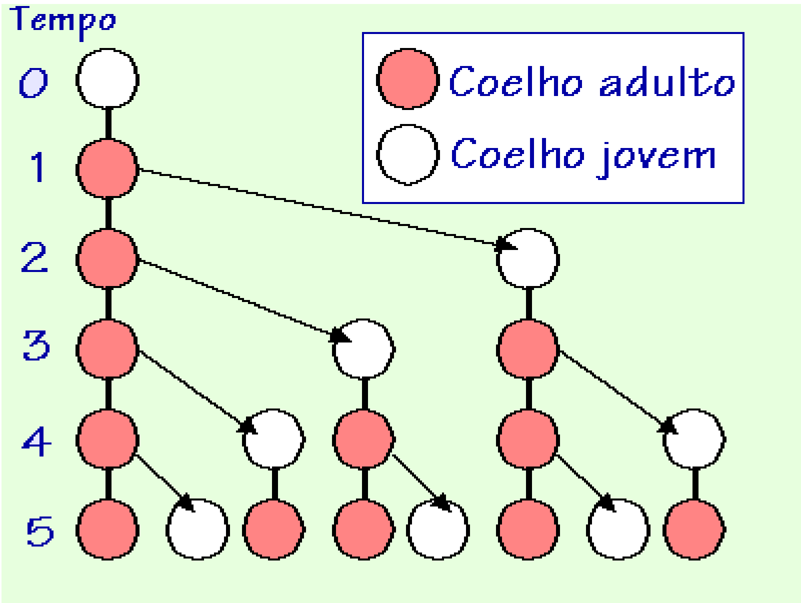


Figura14: Ilustração dos nascimentos dos coelhos.
Fonte: http://www.interaula.com/matweb/alegria/fibon/seqfib1.htm

Mês	Quantidade de casais de coelhos do mês anterior	Quantidade de casais de coelhos gerados	Quantidade total de casais de coelhos
1	0	1	1
2	1	0	1
3	1	1	2
4	2	1	3
5	3	2	5
6	5	3	8
7	8	5	13
8	13	8	21
9	21	13	34
10	34	21	55
11	55	34	89
12	89	55	144

Tabela 1: Modelagem dos dados do Problema dos Coelhos

Observe que a quantidade total de casais de coelhos forma a seguinte sequência: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21,.... E esta, tem a característica de que, a partir do terceiro termo, cada termo pode ser escrito como a soma dos 2 imediatamente anteriores. Esta sequência foi chamada de Sequência de Fibonacci pelo matemático francês Édouard Lucas no século XIX. A Sequência de Fibonacci também ficou associada a outros fenômenos que veremos no próximo capítulo.

Essa é uma sequência conhecida como sequência recursiva, uma vez que sabendo a relação entre os termos sucessivos, é possível encontrar uma fórmula matemática para o termo geral.

3.2 Recorrência

Uma sequência é definida por recorrência quando uma regra permite calcular qualquer termo através dos seus antecessores imediatos. Há recorrências lineares de primeira, segunda ordem, etc. Essas podem ser homogêneas ou não em função de possuírem ou não termos independentes. A sequência de Fibonacci é uma recorrência linear de 2ª. ordem, homogênea e, portanto, está associada a uma equação de 2º grau, chamada de equação característica da sequência.

Segundo Livio (2006), a Sequência de Fibonacci foi a primeira sequência recursiva conhecida na Europa. E, como visto, sua propriedade geral é que cada termo na sequência é igual à soma dos dois imediatamente anteriores. Usando a notação introduzida em 1634 pelo matemático Albert Girard, temos:

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n,$$

onde F_n representa o n-ésimo termo da sequência. O objetivo agora é calcularmos uma expressão fechada para F_n[7]. Usaremos como condição inicial, $F_0 = 0$ e $F_1 = 1$, para efeito de simplificação.

A equação característica associada à expressão é $r^2 = r + 1$ cujas raízes são:

$$r_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \ e \ r_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

e F_n fica portanto definida como:

$$F_n = C_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + C_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

Logo, para determinar C_1 e C_2, usaremos as condições iniciais. Assim, obteremos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0 \\ C_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + C_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = 1 \end{cases}$$

[7] Maiores detalhes e informações sobre soluções de equações de recorrência podem ser vistos no livro Matemática Discreta da coleção PROFMAT.

Resolvendo o sistema, temos que $C_1 = -C_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}$. E substituindo em F_n, chegamos à fórmula geral

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

Esta fórmula, pelo o que tudo indica, já era conhecida pelos matemáticos Leonard Euler (1707-1783) e Abraham de Moivre (1667-1754) no século XVIII. No entanto, em meados do século XIX, ela foi redescoberta pelo matemático Jacques Phillipe Marie Binet(1786-1856), e ficou conhecida como Fórmula de Binet, fórmula esta que permite conhecer o valor de qualquer número de Fibonacci (F_n), dado o valor n de sua posição na sequência.

3.3
Relação entre o número de ouro e a sequência de Fibonacci

Uma observação imediata na Fórmula de Binet é que justamente o número φ e seu conjugado aparecem nela. Donde podemos reescrevê-la como:

$$F_n = \frac{\varphi^n - (-1)^n \varphi^{-n}}{\sqrt{5}}.$$

Note que o conjugado de φ pode ser reescrito como seu simétrico inverso $-\varphi^{-1}$, racionalizando seu denominador:

$$\frac{1}{\varphi} = \frac{2}{1+\sqrt{5}} \cdot \frac{1-\sqrt{5}}{1-\sqrt{5}} = \frac{2\left(1-\sqrt{5}\right)}{1-5} = \frac{2\left(1-\sqrt{5}\right)}{-4} = \frac{1-\sqrt{5}}{-2} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

$$-\frac{1}{\varphi} = -\varphi^{-1} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

Estudando a paridade da potência, se n for ímpar, teremos

$$F_n = \frac{\varphi^n + \varphi^{-n}}{\sqrt{5}}.$$

E se n for par, teremos:

$$F_n = \frac{\varphi^n - \varphi^{-n}}{\sqrt{5}}.$$

Uma relação curiosa é que se multiplicarmos a equação $\varphi^2 = \varphi + 1$ por φ, indefinidamente, teremos:

$$\varphi^2 = \varphi + 1$$
$$\varphi^3 = \varphi^2 + \varphi = \varphi + 1 + \varphi = 2\varphi + 1$$
$$\varphi^4 = 2\varphi^2 + \varphi = 2(\varphi + 1) + \varphi = 3\varphi + 2$$
$$\varphi^5 = 3\varphi^2 + 2\varphi = 5\varphi + 3$$
$$\varphi^6 = 5\varphi^2 + 3\varphi = 8\varphi + 5$$

Podemos observar que a potência de φ é igual a um múltiplo de φ acrescido de um número natural. E que os valores dos coeficientes de φ formam a sequência 1, 2, 3, 5, 8... e os valores independentes formam a sequência 1,1,2,3,5,8... .

A partir disso, generalizaremos a relação com a proposição abaixo, vista em Santos (2013).

Proposição 3.1: Seja F_n o n-ésimo termo da Sequência de Fibonacci, então, para todo natural n > 2, tem-se:

$$\varphi^n = F_n.\varphi + F_{n-1}$$

Demonstração. Usaremos indução sobre n.

i) caso base: n = 2, resultado imediato $\varphi^2 = \varphi + 1$

ii) caso indutivo. Admitindo que a proposição seja válida para n, queremos provar que será válida para n + 1. Multiplicando ambos os lados da sentença por φ, temos:

$$\varphi.\varphi^n = \varphi\,.F_n.\varphi + \varphi\,.F_{n-1}$$
$$\varphi^{n+1} = F_n.\varphi^2 + \varphi.F_{n-1}$$

Substituindo φ^2 por $\varphi + 1$, seguimos:

$$\varphi^{n+1} = F_n.(\varphi + 1) + \varphi.F_{n-1}$$
$$\varphi^{n+1} = F_n.\varphi + F_n + \varphi.F_{n-1}$$

$$\varphi^{n+1} = \varphi.(F_n + F_{n-1}) + F_n$$

Neste momento, devemos lembrar que dois elementos consecutivos da sequência de Fibonacci geram o termo seguinte, ou seja, $F_{n-1} + F_n = F_{n+1}$. Logo,

$$\varphi^{n+1} = \varphi.F_{n+1} + F_n.$$

Uma outra relação interessante surge à medida que dividimos o sucessor pelo antecessor da Sequência de Fibonacci. Essa sequência assim construída se aproxima, cada vez mais, do valor do número de ouro.

De maneira intuitiva, podemos construir uma tabela para verificação.

$\frac{1}{1}$	1
$\frac{2}{1}$	2
$\frac{3}{2}$	1,5
$\frac{5}{3}$	1,66666...
$\frac{8}{5}$	1,6
$\frac{13}{8}$	1,625
$\frac{21}{13}$	1,615385...
$\frac{34}{21}$	1,619048...
$\frac{55}{34}$	1,617647...
$\frac{89}{55}$	1,618182...
$\frac{144}{89}$	1,617978...
$\frac{233}{144}$	1,618056...
$\frac{377}{233}$	1,618026...

Tabela 2: Razão entre os números de Fibonacci e a Razão Áurea.

Esta propriedade foi descoberta por Johannes Kepler em 1611 e também pode ser visualizada através do gráfico abaixo.

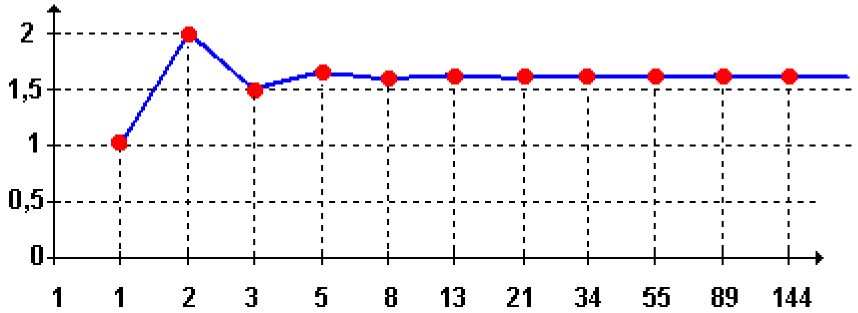


Figura 15: Gráfico de aproximação da razão áurea e os números de Fibonacci.
Fonte: http://pessoal.sercomtel.com.br/matematica/alegria/fibonacci/seqfib1.htm

Proposição 3.2: Sejam F_n e F_{n+1} termos consecutivos da sequência de Fibonacci, então

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \varphi.$$

Demonstração: Substituindo a expressão geral de $F_n = \frac{\varphi^n-(-1)^n\varphi^{-n}}{\sqrt{5}}$, temos:

$$\frac{F_{n+1}}{F_n} = \frac{\varphi^{n+1} - (-1)^{n+1} \cdot \varphi^{-(n+1)}}{\varphi^n - (-1)^n \cdot \varphi^{-n}}.$$

Colocando $\varphi + 1$ em evidência no numerador e φ no denominador, seguimos:

$$\frac{\varphi^{n+1} \cdot [1 - (-1)^{n+1} \cdot \varphi^{-2(n+1)}]}{\varphi^n \cdot [1 - (-1)^n \cdot \varphi^{-2n}]}$$

Simplificando $\frac{\varphi^{n+1}}{\varphi^n}$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \varphi. \left[\frac{1 - (-1)^{n+1} \cdot \varphi^{-2(n+1)}}{1 - (-1)^n \cdot \varphi^{-2n}}\right]$$

Conforme n tende ao infinito, a expressão no interior dos colchetes tende a 1. Logo,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \varphi.$$

3.4
O retângulo áureo e a Sequência de Fibonacci

Chamamos de “retângulo de Fibonacci” a construção de um retângulo que muito se aproxima ao retângulo áureo.

Para realização de tal construção, começamos com um quadrado de lado 1. Colocamos um quadrado idêntico ao lado do primeiro, formando assim um novo retângulo. A seguir, construímos um quadrado de lado 2 utilizando os dois primeiros quadrados de lado 1, conforme apresentado na figura 16.

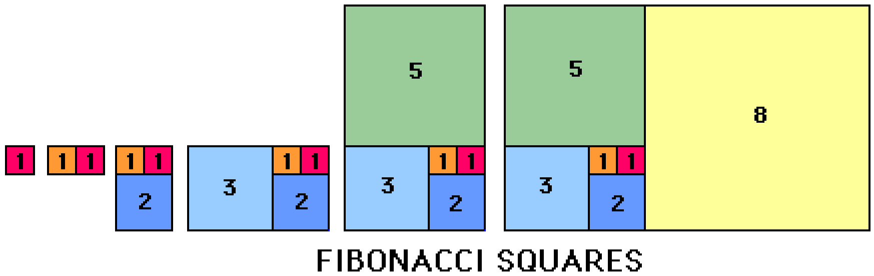


Figura 16: Construção dos retângulos de Fibonacci.
http://mathforum.org/dr.math/faq/fibonacci.squares1.gif

Esse processo significa que estamos construindo quadrados cujos lados têm como medida o comprimento do maior lado do retângulo. Quanto maior for o número de repetição mais próximo de um retângulo áureo ficará. Nota-se que o uso da expressão “retângulo de Fibonacci” é justificado, observando que a sequência de medidas dos lados dos quadrados é 1, 1, 2, 3, 5, 8...

Já vimos que quanto maior forem os números da sequência de Fibonacci mais próximo sua razão chega ao número áureo. Sendo assim, podemos considerar, por exemplo, que o retângulo de dimensões 89 por 55 é uma boa aproximação de um retângulo áureo.

4
RAZÃO ÁUREA E FIBONACCI EM OUTRAS ÁREAS

Muitos autores já pesquisaram sobre relações da razão áurea e dos números de Fibonacci em outras áreas. Este parece ser um assunto de grande curiosidade e, por ora, até polêmico já que outros autores defendem a ausência de provas mais concretas dessas relações.

A seguir, veremos algumas curiosidades e polêmicas acerca dessas relações em áreas diversas.

4.1
Na arquitetura

A beleza e o fascínio em torno da razão áurea foram muito além da matemática. Acredita-se que uma das construções mais imponentes da Grécia antiga tenha em seu projeto arquitetônico a presença do número de ouro.

O Partenon foi construído em Atenas por volta dos anos 430-440 a.C.. Segundo Livio (2006), a maioria dos livros sobre razão áurea afirma que as dimensões do Partenon, enquanto seu frontão triangular estava intacto, ajustava-se a um retângulo áureo.

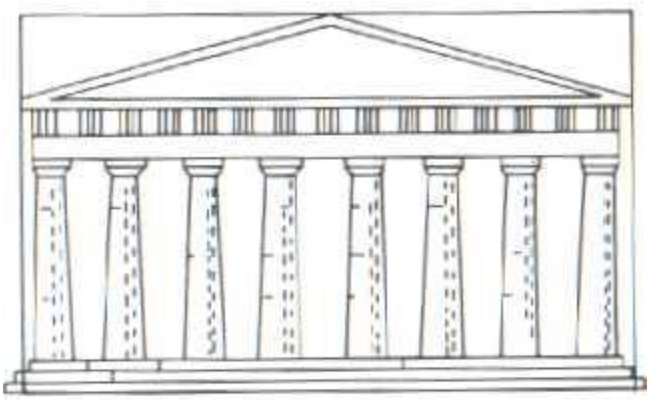


Figura 17: Frente do Partenon.
Fonte:http://www.uel.br/cce/mat/geometrica/php/dg/dg_4t.php

Muito se especula em torno desse assunto, contudo, não há nenhuma certeza que na construção desse templo, tenha sido usada de forma consciente, a razão áurea. O matemático George Markowsky, por exemplo, em seu artigo intitulado

“Conceitos equivocados sobre Razão Áurea” questionou a presença do número de ouro nessa construção.

Para Markowsky, as dimensões do Partenon não são precisas. Elas aparecem nos registros a partir de referenciais diferentes. Mesmo levando em consideração a altura do ápice acima do pedestal, a razão encontrada chegaria próxima (1,72) mas não seria a razão áurea. Em seu artigo, ele diz:

> The dimensions of Parthenon vary from source to source probably because different authors are measuring between different points. With so many numbers available a golden ratio enthusiast could choose whatever numbers gave the best result. (MARKOWSKY,1992, p.8)[8]

Controvérsias à parte, o arquiteto e pintor suíço Charles-Édouard Jeanneret (1887-1965) foi um grande defensor do uso da razão áurea na arte e na arquitetura. Curiosamente, nem sempre foi assim. Antes da publicação de dois livros na época sobre a razão áurea, Le Corbusier, nome que adotou após um tempo, nem sempre teve opiniões positivas sobre o assunto.

De acordo com Livio (2006), o que levou Le Corbusier[9] a se aprofundar no assunto foi seu interesse pelas formas e estruturas básicas na natureza e sua proximidade com a música. A busca por uma proporção padronizada culminou na introdução de um novo sistema proporcional chamado “Modulor”.

[8] “As dimensões do Partenon variam de fonte para fonte provavelmente porque diferentes autores estão medindo entre pontos diferentes. Com tantos números disponíveis um entusiasta da razão áurea poderia escolher quaisquer números que oferecessem o melhor resultado.”(MARKOWSKY, p.8, tradução da autora)

[9] Le Corbusier foi um grande arquiteto do século XX e teve grande influência na formação na geração modernista de arquitetos. Ele desenvolveu extensa atividade acadêmica e teórica e publicou muitos artigos sobre seus estudos.

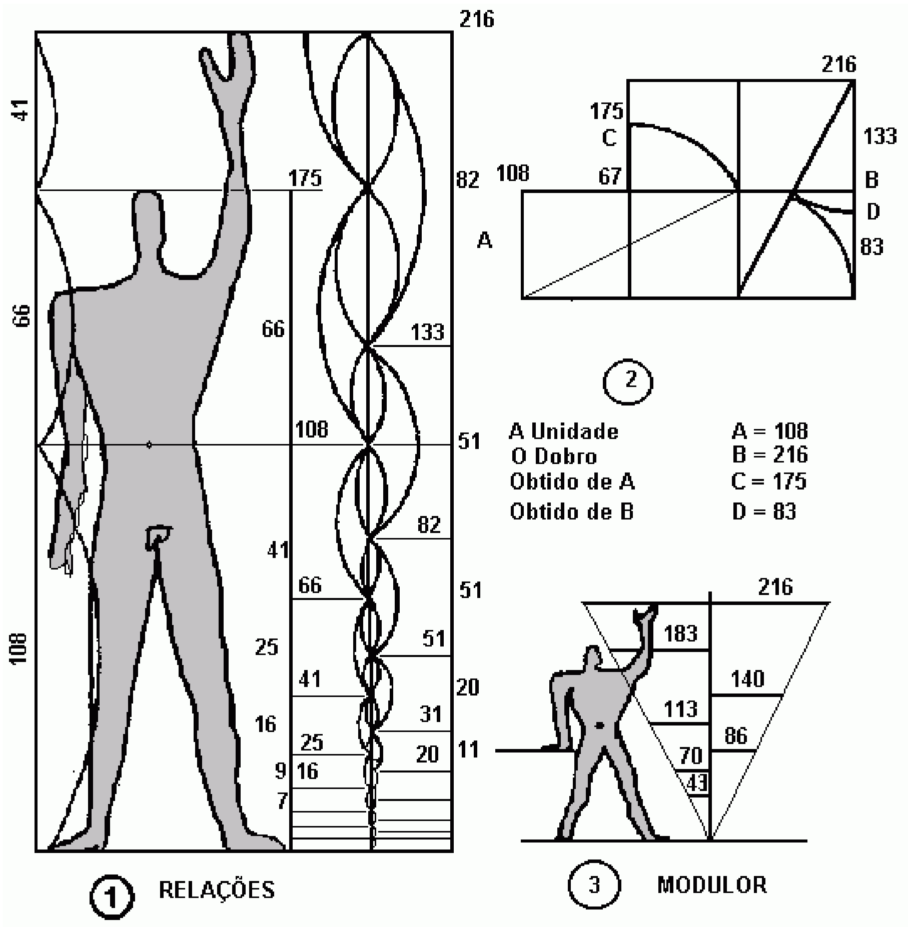


Figura 18: Sistema Modulor
Fonte: http://pessoal.sercomtel.com.br/matematica/alegria/fibonacci/seqfib2.htm

O Modulor é um sistema baseado nas medições do corpo humano, na razão áurea e nos números de Fibonacci. Le Corbusier sugeriu que o Modulor daria proporções harmoniosas a tudo, de tamanhos de gabinete e maçanetas a edifícios e espaços urbanos.

4.2
Na natureza

É impressionante a quantidade de relações envolvendo o número áureo e números de Fibonacci com a natureza. A começar, analisaremos a árvore genealógica de um zangão.

Numa colmeia os ovos de abelhas operárias que não são fertilizados se tornam zangões. Assim, um zangão não tem “pai”, somente “mãe”. Já os ovos da abelha rainha são fertilizados por zangões e se tornam fêmeas. Portanto, a abelha fêmea terá um "pai" e uma "mãe".

Desse modo, um zangão tem 1 mãe, 2 avós, 3 bisavós, 5 trisavós e assim por diante. Gerando assim, uma sequência de Fibonacci.

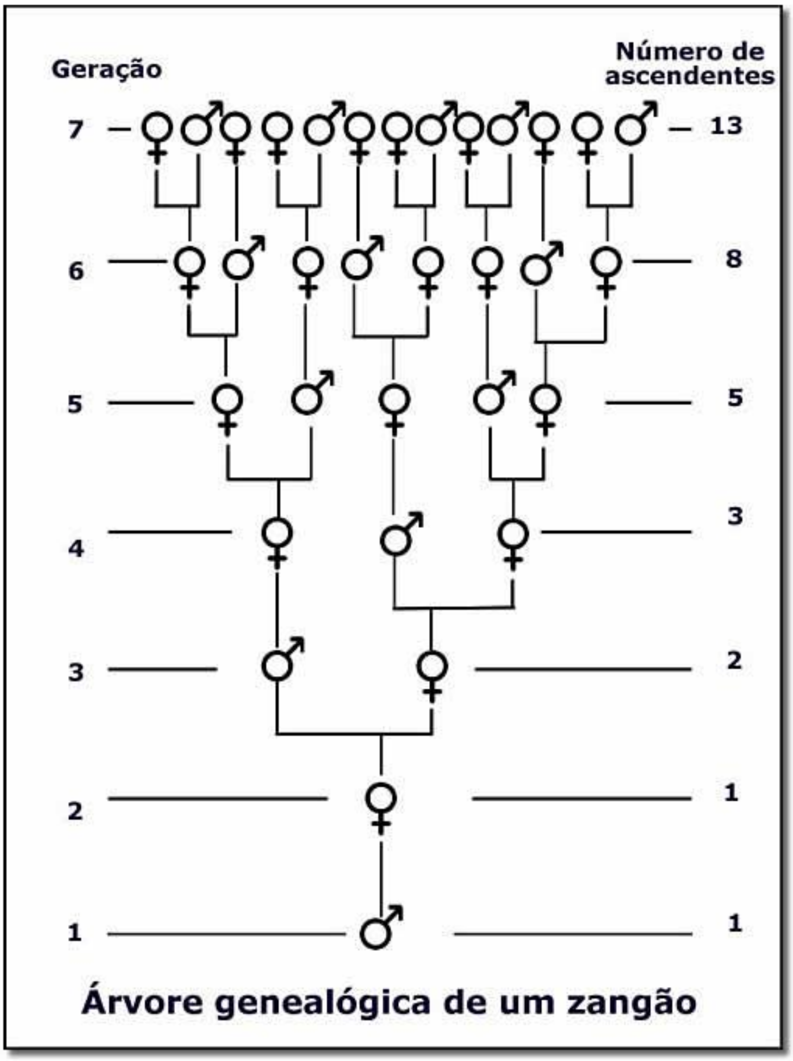


Figura 19: Árvore genealógica de um zangão.
Fonte: http://www.bpiropo.com.br/fpc20070319.htm

Outra relação é encontrada quando observamos o crescimento de folhas ao longo dos galhos. Já foi constatado que elas tendem a crescer em posições que otimizam sua exposição ao sol, à chuva e ao ar. A palavra fitolaxia é um termo da botânica que estuda a disposição das folhas nos galhos das plantas.

Os botânicos acreditavam que em muitas plantas as folhas e galhos cresciam em quantidades seguindo a sequência de Fibonacci. Interessante é que a primeira pessoa a descobrir, segundo Livio (2006), mesmo que intuitivamente, a relação entre filotaxias e os números de Fibonacci foi o astrônomo Johannes Kepler.

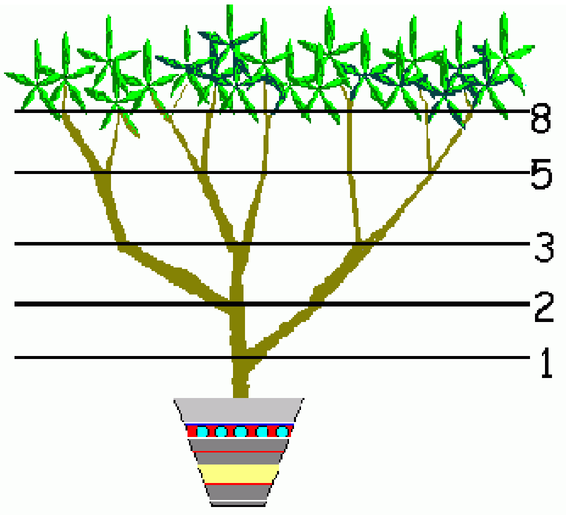


Figura 20: Processo de crescimento dos galhos
Fonte: http://pessoal.sercomtel.com.br/matematica/alegria/fibonacci/seqfib2.htm

No século XIX foram publicados trabalhos onde botânicos descobriram a regra geral de que os quocientes filotáxicos poderiam ser expressos por razões de termos da sequência de Fibonacci. Porém, foi ressaltado que todas estas regras não podem ser vistas como algo que se aplica a todas as circunstâncias, como uma lei da natureza.

Em relação às flores, observando os girassóis, é possível notar padrões espirais tanto no sentido horário quanto anti-horário formados pelos seus flósculos (sementes).

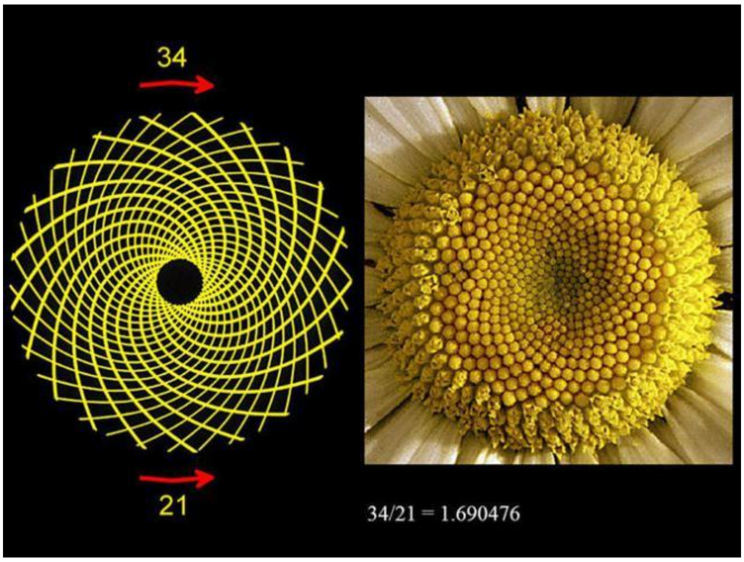


Figura 21: Crescimento das sementes dos girassóis
Fonte - https://www.cnet.com/pictures/natures-patterns-golden-spirals-and-branching-fractals/5/

Desse modo, as sementes crescem assegurando uma divisão de espaço mais eficiente para sua sobrevivência. E os números de Fibonacci? Aonde aparecem? De acordo com Livio (2006), a quantidade dessas espirais em geral depende do tamanho do girassol, porém, o mais comum é que existam 34 espirais em um sentido e 55 no outro. Já segundo Huntley (1985), a quantidade mencionada é 21 espirais no sentido horário e 34 no sentido anti-horário. Em ambos os casos, observamos que, nessas situações, as quantidades de espirais são 2 números consecutivos da sequência de Fibonacci.

Além disso, um grupo de pesquisadores liderados por N. Rivier publicou um artigo em 1984 no Journal de Physique onde descrevem o uso de um algoritmo matemático para mostrar que quando é usado um ângulo de crescimento igual ao ângulo áureo obtêm-se estruturas que parecem girassóis reais.

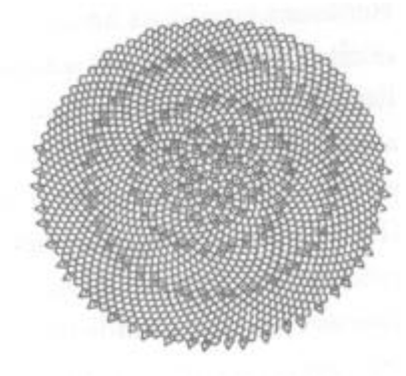


Figura 22: Estrutura similar ao girassol
Fonte: LIVIO, 2006, p.135

As espirais também podem ser observadas nos chifres dos carneiros, no plano de voo dos falcões, redemoinhos e conchas do mar, sendo a concha de Nautillus um dos seus grandes exemplos.

Figuras 23 e 24: Concha de Nautilus e chifre do carneiro
Fonte:
http://www.portal.famat.ufu.br/sites/famat.ufu.br/files/Anexos/Bookpage/Famat_revista_11_artigo_05.pdf

4.3 No corpo humano

A busca pela beleza perfeita não vem de hoje. E mais uma vez, a curiosa presença do número de ouro no corpo humano pode justificar como determinados corpos e rostos são mais harmônicos do que outros.

No filme Donald No País da Matemágica[10], em determinada cena é mostrado que a razão entre a altura do corpo e a medida do umbigo até o chão, a razão entre a altura do joelho até o chão e do joelho até o quadril, por exemplo, nos levaria à razão áurea.

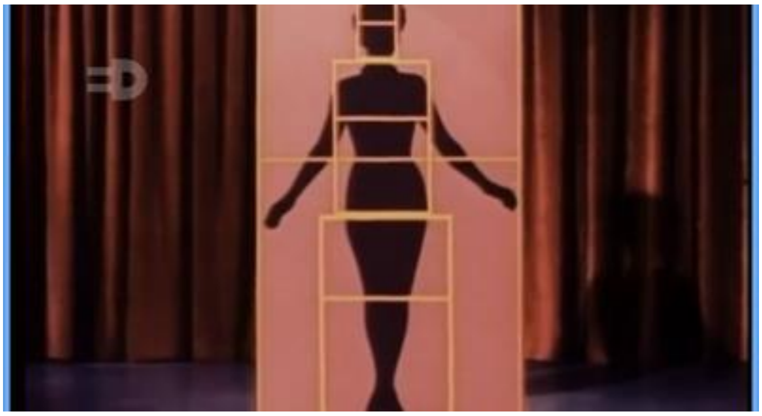


Figura 25: Cena do filme Donald no País da Matemágica.
Fonte: http://marciopontes.weebly.com/blog/logicismo-matemagica

Outro exemplo é o que pode ser a orelha perfeita, sua forma seguiria uma espiral logarítmica.

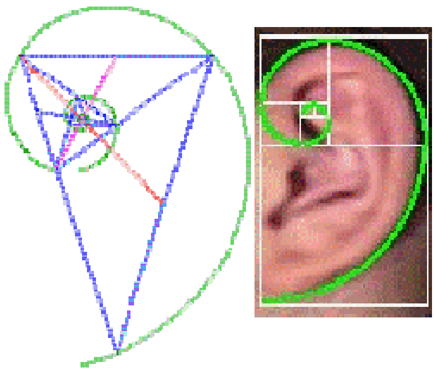


Figura 26: Orelha humana
Fonte:http://www.portal.famat.ufu.br/sites/famat.ufu.br/files/Anexos/Bookpage/Famat_revista_11_artigo_05.pdf

[10] Disponível em <https://www.youtube.com/watch?v=wbftu093Yqk> . Acesso em maio, 2017.

Não podemos deixar de citar um dos desenhos mais conhecidos da história: o Homem Vitruviano. Feito por Leonardo Da Vinci por volta de 1490, esta obra descreve uma imagem masculina desnuda separadamente e simultaneamente em duas posições sobrepostas com os braços inscritos num círculo e num quadrado. A cabeça é calculada como sendo um oitavo da altura total. Às vezes, o desenho e o texto são chamados de Cânone das Proporções, segundo visto numa atividade do Clube da Obmep[11].

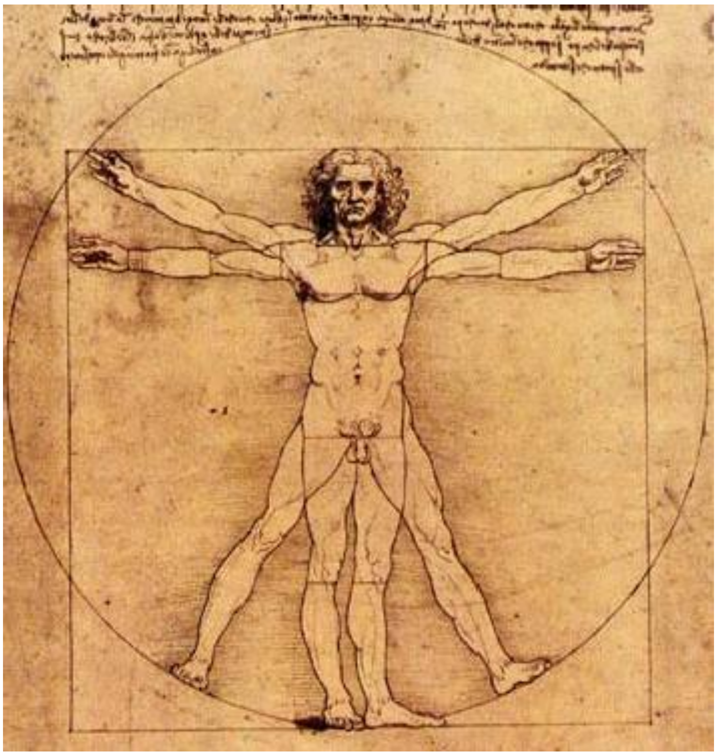


Figura 27: O Homem Vitruviano
Fonte: http://clubes.obmep.org.br/blog/wp-content/uploads/2014/09/O-Homem-Vitruviano-e-o-Homem-Contempor%C3%A2neo-3.pdf .

O Homem Vitruviano é baseado no trabalho do arquiteto romano Marcus Vitruvius Pollio, em que ele descreve as proporções do corpo humano. Segundo Camara e Rodrigues (2008), como Leonardo da Vinci acreditava que o corpo humano, para ter beleza e harmonia, deveria seguir uma proporção, e, segundo ele, o número de ouro representava a beleza, então o corpo humano perfeito deveria seguir a proporção determinada pelo número de ouro.

[11]Disponível em <http://clubes.obmep.org.br/blog/wp-content/uploads/2014/09/O-Homem-Vitruviano-e-o-Homem-Contempor%C3%A2neo-3.pdf > . Acesso em abril, 2017.

Leonardo da Vinci teve tanto apego a este número que em muitas outras obras ele o usou como veremos na próxima seção.

Se Da Vinci foi um dos pioneiros na busca pela beleza perfeita, hoje diversos estudiosos sobre estética tentam solidificar suas teorias. A presença do número de ouro no sorriso perfeito é objeto de estudo na odontologia.

No artigo Prevalência da Proporção Áurea em Indivíduos Adultos-Jovens (Soares, 2006)[12] foi realizado um estudo com 88 pessoas. Nele foi investigado a presença ou não da proporção áurea entre as medidas da largura do dente incisivo central com a largura do incisivo lateral e deste último com o canino[13].

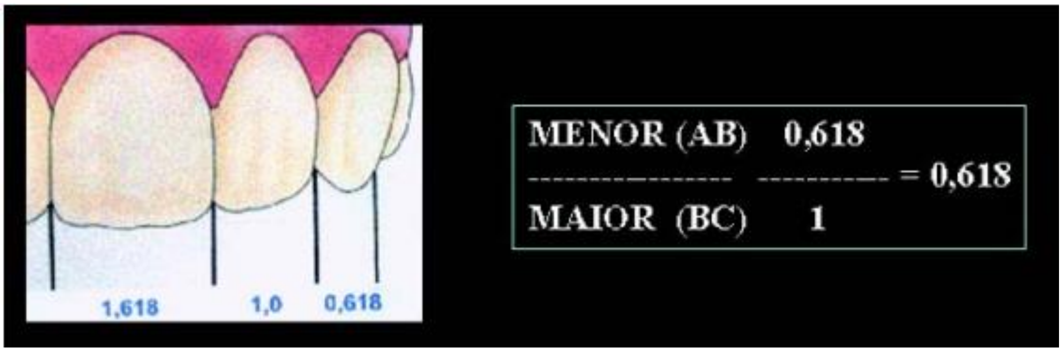


Figura 28: Análise da dentição
Fonte: http://revistaseletronicas.pucrs.br/ojs/index.php/fo/article/viewFile/1201/959

Um sorriso perfeito e harmonioso seria aquele que segue a proporção áurea. Os dentistas fazem uso dessa proporção para trabalhar em reconstruções estéticas, colocação de próteses, entre outros procedimentos odontológicos.

Figura 29: O sorriso perfeito
Fonte: http://www.labordental.com.br/golden-section.html

[12] Disponível em <http://revistaseletronicas.pucrs.br/ojs/index.php/fo/article/viewFile/1201/959 >. Acesso em abril, 2017.

[13] No artigo foi concluído que a relação de proporção áurea não é aplicada na maior parte da população.

4.4 Na arte

Quando falamos em arte pensamos em pintura, música, fotografia, dança entre outros. Porém, aqui daremos um enfoque na arte desenvolvida por pintores na época do Renascentismo.

Um fato curioso descrito em Livio (2006) é que, durante essa época, os três pintores mais conhecidos também demonstraram conhecimentos matemáticos, inclusive sobre a razão áurea. São eles: Piero della Francesca, Leonardo da Vinci e Albrecht Dürer.

Nesta época era comum que as pessoas desenvolvessem saberes e conhecimentos em áreas diversas. O pintor italiano Piero é um exemplo. Além de ter se dedicado à pintura, ele deixou três trabalhos sobre matemática: um sobre a perspectiva na pintura, um livro curto sobre os cinco sólidos e um tratado sobre ábaco.

Uma de suas obras onde a influência desse conhecimento é mais evidente é na pintura Flagelo apresentada logo abaixo.

Figura 30: Flagelo
Fonte: http://mundoeducacao.bol.uol.com.br/historiageral/a-pintura-piero-della-francesca.htm

O pintor alemão Albrecht Dürer também desenvolveu um forte interesse pela matemática. Ele estudou o livro Elementos de Euclides entre outros materiais. A partir desse estudo, escreveu um tratado que foi considerado um dos primeiros livros em alemão sobre matemática denominado Tratado sobre medida com compasso e régua. Em Livio (2006), é dito que Dürer não tinha intenção de que seu livro fosse usado como um manual de geometria e que estaria mais para um manual de construção.

Dürer demonstrava ter conhecimento sobre a razão áurea. Num dos volumes do seu tratado, ele descreveu como construir várias curvas, inclusive a espiral logarítmica e também o pentágono. Ambas figuras relacionadas à razão áurea.

Em sua gravura Melancolia, representada na figura 31, Dürer depositou todo seu talento com a arte e matemática.

Figura 31: Melacolia
Fonte: https://www.princeton.edu/~his291/Durer_Melancolia.html

As referências matemáticas contidas na figura são bem nítidas: compasso, quadrado mágico e sólidos geométricos. Inclusive, o estranho sólido apresentado na gravura foi objeto de discussão de alguns artigos. Acreditavam que os ângulos das faces desse sólido medissem 72º (relacionando ao pentagrama), todavia o trabalho de um holandês C.G. MacGillavry concluiu, a partir de uma análise de perspectiva, que os ângulos medem 80º.

Por fim, falaremos de um dos pintores mais conhecidos de todos os tempos: Leonardo da Vinci. Sua grande curiosidade e interesse nos mais diversos assuntos (biologia, fisiologia, matemática, aeronáutica) o tornou um grande talento reconhecido até os dias atuais.

Muito se especula sobre a influência dos conhecimentos matemáticos em suas obras. Uma razão para isso seria a forte ligação de Da Vinci com o matemático Luca Pacioli[14].

Pacioli dedicou sua vida a dar aulas e publicou alguns trabalhos. O primeiro foi um grande livro chamado Summa onde registrou todo o conhecimento matemático da época em aritmética, álgebra, geometria e trigonometria.

Um tempo após a publicação, Pacioli foi convidado pelo duque de Milão a dar aulas na corte sob influência de Leonardo da Vinci. Neste período, ele terminou um tratado de três volumes chamado Divina Proportione (A proporção divina). Logo no primeiro volume há um sumário detalhando as propriedades da razão áurea. Além de ter ilustrações de sólidos feitos por Leonardo da Vinci.

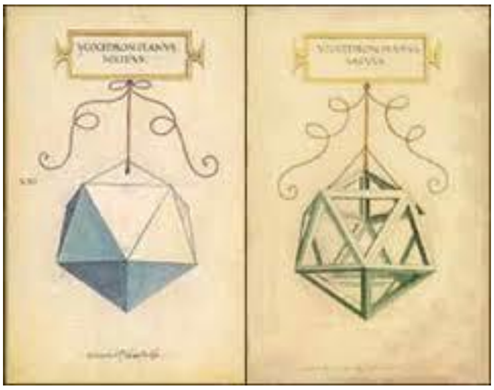


Figura 32: Sólidos feitos por Leonardo Da Vinci
Fonte: https://br.pinterest.com/pin/454652524858654284/

O segundo volume é dedicado a falar sobre proporções e suas aplicações na arquitetura e na estrutura do corpo humano. E o terceiro volume fala sobre os cinco corpos regulares. Este último, no entanto, se tornou uma obra controversa. Um historiador de arte denunciou que a obra era uma livre tradução do trabalho de Piero della Francesca.

Polêmicas a parte, a publicação da obra de Pacioli reacendeu ainda mais o interesse pela razão áurea. Sua obra foi disponibilizada em tratados teóricos não excessivamente matemáticos, onde artistas poderiam ler e compreender.

[14] Luca Pacioli (1445-1517) foi um matemático considerado o pai da Conatbilidade. Tornou-se monge franciscano e professor de matemática.

Inevitavelmente o nome de Leonardo da Vinci é citado em trabalhos que associam suas obras com a razão áurea. Apesar dele só ter conhecido Pacioli alguns anos depois de ter pintado algumas obras, nada impede de acreditarmos que ele já tenha tido uma noção anterior sobre o assunto.

No livro de Livio (2006), é citado cinco trabalhos de Da Vinci que teriam influência da razão áurea. A mais famosa e polêmica é a Mona Lisa.

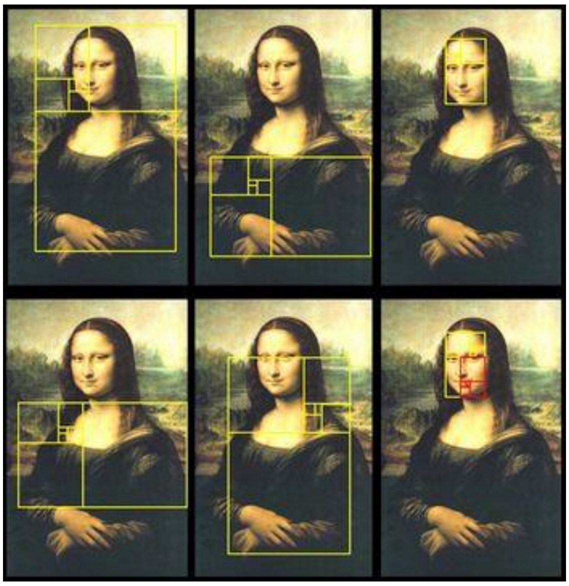


Figura 33: Estudo da razão áurea na Monalisa
Fonte http://portaldoprofessor.mec.gov.br/fichaTecnicaAula.html?aula=24829

É inegável que esta seja uma das obras mais famosas e misteriosas da história da arte. Muitos acreditam na existência da razão áurea na obra por ela transmitir tanta harmonia e beleza. Porém, não há nada que de fato comprove realmente esta relação.

Para Livio (2006), o desenho de Da Vinci que melhor representaria essa relação é a cabeça de um ancião. Nele é nítido perceber a preocupação do artista em buscar proporções da face. Acredita-se que um dos retângulos, o da esquerda, se aproxime a um retângulo áureo.

Figura 34: Uma cabeça de ancião
Fonte: LIVIO, 2006, p.189.

Depois de muitas suposições e histórias em torno da razão áurea na arte, temos sim, alguns exemplos de artistas que comprovadamente usaram esta razão em suas obras. O primeiro artista foi Paul Sérusier (1864–1927). Acredita-se que ele tenha usado esse conhecimento principalmente para *"verificar, e ocasionalmente checar, suas invenções de formas e suas composições"* (LIVIO, 2006, p.193)

Outro nome que vale mencionar é o do pintor italiano Gino Severini (1833-1966). Sua busca pela perfeição geométrica o levou a usar a razão áurea em diversos desenhos preliminares, como por exemplo, o desenho "Maternidade".

Figura 35: Maternidade.
Fonte: LIVIO, 2006, p.195.

Também vale a pena falar sobre Mario Merz (1925-2003). Ele foi um artista italiano que na década de 70, desenvolveu um conjunto de trabalhos que se integraram em duas linhas temáticas: uma estabeleceu princípios organizativos e compositivos baseados numa interpretação da Sequência de Fibonacci e a outra no igloo como forma de construção.

Merz se mostrou muito curioso com a presença desses números na natureza e começou a usá-los em suas obras. Um de seus trabalhos, “Fibonacci Nápoles”, envolve 10 fotografias de operários de fábrica, agrupados em números de Fibonacci, onde cada fotografia representa um número da sequência.

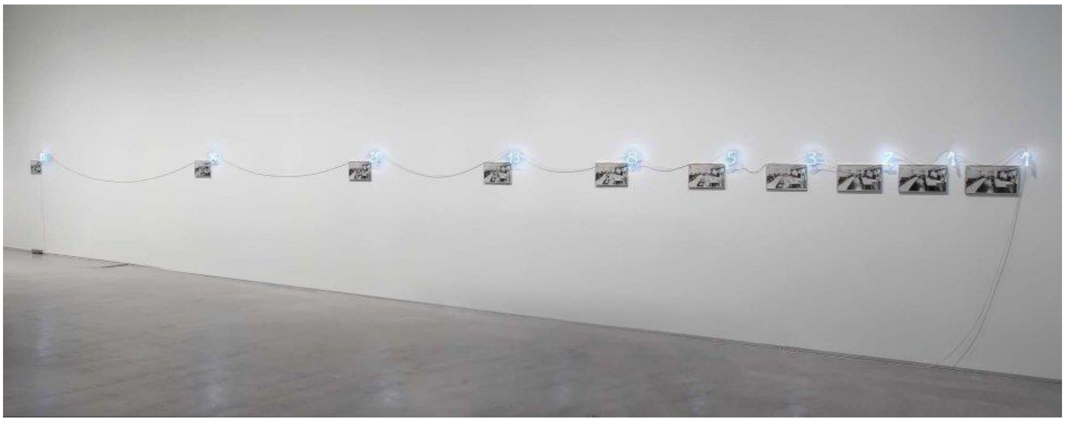


Figura 36: Fibonacci Nápoles

Fonte: http://www.museoreinasofia.es/en/collection/artwork/fibonacci-napoli-fabricca-san-giovanni-teduccio-fibonacci-napoli-factory-san-1

Outros nomes de pintores e desenhistas giram em torno da razão áurea. Há ainda o envolvimento com a música. Porém não entraremos mais em detalhes pois este não é nosso foco.

O que realmente nos chama atenção é a relação existente entre arte e razão áurea. Para alguns autores o retângulo áureo é o mais esteticamente agradável de todos os retângulos. De acordo com Livio (2006), pesquisas foram realizadas para investigar essa afirmação.

Foi pensando nessa junção que a proposta de fazer uma atividade com alunos da educação básica surgiu. A fotografia é uma área da arte que ganhou muita força e popularidade com a presença de câmeras nos celulares. Por que não unir a matemática com a fotografia e o uso do celular? Por que não levar um pouco de cultura e conhecimento extracurricular para os alunos? A partir destes questionamentos a atividade proposta aos alunos foi desenvolvida e será detalhada no capítulo a seguir.

5
RAZÃO ÁUREA E FIBONACCI NA FOTOGRAFIA: UM PROJETO DE TRABALHO DIVERSIFICADO

5.1
Composição fotográfica e Henri Bresson

A possibilidade de uma ligação entre matemática e fotografia surgiu durante uma conversa com o fotógrafo Rodilon Teixeira junto a uma inquietação de como tornar as aulas de matemática mais atrativas e dinâmicas para os adolescentes de uma geração tão tecnológica. Seria possível planejar um projeto para os alunos com estes dois temas? E foi nesta conversa que surgiu o nome do fotógrafo Henri Bresson.

Henri Cartier Bresson nasceu em 22 de agosto de 1908, em Paris. Frequentou a École Fénélon e o Lycée Condorcet em Paris. Estudou pintura com Cotenet (1922-23) e com André Lhôte[15] (1927-28). Concluiu pintura e filosofia na Universidade de Cambridge e começou como fotógrafo em 1931. Foi influenciado pelo surrealismo. Com 21 anos já tinha absorvido a essência do surrealismo. Aprendeu composição e proporção com Lhôte e fez da geometria uma grande aliada em suas fotografias.

Segundo Chéroux (2008), as fotografias de Cartier-Bresson são a transcrição da mais evidente fascinação pela geometria. Para ele, a composição deve ser uma das preocupações constantes nesta arte. No ano de 1951, Cartier-Bresson recebeu de um amigo, também fotógrafo, uns rascunhos geométricos referentes à composição de imagens.

[15] André Lhôte foi um escultor e pintor cubista.

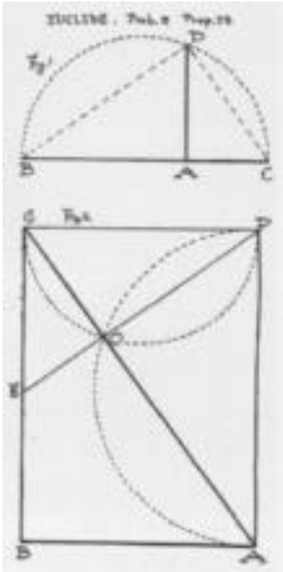


Figura 37: Rascunhos geométricos
Fonte: CHÉROUX, 2008, p.39

Esses rascunhos mostram que os dois fotógrafos em questão estudaram elementos de proporção e acreditavam que esta proporção oferecia maior estética e harmonia às suas imagens. Além disso, é possível notar que o retângulo sugere um estudo da proporção áurea.

Dessa forma, Chéroux afirma que a parte que torna a qualidade geométrica de uma imagem é premeditada. E, segundo ele, em relação às fotos de Bresson, muitos podem ver e sentir a emoção de suas obras. Além disso, é possível enxergar o que existe por trás daquelas imagens em termos premeditados de composições. Chéroux garante ser possível colocar esquemas de construção sobre suas fotos e perceber que elas seguem a proporção de ouro.

Eis algumas fotos de Henri Bresson que serviram de inspiração para os alunos.

Figura 38: Foto 1 Henri Cartier Bresson
Fonte: http://www.lomography.com.br/magazine/143095-melhor-dos-melhores-henri-cartier-bresson

Figura 39: Foto 2 Henri Cartier Bresson
Fonte: https://br.pinterest.com/pin/242631498645121651/

Figura 40: Foto 3 Henri Cartier Bresson
Fonte: http://www.henricartierbresson.org/en/

No livro Composição de David Präkel (2010), na seção de Fundamentos, são apresentadas algumas regras de composição. Vemos que a composição é o processo de edição mental feito pelo fotógrafo enquanto trabalha em uma imagem.

São apresentadas as principais regras para facilitar esta composição. Dentre elas estão: a regra dos terços, simetria dinâmica e a razão áurea.

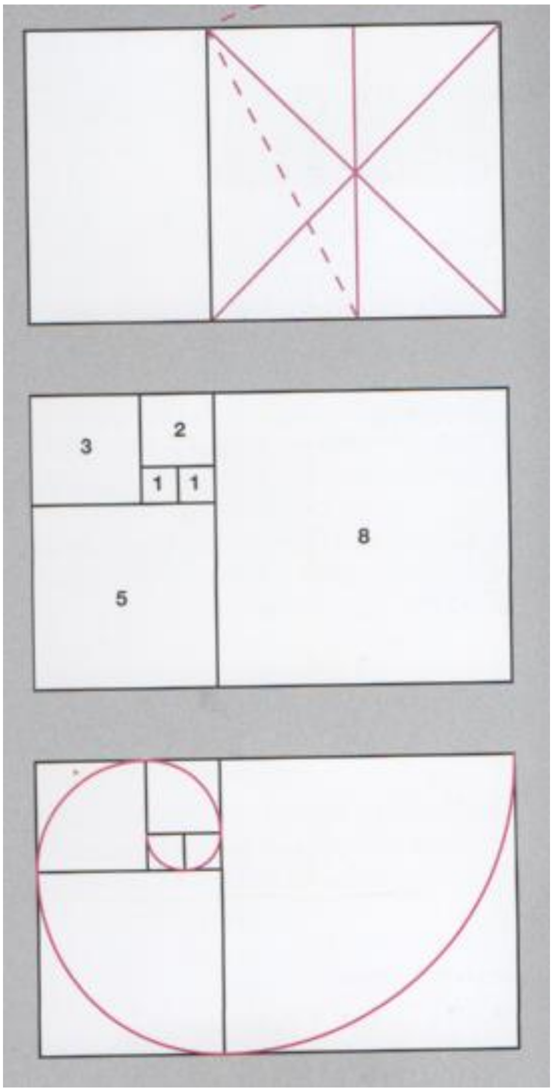


Figura 41: Ilustração do retângulo áureo e espiral áurea
Fonte: PRÄKEL, 2010, p.22

Segundo o livro, na sequência de diagramas, o primeiro (de cima) é construído a partir de proporções do número de ouro. O segundo (do meio) forma um retângulo a partir de quadrados com base na sequência de Fibonacci. E o terceiro (de baixo) mostra a espiral de crescimento que agrada ao nosso senso de harmonia.

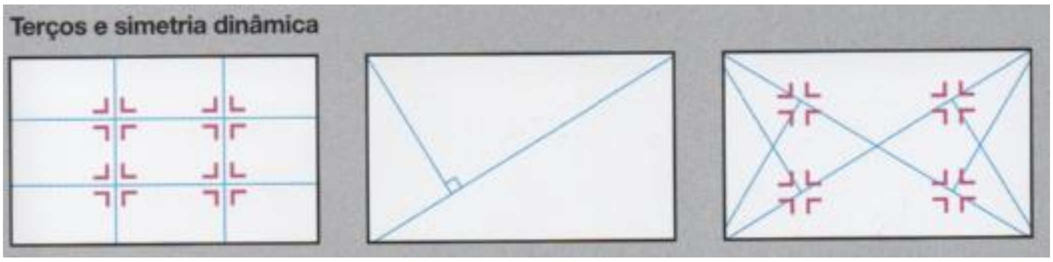


Figura 42: Terços e geometria dinâmica
Fonte: PRÄKEL, 2010, p.25

Já no esquema da figura 42, o primeiro retângulo mostra os quatro focos ativos que localizam o ponto de interesse conforme a regra dos terços. No segundo (o do meio), vemos a construção do primeiro ponto de interesse em uma imagem e, no último, temos os quatro focos ativos que localizam pontos de interesse, conforme a simetria dinâmica.

De todo modo, conhecer essas regras de composição não garante o brilhantismo de uma foto. Sabemos que a sensibilidade do olhar, o instante, a luz e outros fatores também influenciam na obtenção de uma bela imagem.

Levando isso em consideração, a proposta feita aos alunos foi de tirar uma foto seguindo a razão áurea. E para isso, foi usado o trabalho de Henri Bresson como inspiração e montado uma tela transparente, do tamanho da tela do celular, para ajudá-los no enquadramento.

Apresentado aos alunos a proposta de trabalho deixou-se claro que suas fotos não sairiam sempre melhores. Mas ter esse conhecimento lhes dariam uma técnica com a qual poderiam refletir sobre a construção de suas imagens. E que também seria trabalhado, de uma forma inusitada, conceitos matemáticos através da fotografia.

5.2 Motivação e Objetivos

A ideia de trabalhar a matemática com os alunos do 9º ano através de uma prática diferente e o questionamento sobre o quê aqueles alunos levariam de bagagem quando saíssem do Ensino Fundamental II, motivou um projeto de estudo que pudesse proporcionar uma aprendizagem mais significativa.

Em Skovsmose (2010), é discutida a importância da matemática vista de uma maneira mais crítica e sensível ao cotidiano do aluno. “A Educação Matemática crítica está também preocupada com questões como “de que forma a aprendizagem de Matemática pode apoiar o desenvolvimento da cidadania” e “como o indivíduo pode ser empowered através da Matemática.” (SKOVSMOSE, 2010, p 18).

Atualmente, a maioria dos alunos, inclusive os de escola pública, possuem um celular, máquina fotográfica ou computador. Grande parte também possui alguma rede social e consequentemente, têm o costume de tirar e publicar fotos. Baseado nisso, a motivação em torno de uma atividade diferente e nessa direção, seria atrativa aos seus olhos. Além disso, “A Educação Matemática Crítica preocupa-se com a maneira como a Matemática em geral influencia nosso ambiente cultural, tecnológico e político e coma as finalidades para as quais a competência matemática deve servir.” (SKOVSMOSE, 2010, p.8).

Sendo assim, a busca por um processo de aprendizagem que construa um sentido para o aluno torna a compreensão mais concreta e crítica. Com isso, os alunos elevam sua autoestima pois sentem-se parte do processo.

O intuito do trabalho foi justamente despertar esses pontos levando os alunos a participar de todo o processo. O objetivo principal foi estabelecer uma ligação da matemática com algo do cotidiano deles, a fotografia. Mas, aliado a isso, outros objetivos foram sendo traçados: aprender a razão áurea através da arte, trabalhar com materiais de construção geométrica (régua e compasso), construir um material concreto para manipulação posterior (a tela de acetato) e conhecer e trabalhar a sequência de Fibonacci.

Sendo assim, o objetivo da atividade foi contribuir para um enriquecimento acadêmico e cultural do aluno, despertando sua curiosidade, usar a tecnologia a serviço do conhecimento e proporcionar uma aprendizagem de conceitos novos de uma forma ativa e dinâmica.

5.3
Metodologia

O trabalho foi aplicado em duas turmas do 9º ano de uma escola municipal do Rio de Janeiro localizada no bairro de Inhaúma. Para o desenvolvimento da atividade foram estabelecidos 5 momentos.

Na verdade, antes de todo o processo, foi feito um levantamento para saber quais alunos possuíam celular e coletar as medidas da tela no modo câmera. Esta etapa é importante para a adaptação dos dois modelos preparados posteriormente.

O **1º momento** foi realizado numa aula de 50 minutos utilizando slides com explicações sobre a razão áurea e a sequência de Fibonacci. Os alunos puderam aprender seus conceitos, um pouco da história e algumas aplicações.

A seguir foi realizada uma atividade (vide anexos) retirada do site do Clube de Matemática da OBMEP. Nela os alunos deveriam avaliar qual das candidatas à modelo tinha o rosto mais harmônico segundo a razão áurea. O objetivo desta tarefa era fazer com que os alunos se aproximassem do número de ouro através dos cálculos sugeridos no exercício.

A seguir, no **2º momento**, também numa aula de 50 minutos foi trabalhado a questão da fotografia e a apresentação do fotógrafo Henri Bresson com algumas de suas fotos. Nesta etapa, foi realizado uma análise das fotos e como a harmonia se encontrava na composição de suas imagens. Aqui não foi realizado nenhum tipo de atividade concreta. O foco principal foi sugerir e inspirá-los com as imagens feitas pelo fotógrafo e discutir um pouco sobre o enquadramento e a composição das fotos.

Com o intuito de unir as duas aulas, no **3º momento** realizou-se a construção dos retângulos áureos. Foram disponibilizados dois modelos de acordo com o tamanho das telas dos celulares, previamente medidas. Esta etapa foi um tanto trabalhosa, porém, necessária para que os dois modelos pudessem ser ajustáveis aos aparelhos que os alunos possuíam.

Sendo assim, com as informações em mãos, foram preparados dois tamanhos (1 tamanho pequeno/médio e 1 tamanho médio/grande) de malhas quadriculadas que podem ser vistas nos anexos. A escolha por trabalhar com a malha pronta ocorreu devido ao não costume dos alunos em manusear o material de construção e pela quantidade de alunos presentes em sala de aula (em torno de 40 alunos por turma). Para a elaboração de toda construção dos retângulos com régua e compasso, tal atividade demandaria mais tempo e material para todos e infelizmente, não seria possível. Assim, fica a critério de cada professor adaptar este momento da proposta. Uma oficina com um público menor, por exemplo, já seria mais viável para que essa etapa incluísse a construção dos retângulos com régua e compasso.

Com suas folhas de atividade em mãos, os alunos seguiram às instruções projetas nos slides para a construção dos retângulos áureos. A seguir, com o compasso, iniciou-se a construção da espiral.

Neste momento, muitos alunos tiveram dificuldade em usar o compasso. Foi solicitado a colaboração dos mais habilidosos para ajudar seus colegas. E como não havia compasso para todos, foi necessário um esperar o outro. Para esta atividade, foi utilizada uma aula de 2 tempos (1 hora e 40 minutos).

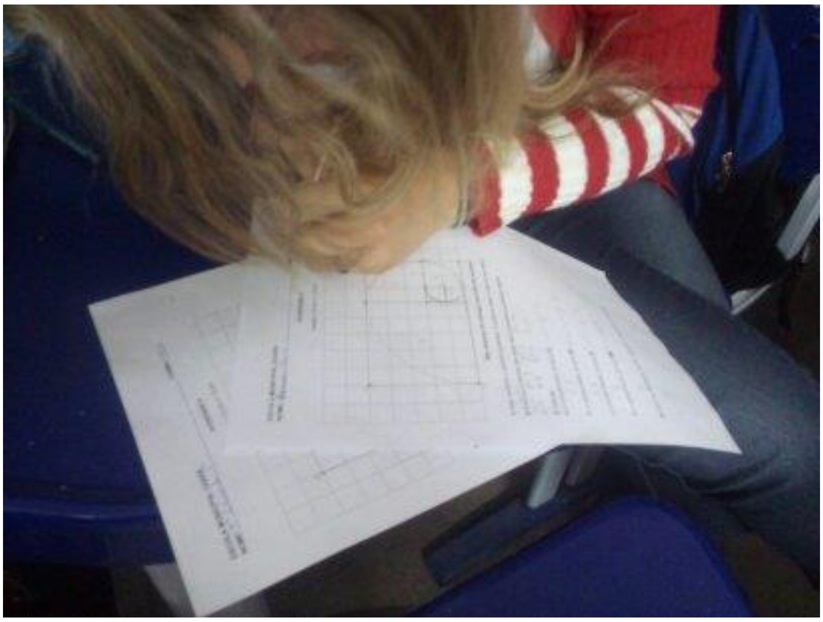


Figura 43: Atividade em prática
Fonte: A autora.

Com suas construções feitas, aproveitamos o conteúdo do bimestre (circunferência e círculo) para responder às questões sobre o comprimento dos arcos encontrados. Para ter um maior controle, evitando que algum aluno perca ou não leve a folha de atividade para a próxima aula, todo o material foi recolhido no final da aula.

No próximo encontro, **4º momento**, numa aula de 50 minutos, foram entregues as folhas de atividade e um pedaço de plástico transparente (acetato) para cada aluno. Esta folha de acetato pode ser encontrado em papelarias. Nesta etapa os alunos deveriam colocar a tela em cima da folha e cobrir todos o contorno e a espiral com uma caneta permanente.

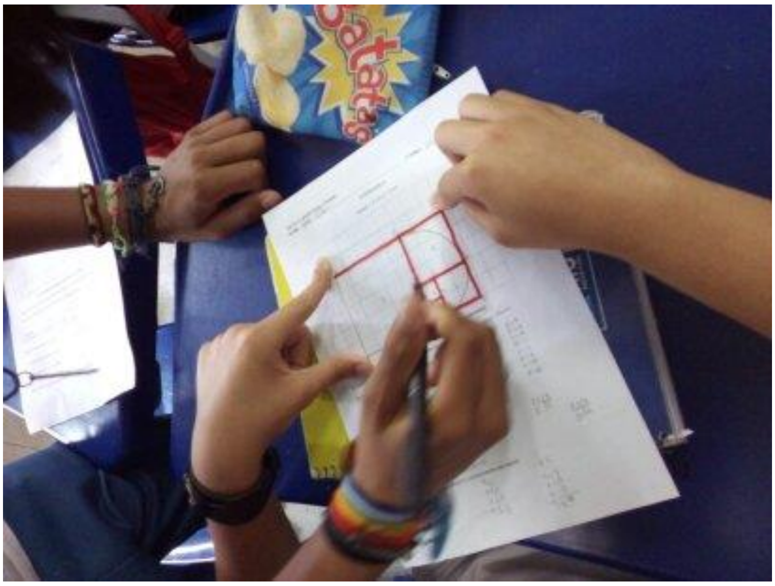


Figura 44: Parceria entre os alunos
Fonte: A autora.

Esse foi um momento muito aguardado por eles, pois iriam construir um material concreto usando o que foi visto nas aulas anteriores.

Após cobrir, todo o contorno, cada aluno cortou em volta do retângulo e prendeu, com um elástico, a sua tela construída.

Figura 45: Aluno finalizando sua tela
Fonte: A autora.

Com suas telas prontas, o 5º momento, caracterizou-se como o período no qual os alunos puderam tirar suas fotos seguindo a razão áurea de e publicarem no grupo criado numa rede social. Os que não possuiam perfil puderam transmitir as fotos via bluetooth ou pen drive. O tempo dado aos alunos foi de duas semanas.

Cabe destacar que a participação dos alunos foi muito grande. O espírito de colaboração se deu a todo instante. Todos queriam ver como ficariam as telas adaptadas aos celulares e consequentemente, as fotos produzidas.

Terminado o prazo dado para que fizessem suas fotos, essas foram organizadas em uma exposição digital. Os próprios alunos montaram a apresentação em slides com as fotos escolhidas, editando o trabalho com música de fundo e o nome de cada aluno/autor em suas respectivas fotos. Convidaram professores e funcionários da escola e organizaram um evento para a apresentação do trabalho. Foi nítida a sensação de orgulho e de dever cumprido.

5.4
Resultados

Durante o período de publicação das fotos, muitos alunos questionarem se suas imagens estavam corretas ou não. A insegurança inicial logo desapareceu quando outros alunos também sinalizavam o que poderia ser melhorado ou não na foto. O medo de perder ponto por publicar algo que não estivesse de acordo foi substituído por uma troca de mensagens, incentivos e colaboração. “Uma questão essencial é como, em tal situação, um professor pode agir como um supervisor, cuidando para que os alunos não se percam quando enfrentarem a situação de risco, sem, contudo, eliminar o risco por completo.” (SKOVSMOSE, 2006, p.129).

Após as sugestões e críticas construtivas, viu-se que a confiança dos alunos cresceu ao longo do projeto. E isto ficou refletido na empolgação de publicarem mais fotos e conteúdos ligados ao assunto no grupo.

Estar numa escola de horário integral e com uma carga horária extensa (6 tempos semanais) tornou esse tipo de trabalho possível. Muitas vezes o professor acaba tendo que cumprir o currículo obrigatório e não sobra espaço para outras atividades.

> Chegamos à conclusão que, mesmo quando o professor mostra grande simpatia com alguma forma de ensino inovadora, acaba impedido de colocar essas ideias em prática, já que o ambiente escolar tornou-se engessado pelo absolutismo burocrático. (SKOVSMOSE, 2010, p 26)

E mesmo com uma carga horária maior, algumas construções foram adaptadas e acabou-se optando por uma exposição digital. A proposta inicial foi que cada aluno apresentasse apenas uma foto. E muitos pediram para publicar mais de uma. Infelizmente, organizar uma exposição com todas as fotos demandaria tempo e dinheiro. Mesmo assim, a atividade seguiu seu objetivo.

Por fim, os alunos responderam a um questionário sobre o trabalho realizado. O questionário foi respondido por alguns alunos (total de 43 alunos) e obtemos os seguintes resultados:

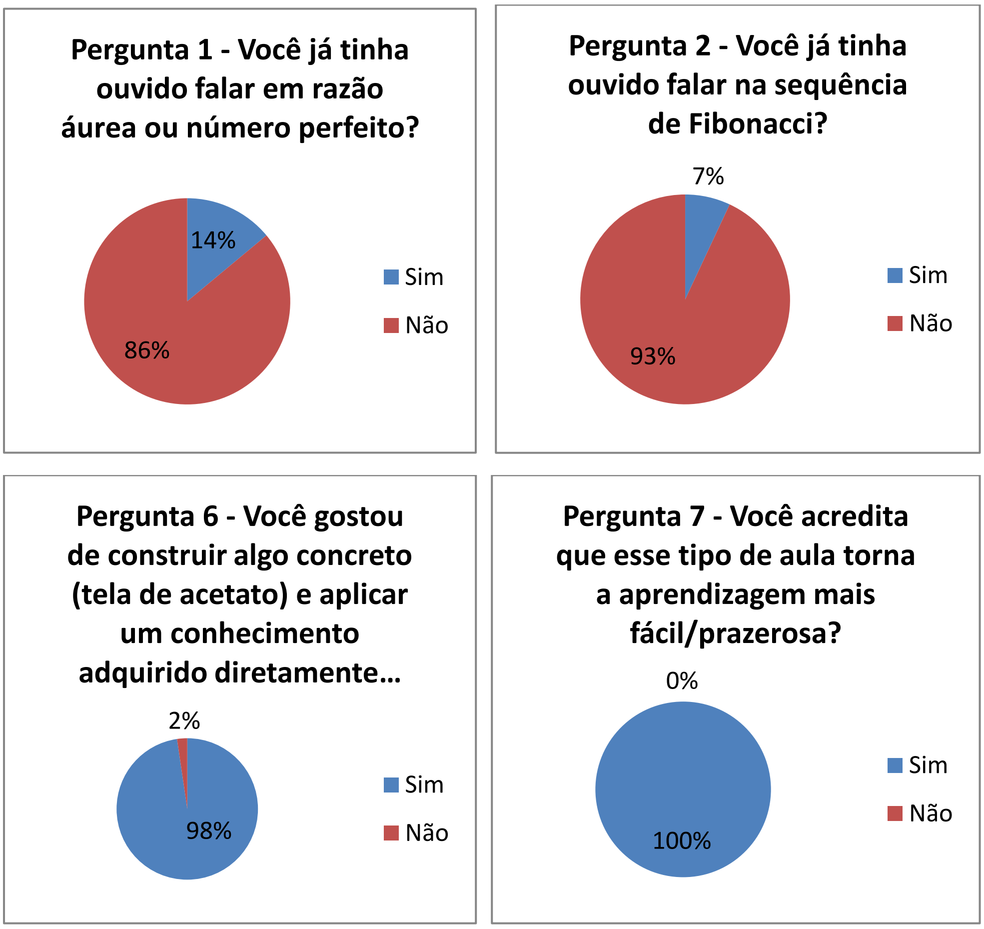
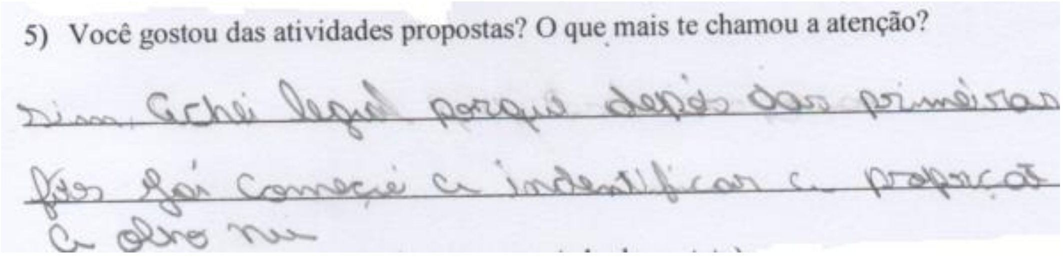


Figura 46: Gráficos com respostas dos alunos
Fonte: A autora.

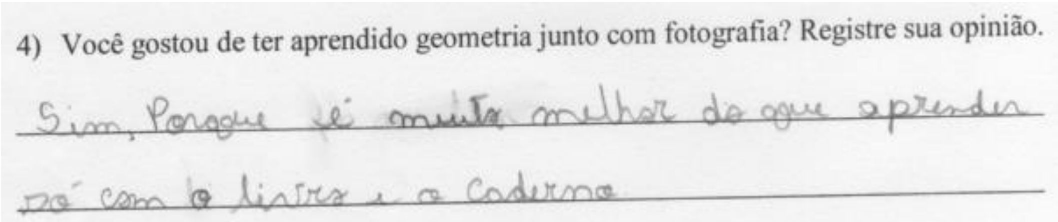
Ao longo do processo, alguns alunos já falavam que não precisavam mais da tela e conseguiam perceber “a olho nu” a razão para compor a imagem.


5) Você gostou das atividades propostas? O que mais te chamou a atenção?

Sim, Achei legal porque depois das primeiras fotos foi começando a identificar a proporção a olho nu

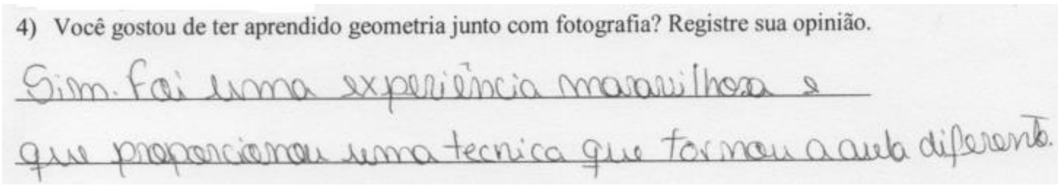
Figura 47: Depoimento do aluno 1

Sem contar que muitos alunos acharam a atividade completamente diferente do que estão acostumados a fazer.


4) Você gostou de ter aprendido geometria junto com fotografia? Registre sua opinião.

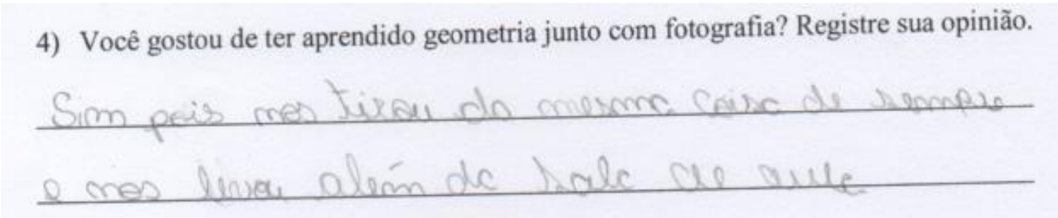
Sim, Porque é muito melhor do que aprender só com o livro e o caderno

Figura 48: Depoimento do aluno 2


4) Você gostou de ter aprendido geometria junto com fotografia? Registre sua opinião.

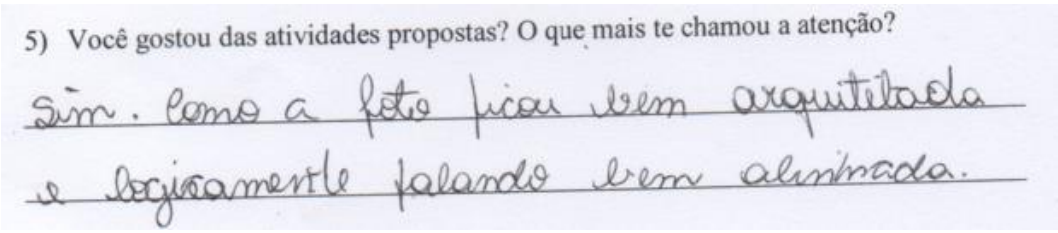
Sim. Foi uma experiência maravilhosa e que proporcionou uma tecnica que tornou a aula diferente.

Figura 49: Depoimento do aluno 3


4) Você gostou de ter aprendido geometria junto com fotografia? Registre sua opinião.

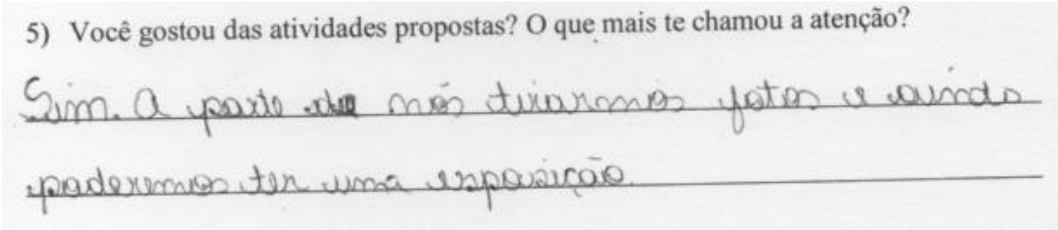
Sim pois nos tirou da mesma coisa de sempre e nos levou além da sala de aula

Figura 50: Depoimento do aluno 4


5) Você gostou das atividades propostas? O que mais te chamou a atenção?

Sim. Como a foto ficou bem arquitetada e logicamente falando bem alinhada.

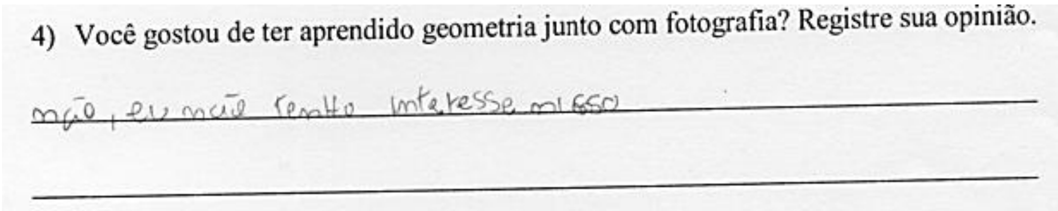
Figura 51: Depoimento do aluno 5


5) Você gostou das atividades propostas? O que mais te chamou a atenção?

Sim. A parte nós tiramos fotos e ainda poderemos ter uma exposição.

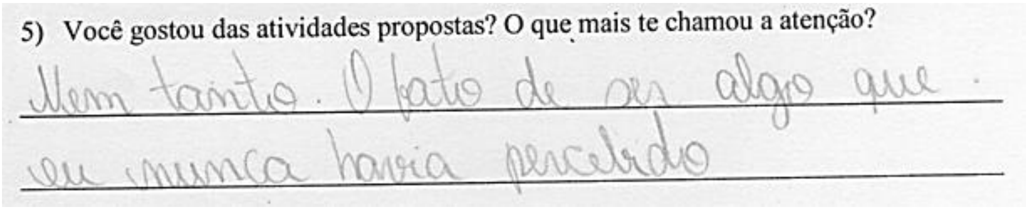
Figura 52: Depoimento do aluno 6

Vale ressaltar que nem todos se sentiram cativados pela atividade e também expressaram sua opinião.


4) Você gostou de ter aprendido geometria junto com fotografia? Registre sua opinião.

não, eu não tenho interesse nisso

Figura 53: Depoimento do aluno 7


5) Você gostou das atividades propostas? O que mais te chamou a atenção?

Nem tanto. O fato de ser algo que eu nunca havia percebido

Figura 54: Depoimento do aluno 8

Mesmo a maioria tendo gostado da proposta, alguns pontos negativos devem ser relatados. Muitos alunos não possuíam habilidade no uso do material de construção geométrica, principalmente o compasso. Além disso, alguns alunos (poucos) não tinham celular. E para contornar esta situação, foi solicitado ao aluno procurar uma dupla de trabalho.

Outra solução encontrada por um aluno foi usar uma máquina fotográfica. Para isso, foi tirado as medidas do visor da câmera para construção de uma tela para ele.

Além disso, alguns alunos questionaram sobre como poderiam tirar fotos bonitas se moravam em comunidades. Na verdade, esse foi um ponto negativo que se tornou positivo, pois demos início a um debate sobre o assunto e, com criatividade, a situação foi contornada fazendo-os procurar o melhor que existe em seus próprios espaços. Trabalhar com alunos de escola pública, principalmente de regiões conflituosas e violentas, significa trabalhar com sua auto-estima.

Mostrar a esses alunos que eles são capazes de produzir e expressar suas ideias e pensamentos é de sua importância para sua formação. A sensibilidade exibida em algumas fotos ao retratarem sua própria comunidade transmite a certeza de que o trabalho valeu a pena.

Sendo assim, segue uma sequência com algumas fotos feitas pelos alunos.

Figura 55: Foto do aluno A

Figura 56: Foto do aluno B

Figura 57: Foto do aluno C

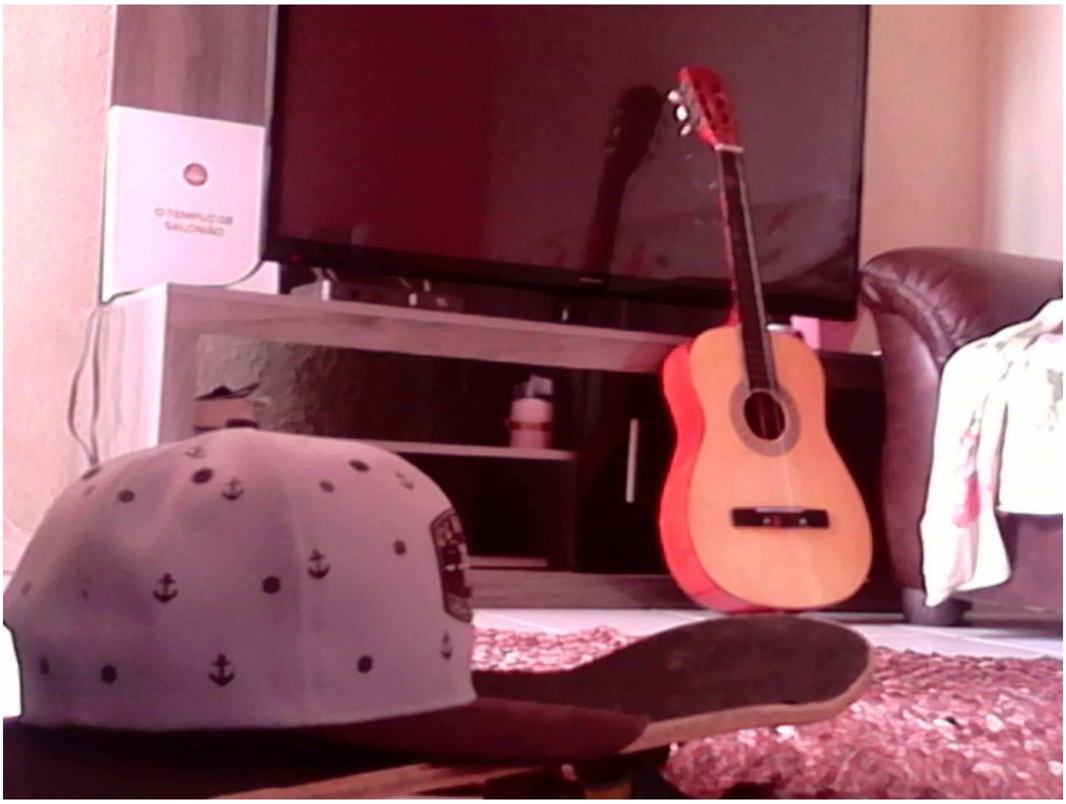


Figura 58: Foto do aluno D

Figura 59: Foto do aluno E

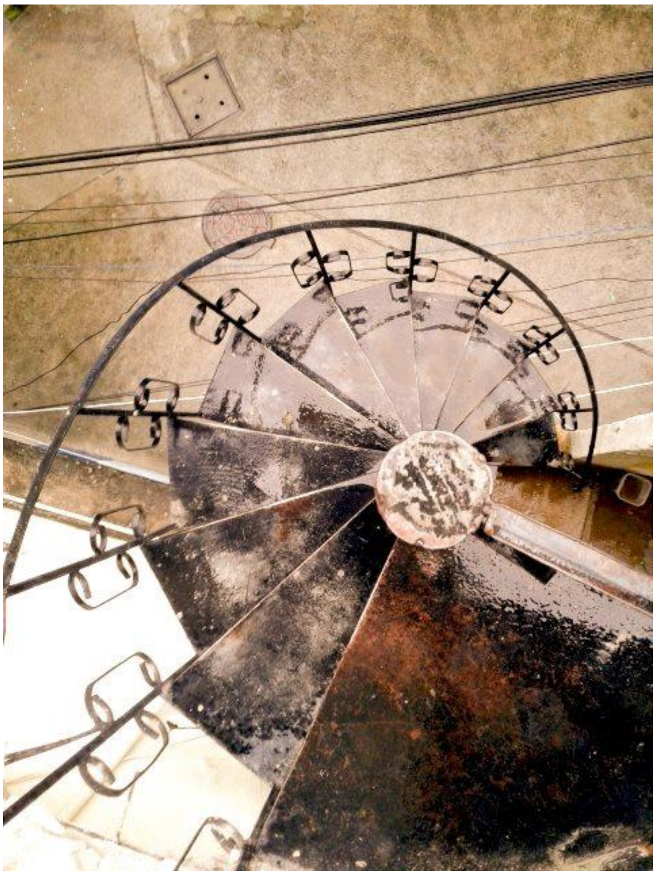


Figura 60: Foto do aluno F

Figura 61: Foto do aluno G

Figura 62: Foto do aluno H

Figura 63: Foto do aluno I

Figura 64: Foto do aluno J

6
CONSIDERAÇÕES FINAIS

Atualmente, um dos grandes desafios do professor é ser inovador, criativo e motivador no processo de ensino e aprendizagem. Vivemos numa época tecnológico mas nosso ensino não tem acompanhado esta evolução.

Por isso, acredita-se que será constante o exercício de elaboração de novas propostas que cativem nossos alunos, os intriguem e motivem a buscar o conhecimento de formas diversas. E, para isto acontecer, esse processo precisará passar por uma educação mais significativa e desafiadora, desmistificando a aprendizagem da Matemática.

Ensinar matemática com fotografia motivou os alunos a pesquisarem, produzirem e participarem mais das atividades. O envolvimento dos alunos foi muito grande com troca de ideias e sugestões, contribuindo assim para o desenvolvimento dos conteúdos. A criatividade e parceria dos alunos foram pontos chaves para o enriquecimento do trabalho. Eles, no papel de protagonistas do processo, sentiram-se responsáveis e certamente aprenderam mais.

Dessa forma, busca-se promover uma reflexão sobre a importância de pensar numa educação crítica, criativa e colaborativa. Acreditando que esse é o caminho que ajudará na formação, não só intelectual e acadêmica, mas também cultural e cidadã desses alunos e permitirá que fortaleçam suas potencialidades a fim de se construírem como indivíduos críticos, responsáveis e efetivamente transformadores.

7
Referências bibliográficas

ALENCAR, M. E. G. **O Número Φ e a seqüência de Fibonacci**. In: Física na Escola, v.5, n.2, 2004. Disponível em : <http://www.sbfisica.org.br/fne/Vol5/Num2/v5n1a02.pdf>. Acesso em fevereiro, 2017.

ALRØ, H; SKOVCMOSE, O. **Diálogo e Aprendizagem em Educação Matemática**. Editora Autêntica, 2010.

ÁVILA, G. **Retângulo Áureo, divisão áurea e sequência de Fibonacci**. Revista do Professor de Matemática. São Paulo.V.6.1985.

CÂMARA, M..A.; RODRIGUES, M.S. **O número φ**. FAMAT em Revista. Número 11. Outubro de 2008.
Disponível em:<http://www.portal.famat.ufu.br/sites/famat.ufu.br/files/Anexos/Bookpage/Famat_revista_11_artigo_05.pdf> . Acesso em fevereiro, 2017.

CHÉROUX, C. Henri Cartier-Bresson. **Le tir photographique**. Editora Gallimard, 2008.

HEFEZ, A. **Elementos de Aritmética**. Rio de Janeiro, SBM,2011.

HUNTLEY, H. E. **A Divina Proporção**: um ensaio sobre a beleza da Matemática. Trad. De Luiz Carlos Ascêncio Nunes. Brasília: Editora Universidade de Brasília, 1985.

LIVIO, M. **Razão Áurea** - A História do Número Fi, um Número Surpreendente. Tradução de Matsuama, M. S., Rio de Janeiro, Editora Record, 2006.

MARKOWSKY, G. **Misconceptions about the Golden ratio**. College Mathematics Journal, vol.23, n.1, pp. 2 – 19, 1992.
Disponível em <https://www.goldennumber.net/wp-content/uploads/George-Markowsky-Golden-Ratio-Misconceptions-MAA.pdf>. Acesso em abril, 2017.

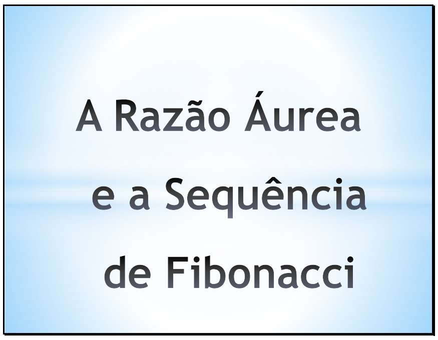
PRÄKEL, D. **Composição**. Editora Bookman, 2010.

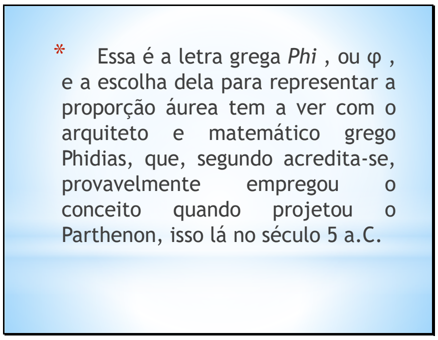
SANTOS, G.V. **Explorando a matemática do número φ**, o número de ouro. Rio Claro. 2013.

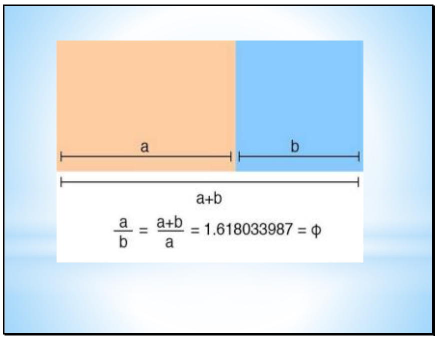
SKOVCMOSE, O. **Um convite à Educação Matemática Crítica**. Editora Papirus, 2014.

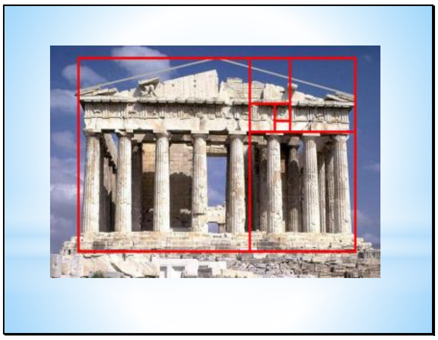
ANEXOS

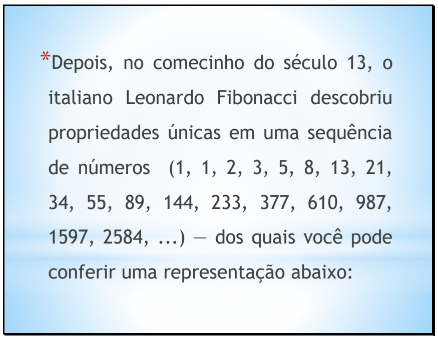
ANEXO 1

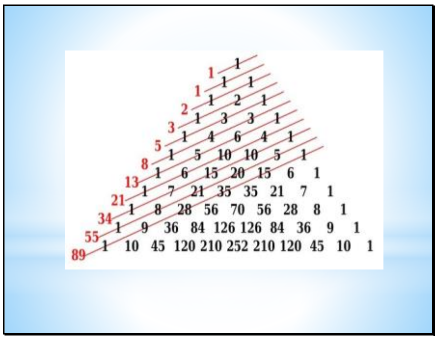


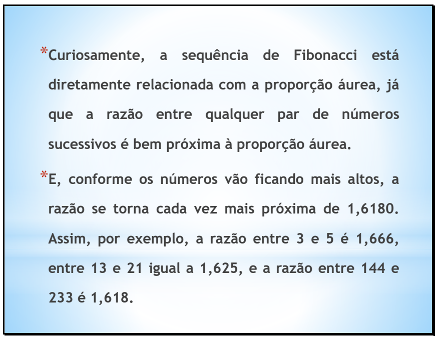


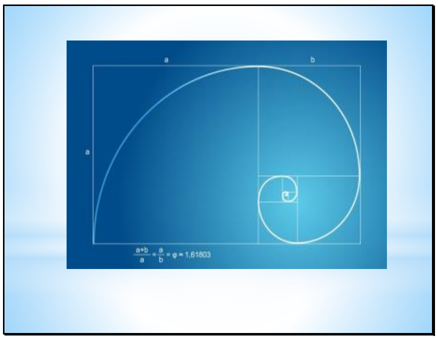




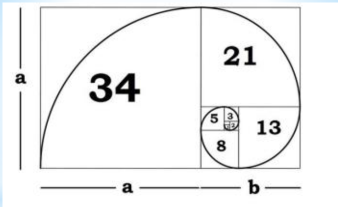






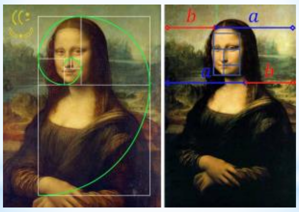


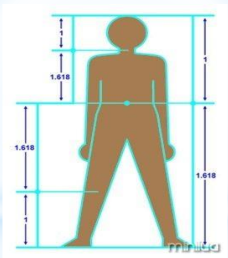
* Pois, quando esses números são aplicados às proporções de um retângulo, chegamos ao que em geometria é conhecido como “retângulo de ouro”, e é aqui que a aplicação da proporção áurea começa a se tornar interessante.
* Isso porque esse retângulo ficou conhecido como uma das formas geométricas mais visualmente agradáveis que existem; por conta disso, ela teria sido largamente aplicada nas artes e na arquitetura, juntamente com o “espiral áureo” — que é obtido quando desenhamos uma espiral seguindo o fluxo dos quadrados formados no retângulo de ouro. Veja:



* Fonte: http://www.megacurioso.com.br/matematica-e-estatistica/74174-voce-sabe-o-que-e-a-proporcao-aurea.htm

* Exemplos de aplicação





ANEXO 2

Henri Cartier Bresson

O fotógrafo francês (1908-2004), entrou para a história da fotografia como o pai do fotojornalismo e um dos fotógrafos mais significativos do século XX. Foi um aficionado pelo mundo das imagens: expressou-se por meio de desenhos, pinturas, filmes cinematográficos. Mas, foi por meio de sua produção fotográfica que ele exercitou a liberdade, presente em seu jeito de pensar, falar, sentir, viver.

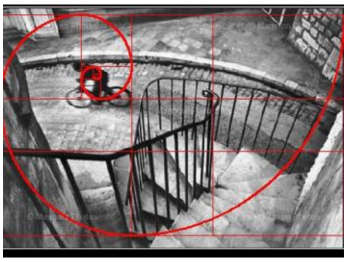
E por que estamos falando dele agora? Qual seria sua ligação com a matemética?

A citação a seguir, dirá:

"Para 'revelar' o mundo é preciso sentir-se implicado no que se enquadra através do visor. Essa atitude exige disciplina de espírito, sensibilidade e ***senso de geometria****."*

Se você olhar para o trabalho de Henri Cartier-Bresson, ele aplicou a geometria na imagens poeticamente. Se analisar a composição de suas imagens, ele integraou as linhas verticais, horizontais e diagonais, curvas, sombras, triângulos, círculos e quadrados para sua vantagem. Ele também deu uma atenção especial aos enquadramentos também.

Vamos conhecer algumas de suas fotos?



Temos também o fotógrafo inglês Jon Sparkman que captou uma série de imagens em que aplicou a proporção áurea, regra também conhecida como espiral de Fibonacci no meio fotográfico.

"É como uma gigantesca estrada subliminar apontando os olhos na direção que você quer que eles sigam", afirmou ele ao My Modern Met.

"Os arranjos engenhosos dos personagens e do ambiente faz com que nós fiquemos diante de momentos dramáticos ou emocionais de uma peça ou filme", apontou o site.

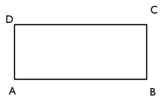
Algumas fotos do seu trabalho pode ser vista clicando no link a seguir:

http://www.fhox.com.br/news/fotografo-usa-matematica-para-compor-imagens-perfeitamente-equilibradas/

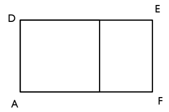
ANEXO 3

Instruções para Atividade

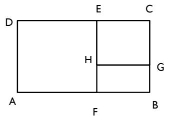
- Construa um retângulo 8 por 5 na malha quadriculada recebida. Nomeie seus vértices em A, B, C e D.



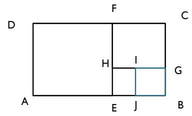
- A seguir construa um quadrado 5 por 5 utilizando o lado AD. E nomeie os outros vértices de E e F , conforme figura.



- Refaça o processo construindo um quadrado 3 por 3 utilizando o lado EC. Nomeie os outros vértices de G e H, conforme figura.



- Refaça o processo construindo um quadrado 2 por 2 utilizando o lado GB . Nomeie os outros vértices de I e J, conforme figura.



- E para finalizar, divida o retângulo EHIJ em dois quadrados 1 por 1.

Passo a passo para a construção da espiral

- Coloque a ponta seca do compasso no vértice E e faça uma abertura até o vértice A. Gire até chegar no vértice F.
- A seguir, coloque a ponta seca do compasso no vértice H e faça uma abertura até o ponto F. Gire o compasso até chegar no ponto G.

- Coloque a ponta seca no ponto I. Faça uma abertura até o ponto G e gire o compasso até o ponto J.
- E finalmente, coloque o compasso no ponto médio do segmento IJ. Abra o compasso até o ponto I e gire até o ponto J.
- Pronto! Aí está sua espiral!

ANEXO 4

ESCOLA MUNICIPAL CEARÁ

NOME:____TURMA:_____

ATIVIDADE I

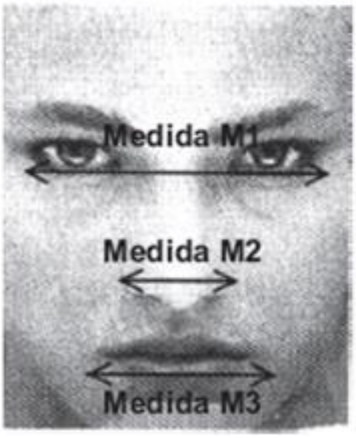
Faça os cálculos numa folha anexa ou no verso desta. E registre sua respota abaixo de cada questão.

1) (UERJ/UENF – 2005(adaptada)) O retângulo de ouro é utilizado em Arquitetura desde a Grécia Antiga. A razão entre as medidas do maior e do menor lado desse retângulo é o número de ouro, representado por φ. Sabendo que φ é uma das raízes da equação $x^2 = x + 1$, calcule o valor de φ.

2) Atividade retirada do site: *http://clubes.obmep.org.br/blog/atividade-a-razao-aurea-proporcao-aurea-um-dos-padroes-de-beleza/*

Estudos revelam que, independentemente da etnia, idade e condição social, as pessoas têm padrões estéticos comuns de beleza facial e que as faces consideradas bonitas apresentam-se em proporção áurea. A proporção áurea é a constante φ=1,618...

Uma agência de modelos reconhece a informação citada e utiliza-a como critério de beleza facial de suas contratadas. Para entrevistar uma nova candidata a modelo, a referida agência pede uma fotografia de rosto no ato da inscrição e, com ela, determina as medidas mostradas na figura.



$$\frac{M1}{M3} = \frac{M3}{M2} = \Phi$$

Analisando a fotografia de cinco candidatas, **I, II, III, IV** e **V**, para a seleção de uma única garota, foram constatadas estas medidas:

●**Candidata I:** M1=11 cm; M2=5,5 cm; M3=7 cm. M1=11 cm; M2=5,5 cm; M3=7 cm.

● **Candidata II:** M1=10,5 cm; M2=4,5 cm; M3=6,5 cm. M1=10,5 cm; M2=4,5 cm; M3=6,5 cm.

● **CandidataIII:** M1=11,5 cm; M2=3,5 cm; M3=6,5 cm.M1=11,5 cm; M2=3,5 cm; M3=6,5 cm.

● **Candidata IV:** M1=10 cm; M2=4 cm; M3=6,5 cm. M1=10 cm; M2=4 cm; M3=6,5 cm.

● **Candidata V:** M1=10,5 cm; M2=4 cm; M3=6,5 cm. M1=10,5 cm; M2=4 cm; M3=6,5 cm.

Qual a candidata selecionada pela agência de modelos, segundo os critérios da proporção áurea?

ANEXO 5

ESCOLA MUNICIPAL CEARÁ

NOME:____TURMA:____

ATIVIDADE II

Tabela 1cm por 1 cm

Não esqueça de entregar sua folha de cálculos!

1) Siga as intruções do power point para a construção do retângulo áureo.

2) A seguir, com o compasso siga as instruções para construir a espiral.

3) Calcule:
a) o comprimento do arco AF;

b) o comprimento do arco FG;

c) o comprimento do arco GJ;

d) o comprimento do arco IJ.

4) Com os resultados acima, calcule o comprimento da espiral.

ANEXO 6

ESCOLA MUNICIPAL CEARÁ

NOME:_____________________________________TURMA:_______

ATIVIDADE II

Tabela 1,3 cm x 1,3 cm

Não esqueça de entregar sua folha de cálculos!

1) Siga as intruções do power point para a construção do retângulo áureo.

2) A seguir, com o compasso siga as instruções para construir a espiral.

3) Calcule:
a) o comprimento do arco AF;

b) o comprimento do arco FG;

c) o comprimento do arco GJ;

d) o comprimento do arco IJ.

4) Com os resultados acima, calcule o comprimento da espiral.

ANEXO 7

ESCOLA MUNICIPAL CEARÁ

NOME:____TURMA:_____

Questionário de avaliação.

Responda com sinceridade e seriedade!

1) Você já tinha ouvido falar em razão aúrea ou número perfeito?
( ) SIM ( ) NÃO

2) Você já tinha ouvido falar na sequência de Fibbonaci?
( ) SIM ( ) NÃO

3) Você imaginava que pudesse existir conexão entre matemática e fotografia? Na sua opinião, com quais áreas do conhecimento a matemática tem ligação direta?

____

____

4) Você gostou de ter aprendido geometria junto com fotografia? Registre sua opinião.

____

____

5) Você gostou das atividades propostas? O que mais te chamou a atenção?

____

____

6) Você gostou de construir algo concreto (tela de acetato) e aplicar um conhecimento adquirido diretamente no seu cotidiano?
( ) SIM ( ) NÃO

7) Você acredita que esse tipo de aula torna a aprendizagem mais fácil/prazerosa?
( ) SIM ( ) NÃO