



Gustavo Simão Rodrigues

**Mitigação de Esforços Impulsivos Utilizando
Metamateriais Elásticos**

Tese de Doutorado

Tese apresentada como requisito parcial para
obtenção do grau de Doutor pelo Programa de Pós-
Graduação em Engenharia Mecânica da PUC-Rio.

Orientador: Prof. Hans Ingo Weber

Rio de Janeiro
Dezembro de 2017



Gustavo Simão Rodrigues

**Mitigação de Esforços Impulsivos Utilizando Metamateriais
Elásticos**

Tese apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Doutor pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da PUC-Rio. Aprovada pela Comissão Examinadora abaixo assinada.

Prof. Hans Ingo Weber

Orientador

Departamento de Engenharia Mecânica – PUC/Rio

Profa. Larissa Driemeier

Departamento de Engenharia Mecatrônica – USP

Prof. Andre Luiz Tenorio Rezende

Departamento de Engenharia Mecânica – IME

Prof. Mauricio Gruzman

Departamento de Engenharia Mecânica – IME

Prof. Thiago Gamboa Ritto

Departamento de Engenharia Mecânica – UFRJ

Prof. Márcio da Silveira Carvalho

Coordenador Setorial do Centro Técnico Científico - PUC-Rio

Rio de Janeiro, 19 de dezembro de 2017.

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, do autor e do orientador.

Gustavo Simão Rodrigues

Graduou-se em Engenharia Mecânica e de Automóveis pelo Instituto Militar de Engenharia em 2002. Possui Mestrado em Engenharia de Produção pela PUC/Rio, obtendo o título em 2012.

Ficha Catalográfica

Rodrigues, Gustavo Simão

Mitigação de esforços impulsivos utilizando metamateriais elásticos / Gustavo Simão Rodrigues ; orientador: Hans Ingo Weber. – 2017.

160 f. : il. color. ; 30 cm

Tese (doutorado)–Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Engenharia Mecânica, 2017.

Inclui bibliografia

1. Engenharia Mecânica – Teses. 2. Metamateriais elásticos. 3. Forças impulsivas. 4. Mecanismo de recuo. I. Weber, Hans Ingo. II. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Engenharia Mecânica. III. Título.

CDD:621

*A minha mãe, pelo amor incondicional que tornou possível tudo em minha vida.
Ao meu pai, que infelizmente não está mais aqui, mas também é graças a ele que
alcancei mais esse objetivo.*

Agradecimentos

A minha amada esposa Patrícia que foi sempre incansável e paciente e manteve a harmonia em nosso lar, permitindo que eu pudesse me dedicar aos estudos. Obrigado pelos incentivos e por compreender todos os momentos que fiquei ausente e entender que esses momentos são desprezíveis comparado com a vida que passaremos juntos com nosso filho.

Ao meu amigo e orientador Professor Hans Ingo Weber pelos estímulos e parceria para a realização deste trabalho e por passar tranquilidade nos momentos de maior desespero.

Ao Exército Brasileiro que permitiu que o curso fosse feito em regime integral e, em especial, ao TC Jorge Audrin Morgado de Gois que se empenhou para que o curso fosse iniciado e ao TC Andre Luiz Tenorio Rezende, que foi fundamental nos momentos finais para que a tese fosse concluída.

Ao professor Rubens Sampaio, pelo acolhimento no Laboratório de Vibrações, ambiente harmônico e agradável para o desenvolvimento do trabalho.

À professora Larissa Driemeier, do Grupo de Mecânica dos Sólidos e Impacto em Estruturas, GMSIE, da Universidade de São Paulo (USP), que ajudou imensamente no desenvolvimento final da tese.

Aos meus amigos do laboratório de vibrações mecânicas pela amizade e compartilhamento de conhecimentos.

Ao amigo Wagner Epifânio da Cruz, sempre disposto a ajudar e fundamental para o desenvolvimento experimental desta tese.

Ao amigo 1º Ten Hebert Azevedo Sá, com quem dividi várias disciplinas e graças aos seus conhecimentos consegui desenvolver melhor as disciplinas.

Ao amigo Samuel Ferreira, com quem dividi disciplinas e nos preparamos juntos para a prova de qualificação.

Ao CNPq e à PUC-Rio, pelos auxílios concedidos, sem os quais este trabalho não poderia ter sido realizado.

Aos professores que participaram da Comissão examinadora.

A todos os amigos e familiares que de uma forma ou de outra me estimularam ou me ajudaram.

Resumo

Rodrigues, Gustavo Simão; Weber, Hans Ingo. **Mitigação de Esforços Impulsivos Utilizando Metamateriais Elásticos**. Rio de Janeiro, 2017. 160p. Tese de Doutorado - Departamento de Engenharia Mecânica, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

O intuito deste trabalho é aplicar metamateriais elásticos na mitigação de esforços impulsivos gerados por um disparo de um armamento. Os impactos ou forças impulsivas são caracterizados por forças de magnitudes muito altas aplicadas em um tempo extremamente pequeno, implicando em grandes acelerações e desacelerações. Tal comportamento é amplamente estudado na literatura nas esferas impactantes do Berço de Newton e este trabalho tem seu início por meio da análise do comportamento dessas esferas e dos modelos das forças de contato entre elas. Em seguida é analisado o Berço de Newton por meio do enfoque da propagação de ondas e uma comparação entre a modelagem numérica e analítica é comprovada. Os metamateriais elásticos, componentes com propriedades especiais, são apresentados e sua característica de bloquear propagações em determinadas faixas de frequência é verificada. Também é desenvolvida experimentalmente uma célula unitária e é feita a comprovação da capacidade de atenuação da propagação de determinada faixa de frequência. O sistema de recuo, local proposto para verificar a eficiência do emprego dos metamateriais, é modelado de forma simplificada, bem como dois novos modelos são propostos com o objetivo de se verificar qual é mais indicado para a aplicação dos metamateriais. Finalmente é feita a modelagem de uma possível aplicação, visando a construção de um dispositivo composto por metamateriais elásticos para ser empregado na mitigação de esforços impulsivos e a redução da força transmitida para o suporte que todo o conjunto está fixo é numericamente comprovada.

Palavras-chave

Metamateriais Elásticos; Forças Impulsivas; Mecanismo de Recuo

Abstract

Rodrigues, Gustavo Simão; Weber, Hans Ingo (Advisor). **Mitigation of Impulsive Efforts Using Elastic Metamaterials**. Rio de Janeiro, 2017. 160p. Tese de Doutorado - Departamento de Engenharia Mecânica, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

The purpose of this work is to apply elastic metamaterials in the mitigation of impulsive efforts generated by a firing of an armament. Impacts or impulsive forces are characterized by very high magnitudes of forces applied in an extremely small period of time, implying large accelerations and decelerations. Such behavior is widely studied in the literature in the impacting spheres of Newton's Cradle and this work has its beginning through the analysis of the behavior of these spheres and its contact force models. Next, Newton's Cradle is analyzed through the wave propagation approach and a comparison between numerical and analytical modeling is proven. Elastic metamaterials, components with special properties, are presented and their feature to block propagation in certain frequency bands is verified. A unit cell is also experimentally developed and its capacity to attenuate the propagation of a particular frequency band is tested. The recoil system, where the efficiency of employing the metamaterials is proposed, is modeled in a simplified way, as well as two new models are proposed in order to verify which one is most suitable for the application of metamaterials. Finally, the modeling of a possible application is made, aiming the construction of a device composed of elastic metamaterials to be employed in the mitigation of impulsive efforts and the reduction of the force transmitted to the support that the whole set is fixed is numerically proven.

Keywords

Elastic Metamaterials; Impulsive Forces; Recoil Mechanism

Sumário

1 . Introdução	18
1.1. Motivação	19
1.2. Objetivos	20
1.2.1. Objetivos Específicos	20
1.3. Organização da Tese	20
2 . Berço de Newton	23
3 . Propagação de Ondas	41
3.1. Resposta Analítica para o Impacto de Duas Barras	42
3.2. Simulação de Impacto por MEF	43
3.3. Análise do Berço de Newton por Propagação de Ondas	47
4 . Metamateriais	54
4.1. Metamateriais Elásticos	55
4.1.1. Ressonador Simples	56
4.1.2. Ressonador Duplo	59
4.2. Cadeia de ressonadores	60
5 . Modelagem Matemática do Sistema de Recuo	67
5.1. Modelo Simplificado	68
5.2. Modelos Propostos	70
5.3. Análise da Força de Contato	76
5.4. Modelo não linear do amortecimento	79
5.5. Análise da Força de Reação no Ponto de Ancoragem	82
6 . Desenvolvimento da Célula Unitária do Metamaterial	86
6.1. Desenvolvimento Experimental	87
6.2. Determinação das Frequências Naturais	90
6.3. Determinação da Constante Elástica	93

6.4. Conceito de Metamateriais aplicados ao Berço de Newton	97
7 . Aparato Experimental	102
7.1. Sistema submetido à ação de uma excitação harmônica	102
7.2. Sistema submetido à ação de um impacto	112
8 . Modelagem Numérica de uma Possível Aplicação	122
8.1. Conjunto de metamateriais submetido à excitação harmônica	125
8.2. Especificação e Projeto do Conjunto de Metamateriais	132
8.3. Aplicação de uma Senoidal Composta	137
8.4. Análise Estrutural do Ressonador	139
8.5. Conjunto de Metamateriais na Atenuação da Força Impulsiva	144
9 . Conclusão	149
9.1. Trabalhos Futuros	153
10 . Referências bibliográficas	155

Lista de figuras

Figura 1.1 – Canhão Francês Matériel de 75mm Mle 1897	18
Figura 1.2 – Curva de pressão interna teórica do obuseiro 105 mm	19
Figura 2.1 – Impacto entre 2 corpos	23
Figura 2.2 – Deformação durante o impacto	24
Figura 2.3 – Berço de Newton com cinco esferas	25
Figura 2.4 – Esferas sem contato	26
Figura 2.5 – Sobreposição das esferas com detalhamento	26
Figura 2.6 – Velocidades das esferas (modelo de Hertz)	29
Figura 2.7 – Força de contato entre as esferas 1 e 2 (F_{1-2}) e esferas 2 e 3 (F_{2-3}) – modelo de Hertz	29
Figura 2.8 – Velocidades das esferas (modelo LSD)	30
Figura 2.9 – Força de contato entre as esferas 1 e 2 (F_{1-2}) e esferas 2 e 3 (F_{2-3}) – modelo LSD	31
Figura 2.10 – Velocidades das esferas (modelo KK)	32
Figura 2.11 – Força de contato entre as esferas 1 e 2 (F_{1-2}) e esferas 2 e 3 (F_{2-3}) – modelo KK	32
Figura 2.12 – Velocidades experimentais	34
Figura 2.13 – Posição inicial	35
Figura 2.14 – Impacto entre as esferas	36
Figura 2.15 – Velocidades das esferas 1 e 2	37
Figura 2.16 – Força de impacto	38
Figura 2.17 – Deslocamento angular	39
Figura 2.18 – Velocidade tangencial	40
Figura 3.1 – Impacto entre barras	42
Figura 3.2 – Velocidade das barras 1 e 2	44
Figura 3.3 – Força de Contato	45
Figura 3.4 – Velocidades e Forças de Contato das barras 1 e 2	45
Figura 3.5 – Energia Cinética do Sistema	46
Figura 3.6 – Propagação da onda de tensão ao longo da barra	46
Figura 3.7 – Dispositivo para análise da propagação da onda	47

Figura 3.8 – Análise do berço de Newton por MEF	48
Figura 3.9 – Forças de Contato entre as Esferas	50
Figura 3.10 – Velocidades das Esferas	50
Figura 3.11 – Comparação entre as forças de contato. $v_0=0.09$ m/s	51
Figura 3.12 – Comparação entre as forças de contato. $v_0=0.125$ m/s	52
Figura 3.13 – Comparação entre as forças de contato. $v_0=0.16$ m/s	52
Figura 4.1 – Unidade de ressonador e massa efetiva equivalente	57
Figura 4.2 – Gráfico da massa efetiva normalizada versus a razão ω/ω_2 (ressonador simples)	59
Figura 4.3 – Célula com ressonador duplo e massa efetiva equivalente	59
Figura 4.4 – Gráfico da massa efetiva normalizada versus a razão ω/ω_2 (ressonador duplo)	60
Figura 4.5 – Cadeia de ressonadores	61
Figura 4.6 – Cadeia de ressonadores com massa efetiva	61
Figura 4.7 – Curva de Dispersão	63
Figura 4.8 – Módulo da amplitude em função da frequência	64
Figura 4.9 – Módulo da amplitude em função da frequência das massas efetivas	64
Figura 4.10 – Transmitância	66
Figura 5.1 – Obuseiro 155mm, modelo M114	68
Figura 5.2 – Modelo simplificado	69
Figura 5.3 – Deslocamento da massa M	70
Figura 5.4 – Modelo proposto (i)	71
Figura 5.5 – Modelo proposto (ii)	71
Figura 5.6 – Deslocamento máximo da massa M para o modelo (i)	73
Figura 5.7 – Deslocamento máximo da massa M para o modelo (ii)	74
Figura 5.8 – Comparação entre os modelos ($m = 100$ kg)	74
Figura 5.9 – Comparação entre os modelos ($m = 500$ kg)	75
Figura 5.10 – Comparação entre os modelos ($m = 1000$ kg)	75
Figura 5.11 – Comparação entre os modelos ($m = 1500$ kg)	75
Figura 5.12 – Força de contato entre a massa m e a parede A para os modelos (i) e (ii) para $m = 1000$ kg.	77
Figura 5.13 – Velocidade da massa m nos modelos (i) e (ii)	

para $m = 1000$ kg.	78
Figura 5.14 – Força de contato máxima entre a massa m e a parede A para a) modelo (i) e b) modelo (ii).	79
Figura 5.15 – Gráfico de força-velocidade da força de amortecimento	79
Figura 5.16 – Comparação com os modelos não lineares ($m = 100$ kg)	81
Figura 5.17 – Comparação com os modelos não lineares ($m = 500$ kg)	81
Figura 5.18 – Comparação com os modelos não lineares ($m = 1000$ kg)	82
Figura 5.19 – Comparação com os modelos não lineares ($m = 1500$ kg)	82
Figura 5.20 – Força de ancoragem para o modelo Simplificado	83
Figura 5.21 – Força máxima para o modelo (i)	84
Figura 5.22 – Força máxima para o modelo (ii)	85
Figura 6.1 – Modelo tridimensional da célula unitária	86
Figura 6.2 – Desenho técnico do ressonador (dimensões em mm)	87
Figura 6.3 – Fabricação na máquina de corte a laser	88
Figura 6.4 – Protótipo de uma peça feita a partir do corte a laser	89
Figura 6.5 – Usinagem da peça	89
Figura 6.6 – a) Peça semiacabada. b) Peça acabada	90
Figura 6.7 – a) Base modelada. b) Base real	90
Figura 6.8 – Espectro de Frequência	91
Figura 6.9 – a) Domínio do Tempo. b) Transformada de Fourier do sinal	91
Figura 6.10 – Detalhe do Pico de Magnitude	92
Figura 6.11 – Frequência Natural Simulada (Peça 2)	93
Figura 6.12 – Massa adicionada ao ressonador	94
Figura 6.13 – Frequência natural da Peça 1 com adição de massa	95
Figura 6.14 – Modo de flexão da Peça 1	95
Figura 6.15 – Frequência natural da Peça 1 com adição de massa	96
Figura 6.16 – Frequência natural longitudinal da Peça 1 com adição de massa	96
Figura 6.17 – a) Esferas do Berço de Newton com um ressonador b) Célula unitária c) Cadeia de ressonadores	98
Figura 6.18 – Velocidades de 3 esferas com um ressonador	99
Figura 6.19 – Forças de contato entre esferas com ressonador	99

Figura 6.20 – Forças de Contato com um ressonador na 10ª Esfera.	100
Figura 6.21 – Forças de Contato com dois ressonadores (10ª e 11ª esferas).	101
Figura 6.22 – Forças de Contato com três ressonadores (10ª, 11ª e 12ª esferas).	101
Figura 7.1 – Conjunto montado formando o metamaterial	102
Figura 7.2 – Esquema com dispositivo composto por metamateriais	103
Figura 7.3 – Vista explodida do conjunto	103
Figura 7.4 – Montagem do conjunto mola-ressonador	104
Figura 7.5 – Vista em corte do conjunto	104
Figura 7.6 – Modelo discreto do conjunto molas-ressonadores	105
Figura 7.7 – Curvas de Dispersão	106
Figura 7.8 – Resposta em frequência da massa 4	107
Figura 7.9 – Transmitância	108
Figura 7.10 – Detalhamento da Transmitância	108
Figura 7.11 – Montagem do experimento	109
Figura 7.12 – Medição considerando três ressonadores	110
Figura 7.13 – Resposta em frequência	110
Figura 7.14 – Faixas de redução experimental do sistema	111
Figura 7.15 – Resposta do sistema experimental e numérico	111
Figura 7.16 – Experimento sob ação de impacto	112
Figura 7.17 – Detalhe do experimento sob ação de impacto	113
Figura 7.18 – Modelo discreto do conjunto molas-massas	113
Figura 7.19 – Resultados numérico e experimental do sensor 1 e 2	115
Figura 7.20 – Detalhe do resultado experimental do sensor 1	116
Figura 7.21 – Detalhe dos resultados numérico e experimental do sensor 1 e 2	116
Figura 7.22 – Modelo discreto do conjunto com gap	117
Figura 7.23 – Resultados numérico e experimental do sensor 1 e 2 com gap de 1 mm	118
Figura 7.24 – Modelo discreto do conjunto molas-massas-ressonadores	118
Figura 7.25 – Comparação da força de contato de saída	119

Figura 7.26 – Comparação experimental do sistema com e sem ressonadores	120
Figura 7.27 – Comparação numérico/experimental com e sem ressonadores	121
Figura 8.1 – Tubo com conjunto de metamateriais	122
Figura 8.2 – Modelo proposto com metamateriais	123
Figura 8.3 – Curva de Pressão vs. Tempo para calibre 155 mm	124
Figura 8.4 – Curva de Pressão vs. Tempo e FFT da curva de pressão	125
Figura 8.5 – Detalhe da FFT da curva de pressão	125
Figura 8.6 – Curvas de dispersão para a) $\omega_2 = 100$ Hz. b) $\omega_2 = 130$ Hz	126
Figura 8.7 – Detalhe do bandgap na curva de FFT da curva de pressão	126
Figura 8.8 – Conjunto de Metamateriais com excitação harmônica de 100 Hz	127
Figura 8.9 – Detalhe da resposta do sistema. Excitação harmônica de 100 Hz	128
Figura 8.10 – Conjunto de Metamateriais. Excitação harmônica de 130 Hz	128
Figura 8.11 – Detalhe da resposta do sistema. Excitação harmônica de 130 Hz	129
Figura 8.12 – Resposta para uma frequência de excitação de 88 Hz	129
Figura 8.13 – Resposta para uma frequência de excitação de 84 Hz	130
Figura 8.14 – Resposta para uma frequência de excitação de 117 Hz	131
Figura 8.15 – Resposta para uma frequência de excitação de 120 Hz	131
Figura 8.16 – Detalhe da resposta para frequência de excitação de 120 Hz	132
Figura 8.17 – Geometria da célula unitária	132
Figura 8.18 – Frequência natural do ressonador. a) 101.63 Hz b) 131.21 Hz	133
Figura 8.19 – a) Mola tipo prato b) Arranjo para rigidez de 2941 kN/m	134
Figura 8.20 – Arranjo das molas para uma rigidez de 4902 kN/m	134
Figura 8.21 – Resposta com dados de projeto e excitação	

harmônica de 101.63 Hz	135
Figura 8.22 – Resposta com dados de projeto e excitação harmônica de 131.21 Hz	135
Figura 8.23 – Curvas de dispersão para a) $\omega_2 = 101.63$ Hz. b) $\omega_2 = 131.21$ Hz	136
Figura 8.24 – Montagem do Conjunto de Metamateriais	137
Figura 8.25 – Onda senoidal composta	138
Figura 8.26 – Resposta para onda senoidal composta	138
Figura 8.27 – Pontos críticos do ressonador	139
Figura 8.28 – Gráfico da Força de Contato F_{ct}	140
Figura 8.29 – Detalhe da região do valor máximo da Força de Contato F_{ct}	140
Figura 8.30 – Malha aplicada ao ressonador com detalhe para região de refinamento da malha	141
Figura 8.31 – Modo de aplicação da força	142
Figura 8.32 – Nós utilizados para fixação entre peças	142
Figura 8.33 – Indicação do nó que possui maior tensão de von Mises	143
Figura 8.34 – Detalhe do local de maior tensão	143
Figura 8.35 – Tensão de von Mises do nó crítico ao longo de toda simulação	144
Figura 8.36 – Força de ancoragem para m igual a 100 kg	145
Figura 8.37 – Força de ancoragem para o Conjunto de Metamateriais com frequência natural de 100 Hz	145
Figura 8.38 – Força de ancoragem para o Conjunto de Metamateriais com frequência natural de 130 Hz	146
Figura 8.39 – Força de ancoragem para m igual a 200 kg	146
Figura 8.40 – Força de ancoragem para os dois Conjuntos de Metamateriais.	147
Figura 8.41 – Força de ancoragem para os dois Conjuntos de Metamateriais com valores reais	147
Figura 8.42 – Força de ancoragem para os dois Conjuntos de Metamateriais com valores reais e teóricos	148

Lista de tabelas

Tabela 2.1 – Resumo dos resultados das velocidades finais	33
Tabela 2.2 – Resumo dos resultados das forças de contato máximas	33
Tabela 2.3 – Parâmetros utilizados	35
Tabela 3.1 – Velocidades de propagação da onda	53
Tabela 4.1 – Dados utilizados	62
Tabela 5.1 – Valores utilizados para o sistema sem a massa m	70
Tabela 5.2 – Valores utilizados para o sistema com a massa m	72
Tabela 5.3 – Resumo dos deslocamentos máximos da massa M	76
Tabela 5.4 – Porcentagem de redução em relação ao Modelo Simplificado	76
Tabela 5.5 – Coeficientes para a força de amortecimento não linear	80
Tabela 5.6 – Valor da força máxima de ancoragem para as massas m	84
Tabela 6.1 – Medidas das Peças Projetadas	88
Tabela 6.2 – Medidas das Peças Fabricadas	92
Tabela 6.3 – Constante de Rigidez	94
Tabela 6.4 – Frequência natural longitudinal com adição de massa	97
Tabela 7.1 – Dados reais dos ressonadores	104
Tabela 8.1 – Configurações ideais dos conjuntos de metamateriais	127
Tabela 8.2 – Configurações reais dos conjuntos de metamateriais	134

“Si vis pacem, para bellum”

Autor desconhecido

1. Introdução

O presente trabalho teve seu início na análise dos sistemas de recuo dos armamentos, em especial os armamentos de maiores calibres. O primeiro sistema de recuo do qual se tem conhecimento é o Canhão Francês *Matériel de 75mm Mle 1897*, mostrado na Figura 1.1. Desde então, todos os mecanismos de recuo existentes têm como objetivo comum moderar as cargas provenientes do disparo exercidas na estrutura de suporte do armamento, através do prolongamento do tempo de resistência das forças geradas pelos gases dos propelentes.

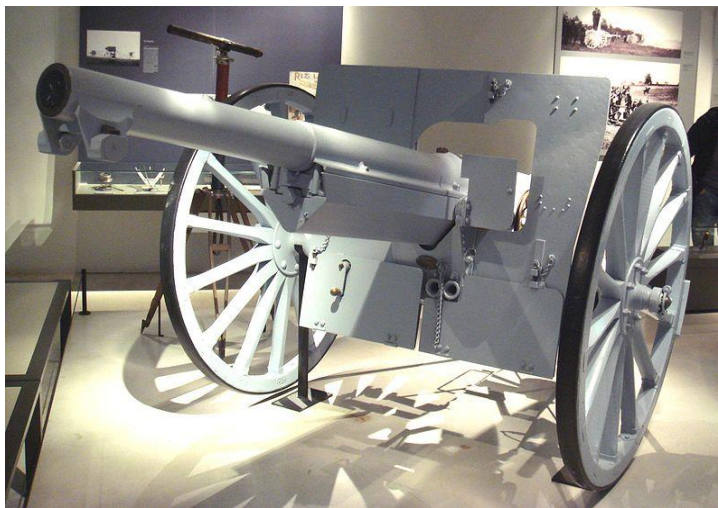


Figura 1.1 – Canhão Francês *Matériel de 75mm Mle 1897*
Fonte: WIKIPÉDIA (2016a)

Uma característica presente durante o disparo em todos os armamentos é o perfil impulsivo do forçamento que atua no mecanismo de recuo, como pode ser observado na Figura 1.2. Esse é o esforço que os mecanismos de recuo moderam e o objetivo deste trabalho é propor uma forma de aprimorar os já existentes mecanismos de recuo por meio da adição de um novo componente, a saber: um conjunto de metamateriais elásticos.

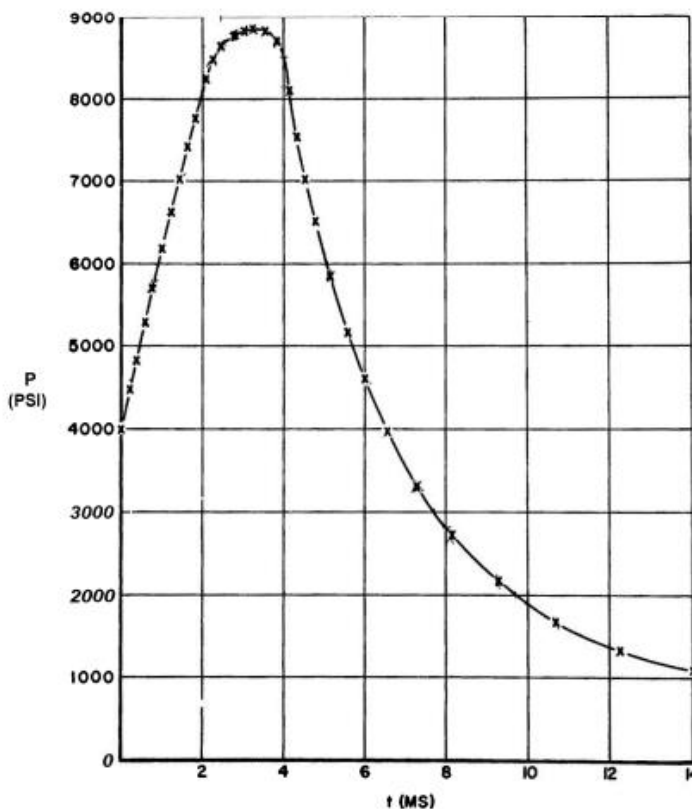


Figura 1.2 – Curva de pressão interna teórica do obuseiro 105 mm
 Fonte: AMCP-706-150 (1965)

Dessa forma, neste trabalho serão abordados conceitos de impacto, forças de contato, propagação de ondas, metamateriais e modelos de sistemas de recuo para que possa ser feita uma proposta para uma possível aplicação em um armamento.

1.1. Motivação

O estudo inicial será feito no Berço de Newton, tendo como objetivo fazer uma associação das esferas impactantes com as partes internas de um sistema de recuo que recebem esforços impulsivos durante um disparo. Sabe-se que existem diversas classificações de sistemas de recuo, mas todos têm em comum os objetivos de amortecer a força impulsiva gerada pelo disparo e limitar o movimento do armamento à retaguarda.

Dentro da ideia de que o impacto gera uma propagação de ondas de tensão no material, pretende-se utilizar o conceito de metamateriais para mitigação das ondas propagadas. Metamateriais são amplamente definidos como materiais compostos artificiais manipulados pelo homem para se obter propriedades

incomuns não facilmente disponíveis na natureza (SHARMA e SUN, 2015). As primeiras aplicações de metamateriais foram no campo eletromagnético e os principais objetivos eram desenvolver materiais com propriedades peculiares, tais como constante dielétrica negativa, permeabilidade magnética negativa e índice de refração negativo. Devido à analogia das ondas eletromagnéticas e das ondas mecânicas, Chen et. al. (2016), Tan et. al. (2014), Tan and Sun (2014) e Manimala et. al. (2014) usam um modelo de metamateriais elásticos para verificar a mitigação das ondas geradas por ondas de explosão e/ou carregamentos de impacto.

Outra aplicação de grande interesse é nos impactos veiculares. O trabalho de Comi e Driemeier (2017) utiliza metamateriais acústicos com ressonadores locais (LRAM – *Locally Resonant Acoustic Metamaterials*) combinados com tubos metálicos para obter um absorvedor eficiente para carros pequenos.

1.2. Objetivos

Este trabalho terá como objetivo o desenvolvimento de um conjunto composto por metamateriais elásticos para a mitigação das ondas de tensão geradas por esforços impulsivos.

1.2.1. Objetivos Específicos

Como objetivos específicos desta tese, pode-se citar:

- O projeto, a construção e a validação experimental de um conjunto composto por metamateriais elásticos sujeito à ação de forças harmônicas e impulsivas; e
- A aplicação numérica de um conjunto composto por metamateriais elásticos na mitigação das ondas de tensão geradas por esforços provenientes de um disparo.

1.3. Organização da Tese

Este trabalho aborda um tópico no estado da arte do desenvolvimento tecnológico, metamateriais, em um problema que reúne forças impulsivas, impacto, técnicas analíticas como propagação de onda, numéricas como elementos

finitos e experimentais englobando validação de modelos, inclusive uma aplicação do estudo em sistema de recuo em armamentos onde se considera possível o uso desta técnica. Não é do escopo deste trabalho desenvolver um dispositivo usando metamateriais para absorção de perturbações impulsivas, mas sim avaliar a possibilidade disto ser feito.

Assim, optamos em temas muito estudados como impacto, propagação de ondas ou uso de métodos numéricos como elementos finitos por apresentar alguns conceitos básicos que servem de fundamento para a abordagem que está sendo proposta nesta aplicação. Dessa forma, a tese está dividida como apresentado a seguir.

O Capítulo 1 apresenta a introdução, a motivação, os objetivos e a organização da tese.

O Capítulo 2 trata é um estudo sobre impacto e alguns modelos de contato aplicado ao Berço de Newton.

O Capítulo 3 trata do fenômeno de propagação de ondas mecânicas, seu equacionamento, a geração de uma onda a partir de um impacto colinear analisado analiticamente, a simulação de um impacto e da propagação da onda gerada pelo Método de Elementos Finitos (MEF) e a análise do Berço de Newton através da propagação de ondas de tensão.

Os Metamateriais são discutidos no Capítulo 4. É feita a apresentação, conceituação e equacionamento de um metamaterial com ressonador simples, um metamaterial com ressonador duplo e uma cadeia de metamateriais simples excitados harmonicamente.

No Capítulo 5 é mostrado um modelo simplificado de um mecanismo de recuo que representa os sistemas de recuo tradicionais existentes e é proposto um novo sistema de recuo com um subsistema composto por uma massa embarcada com o intuito de aprimorar o sistema de recuo simplificado.

O Capítulo 6 propõe um metamaterial com ressonador local para ser analisado sua geometria e frequências naturais de vibração.

Um conjunto é projetado como objetivo de se averiguar experimentalmente as propriedades dos metamateriais elásticos e os cálculos dos parâmetros reais são desenvolvidos no Capítulo 7 a partir de excitações harmônicas e excitação impulsiva.

O Capítulo 8 apresenta um modelo de mecanismo de recuo com conjuntos de metamateriais e o efeito causado no sistema quando este é submetido à ação de força impulsiva.

O Capítulo 9 apresenta as conclusões e propostas para trabalhos futuros.

2. Berço de Newton

Durante o fenômeno de contato entre dois corpos, inicialmente eles se tocam em um único ponto ou ao longo de uma linha. Sob a ação de um carregamento mínimo, eles se deformam na vizinhança do seu ponto de contato inicial de modo a tocarem-se ao longo de uma área que é finita embora pequena em comparação com as dimensões dos dois corpos. Uma teoria de contato é necessária para prever a forma da área de contato e como ela cresce com o aumento da carga; a magnitude e distribuição de tensões de superfície, tensões normais e possivelmente tangenciais, transmitidas através da interface de contato. Finalmente, esta teoria deve permitir que as componentes da deformação e da tensão em ambos os corpos sejam calculadas na vizinhança da região de contato.

O impacto é um fenômeno físico complexo que ocorre quando dois ou mais corpos colidem entre si. A Figura 2.1 mostra o impacto entre dois corpos e a linha de impacto correspondente.

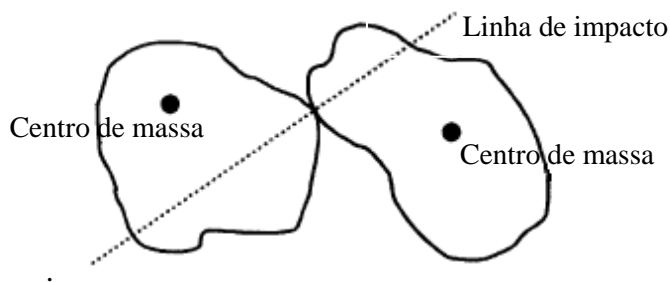


Figura 2.1 – Impacto entre 2 corpos
Fonte: BRACH (1991)

A linha de impacto é uma linha reta normal à superfície de contato no ponto de contato, ou seja, normal ao plano tangencial no ponto de contato.

Como foi mencionado, a dinâmica do impacto é um evento bastante complexo e depende de muitas propriedades dos corpos que estão em contato, como por exemplo o material dos corpos, a geometria e a velocidade. Geralmente duas fases podem ser identificadas: compressão e restituição, como mostrado na Figura 2.2.

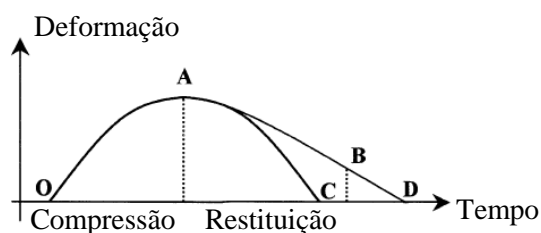


Figura 2.2 – Deformação durante o impacto
 Fonte: Adaptado de BRACH (1991)

A primeira fase começa quando os dois corpos entram em contato no instante t_0 (ponto O) e termina quando a máxima deformação é alcançada no instante t_m (ponto A), onde a velocidade relativa normal é zero. A segunda fase começa no instante t_m e termina quando os dois corpos se separam, ou seja, instante t_f (pontos B, C ou D). Para impactos com velocidades suficientemente altas, nem toda deformação é recuperada devido à deformação plástica permanente e conseqüentemente perda de energia. Com relação à deformação, o impacto pode ser classificado como (a) perfeitamente elástico, linha O–A–C, onde nenhuma energia é perdida; (b) perfeitamente plástico, linha O–A, onde toda energia é perdida e a deformação é permanente; (c) parcialmente elástica, linha O–A–D, onde existe perda de energia, porém não há deformação permanente; (d) parcialmente plástica, linha O–A–B, onde existe perda de energia e deformação permanente. (GILARDI e SHARF, 2002; PFEIFFER e GLOCKER, 2008)

As características do impacto são: curtíssima duração, valores altos de forças, rápida dissipação de energia e presença de grandes acelerações e/ou desacelerações. Esses fatos devem ser considerados durante o projeto e a análise de qualquer sistema mecânico e os objetos da modelagem do impacto são determinar as condições pós-impacto do sistema, conhecidas as condições iniciais (pré-impacto).

Um exemplo simples para dar início ao estudo prático do impacto pode ser encontrado no Berço de Newton, que é um aparato composto por esferas idênticas suspensas por fios, como mostrado na Figura 2.3.

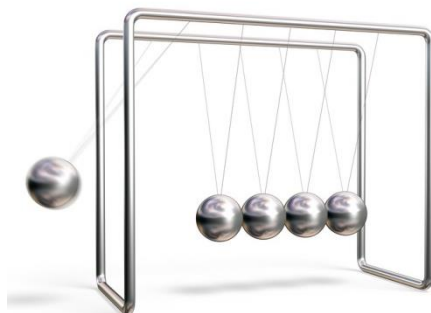


Figura 2.3 – Berço de Newton com cinco esferas
Fonte: Palermo (2013).

Seja, por exemplo, o Berço de Newton mais simples que o mostrado na Figura 2.3, com apenas três esferas. A primeira é solta a partir do repouso a uma altura, h , a partir da posição mais inferior do movimento das esferas e impacta a segunda esfera, que está em contato com a terceira esfera e tanto a segunda esfera quanto a terceira estão inicialmente em repouso na parte inferior do arco de oscilação. Considera-se que a segunda esfera recebe um impacto normal da primeira. Por conservação de energia, a velocidade de impacto da primeira esfera é $v_1 = \sqrt{2gh}$ devido à altura a qual foi liberada. Se houvesse uma perfeita conservação da quantidade de movimento e de energia, poder-se-ia esperar uma transferência total do impulso da primeira esfera para a terceira e após a colisão, ambas as esferas um e dois permaneceriam em repouso e a esfera três deixaria o repouso com velocidade $v_3 = \sqrt{2gh}$.

No entanto, sabe-se que existem atrito e perda de energia no mundo real. Essa é a razão pela qual se busca um caminho melhor para representar a colisão normal entre esferas.

Hertz (1882) foi o primeiro a estudar e desenvolver uma abordagem matemática para as forças de contato durante colisões. O modelo de Hertz leva em conta partículas perfeitamente elásticas. Ele considerou que durante o contato entre duas esferas a e b , por exemplo, a deformação das esferas com raio R_a e R_b , respectivamente, é definida pela sobreposição das esferas. A Figura 2.4 mostra as duas esferas com o sistema de referência fixo considerado, sem contato.

A sobreposição é definida como $R_a + R_b - |\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b|$, onde \mathbf{r}_a e \mathbf{r}_b são as posições dos centros das esferas a e b . Dessa forma, a equação $R_a + R_b - |\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b|$ é considerada o quanto de sobreposição há na esfera a sobre a esfera b , como mostrado na Figura 2.5.

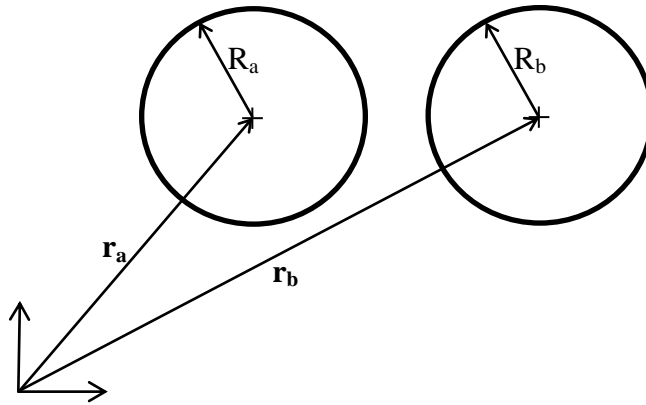


Figura 2.4 – Esferas sem contato

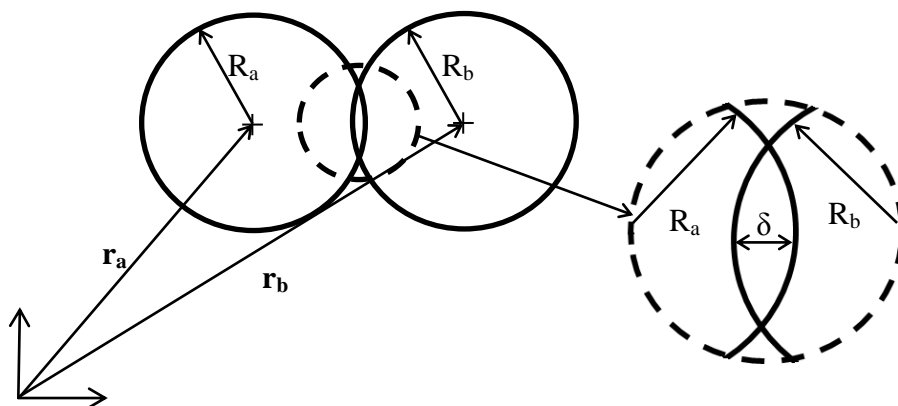


Figura 2.5 – Sobreposição das esferas com detalhamento

Essa deformação gera uma força repulsiva entre as partículas. A força repulsiva, F_n , no modelo de Hertz é

$$F_n = k_{Hz} \delta^{1.5} \quad \text{Eq. 1}$$

onde $\delta = \max(0, R_a + R_b - |\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b|)$ é a deformação entre as esferas e esse valor é zero quando não há contato entre as esferas e k_{Hz} é a rigidez entre as esferas durante a colisão. De acordo com o proposto numericamente por Landau e

Lifshitz (1975) e experimentalmente por Lovett et. al. (1988), a rigidez, k_{Hz} , para esferas idênticas pode ser calculada pela teoria da elasticidade através da Eq. 2:

$$k_{Hz} = \frac{8}{5} \left(\frac{E}{(1 - \nu^2)} \right) \left(\frac{R}{2} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \text{Eq. 2}$$

onde E é o módulo de elasticidade, ν é o coeficiente de Poisson e R é o raio das esferas. Ainda sobre a Eq. 1, o expoente “1.5” é obtido a partir da dedução matemática da relação entre a deformação e a força obtida pela pressão de contato entre duas esferas na região de contato (LANDAU e LIFSHITZ, 1975).

Outro modelo usado é o modelo por mola e amortecedor linear, chamado *linear-spring and dashpot* (LSD), que também leva em conta a taxa de deformação, $\dot{\delta}$, como mostrado na Eq. 3:

$$F_n = k_n \delta + \beta_n \gamma_{n,crit} \left(\frac{d\delta}{dt} \right) = k_n \delta + \beta_n \gamma_{n,crit} \dot{\delta}, \quad \text{Eq. 3}$$

onde k_n , β_n e $\gamma_{n,crit}$ também podem ser calculados de maneira semelhante a k_{Hz} .

Kuwabara e Kono (1987) propuseram um modelo que é uma variante do modelo de Hertz e do modelo LSD, mais especificamente, uma combinação de ambos modelos. A Eq. 4 mostra seu modelo, denominado modelo KK:

$$F_n = \tilde{k}_n \delta^{1.5} + \tilde{\gamma}_n \delta^{0.5} \left(\frac{d\delta}{dt} \right) = \tilde{k}_n \delta^{1.5} + \tilde{\gamma}_n \delta^{0.5} \dot{\delta} \quad \text{Eq. 4}$$

Onde \tilde{k}_n e $\tilde{\gamma}_n$ também podem ser calculados a partir das características geométricas e físicas da esfera (KUWABARA e KONO, 1987).

Para fins de comparação entre os modelos de força de contato apresentados nas Eq. 1, Eq. 3 e Eq. 4, foram consideradas as três esferas no berço de Newton. O material das esferas é o aço inoxidável cujas propriedades são: módulo de elasticidade, $E = 1.93 \cdot 10^{11}$ N/m², coeficiente de Poisson, $\nu = 0.35$, tensão de escoamento, $Y = 3.10 \cdot 10^8$ N/m², densidade, $\rho = 8030$ kg/m³ e raio, $R = 1.27$ cm. As equações de movimento das três esferas para o modelo de Hertz são apresentadas na Eq. 5

$$\begin{aligned}
 m_1 \ddot{x}_1 + k_{Hz} \delta_{12}^{1.5} &= 0 \\
 m_2 \ddot{x}_2 - k_{Hz} \delta_{12}^{1.5} + k_{Hz} \delta_{23}^{1.5} &= 0 \\
 m_3 \ddot{x}_3 - k_{Hz} \delta_{23}^{1.5} &= 0
 \end{aligned}
 \tag{Eq. 5}$$

onde $\delta_{12} = \max(0, R_1 + R_2 - |r_1 - r_2|)$ e $\delta_{23} = \max(0, R_2 + R_3 - |r_2 - r_3|)$.

A primeira esfera foi lançada de uma altura tal que resultasse em uma velocidade de impacto, v_0 , no momento de contato com a segunda esfera de 0.88 m/s. Esta é a condição inicial da simulação considerada e tanto a segunda quanto a terceira esferas estão em repouso. O tempo de simulação utilizado para todos os casos foi de $1.5 \cdot 10^{-4}$ s.

A Figura 2.6 mostra o resultado para o modelo de Hertz regido pela Eq. 5. Observa-se a velocidade inicial da esfera 1 de 0.88 m/s (curva azul) e as velocidades das esferas 2 e 3 (respectivamente linhas verde e vermelha) inicialmente iguais a zero. A velocidade da esfera 1 diminui até atingir o valor constante de -0.0624 m/s, o que significa que o sentido de deslocamento do esfera é invertido. A esfera 2 tem um aumento de velocidade com posterior redução até a velocidade final. Este aumento da velocidade da esfera 2 é em função da deformação δ causada pelo contato entre as esferas 1 e 2 e a redução da velocidade é devida à deformação δ causada pelo contato entre as esferas 2 e 3 até o momento em que não há mais contato e a velocidade 2 assume sua velocidade final de 0.0672 m/s. A esfera 3 tem um aumento de velocidade até chegar à velocidade final de 0.8752 m/s.

A Figura 2.7 apresenta as forças de contato entre as esferas 1 e 2 (F_{1-2}) e entre as esferas 2 e 3 (F_{2-3}) calculadas pelo modelo de Hertz.

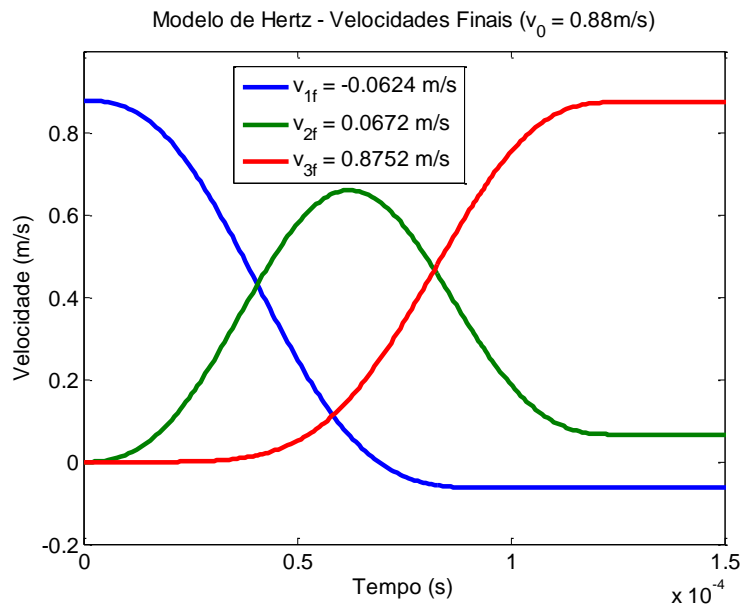


Figura 2.6 – Velocidades das esferas (modelo de Hertz)

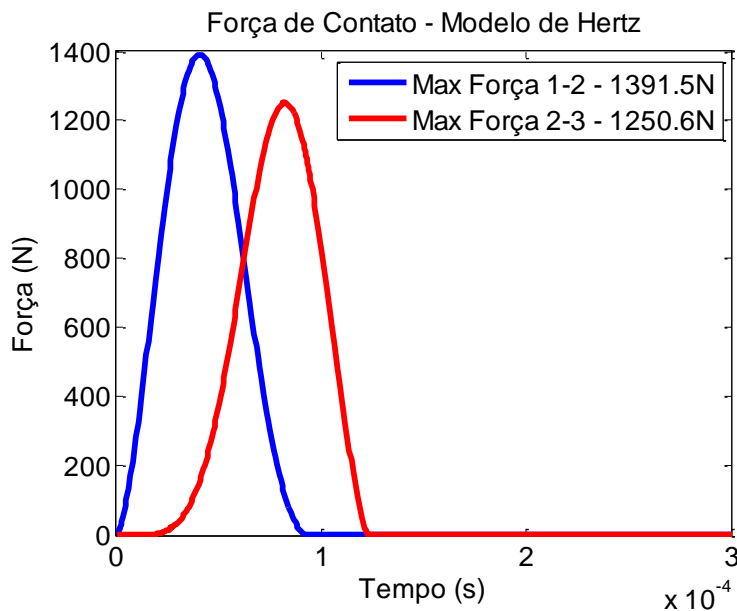


Figura 2.7 – Força de contato entre as esferas 1 e 2 (F_{1-2}) e esferas 2 e 3 (F_{2-3}) – modelo de Hertz

Assim conforme observado experimentalmente, diferentemente do modelo idealizado de conservação de quantidade de movimento e conservação de energia, onde a esfera 1 permanece imóvel após o contato juntamente com a esfera 2, no modelo proposto por Hertz, as esferas 1 e 2 não permanecem imóveis e a esfera 3 tem uma velocidade final menor que a velocidade inicial da esfera 1.

As equações de movimento das três esferas para o modelo LSD são apresentadas na Eq. 6:

$$\begin{aligned}
 m_1 \ddot{x}_1 + k_n \delta_{12} + \beta_n \gamma_{n,crit} \dot{\delta}_{12} &= 0 \\
 m_2 \ddot{x}_2 - (k_n \delta_{12} + \beta_n \gamma_{n,crit} \dot{\delta}_{12}) + (k_n \delta_{23} + \beta_n \gamma_{n,crit} \dot{\delta}_{23}) &= 0 \\
 m_3 \ddot{x}_3 - (k_n \delta_{23} + \beta_n \gamma_{n,crit} \dot{\delta}_{23}) &= 0
 \end{aligned} \quad \text{Eq. 6}$$

onde $\delta_{12} = \max(0, R_1 + R_2 - |r_1 - r_2|)$, $\delta_{23} = \max(0, R_2 + R_3 - |r_2 - r_3|)$, $\dot{\delta}_{12} = \max(0, -|v_1 - v_2|)$ e $\dot{\delta}_{23} = \max(0, -|v_2 - v_3|)$.

O resultado do modelo LSD é apresentado na Figura 2.8 para um mesmo tempo de simulação ($1.5 \cdot 10^{-4}$ s) e a mesma velocidade inicial da esfera 1 (0.88 m/s). Observa-se que as velocidades finais das esferas 1, 2 e 3 são, respectivamente, -0.1019 m/s, 0.1593 m/s e 0.8226 m/s.

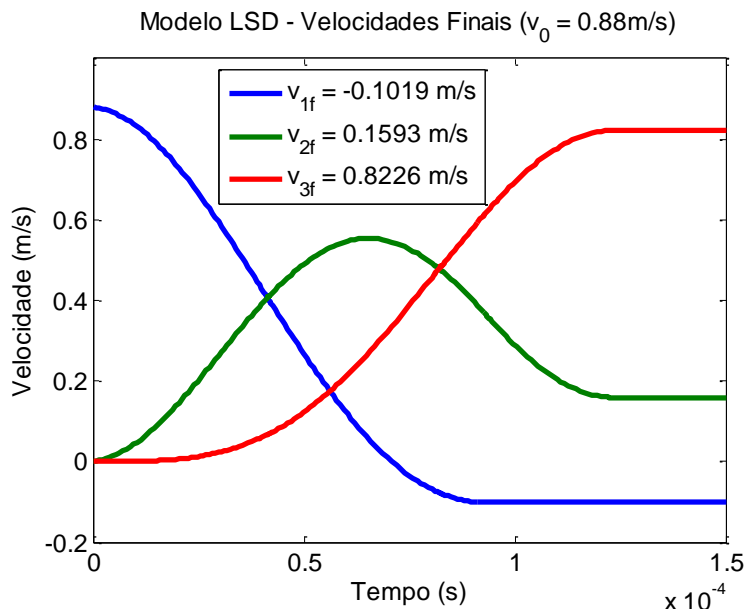


Figura 2.8 – Velocidades das esferas (modelo LSD)

As forças de contato entre as esferas 1 e 2 (F_{1-2}) e entre as esferas 2 e 3 (F_{2-3}) calculadas pelo modelo LSD são ilustradas na Figura 2.9.

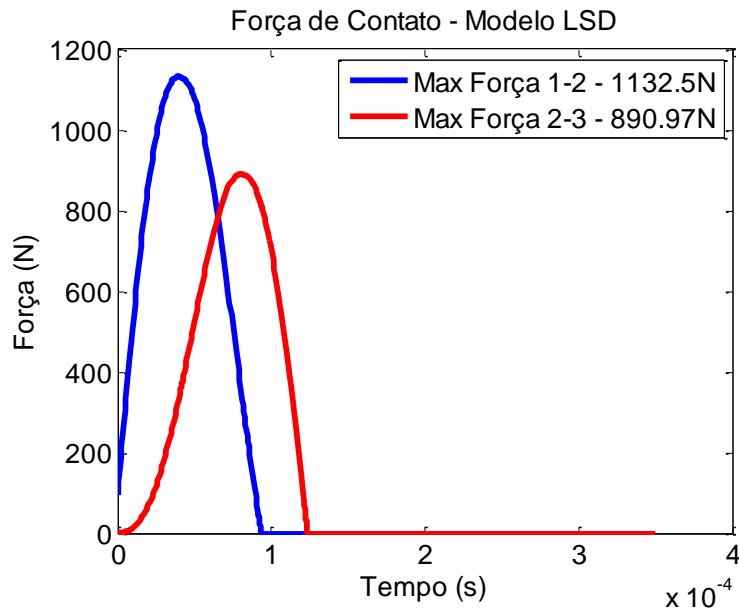


Figura 2.9 – Força de contato entre as esferas 1 e 2 (F_{1-2}) e esferas 2 e 3 (F_{2-3}) – modelo LSD

As equações de movimento das três esferas para o modelo KK são apresentadas na Eq. 7:

$$\begin{aligned}
 m_1 \ddot{x}_1 + \tilde{k}_n \delta_{12}^{1.5} + \tilde{\gamma}_n \delta_{12}^{0.5} \dot{\delta}_{12}^{1.5} &= 0 \\
 m_2 \ddot{x}_2 - (\tilde{k}_n \delta_{12}^{1.5} + \tilde{\gamma}_n \delta_{12}^{0.5} \dot{\delta}_{12}^{1.5}) + (\tilde{k}_n \delta_{23}^{1.5} + \tilde{\gamma}_n \delta_{23}^{0.5} \dot{\delta}_{23}^{1.5}) &= 0 \\
 m_3 \ddot{x}_3 - (\tilde{k}_n \delta_{23}^{1.5} + \tilde{\gamma}_n \delta_{23}^{0.5} \dot{\delta}_{23}^{1.5}) &= 0,
 \end{aligned}
 \tag{Eq. 7}$$

onde δ_{12} , δ_{23} , $\dot{\delta}_{12}$ e $\dot{\delta}_{23}$ são semelhantes ao definido para a Eq. 6.

O modelo KK é também simulado com o mesmo tempo de $1.5 \cdot 10^{-4}$ s e mesma velocidade inicial. As velocidades finais das esferas 1, 2 e 3 são, respectivamente, -0.0486 m/s, 0.0969 m/s e 0.8317 m/s. A Figura 2.10 mostra o comportamento das esferas durante e após a colisão.

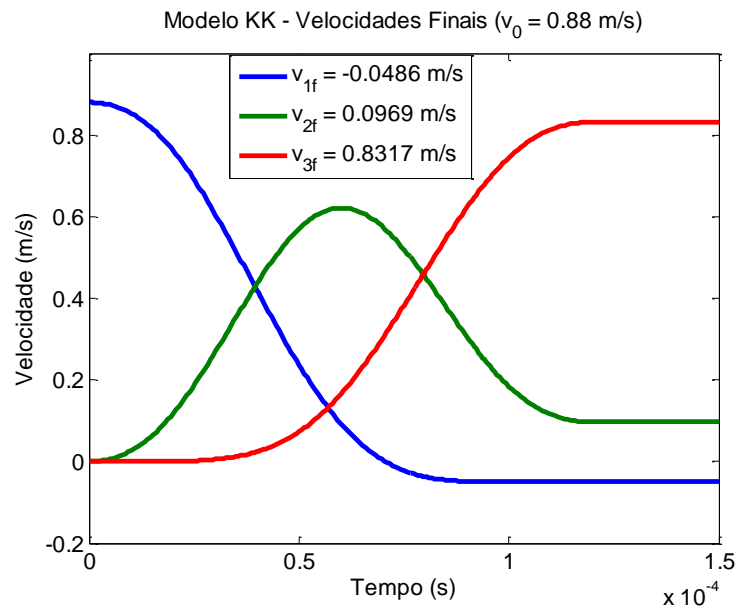


Figura 2.10 – Velocidades das esferas (modelo KK)

Para o modelo KK, as forças de contato entre as esferas 1 e 2 (F_{1-2}) e entre as esferas 2 e 3 (F_{2-3}) calculadas podem ser observadas na Figura 2.11.

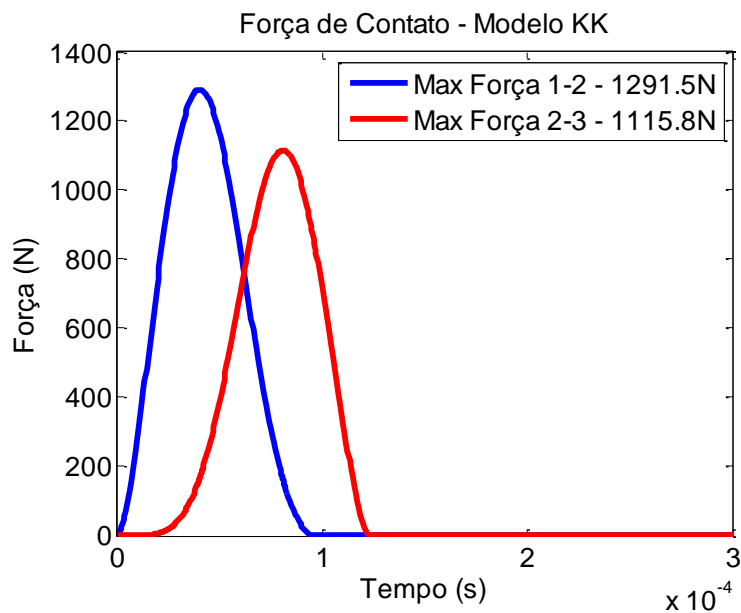


Figura 2.11 – Força de contato entre as esferas 1 e 2 (F_{1-2}) e esferas 2 e 3 (F_{2-3}) – modelo KK

A Tabela 2.1 resume os resultados apresentados dos três modelos com relação às velocidades finais e a Tabela 2.2 resume os resultados com relação às forças de contato máximas dos três modelos.

Tabela 2.1 – Resumo dos resultados das velocidades finais

Modelo	Velocidades Finais (m/s)		
	Esfera 1	Esfera 2	Esfera 3
Hertz	- 0.0624	0.0672	0.8752
LSD	- 0.1019	0.1593	0.8226
KK	- 0.0486	0.0969	0.8317

Tabela 2.2 – Resumo dos resultados das forças de contato máximas

Modelo	Forças de Contato Máximas (N)	
	Esfera 1-2	Esfera 2-3
Hertz	1391.5	1250.6
LSD	1132.5	890.97
KK	1291.5	1115.8

Como medido experimentalmente por Donahue, et. al. (2008), antes da colisão, a esfera 1 possui velocidade inicial de 0.88 m/s e as esferas 2 e 3 estão em repouso. Já após a colisão, a esfera 1 possui velocidade negativa, a esfera 2 apresenta uma velocidade positiva de pequena intensidade e a esfera 3 terá uma velocidade final um pouco menor que a velocidade inicial da esfera 1, como mostrado na Figura 2.12

Como era de se esperar, os modelos apresentados são relativamente simples para representar o comportamento real da colisão entre as esferas. O modelo de Hertz, por exemplo, considera o comportamento perfeitamente elástico das esferas. Já os modelos LSD e KK consideram o regime viscoelástico, porém o cálculo dos parâmetros (k_n , β_n e $\gamma_{n,crit}$ para o modelo LSD e \tilde{k}_n e $\tilde{\gamma}_n$ para o modelo KK) são apenas estimativas que tentam aproximar o comportamento real por modelos matemáticos.

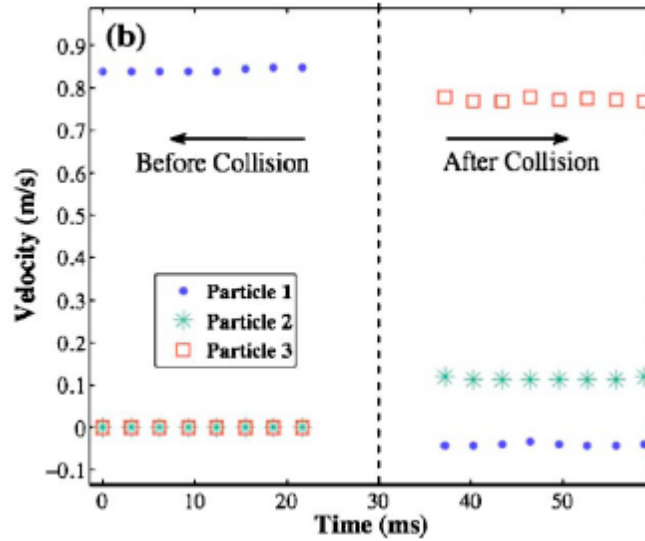


Figura 2.12 – Velocidades experimentais
Fonte: Donahue, et. al. (2008).

Cabe ressaltar que cada um dos modelos possuem métodos específicos para estimar os parâmetros utilizados, como mencionado na apresentação das formulações de cada modelo.

Caso o conceito acima fosse estendido para mais de três esferas, o resultado seria semelhante ao observado experimentalmente. A primeira esfera impactaria a segunda e a energia seria transferida da segunda até a última esfera da cadeia através da propagação de uma onda de tensão, e a última esfera teria uma velocidade inicial de partida próxima da velocidade de impacto da primeira esfera, fazendo com que a última esfera alcance quase a mesma altura de que a primeira esfera foi lançada. A partir daí, a última esfera retornaria e impactaria novamente a cadeia de esferas de maneira similar.

Um objetivo que pode ser de interesse é impedir que a última esfera do berço de Newton volte a impactar a penúltima esfera e dessa forma, a energia do impacto seria absorvida por um amortecimento na última esfera.

Para esse estudo, será considerado o impacto entre duas esferas de massas m_1 e m_2 que estão suspensas por um fio inextensível de massa desprezível e de comprimento L . A massa m_1 é erguida a uma altura h e a partir desta posição, a esfera 1 é solta (Figura 2.13).

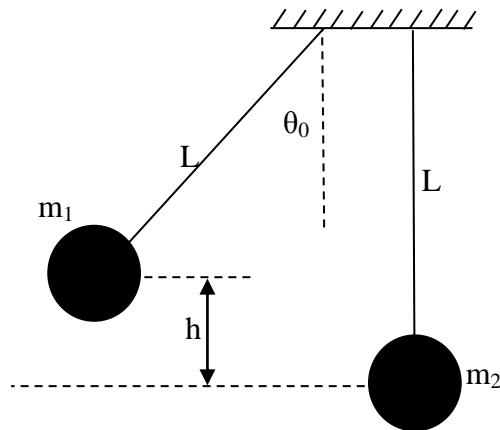


Figura 2.13 – Posição inicial

Os dados a serem considerados para os cálculos e simulações são mostrados na Tabela 2.3.

Tabela 2.3 – Parâmetros utilizados

Parâmetro	Valor
Raio das esferas	$1.27 \cdot 10^{-2}$ m
ρ	8030 kg/m ³
g	9.81 m/s ²
L	0.2 m
h	0.05 m
$m_1 = m_2$	68.9 g

Pode-se determinar geometricamente o valor do ângulo inicial θ_0 que o fio faz com a vertical a partir da Eq. 8

$$\cos \theta = \frac{L - h}{L} \quad \text{Eq. 8}$$

$$\theta = 0.722 \text{ rad}$$

Pode-se também determinar a velocidade que a esfera 1 impactará a esfera 2, chamada de v_{01} (Eq. 9 e Figura 2.14. a))

$$v_{01} = \sqrt{2gh} = 0.99 \text{ m/s} \quad \text{Eq. 9}$$

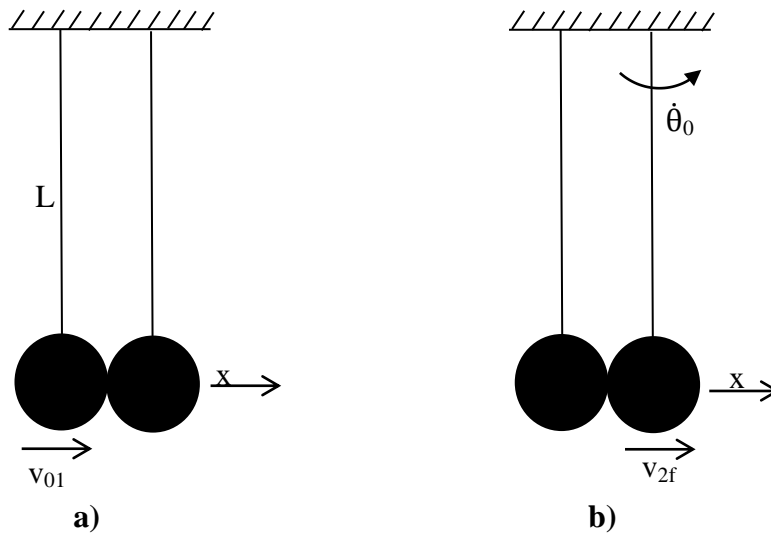


Figura 2.14 – Impacto entre as esferas

As equações de movimento das esferas durante o impacto podem ser escritas como

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 + k\delta^{1.5} &= 0 \\ m_2 \ddot{x}_2 - k\delta^{1.5} &= 0 \end{aligned} \quad \text{Eq. 10}$$

Onde os índices 1 e 2 são referentes às esferas 1 e 2, respectivamente, e δ é definido como

$$\delta = \max(0, R_1 - R_2 - |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|), \quad \text{Eq. 11}$$

onde \mathbf{r}_1 e \mathbf{r}_2 são as posições dos centros das esferas 1 e 2. Como já mencionado, a diferença $R_1 - R_2 - |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$ é considerada o quanto de sobreposição há na esfera 1 sobre a esfera 2.

A parcela $k\delta^{1.5}$ representa a força de contato durante o impacto modelado por Hertz.

A velocidade de impacto v_{01} é a velocidade da esfera 1 no início do contato entre as esferas. Dessa forma, as condições iniciais das equações de movimento (Eq. 12) são:

$$x_1 = 0, \dot{x}_1 = v_{01}, x_2 = 0, \dot{x}_2 = 0 \quad \text{Eq. 12}$$

Resolvendo o sistema de equações da Eq. 10, chega-se à velocidade final da esfera 2, v_{2f} , conforme Figura 2.15. Observa-se que a velocidade da esfera 2 após o contato é praticamente a mesma velocidade de impacto da esfera 1 e a velocidade final da esfera 1 é praticamente nula ($-2.53 \cdot 10^{-8}$ m/s).

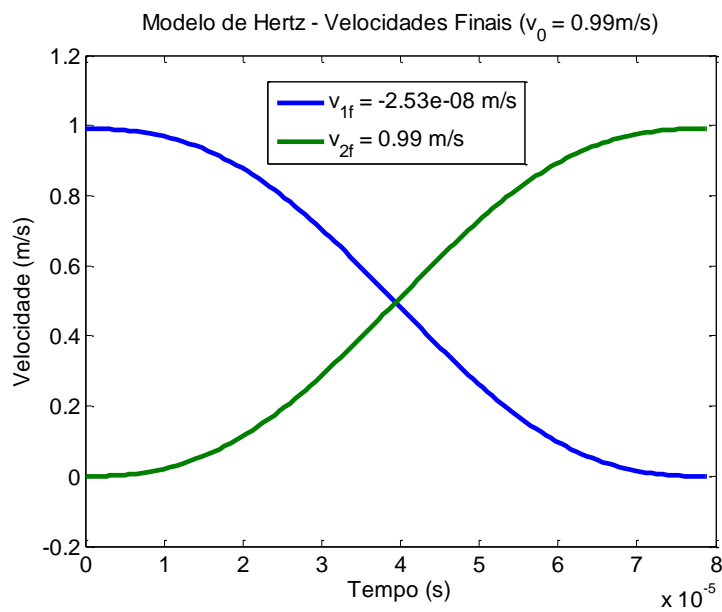


Figura 2.15 – Velocidades das esferas 1 e 2

Pode-se obter também a força de impacto durante o contato, conforme Figura 2.16.

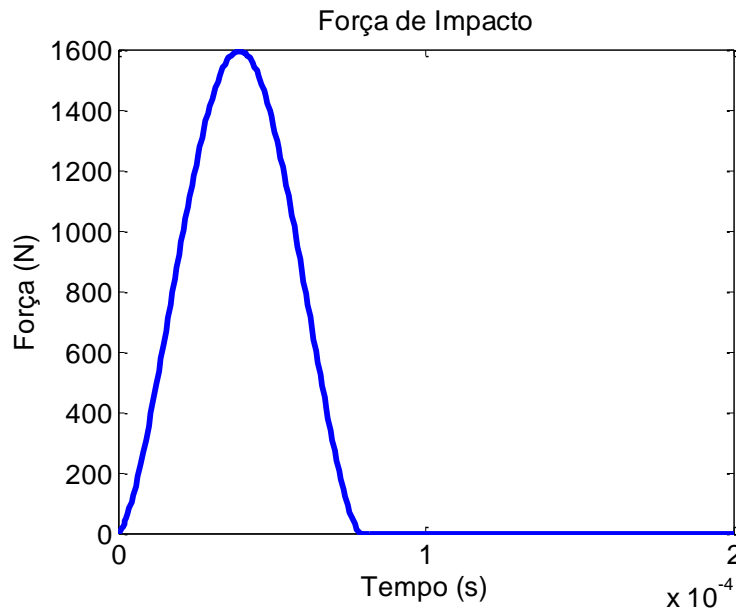


Figura 2.16 – Força de impacto

Sabe-se que a equação de movimento pendular é obtida pela lei de Euler. Para a esfera 2, pode-se escrever que

$$m_2 L^2 \ddot{\theta} + m_2 g \sin \theta = 0 \quad \text{Eq. 13}$$

Para resolver esta equação, precisa-se das condições iniciais e partir da velocidade (tangencial) inicial da esfera 2, pode-se calcular a sua velocidade angular inicial

$$\dot{\theta}_0 = \frac{v_{2f}}{L} = 4.95 \text{ rad/s} \quad \text{Eq. 14}$$

Com isso, as condições iniciais da Eq. 13 são

$$\theta(0) = 0 \text{ e } \dot{\theta}(0) = 4.95 \text{ rad/s} \quad \text{Eq. 15}$$

Entretanto, a Eq. 13 será considerada somente para o movimento ascendente da esfera. Para o movimento descendente, será considerado um amortecimento de forma que a equação de movimento é dada por

$$m_2 L^2 \ddot{\theta} + m_2 g \sin \theta + b \dot{\theta} = 0. \quad \text{Eq. 16}$$

com o objetivo de fazer com que a esfera 2 retorne ao ponto inicial ($\theta = 0$) com velocidade nula. A Figura 2.17 mostra o deslocamento angular da esfera de zero até o valor máximo de 0.722 rad, coerente com a conservação de energia (Eq. 8), e a partir desse ponto, a linha azul mostra a variação da posição angular sem amortecimento (Eq. 13) e a linha vermelha mostra o retorno da esfera 2 até a posição inicial através de um amortecimento conforme descrito pela Eq. 16.

A Figura 2.18 mostra o gráfico das velocidades com e sem amortecimento, mostrando que a esfera 2 chega à posição inicial com velocidade nula considerando o amortecimento (linha vermelha).

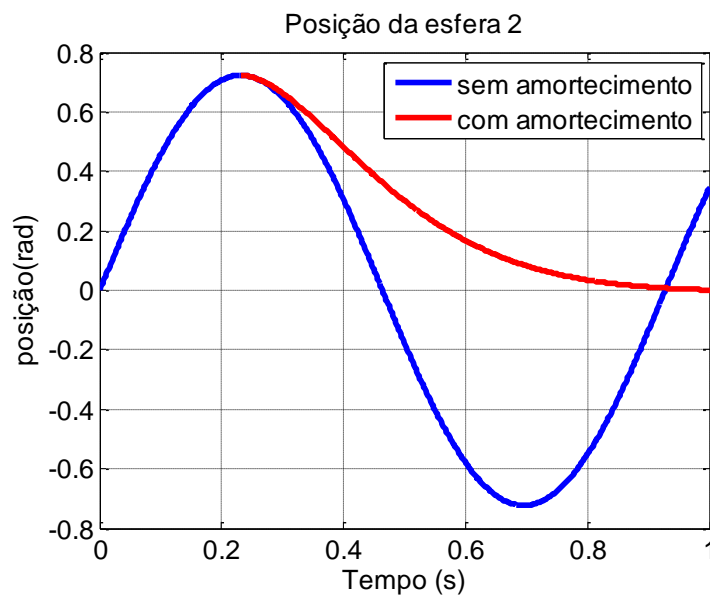


Figura 2.17 – Deslocamento angular

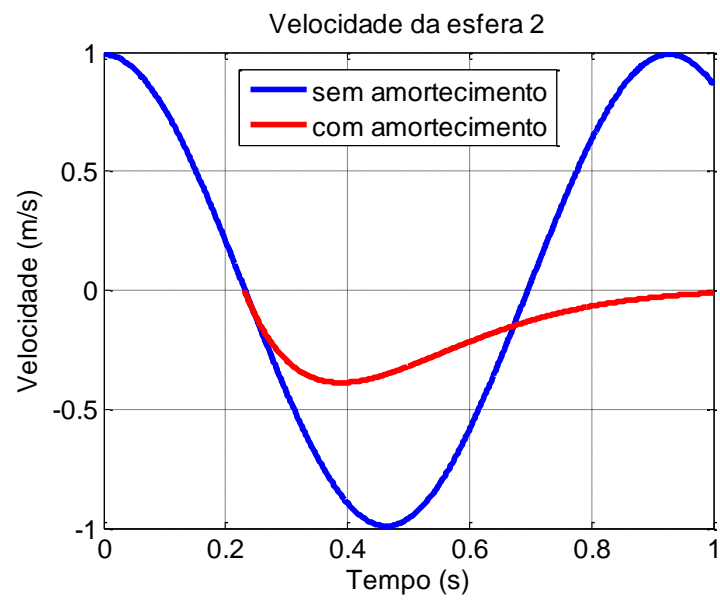


Figura 2.18 – Velocidade tangencial

3. Propagação de Ondas

Carregamentos provenientes de impacto envolvem dois fatores que não são considerados na análise de tensão estática. Um deles é a velocidade de propagação do pulso de tensão no material. Em problemas estáticos, a energia de deformação pode ser distribuída por toda a estrutura, mas em carregamentos devido a forças impulsivas, o volume de energia armazenada é limitado pela velocidade de propagação das ondas no material. Para as cargas de impacto com pequena duração, uma pequena quantidade de energia num pequeno volume pode resultar em tensões que podem fraturar ou de alguma forma danificar o material.

A segunda diferença entre o carregamento proveniente do impacto e cargas estáticas no projeto é a taxa de variação da deformação.

A resposta do impacto em um sólido depende da energia do corpo impactante, o que resulta na iniciação das ondas de tensão elásticas para um impacto de baixa energia, a propagação de ondas plásticas para impactos de alta intensidade e comportamento hidrodinâmico de sólidos para impactos de maior intensidade. Quando uma força de impacto ou impulso é aplicado a um corpo elástico, a perturbação gerada viaja através do sólido como ondas de tensão. A teoria clássica da elasticidade fornece a base para a análise de propagação de ondas em sólidos elásticos. As equações da propagação de ondas são derivadas por uma combinação de relações de tensão-deformação tridimensionais, condições de compatibilidade e equações de movimento. A solução exata para equações de onda tridimensionais para uma barra elástica finita, por exemplo, ainda não foi obtida por conta da incapacidade de satisfazer simultaneamente as condições de contorno nas laterais e nas extremidades da barra. Existem aproximações numéricas para esse caso e a precisão das soluções melhora à medida que a razão entre o raio da barra e seu comprimento diminui. Outra forma de encontrar soluções aproximadas para esse problema é por meio do amplamente conhecido Método de Elementos Finitos (MEF), que divide o domínio (meio contínuo) do problema em sub-regiões de geometria simples (formato triangular, quadrilateral, cúbico, etc.).

3.1. Resposta Analítica para o Impacto de Duas Barras

Para exemplificar o estudo tradicional em propagação de ondas, foi levado em consideração o impacto entre duas barras perfeitamente elásticas em que ambas possuem velocidade de 20 m/s na mesma direção e em sentidos opostos, conforme Figura 3.1. Admite-se que as barras podem se deslocar somente no sentido longitudinal. A velocidade inicial da barra 1, $v_{0,1}$, vale 20 m/s e a velocidade inicial da barra 2, $v_{0,2}$, vale -20 m/s. Ambas as barras são feitas de aço cujo módulo de Elasticidade é de 200 GPa, a densidade de 7850 kg/m³ e o coeficiente de Poisson de 0.33. O diâmetro das barras vale 80 mm e o comprimento é de $2.0 \cdot 10^{-3}$ m. De acordo Brillouin (2013), pode-se calcular a velocidade de propagação da onda de tensão na barra de acordo com as propriedades do material, a saber, $c_0 = \sqrt{E/\rho} = \sqrt{200 \cdot 10^9/7850} = 5047.5$ m/s.



Figura 3.1 – Impacto entre barras

Pela conservação da quantidade de movimento linear e pela conservação de energia, sabe-se que a velocidade final da barra 1, $v_{f,1}$, será -20 m/s e a velocidade final da barra 2, $v_{f,2}$, será 20 m/s, ou seja, as barras “trocam” de velocidades.

O tempo de contato das barras é iniciado a partir do contato e dura o tempo que a onda de tensão se propaga até a extremidade livre da barra de menor comprimento, reflete e retorna até o ponto de contato. No caso do presente exemplo esse tempo é dado por $t_{\text{cont}} = 2L/c_0 = 2 \cdot 2/5047.5 = 7.924 \cdot 10^{-4}$ s. Pode-se estimar a força de contato entre as barras levando em consideração a variação de velocidade e o tempo de contato. Sabe-se que a aceleração é dada pela razão entre a variação da velocidade e a variação do tempo:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} \quad \text{Eq. 17}$$

Arbitrando uma das barras com velocidade inicial de 20 m/s e as barras sendo iguais, prevê-se que a velocidade final desta barra será - 20 m/s, isto é, uma variação de velocidade de 40 m/s. (Se fosse arbitrada a outra barra, a velocidade inicial seria - 20 m/s e a velocidade final seria 20 m/s). Aplicando a Eq. 17, chega-se a aceleração de 50475 m/s².

Sabe-se também que a massa de cada barra é

$$m = \rho \cdot V \quad \text{Eq. 18}$$

onde ρ é a densidade definida por 7850 kg/m³ e V é o volume total da barra, de 0.01 m³, fornecendo uma massa de 78.9 kg. Utilizando a 2ª Lei de Newton ($\mathbf{F} = m \cdot \mathbf{a}$) chega-se a uma força de contato de 3983 kN.

A onda de tensão compressiva que se propagará ao longo das barras pode ser calculada pela equação $\sigma = \frac{1}{2} \rho c_0 (v_{0,1} - v_{0,2})$, que substituindo os valores resulta em 792.45 MPa.

Outra informação relevante que pode ser calculada analiticamente é a energia cinética do sistema. A fórmula da energia cinética, E_c , é dada por:

$$E_c = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 \quad \text{Eq. 19}$$

onde v é a velocidade da barra. Como as duas barras têm velocidades de 20 m/s (módulo) e a mesma massa, a energia total do sistema é 31560 J e esse valor será comparado com o obtido por MEF no próximo subitem.

3.2. Simulação de Impacto por MEF

A simulação por Método de Elementos Finitos foi feita discretizando as barras através de um elemento de viga quadrático com 3 nós. A malha foi gerada totalizando 100 elementos em cada barra. As barras estão afastadas inicialmente de 5 mm e com velocidades iniciais de 20 m/s na mesma direção e em sentidos contrários, uma de encontro à outra.

A Figura 3.2 mostra a velocidade da barra 1 (em vermelho), iniciando com 20 m/s e após $1.25 \cdot 10^{-4}$ s, as barras entram em contato permanecendo em repouso

durante o contato, velocidade igual a zero, e assumindo o valor de -20 m/s após perda de contato, conforme previsto pela conservação da quantidade de movimento linear e pela conservação de energia, já que se assume que o impacto é perfeitamente elástico. A Figura 3.2 mostra também a velocidade da barra 2 (em azul), com velocidade inicial de -20 m/s, permanecendo em repouso durante o contato e assumindo o valor de 20 m/s, também conforme previsto pela conservação da quantidade de movimento linear e pela conservação de energia.

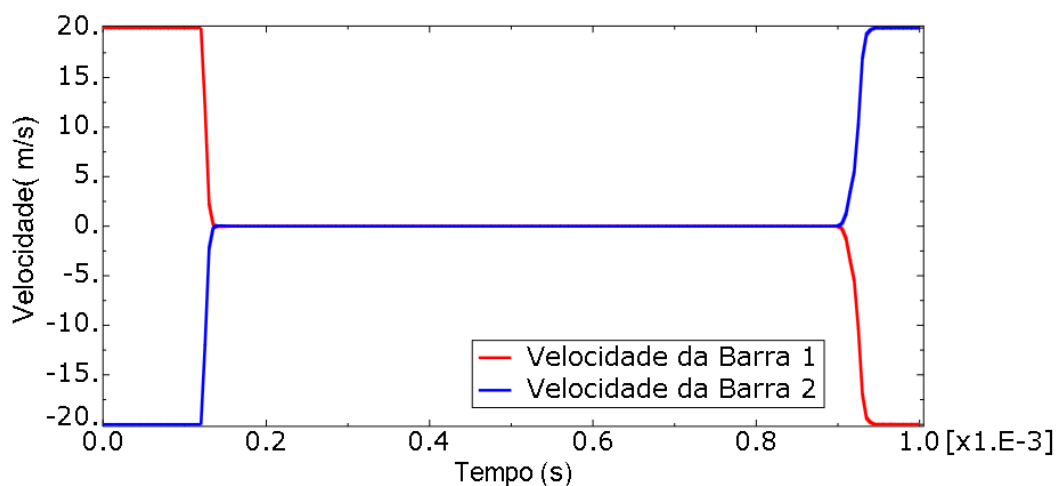


Figura 3.2 – Velocidade das barras 1 e 2

A Figura 3.3 apresenta a força de contato entre as barras. Observa-se que há um tempo de simulação onde esse valor é zero, uma vez que ainda não há contato entre as barras. Logo após o contato, no instante $1.25 \cdot 10^{-4}$ s, a força de contato assume quase que instantaneamente o valor de aproximadamente $-4 \cdot 10^6$ N, permanecendo esse valor constante até $9.25 \cdot 10^{-4}$ s, retornando a zero, representando a perda de contato entre as barras. Pela simulação, esse tempo de contato vale $9.25 \cdot 10^{-4} - 1.25 \cdot 10^{-4} = 8.0 \cdot 10^{-4}$ s, bastante coerente com o valor calculado ($7.924 \cdot 10^{-4}$ s).

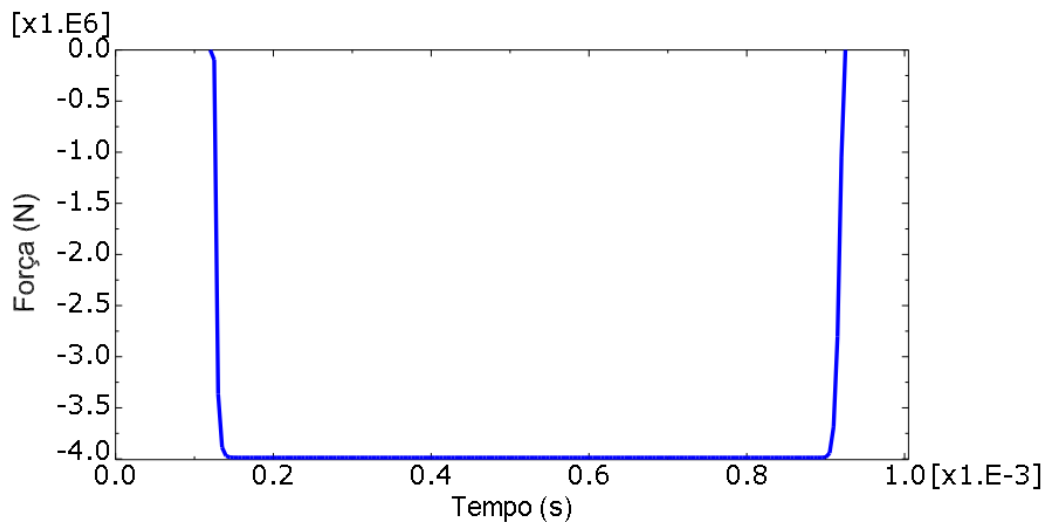


Figura 3.3 – Força de Contato

A Figura 3.4 mostra as velocidades das barras e a força de contato em função do tempo de simulação. Pode-se notar a coerência entre as mudanças de velocidades das barras, bem como a aplicação da força de contato entre elas.

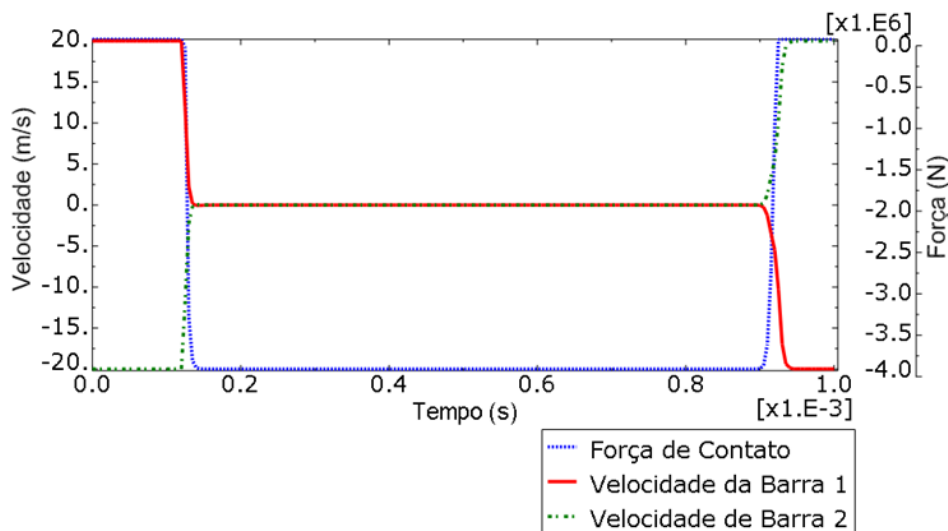


Figura 3.4 – Velocidades e Forças de Contato das barras 1 e 2

A variação da Energia Cinética do sistema em função do tempo pode ser vista na Figura 3.5. Observa-se que ela se mantém inicialmente com o valor de 31566.7 J, que reflete as velocidades iniciais das barras. Em $1.25 \cdot 10^{-4}$ s, inicia-se o contato e a Energia Cinética cai até próximo de zero, momento em que as barras mudam o sentido do movimento e a Energia Potencial acumulada em função da deformação das barras é máxima. A partir daí, a Energia Potencial novamente se

transforma em Energia Cinética até chegar a um valor de 31070.7 J. A diferença entre a Energia Cinética inicial e final justifica-se pois há uma onda de tensão residual que se propaga após o contato em ambas as barras.

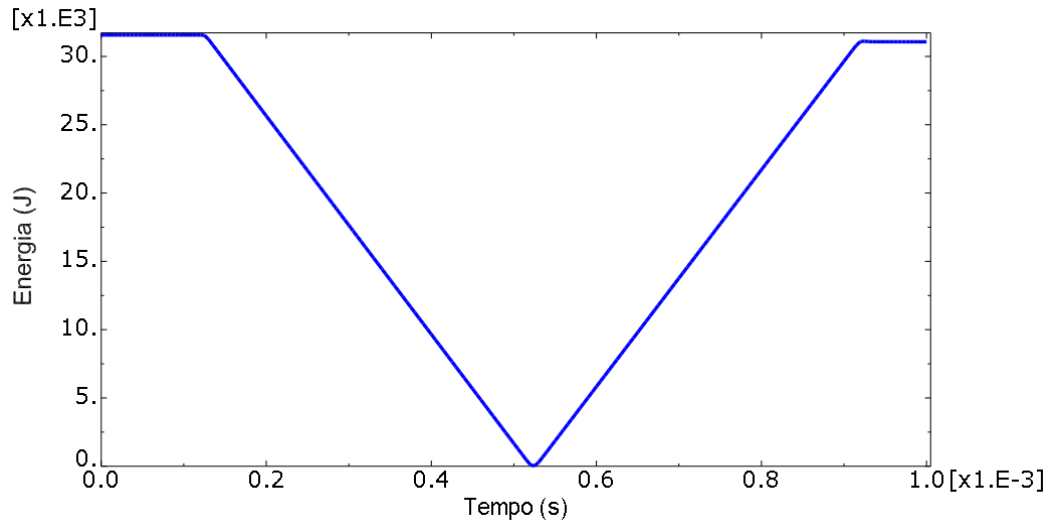


Figura 3.5 – Energia Cinética do Sistema

A onda de tensão que se propaga por cada uma das barras pode ser vista na Figura 3.6. Da esquerda para a direita, observa-se 4 perfis da onda de tensão em tempos distintos, a saber, $1.5 \cdot 10^{-4}$, $2.5 \cdot 10^{-4}$, $4.0 \cdot 10^{-4}$ e $5.0 \cdot 10^{-4}$ s, sempre mantendo a tensão compressiva de 793,17 MPa, valor extremamente próximo do calculado (792.45 MPa) pela equação $\sigma = \frac{1}{2} \rho c_0 (v_{0,1} - v_{0,2})$

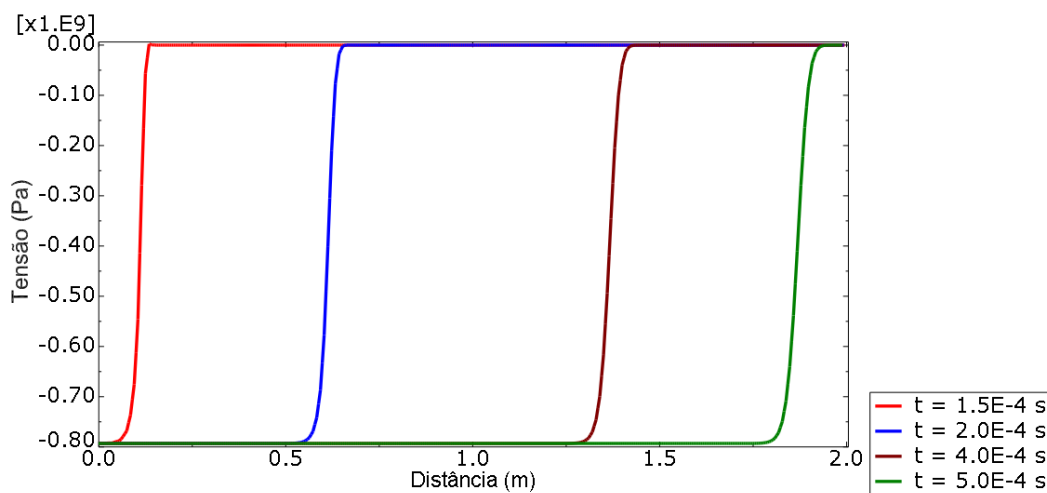


Figura 3.6 – Propagação da onda de tensão ao longo da barra

3.3. Análise do Berço de Newton por Propagação de Ondas

O desenvolvimento realizado na presente seção terá como objetivo comparar a propagação da onda longitudinal pelas esferas idênticas montadas no berço de Newton através do modelo analítico apresentado por Hertz (discutido no Capítulo 1) e a simulação por MEF.

O material das esferas é o aço inoxidável cujas propriedades são: módulo de elasticidade, $E = 1.93 \cdot 10^{11}$ N/m², coeficiente de Poisson, $\nu = 0.3$, tensão de escoamento, $Y = 3.10 \cdot 10^8$ N/m², densidade, $\rho = 8030$ kg/m³ e raio, $R = 0.0254$ m. Serão consideradas 16 esferas, sendo a primeira elevada de uma altura h que resultará em uma velocidade de impacto v_o na segunda esfera, como mostrado na Figura 3.7.

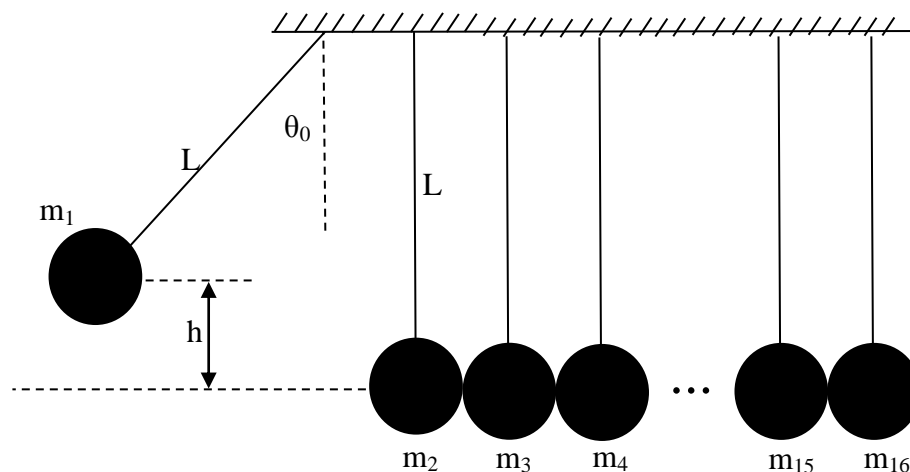


Figura 3.7 – Dispositivo para análise da propagação da onda

O modelo desenvolvido pelo MEF está mostrado na Figura 3.8. Trata-se de 16 esferas modeladas tridimensionalmente utilizando o elemento C3D10M (elemento de 10 nós tetraédrico modificado), elemento disponível no software Abaqus/CAE. Cada esfera possui 4781 elementos totalizando 76496 elementos nas 16 esferas. A simulação foi feita em um computador com processador i5-3317U com 1.70 GHz e memória RAM de 6 GB. O tempo de simulação foi de 18 min. As características geométricas e de material estão descritas acima. O tamanho apropriado do elemento foi determinado baseado em um estudo de convergência de malha. Para modelar corretamente as condições de contato entre

quaisquer duas esferas adjacentes para problemas dinâmicos, foi usado o tipo de interação *General Contact (Explicit)*. Este método usa o vetor normal dos elementos individuais entre duas superfícies para determinar a distância (folga ou penetração) entre essas superfícies. Uma vez que o contato é feito, a restrição cinemática utiliza o tipo de comportamento normal definido, no caso *hard contact* para que seja calculada a força de contato adequada entre as duas superfícies. Isso previne a penetração ou sobreposição (*overlap*) entre as duas superfícies mantendo assim o contato de superfície até que os dois corpos comecem a se separar. Por simplicidade, a interação de contato na direção tangencial foi modelada sem atrito. A força calculada a partir do modelo de contato é a força de contato entre duas esferas adjacentes.

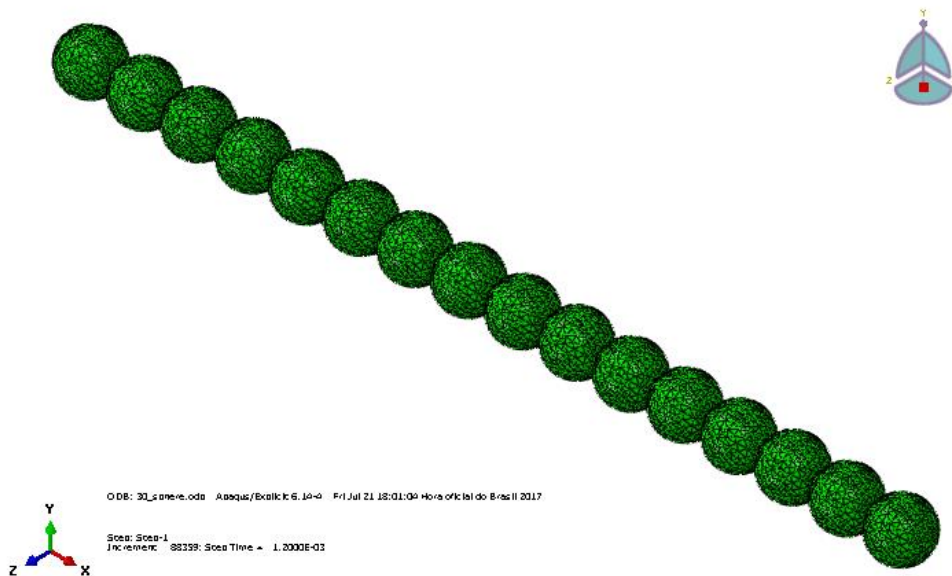


Figura 3.8 – Análise do berço de Newton por MEF

Para a análise numérica pela teoria de Hertz, denominado método de elementos discretos (*discrete element method- DEM*), utilizam-se as equações de movimento descritas na Eq. 20, onde as massas m_1, m_2, \dots, m_n são iguais a m e x_1, x_2, \dots, x_n são os respectivos deslocamentos das esferas

$$\begin{aligned}
m\ddot{x}_1 + k_{Hz}(x_1 - x_2)^{1.5} &= 0 \\
m\ddot{x}_2 - k_{Hz}(x_1 - x_2)^{1.5} + k_{Hz}(x_2 - x_3)^{1.5} &= 0 \\
&\vdots \\
m\ddot{x}_i - k_{Hz}(x_{i-1} - x_i)^{1.5} + k_{Hz}(x_i - x_{i+1})^{1.5} &= 0 \\
&\vdots \\
m\ddot{x}_n + k_{Hz}(x_{n-1} - x_n)^{1.5} &= 0.
\end{aligned}
\tag{Eq. 20}$$

Onde k_{Hz} foi definida na Eq. 2 (Capítulo 1) e está novamente representada abaixo com seu valor calculado para a presente análise:

$$\begin{aligned}
k_{Hz} &= \frac{8}{5} \left(\frac{E}{(1 - \nu^2)} \right) \left(\frac{R}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \\
k_{Hz} &= \frac{8}{5} \left(\frac{1.93 \cdot 10^{11}}{(1 - 0.3^2)} \right) \left(\frac{2.54 \cdot 10^{-2}}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \\
k_{Hz} &= 3.8242 \cdot 10^{10} \text{ N/m}^{\frac{3}{2}}
\end{aligned}
\tag{Eq. 2}$$

A Eq. 20 foi resolvida numericamente aplicando a técnica de Runge-Kutta de quarta ordem e, além disso, a parcela $k_{Hz}(x_i - x_{i+1})^{1.5}$ é a força de contato entre as esferas i e $i+1$.

Analisando as forças de contato entre as esferas para uma velocidade inicial da esfera 1, v_0 , de 0.09 m/s obtém-se os perfis de forças mostrados na Figura 3.9. Observa-se um pico inicial um pouco maior, que representa a força de contato entre a 1ª e a 2ª esfera.

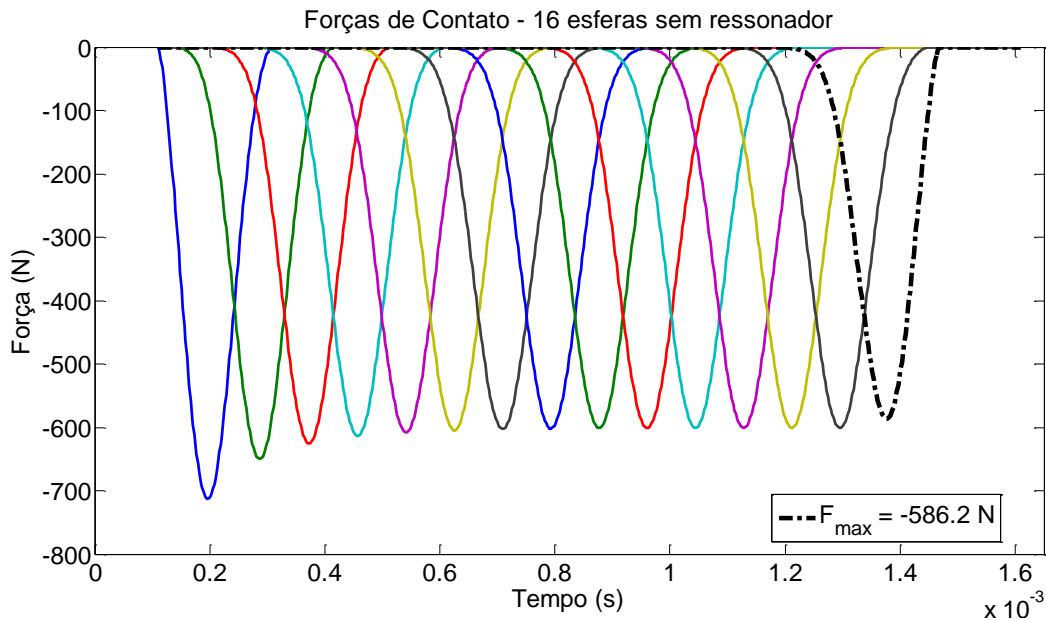


Figura 3.9 – Forças de Contato entre as Esferas

Esta força não é a mesma entre a 2ª e a 3ª esfera, pois parte da energia de impacto acaba permanecendo na primeira esfera e isso pode ser observado na velocidade negativa da esfera 1, indicando que a mesma retorna no sentido contrário após a colisão. O mesmo ocorre com primeiras esferas da cadeia como pode ser visto na Figura 3.10, onde se verifica também a velocidade da última esfera da cadeia, a esfera 16.

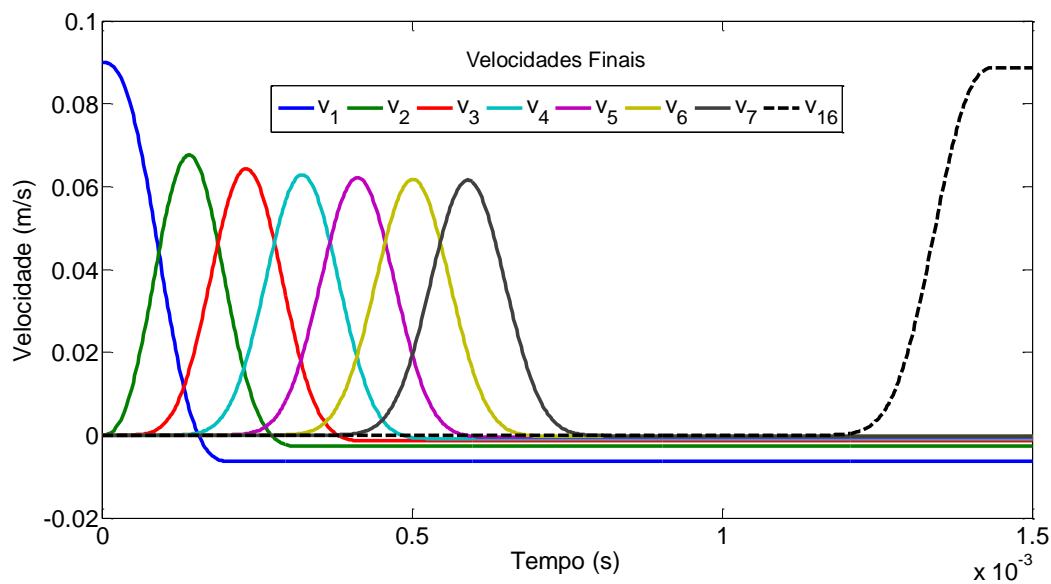


Figura 3.10 – Velocidades das Esferas

Buscando verificar a velocidade de propagação da onda de tensão pelas esferas, bem como validar o modelo, foi considerada a força de contato entre as esferas 4 e 5 e entre as esferas 9 e 10, tanto para a simulação por MEF quanto a resolução pelo método de elementos discretos (DEM), utilizando três velocidades iniciais diferentes, a saber: $v_0=0.09$ m/s, $v_0=0.125$ m/s e $v_0=0.16$ m/s. A Figura 3.11, a Figura 3.12 e a Figura 3.13 mostram os perfis das forças para todos os parâmetros considerados, destacando-se a força máxima de compressões, F_m , em cada caso.

Observa-se que a base do perfil das curvas não apresentam boa concordância e acredita-se essa divergência seja pelo fato de não ter sido feito uma análise do modelo de contato utilizado pelo MEF, uma vez que o objetivo é analisar as forças máximas de compressões, F_m .

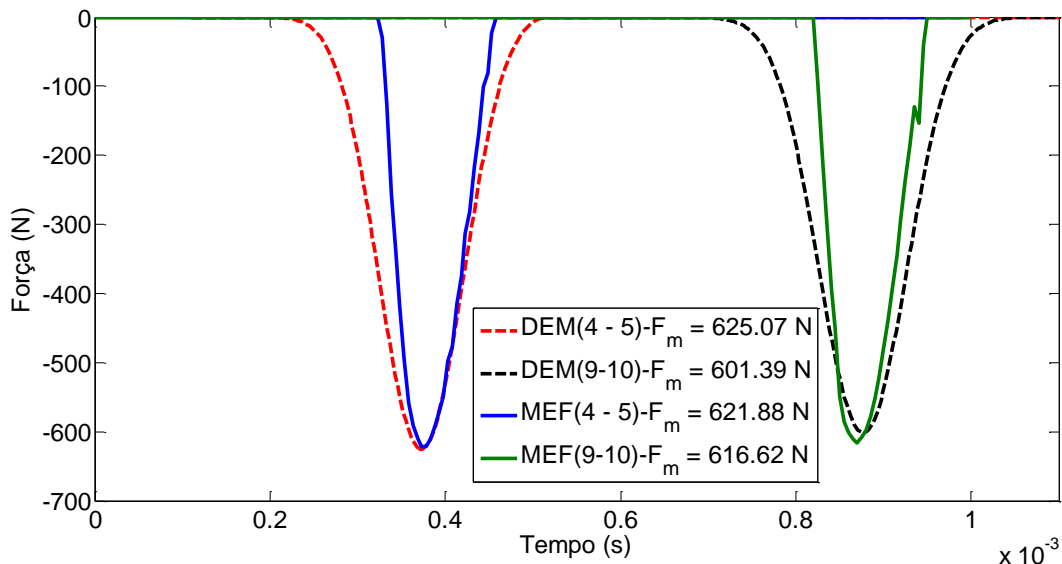


Figura 3.11 – Comparação entre as forças de contato. $v_0=0.09$ m/s

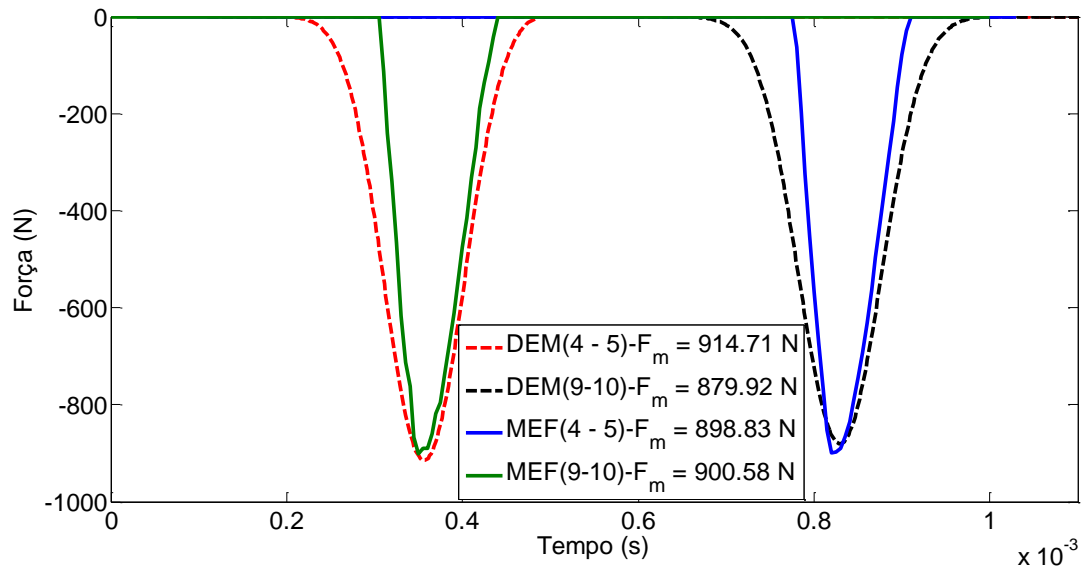


Figura 3.12 – Comparação entre as forças de contato. $v_0=0.125$ m/s

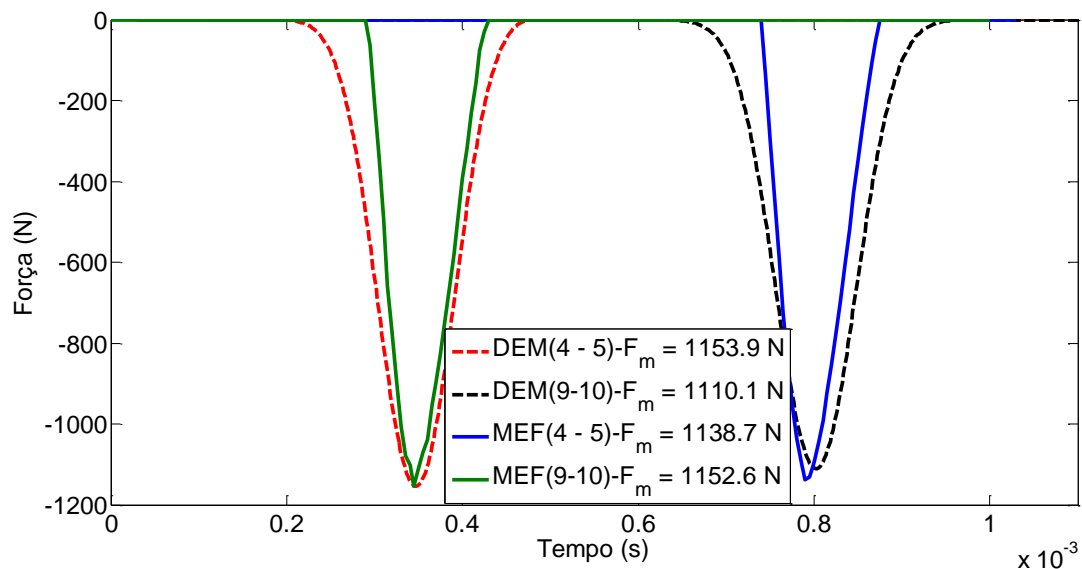


Figura 3.13 – Comparação entre as forças de contato. $v_0=0.16$ m/s

Segundo Leonard et. al. (2013), a velocidade de propagação da onda longitudinal em uma cadeia de esferas é em função do módulo de Elasticidade, E , do raio das esferas, R , da densidade das esferas, ρ , e da força máxima de compressão entre duas esferas, F_m , de acordo com a Eq. 21:

$$v_{calc} = 0.68 \left(\frac{E}{R\rho^2(1-\nu^2)} \right)^{\frac{1}{3}} F_m^{\frac{1}{6}}. \quad \text{Eq. 21}$$

Através da distância entre o ponto de contato das esferas 4 e 5 e entre as esferas 9 e 10 e do tempo entre os picos de máxima amplitude das forças de contato, pode-se estimar a velocidade de propagação da onda, v_{est} , e comparar com o resultado obtido na Eq. 21, ou seja, a velocidade calculada, v_{calc} . A Tabela 3.1 resume esse comparativo, onde a força máxima de compressão entre duas esferas, F_m , é a média de todas as forças máximas obtidas tanto por MEF quanto pelo DEM.

Tabela 3.1 – Velocidades de propagação da onda

Velocidade inicial (m/s)	F_m (N)	v_{est} (m/s)	v_{calc} (m/s)
0.09	616.24	449.09	453.78
0.125	898.51	478.22	481.76
0.16	1138.8	497.49	501.93

Neste Capítulo foi possível verificar o mecanismo de propagação de ondas em meios homogêneos, iniciando pelos resultados observados macroscopicamente em termos de velocidades iniciais e finais a partir da conservação da quantidade de movimento e da conservação de energia. Em seguida foi feita a análise por MEF, onde o tempo de propagação da onda é levado em consideração chegando-se aos mesmos resultados. Por fim, foi possível observar a propagação da onda de tensão pelas esferas do Berço de Newton semelhante ao analisado no Capítulo 1 e concluir que a intensidade da onda de tensão permanece constante ao longo da cadeia.

No próximo capítulo, será apresentada a teoria dos metamateriais elásticos.

4. Metamateriais

As principais propriedades dos metamateriais decorrem da existência de parâmetros peculiares que conferem características especiais ao material. O termo Metamaterial é amplamente utilizado para definir materiais compósitos artificiais especialmente projetados e confeccionados pelo homem para obter propriedades não usuais e não encontradas na natureza. A primeira aplicação dos metamateriais foi no campo eletromagnético (VESELAGO, 1968) e aos poucos foram se abrindo outras áreas usando parâmetros inexistentes nos materiais encontrados na natureza, também classificando-os como metamateriais. Assim áreas como acústica, ótica e mecânica foram abrindo espaço para aplicações deste material inovador. Veselago (1968) analisa a propagação de ondas eletromagnéticas em uma substância com constante dielétrica negativa e permeabilidade magnética negativa. Pendry (2000) usa uma chapa de material com índice de refração negativo como uma alternativa não convencional para uma lente focar todas as componentes de Fourier de uma imagem 2D e, dessa forma, construir uma lente perfeita.

Muitos esforços têm sido empregados na modelagem e tentativa de emprego experimental de capas de invisibilidade utilizando metamateriais. Ótica de transformação conformal pode ser usada para projetar dispositivos com as novas funcionalidades a partir de meios dielétricos isotrópicos não homogêneos. As miragens criadas no deserto são resultados dessas não homogeneidades. Pendry et. al. (2006) usam a liberdade de projeto que os metamateriais fornecem para redirecionar os campos eletromagnéticos à vontade e propõem uma estratégia para desenvolver uma capa de invisibilidade que exclui completamente todos os campos eletromagnéticos. Li e Pendry (2008) discutem um novo tipo de capa de invisibilidade que fornece a todos os objetos camuflados a aparência de uma folha condutora plana, com a vantagem de que nenhum dos parâmetros da capa é singular e pode ser fabricada para ser isotrópica. Um estudo experimental foi feito por Angoth et. al. (2013) onde foi projetada uma estrutura com baixo custo e técnicas de fabricação simples com base nos princípios de refração e

deslocamento lateral. Esta capa desenvolvida é capaz de ocultar um objeto de tamanho de pelo menos três ordens de magnitude maior do que o comprimento de onda da luz, em todas as três dimensões. Baseados nas óticas de transformação, Xu e Chen (2015) mostraram que um meio contendo gradientes em propriedades ópticas são equivalentes a geometrias curvas do espaço-tempo para a propagação da luz, o que implicaria em uma capa de invisibilidade.

Na área de acústica, a atenuação/absorção de baixas frequências sonoras é de grande interesse para o controle de ruído. Um modelo teórico de prato vibroacústico foi desenvolvido por Chen et. al. (2014) para revelar o mecanismo de absorção na energia sonora utilizando os MAM (metamateriais acústicos tipo membrana) sofrendo uma incidência plana normal. Sharma e Sun (2015) propõem um metamaterial com um módulo de compressão acústico negativo baseado no conceito de câmaras de expansão. Neste trabalho, o comportamento de densidade negativa de uma membrana que possui uma massa central e de uma cadeia de membranas tensionadas é analisada por MEF para obter um comportamento de alta perda de transmissão em baixas frequências. Nobrega et. al. (2016) propõem um modelo de elementos finitos de uma fatia do guia de ondas, WFEM (*Wave Finite Element Method*), para calcular a faixa de frequências da propagação da onda bloqueio (*band gap*) em metamateriais elásticos em formato de hastes com distribuição espacial periódica e ressonadores locais acoplados periodicamente com múltiplos graus de liberdade.

4.1. Metamateriais Elásticos

Os metamateriais elásticos são estruturas caracterizadas pela existência de ressonadores internos que resultam em uma característica de massa efetiva negativa quando é aplicada uma carga dinâmica ao material. Um neutralizador dinâmico utilizado para o controle de vibrações é estudado por Bavastri (1997) e consiste em um ressonador que é fixado à estrutura que se deseja reduzir as vibrações. Essa absorção de energia é o princípio dos metamateriais elásticos.

Considerando o ressonador interno conectado a uma massa externa, obtém-se a unidade de massa-em-massa que se torna a massa efetiva dependente da frequência.

A cadeia de unidades de massa-em-massa é usada para modelar o comportamento dos metamateriais elásticos por diversos autores (CHAN et. al., 2006; HUANG et. al., 2009; MANIMALA et. al., 2014; TAN et. al., 2014 e QURESHI et. al., 2016) e para determinar a faixa de frequências de bloqueio para a propagação de ondas (*band gap*) através dos metamateriais quando a este é imposta uma excitação harmônica no início da cadeia. A mesma teoria é desenvolvida por Milton e Willis (2007) e comprovada experimentalmente por Yao et. al. (2008), sendo a única variação no modelo, a forma com que a massa interna é presa à massa externa, utilizando duas molas em vez de apenas uma. Contudo, como a massa externa é tratada como um corpo rígido, não há diferença substancial para com os outros modelos.

Chen et. al. (2016), Tan et. al. (2014), Tan e Sun (2014) e Manimala et. al. (2014) usam o mesmo modelo para excitação harmônica do metamaterial para verificar a mitigação das ondas geradas por ondas de explosão e/ou carregamentos de impacto. Kim et. al. (2017) emprega uma modificação na cadeia de massa-em-massa para modelar metamateriais com ressonadores locais feitos de estacas de madeira e em vez de usar uma mola para conectar as massas efetivas, eles usam o modelo de Hertz de contato não linear para modelar o sistema e reduzir carregamentos de impacto.

4.1.1. Ressonador Simples

Como foi mencionado, o uso de metamateriais iniciou-se com aplicações no campo de ondas eletromagnéticas, onde os pesquisadores investigaram permissividade elétrica negativa, permeabilidade magnética negativa (Veselago, 1968) e índice de refração negativo (Pendry, 2000). Devido à analogia matemática de ondas acústicas e eletromagnéticas, os metamateriais acústicos de contrapartida foram explorados na última década. Este novo ramo da metamateriais acústicos, também conhecido como metamateriais mecânicos ou elásticos, consiste em microestruturas adaptadas que apresentam propriedades mecânicas incomuns, como módulo de elasticidade efetivo negativo e/ou densidade de massa efetiva negativa. Um sistema que contém propriedades de massa negativa consiste em uma cadeia de unidades de massas, sendo cada massa ligada por mola em uma massa interna. Esta unidade de ressonador é apresentada na Figura 4.1, onde a

unidade da célula externa possui massa m_1 e deslocamento u_1 . O ressonador interno tem massa m_2 e deslocamento u_2 . A rigidez da mola é linear com coeficiente de rigidez k_2 e conecta massa externa ao ressonador interno.

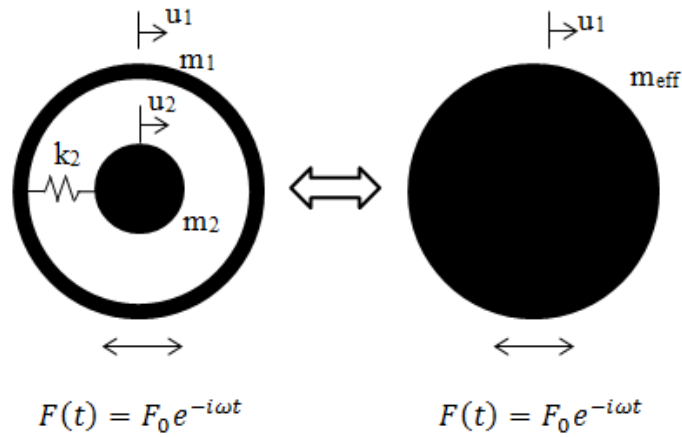


Figura 4.1 – Unidade de ressonador e massa efetiva equivalente
Fonte: Adaptado de Tan et. al. (2012)

O diagrama de corpo livre das massas m_1 e m_2 fornecem as seguintes equações:

$$m_1 \ddot{u}_1 = F + k_2(u_2 - u_1) \quad \text{Eq. 22}$$

$$m_2 \ddot{u}_2 = -k_2(u_2 - u_1) \quad \text{Eq. 23}$$

Ao considerar os deslocamentos das massas como um comportamento de onda harmônica, bem como a força aplicada, conforme a Eq. 24 e a Eq. 25

$$u_\gamma(x, t) = \hat{u}_\gamma e^{-i\omega t} \quad \text{Eq. 24}$$

$$F(t) = F_0 e^{-i\omega t} \quad \text{Eq. 25}$$

onde $\gamma = 1, 2$, correspondendo às massas m_1 e m_2 , pode-se resolver a Eq. 22 e a Eq. 23 pela substituição da Eq. 24 e da Eq. 25. Dessa forma, chega-se à relação simplificada apresentada na Eq. 26

$$0 = F_0 + \left(m_1 + \frac{\omega_2^2 m_2}{\omega_2^2 - \omega^2} \right) \omega^2 \hat{u}_1 \quad \text{Eq. 26}$$

onde $\omega_2 = \sqrt{k_2/m_2}$ é a frequência natural do ressonador interno (massa m_2).

Aplicando a equação de movimento na massa efetiva m_{eff} , obtém-se a relação

$$F_0 = -m_{eff} \omega^2 \hat{u}_1 \quad \text{Eq. 27}$$

A partir das Eq. 26 e Eq. 27, chega-se a conclusão que a massa efetiva é dada por

$$m_{eff} = \left(m_1 + \frac{\omega_2^2 m_2}{\omega_2^2 - \omega^2} \right). \quad \text{Eq. 28}$$

Observa-se na Eq. 28 que a massa efetiva, m_{eff} , é dependente da frequência ω . Assumindo m_{st} como sendo a massa estática ($m_1 + m_2$), pode-se obter a massa efetiva normalizada m_{eff}/m_{st}

$$\frac{m_{eff}}{m_{st}} = 1 + \frac{\theta}{1 + \theta} \left[\frac{(\omega/\omega_2)^2}{1 - (\omega/\omega_2)^2} \right] \quad \text{Eq. 29}$$

onde θ é a razão da massa interna, m_2 , pela massa externa, m_1 . A Figura 4.2 mostra como a razão m_{eff}/m_{st} varia quando se considera ω/ω_2 no eixo das abcissas. Pode-se observar que existe uma faixa de *band gap* estreita próximo à frequência de ressonância local da massa interna m_2 . Huang *et. al.*(2009) mostraram que esta massa efetiva negativa corresponde à região de *band gap* da curva de dispersão quando a propagação de onda é considerada.

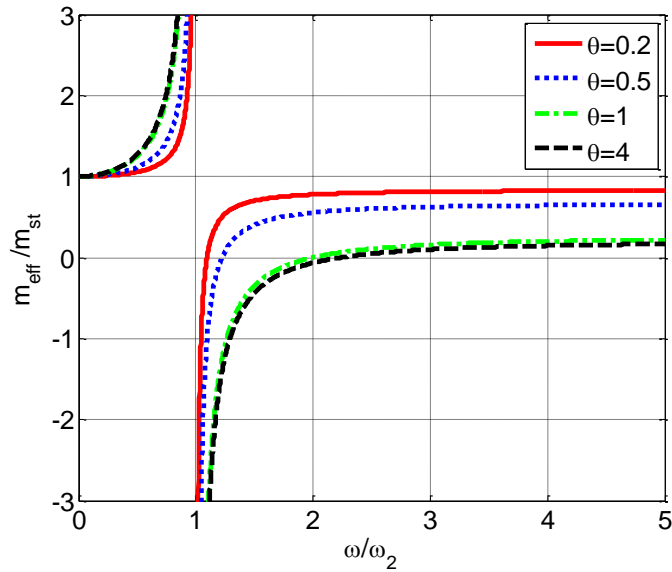


Figura 4.2 – Gráfico da massa efetiva normalizada versus a razão ω/ω_2 (ressonador simples)

4.1.2. Ressonador Duplo

A Figura 4.3 mostra a célula unitária proposta por Tan et. al. (2012) representando um sistema massa mola com ressonador duplo à esquerda e sua correspondente massa efetiva individual à direita.

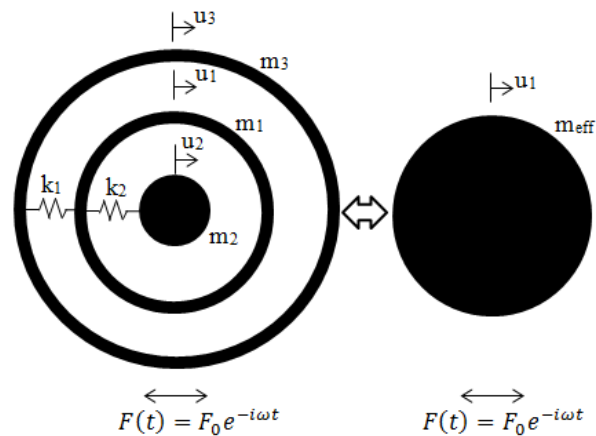


Figura 4.3 – Célula com ressonador duplo e massa efetiva equivalente
Fonte: Adaptado de Tan et. al. (2012)

Neste caso, pode-se obter a massa efetiva normalizada, m_{eff}/m_{st} , assumindo a massa estática $m_{st} = (m_1 + m_2 + m_3)$ e o fator $\theta_{st} = \theta_1 + \theta_3 + \theta_1\theta_3$, $\theta_1 = m_2/m_1$, $\theta_3 = m_2/m_3$ e $\delta_1 = k_2/k_1$, tem-se que

$$\frac{m_{eff}}{m_{st}} = \frac{\theta_1}{\theta_{st}} + \frac{\theta_3}{\theta_{st}} \left[\frac{1 + \theta_1 - (\omega/\omega_2)^2}{[1 - (\omega/\omega_2)^2][(1 + \delta_1 - (\delta_1/\theta_1))(\omega/\omega_2)^2] - \delta_1} \right]. \quad \text{Eq. 30}$$

A massa efetiva normalizada versus a razão ω/ω_2 é mostrada na Figura 4.4 para valores fixos de θ_1 e θ_3 e variando δ_1 .

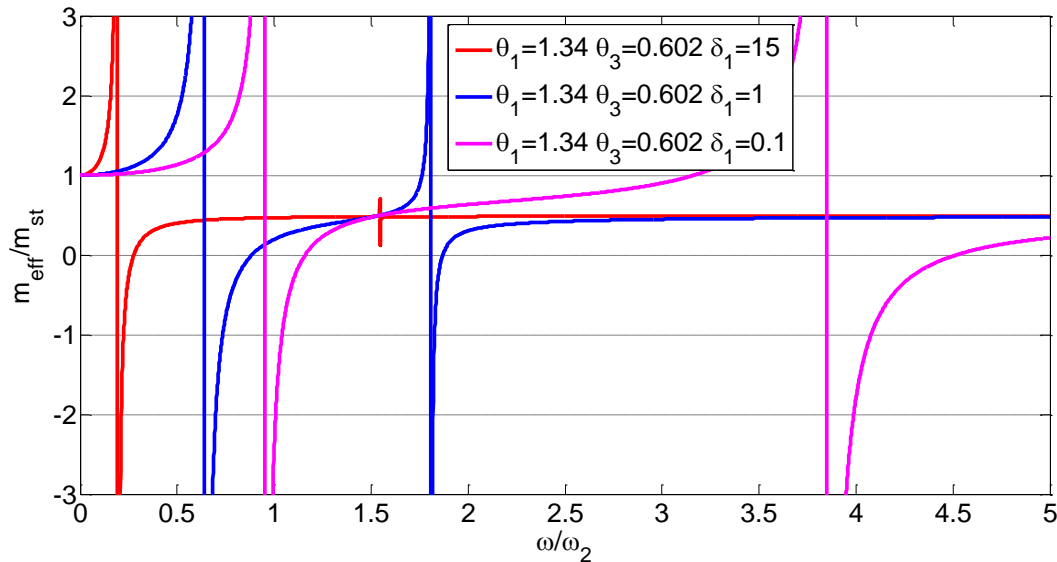


Figura 4.4 – Gráfico da massa efetiva normalizada versus a razão ω/ω_2 (ressonador duplo)

Pode-se observar que um valor mais alto de δ_1 resulta em um sistema com *banda gap* único e o segundo *band gap* aumenta significativamente com a diminuição δ_1 . Este exemplo mostra que um sistema massa-mola com ressonador duplo gera uma massa efetiva negativa ao longo de um espectro de frequência maior. Outras análises com a variação dos parâmetros θ_1 e θ_3 e δ_1 podem ser vistas em Rodrigues e Weber (2017).

4.2. Cadeia de ressonadores simples

Seja a cadeia de massas representadas na Figura 4.5, onde as 3 massas iniciais ($j=1,2,3$) de massa m estão conectadas por molas de rigidezes k_1 e da massa $j=3$ até $j=9$, as massas m , além de se conectarem às outras massas m , também são conectadas por uma mola de rigidez k_2 à uma massa m_2 , finalizando a cadeia com as massas m de $j=10$ até $j=13$, conectadas pela mesma mola k_1 . A distância entre as massas m é dada por a .

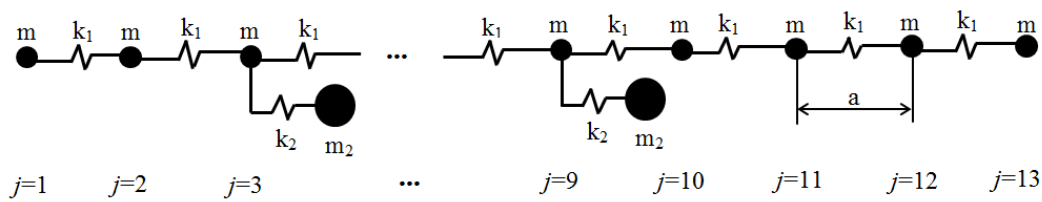


Figura 4.5 – Cadeia de ressonadores

Como mostrado no subitem 4.1.1, as massas $j=3$ até $j=9$ compõem um ressonador simples. Dessa forma, pode-se representar a cadeia de massas da Figura 4.5, como mostrado na Figura 4.6, substituindo as massas $j=3$ até $j=9$ por massas efetivas, m_{eff} .

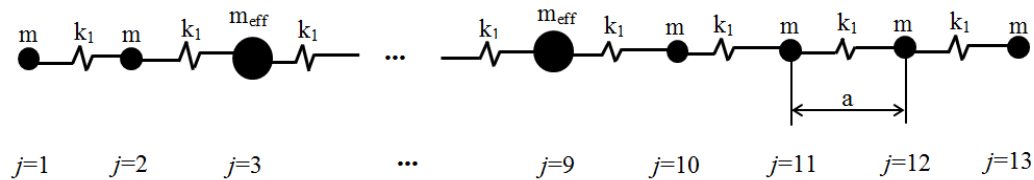


Figura 4.6 – Cadeia de ressonadores com massa efetiva

Sendo assim, para as massas $j=3$ até $j=9$, as equações de movimento para a j -ésima unidade são dadas por:

$$m_1^{(j)} \frac{d^2 u_1^{(j)}}{dt^2} + k_1 (2u_1^{(j)} - u_1^{(j-1)} - u_1^{(j+1)}) + k_2 (u_1^{(j)} - u_2^{(j)}) = 0 \quad \text{Eq. 31}$$

$$m_2^{(j)} \frac{d^2 u_2^{(j)}}{dt^2} + k_2 (u_2^{(j)} - u_1^{(j)}) = 0 \quad \text{Eq. 32}$$

Onde $u_\gamma^{(j)}$, $\gamma = 1$ e 2 , representa o deslocamento das massas γ da j -ésima célula. A solução de onda harmônica para a $(j + n)$ -ésima célula é expressa pela fórmula:

$$u_\gamma^{(j+n)} = \beta_\gamma e^{i(qx+nqa-\omega t)} \quad \text{Eq. 33}$$

Onde β_γ é a amplitude de onda complexa, q é o número de onda, ω é a frequência de propagação da onda e $\gamma = 1$ e 2 correspondentes às massas m_1 e m_2 . A substituição da Eq. 33 nas Eq. 31 e Eq. 32 produz duas equações homogêneas para β_1 e β_2 das quais a equação de dispersão é obtida como

$$m_1 m_2 \omega^4 - [(m_1 + m_2) k_2 + 2 m_2 k_1 (1 - \cos(qa))] \omega^2 + 2k_1 k_2 (1 - \cos(qa)) = 0 \quad \text{Eq. 34}$$

Utilizando a relação trigonométrica $1 - \cos(qa) = 2\text{sen}^2\left(\frac{qa}{2}\right)$, a Eq. 34 pode ser simplificada como mostrado na Eq. 35:

$$m_1 \omega^4 - \left(4k_1 \text{sen}^2\left(\frac{qa}{2}\right) + \omega_2^2 (m_2 + m_1)\right) \omega^2 + \omega_2^2 4k_1 \text{sen}^2\left(\frac{qa}{2}\right) = 0 \quad \text{Eq. 35}$$

onde $\omega_2^2 = k_2/m_2$.

Fazendo o exemplo apresentado por Yao et. al. (2008), onde é feito um estudo experimental utilizando os dados apresentados na Tabela 4.1, pode-se plotar o gráfico da frequência (ω) em função do número de onda (q), que representa a curva de dispersão da Eq. 34.

Tabela 4.1 – Dados utilizados

Dados	Valor
m_1	101.1 g
m_2	46.47 g
k_1	117 N/m
k_2	74 N/m
a	0.5 m

Com esses dados, $\omega_2 = \left(\frac{1}{2\pi}\right) \sqrt{\frac{k_2}{m_2}} = 6.35$ Hz.

As relações de dispersão de uma estrutura periódica podem ser avaliadas pelo teorema de Bloch, onde o vetor de onda varia ao longo das fronteiras da zona irreduzível de Brillouin (LI e TAN, 2016). O início e o fim das faixas de

frequência de passagem de onda (*passbands*) e das faixas de frequência de bloqueio de onda (*bandgaps*) iniciam nas bordas da zona irredutível de Brillouin.

Para o sistema unidimensional proposto, essas bordas estão em $q = 0$ e $q = \pi/a$ na Eq. 35. Substituindo esses valores na Eq. 35, chega-se a $\omega = 0$ e 7.67 Hz para $q = 0$ e $\omega = 5.75$ Hz e 11.96 Hz para $q = \pi/a$.

A Figura 4.7 mostra a curva de dispersão para a Eq. 35. Observa-se uma faixa de frequência de bloqueio de onda (*bandgap*) destacado entre as linhas vermelhas representadas pelas frequências de 5.75 Hz e 7.67 Hz. Além disso, observa-se que a frequência de corte (*cut-off frequency*) é de 11.96 Hz, conforme calculado através das bordas da zona irredutível de Brillouin.

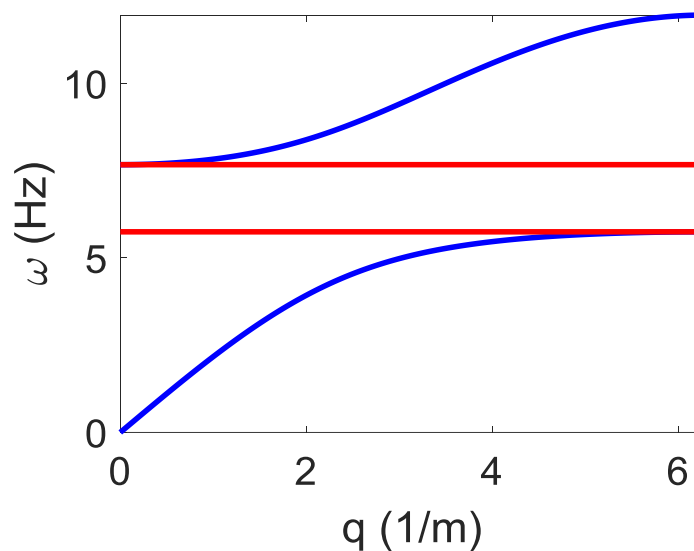


Figura 4.7 – Curva de Dispersão

Para comprovar a propriedade de bloqueio das ondas na faixa representada na curva de dispersão da Figura 4.7, foi feita uma simulação da cadeia representada pela Figura 4.6, onde a primeira massa ($j=1$) foi excitada harmonicamente com amplitude de 0.01 m fazendo uma varredura de frequências de 0 a 12 Hz e a resposta obtida foi o deslocamento da última massa ($j=13$).

O resultado pode ser observado na Figura 4.8, identificando as frequências que limitam o *bandgap* ($5.75 \text{ Hz} < \omega < 7.67 \text{ Hz}$) onde nesta faixa a amplitude do deslocamento é drasticamente reduzida. Nota-se que próximo à frequência de corte (11.96 Hz), a resposta do deslocamento também é reduzida, porém não tanto

como na faixa do *bandgap*. A resposta é apresentada em *dB* para permitir melhor visualização da atenuação na faixa de *bandgap*.

Esta redução pode ser mais bem observada quando a simulação é feita somente com as massas efetivas (Figura 4.9). É ainda mais nítido que somente na faixa de *bandgap* apresenta redução da amplitude do deslocamento da última massa quando a primeira massa é excitada harmonicamente na faixa de frequência de 0 a 12 Hz.

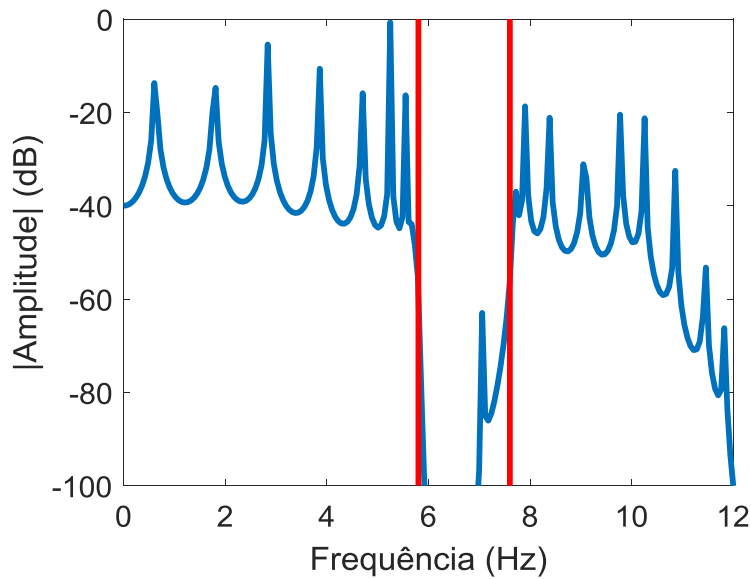


Figura 4.8 – Módulo da amplitude em função da frequência

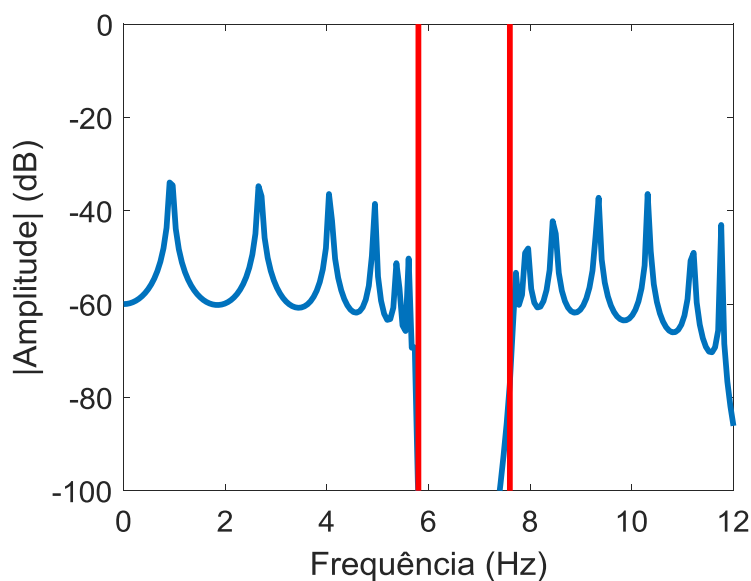


Figura 4.9 – Módulo da amplitude em função da frequência das massas efetivas

Para um sistema periódico finito de N unidades, a transmitância, T , do sistema pode ser desenvolvida analiticamente. Lembrando que o conceito de transmitância vem da ótica e é definida como a razão da potência de saída pela potência de entrada (BALL, 2001), que no presente estudo é associada à razão da amplitude de saída pela amplitude de entrada.

O deslocamento da unidade é suposto ser $X_n(t) = \bar{X}_n e^{-i\omega t}$, onde \bar{X}_n é o deslocamento complexo independente do tempo. Dessa forma, pode-se obter as seguintes relações:

$$(2K - \omega^2 m_{eff})\bar{X}_n = k_1(\bar{X}_{n+1} + \bar{X}_{n-1}), n = 1, 2, \dots, N-1 \quad \text{Eq. 36}$$

$$(k_1 - \omega^2 m_{eff})\bar{X}_n = k_1\bar{X}_{n-1}, n = N \quad \text{Eq. 37}$$

A partir das Eq. 36 e Eq. 37, a transmitância $T = |\bar{X}_N/\bar{X}_0|$ do sistema periódico finito é

$$T = \left| \prod_{n=1}^N T_n \right|, \quad \text{Eq. 38}$$

onde $T_n = \bar{X}_n/\bar{X}_{n-1}$ é dado pela relação

$$T_n = \frac{k_1}{k_1(2 - T_{n+1}) - \omega^2 m_{eff}}, n = 1, 2, \dots, N \quad \text{Eq. 39}$$

com $T_{N+1} = 1$. A Figura 4.10 apresenta a transmitância do sistema de massas efetivas ($j = 3$ a $j=9$).

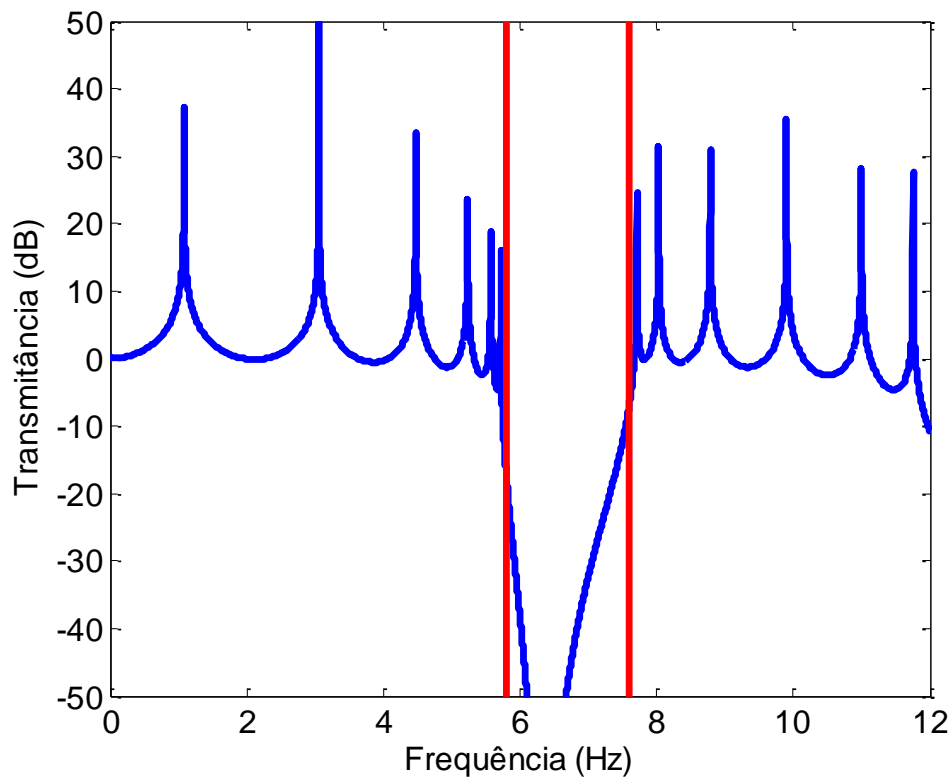


Figura 4.10 – Transmitância

Dessa forma, conclui-se a existência da eficiência na atenuação da propagação de ondas de uma cadeia de massas com ressonadores cuja frequência de propagação encontra-se na faixa de *bandgap* do sistema.

A seguir será desenvolvida a modelagem do sistema de recuo simplificado e a proposta de dois modelos passíveis de serem utilizados e posteriormente sendo adicionado um conjunto de metamateriais para fins de comparação.

5. Modelagem Matemática do Sistema de Recuo

Como apresentado na Introdução, o objetivo desta tese é propor uma melhoria na atuação de um mecanismo de recuo. Dessa forma, o presente capítulo trata do mecanismo de recuo e de dois modelos propostos para que possa ser verificado qual dos modelos propostos pode ser comparado quando adicionado o conjunto de metamateriais.

O mecanismo de recuo modera as cargas provenientes do disparo exercidas na estrutura de suporte do armamento através do prolongamento do tempo de resistência das forças geradas pelos gases dos propelentes. À medida que a pressão do gás impulsiona o projétil em direção à boca do canhão, é exercida uma força igual e oposta na culatra, que tende a mover o armamento para trás. O objetivo principal do mecanismo de recuo é amortecer esta força e limitar o movimento à retaguarda. Como detalhado em AMCP (1965), existem diversos mecanismos de recuo. Porém, como característica comum a todos desde 1897, pode-se citar o objetivo de absorver os efeitos causados pelo disparo de um projétil.

Segundo Lin et. al. (2009), dois métodos principais são usados para a criação do modelo dinâmico de um sistema de recuo. Primeiro, o diagrama de corpo livre é aplicado nos componentes do sistema, uma vez que as forças necessárias podem ser obtidas facilmente. As forças podem ser tratadas como internas ou externas de acordo com a configuração do corpo livre. Um outro método é usado para componentes mais complexos, onde é mais difícil encontrar seu modelo físico e conseqüentemente seu modelo matemático. Nesse caso, o componente pode ser tratado como uma "caixa preta". Em tais caixas pretas, informações baseadas na experiência e métodos de ajuste de curva são usados para criar a relação que suporta o sistema dinâmico. Tiwari et. al. (2016) tratam da modelagem dinâmica de corpo rígido para um sistema representativo de um obuseiro (Figura 5.1). Eles usaram procedimentos experimentais relativamente simples para estimar os principais parâmetros de projeto como: aceleração da massa deslizante, rigidez do mecanismo de contra-recuo, amortecimento do

sistema de recuo e rigidez do pneu. O objetivo é evitar a montagem de bancadas experimentais principalmente nas fases iniciais do projeto para reduzir os custos.



Figura 5.1 – Obuseiro 155mm, modelo M114
Fonte: WIKIPÉDIA (2016b)

Hassaan (2014) estuda inicialmente o mecanismo de recuo de um obuseiro modelo M114, calibre 155 mm, com um sistema pneumático de recuo não linear e um amortecedor hidráulico com coeficiente constante. Posteriormente, Hassaan (2014) utiliza uma constante de rigidez fixa para a modelagem da força elástica do sistema de recuo e um modelo não linear para o amortecedor hidráulico. Finalmente Hassaan (2014) introduz uma não linearidade tanto no modelo do amortecedor hidráulico quanto no modelo do sistema pneumático.

5.1. Modelo Simplificado

A maioria dos mecanismos de recuo pode ser simplificada por um modelo, como mostrado na Figura 5.2. Este modelo consiste em um tubo, que representa o tubo de um canhão, com massa M , cujo único grau de liberdade considerado está na posição horizontal, ao longo da coordenada x_M . Em uma extremidade do tubo é aplicada uma força impulsiva $F(t)$ e na outra extremidade, na parede P onde o tubo está ancorado, as conexões são feitas por uma mola com rigidez k e um amortecedor com coeficiente de amortecimento c .

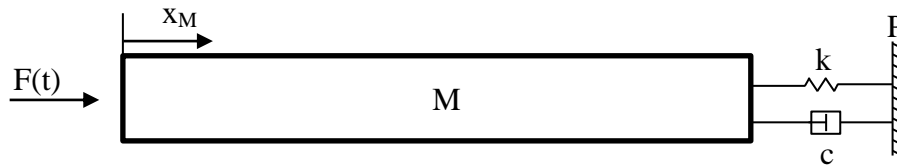


Figura 5.2 – Modelo simplificado

Dessa forma, a equação de movimento do modelo simplificado é

$$M\ddot{x}_M + kx_M + c\dot{x}_M = F(t), \quad \text{Eq. 40}$$

O coeficiente de amortecimento c é considerado como (POLACH e HAJŽMAN, 2010)

$$\begin{aligned} c &= 6239 \text{ N}\cdot\text{s/m} \text{ se } \dot{x}_M > 0 \text{ e} \\ c &= 14050 \text{ N}\cdot\text{s/m} \text{ se } \dot{x}_M < 0. \end{aligned} \quad \text{Eq. 41}$$

Para a constante de rigidez k , considera-se o valor de 27500 N/m (HASSAAN, 2014).

A força impulsiva $F(t)$ na Eq. 40 pode ser entendida como uma velocidade inicial (v_0) da massa M . Assim, a Eq. 40 é transformada na equação homogênea

$$M\ddot{x}_M + kx_M + c\dot{x}_M = 0 \quad \text{Eq. 42}$$

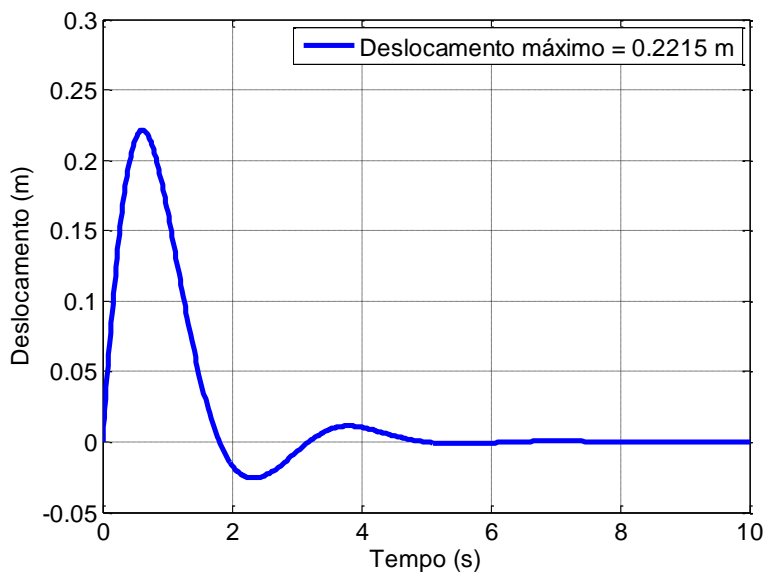
onde as condições iniciais são $x_M = 0$ e $\dot{x}_M = v_0$. A velocidade inicial v_0 pode ser encontrada pela conservação da quantidade de movimento quando um tiro é disparado. Considera-se a massa do projétil como 6,86 kg, a massa do cano (M) sendo 5600 kg e a velocidade do saída do projétil após a queima igual a 564 m/s. Sendo assim, v_0 vale 0.7 m/s.

A Eq. 42 é uma equação de segunda ordem homogênea e pode ser resolvida através de uma mudança de variáveis, obtendo-se duas equações de primeira ordem homogêneas e aplicando a técnica de Runge-Kutta de quarta ordem. Os valores utilizados para resolver a Eq. 42 estão resumidos na Tabela 5.1 (HASSAAN, 2014).

Tabela 5.1 – Valores utilizados para o sistema sem a massa m

Parâmetro	Valor
M	5600 kg
k	27500 N/m
$c (\dot{x}_M > 0)$	6239 N·s/m
$c (\dot{x}_M < 0)$	14050 N·s/m
v_o	0.7 m/s

A Figura 5.3 mostra o deslocamento da massa M ao longo de 10 s de simulação. Observa-se que o deslocamento máximo ocorre em 0.61 s e o valor do deslocamento máximo é de 22.15 cm (0.2215 m).

Figura 5.3 – Deslocamento da massa M

5.2. Modelos Propostos

Os novos modelos propostos para aprimorar o mecanismo de recuo simplificado são apresentados na Figura 5.4 e na Figura 5.5. Um sistema de massa m está embarcado, ligado ao tubo, no modelo (i). No modelo (ii), a massa m está fixa à parede P . Em ambos os modelos, o grau de liberdade que descreve o movimento da massa m é x_m . Considera-se que a massa m pode se deslocar sem atrito ao longo da horizontal e inicialmente está a uma distância definida como *gap* da parede A em uma extremidade do tubo. Na outra extremidade, a massa m está conectada a uma mola e um amortecedor com rigidez e coeficiente de

amortecimento k_r e c_r , respectivamente. Uma força impulsiva $F(t)$ é aplicada ao tubo de massa M que inicia o movimento do sistema.

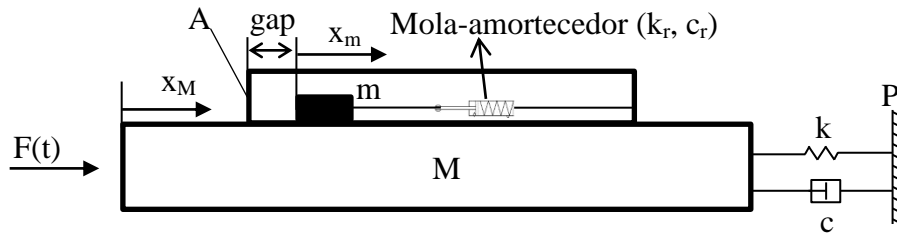


Figura 5.4 – Modelo proposto (i)

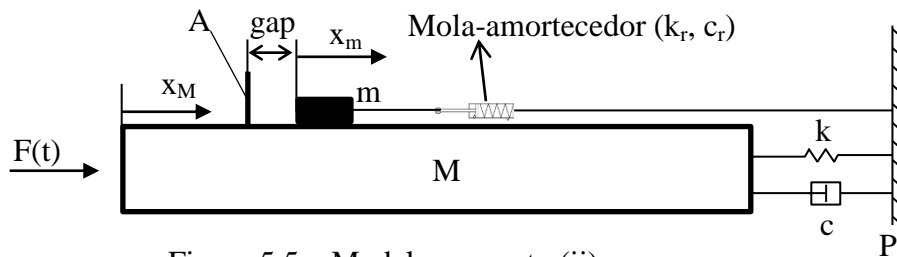


Figura 5.5 – Modelo proposto (ii)

As equações de movimento do sistema com a massa m embarcada, modelo (i), Figura 5.4, são apresentadas na Eq. 43. Observa-se que devido ao contato entre a massa m e a parede A, que é considerada solidária ao tubo de massa M , tem-se também uma força de contato F_{ct} . Dessa forma, as equações de movimento são:

$$\begin{aligned} M\ddot{x}_M + kx_M + c\dot{x}_M + (\dot{x}_M - \dot{x}_m)c_r + (x_M - x_m)k_r - F_{ct} &= 0 \\ m\ddot{x}_m - (\dot{x}_M - \dot{x}_m)c_r - (x_M - x_m)k_r + F_{ct} &= 0. \end{aligned} \quad \text{Eq. 43}$$

As condições iniciais são: $x_M(0) = 0$, $\dot{x}_M(0) = v_0$, $x_m(0) = 0$, $\dot{x}_m(0) = 0$.

Para superar as limitações do modelo LSD e manter as vantagens do modelo de Hertz, Hunt e Crossley (1975) introduziram um modelo alternativo para a dissipação de energia que inclui um termo de amortecimento não linear (histerese) e, dessa forma, a força de contato F_{ct} é explicitada na Eq. 44

$$F_{ct}(\delta, \dot{\delta}) = -k_c \delta^{n_c} - c_c \delta^{n_c} \dot{\delta} = -k_c \delta^{n_c} (1 + \lambda_c \dot{\delta}), \quad \text{sendo } \lambda_c = \frac{c_c}{k_c} \quad \text{Eq. 44}$$

onde δ é a deformação da região de contato definida como $x_m - (x_M + gap)$, $\dot{\delta}$ é a velocidade de deformação, ou seja, $\dot{\delta} = (\dot{x}_m - \dot{x}_M)$, k_c é a rigidez de contato, c_c um amortecimento viscoso e λ_c um coeficiente de proporcionalidade. O expoente n_c depende das características geométricas em torno da superfície de contato.

Deve-se observar que a força de contato F_{ct} só atuará no sistema quando os valores δ e $\dot{\delta}$ forem negativos. Para $\delta > 0$, a força de contato F_{ct} vale zero, ou seja, não há contato entre a massa m e a parede A do sistema.

Os parâmetros utilizados para simular a força de contato são semelhantes aos valores utilizados por Aguiar (2006). Além desses, outros parâmetros estão listados na Tabela 5.2

Tabela 5.2 – Valores utilizados para o sistema com a massa m

Parâmetro	Valor
Rigidez (k_c)	$2.1 \cdot 10^8$ N/m
Fator de não linearidade (n_c)	1.3
Razão de amortecimento (λ_c)	0.6
k_r	13500 N/m
c_r	3675 N·s/m

As equações de movimento com o sistema com a massa m não embarcada, modelo (ii), Figura 5.5, são apresentadas na Eq. 45.

$$\begin{aligned} M\ddot{x}_M + kx_M + c\dot{x}_M - F_{ct} &= 0 \\ m\ddot{x}_m + k_r x_m + c_r \dot{x}_m + F_{ct} &= 0 \end{aligned} \quad \text{Eq. 45}$$

As condições iniciais e a força de contato, F_{ct} , são semelhantes às discutidas para o sistema de equações apresentado na Eq. 43.

Os deslocamentos máximos da massa M para os modelos (i) e (ii) são mostrados na Figura 5.6 e na Figura 5.7, respectivamente, para a variação do gap de 0 até um valor máximo e para algumas massas m . Vale lembrar que o objetivo é analisar o deslocamento da massa M e este valor é observado no eixo das ordenadas na Figura 5.6 e na Figura 5.7.

Observa-se na Figura 5.6 que para a massa m de 100 kg, o deslocamento máximo da massa M praticamente não muda à medida que se aumenta o gap . Aumentando a massa m , para um gap igual zero, ou seja, sem folga da massa m com a parede A , o deslocamento máximo é reduzido. Além disso, esse deslocamento máximo alcançará valores mínimos com valores de gap diferentes de zero.

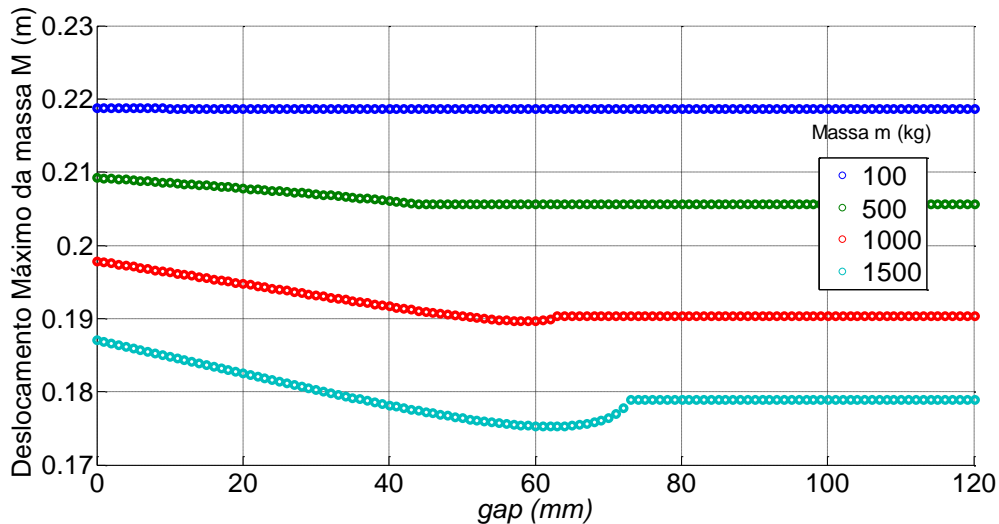


Figura 5.6 – Deslocamento máximo da massa M para o modelo (i)

Na Figura 5.7, modelo (ii), os deslocamentos máximos da massa M são mínimos para o gap igual a zero e para todos os casos (diferentes valores da massa m) o deslocamento máximo aumenta para um gap diferente de zero.

Na Figura 5.8, é feita uma comparação entre os modelos simplificado, modelo (i) e modelo (ii) para o gap igual a zero e massa m igual a 100 kg em termos de deslocamentos máximos da massa M . Observa-se uma diferença de apenas 1.22% entre o modelo simplificado e o modelo (i) e uma diferença de 22.7% entre o modelo simplificado e o modelo (ii).

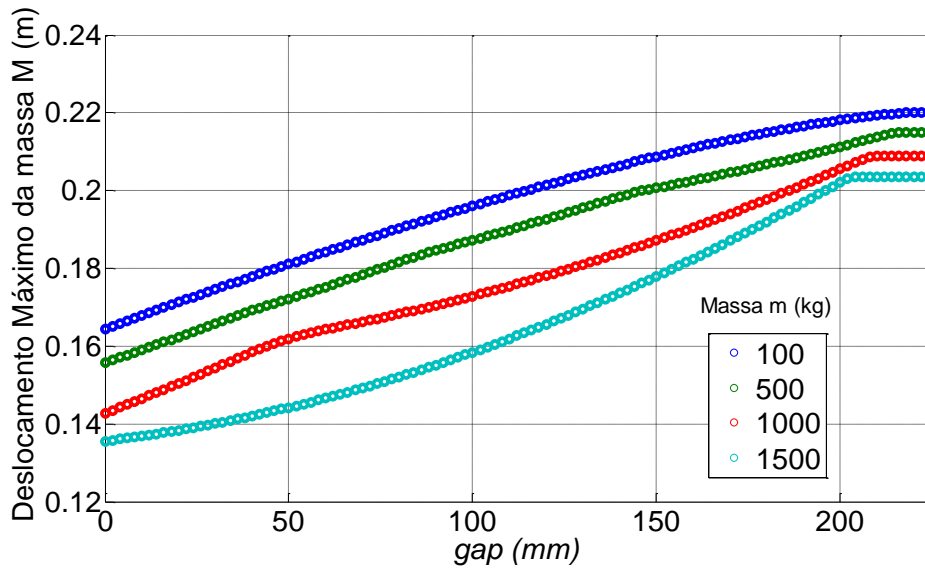


Figura 5.7 – Deslocamento máximo da massa M para o modelo (ii)

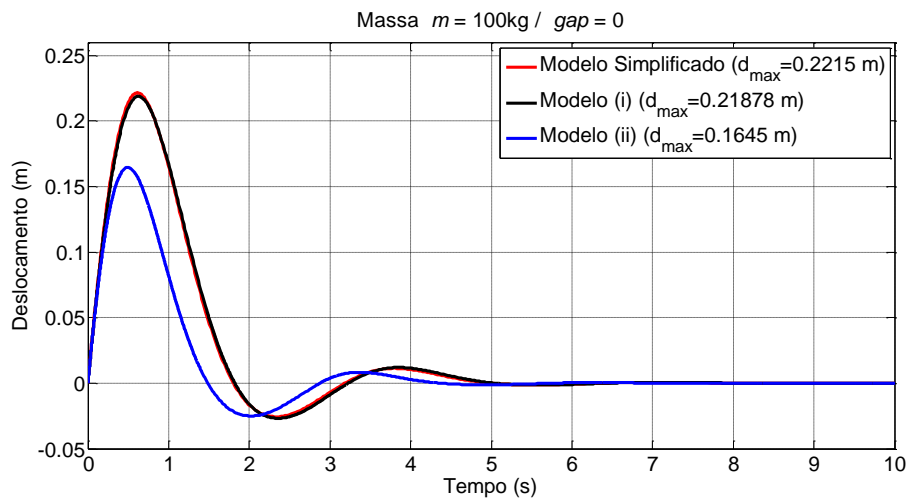


Figura 5.8 – Comparação entre os modelos ($m = 100$ kg)

À medida que os valores da massa m são aumentados, a diferença entre o deslocamento máximo da massa M no modelo simplificado e no modelo (i) aumenta, como pode ser observado na Figura 5.9, na Figura 5.10 e na Figura 5.11.

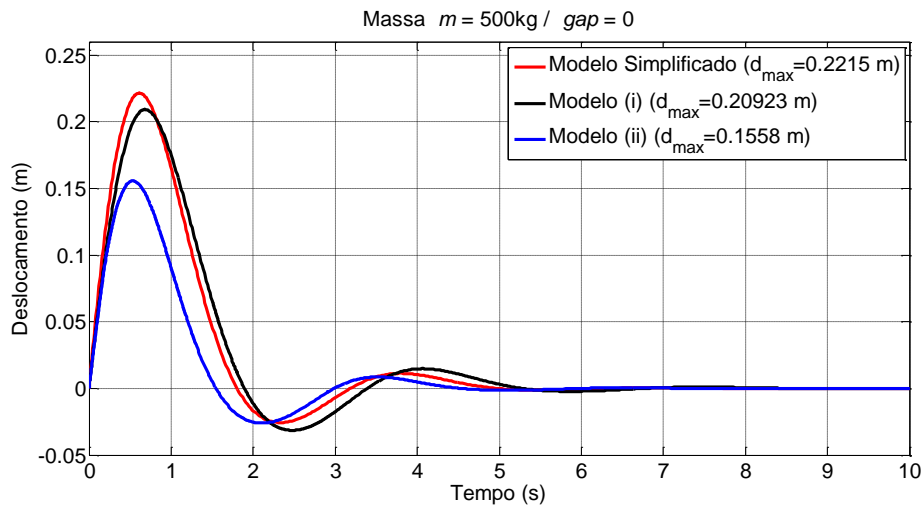


Figura 5.9 – Comparação entre os modelos ($m = 500$ kg)

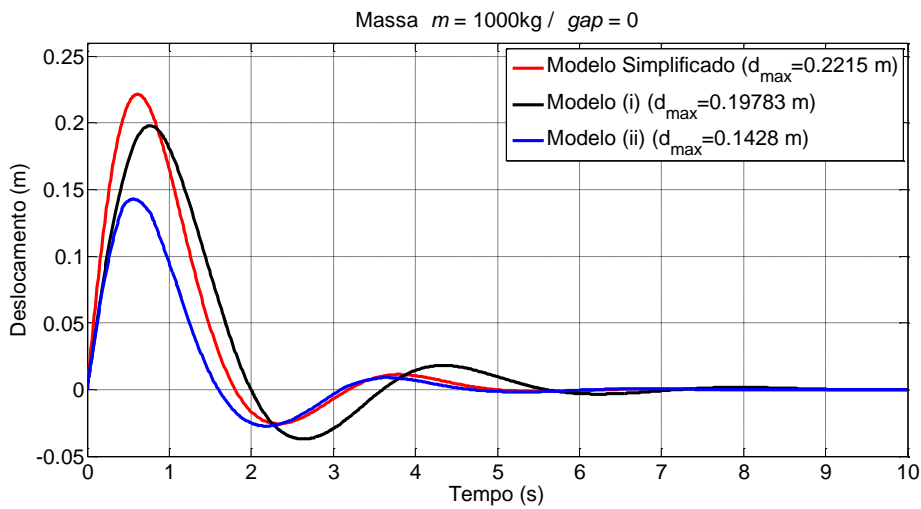


Figura 5.10 – Comparação entre os modelos ($m = 1000$ kg)

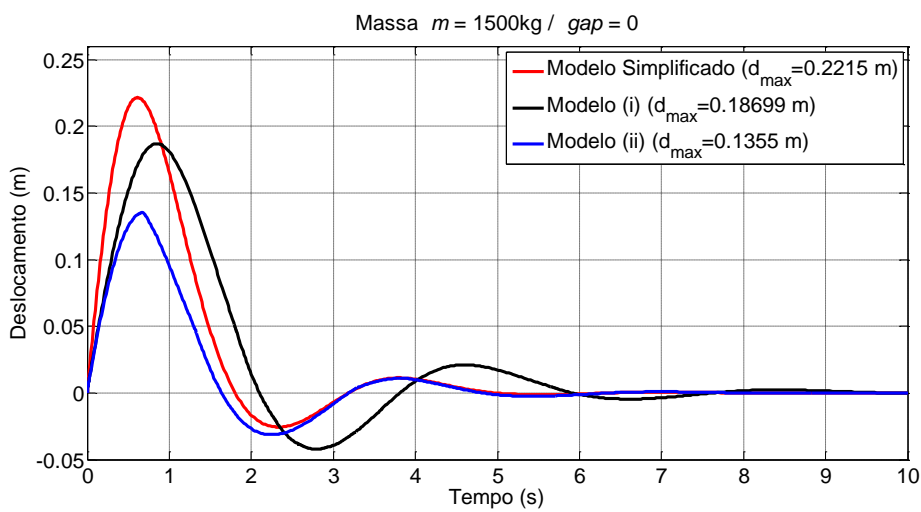


Figura 5.11 – Comparação entre os modelos ($m = 1500$ kg)

A Tabela 5.3 resume os valores dos deslocamentos máximos da massa M encontrados nos gráficos para os três modelos analisados.

Tabela 5.3 – Resumo dos deslocamentos máximos da massa M

Massa m	Deslocamentos máximos da massa M (metro)			
	100 kg	500 kg	1000 kg	1500 kg
Modelo simplificado	0.2215 m	0.2215 m	0.2215 m	0.2215 m
Modelo (i)	0.2188 m	0.2092 m	0.1978 m	0.1869 m
Modelo (ii)	0.1645 m	0.1558 m	0.1428 m	0.1355 m

A Tabela 5.4 mostra a porcentagem de redução do deslocamento máximo dos modelos (i) e (ii) em relação ao Modelo Simplificado.

Tabela 5.4 – Porcentagem de redução em relação ao Modelo Simplificado

Massa m	Porcentagem de redução (%)			
	100 kg	500 kg	1000 kg	1500 kg
Modelo (i)	1.21	5.55	10.69	15.62
Modelo (ii)	25.73	29.66	35.53	38.82

5.3. Análise da Força de Contato

O impacto entre a massa m e a parede A causa uma mudança brusca na velocidade da massa m . Essas mudanças de velocidade são em função da força de contato, F_{ct} , existente nos modelos (i) e (ii), como pode ser visto na Eq. 43 e na Eq. 45.

A Figura 5.12 mostra os perfis da força de contato para o modelo (i) (Figura 5.12a) e para o modelo (ii) (Figura 5.12c) e mostra também os detalhes para os impactos mais efetivos para o modelo (i) (Figura 5.12b) e para o modelo (ii) (Figura 5.12d). Todas as figuras são para o *gap* igual a zero.

Pode-se observar que o pico da força do modelo (i) é 98.03 kN e para o modelo (ii), o pico da força é 100.1 kN, ou seja, uma pequena diferença entre as forças máximas de contato. Entretanto, os picos seguintes da força de impacto para o modelo (i) são significativamente menores que os picos para o modelo (ii),

como se pode notar ao comparar a Figura 5.12a e a Figura 5.12c, ou em detalhes na Figura 5.12b e na Figura 5.12d.

A Figura 5.13 mostra como a velocidade da massa m varia ao longo da simulação para os modelos (i) e (ii). A Figura 5.13a apresenta a variação de velocidade para 10 s de simulação para o modelo (i) e na Figura 5.13b é feito um detalhamento semelhante à Figura 5.12b. O perfil de velocidade da massa m para o modelo (ii) é ilustrado na Figura 5.13c e seu detalhamento é mostrado na Figura 5.13d.

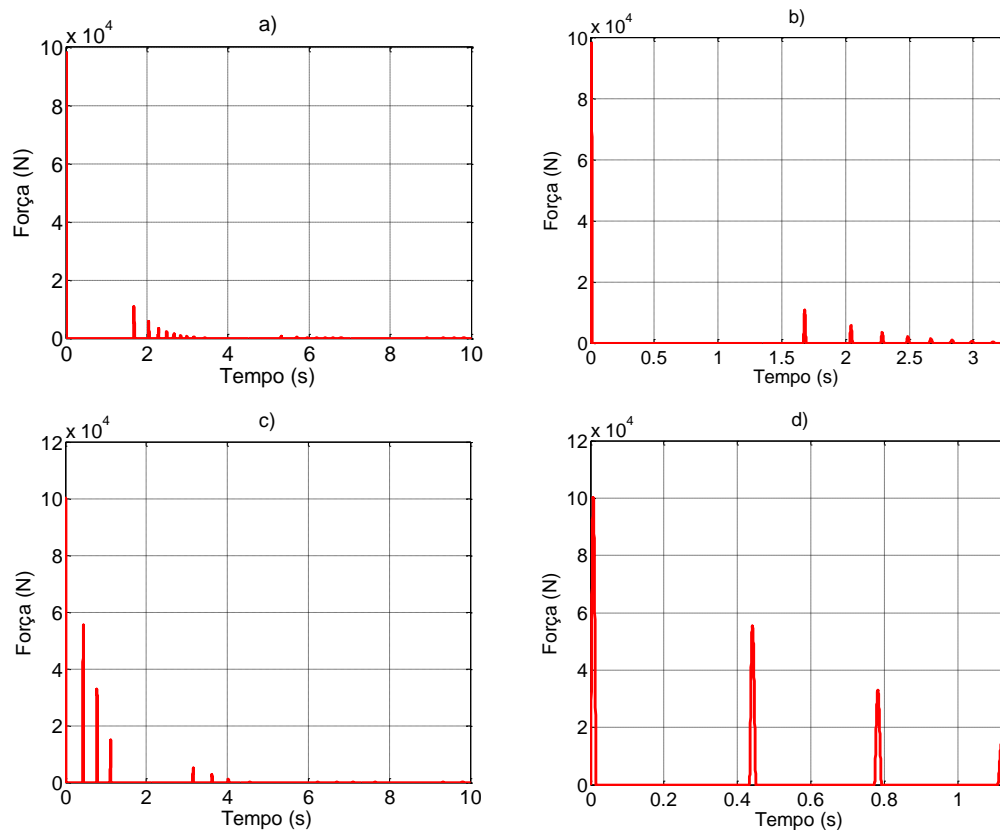


Figura 5.12 – Força de contato entre a massa m e a parede A para os modelos (i) e (ii) para $m = 1000$ kg.

a) Força de contato para o modelo (i) para 10s de simulação. b) Detalhe da força de contato do modelo (i) para os impactos mais efetivos (3.25s de tempo de simulação). c) Força de contato para o modelo (ii) para 10s de simulação. d) Detalhe da força de contato do modelo (ii) para os impactos mais efetivos (1.15s de tempo de simulação).

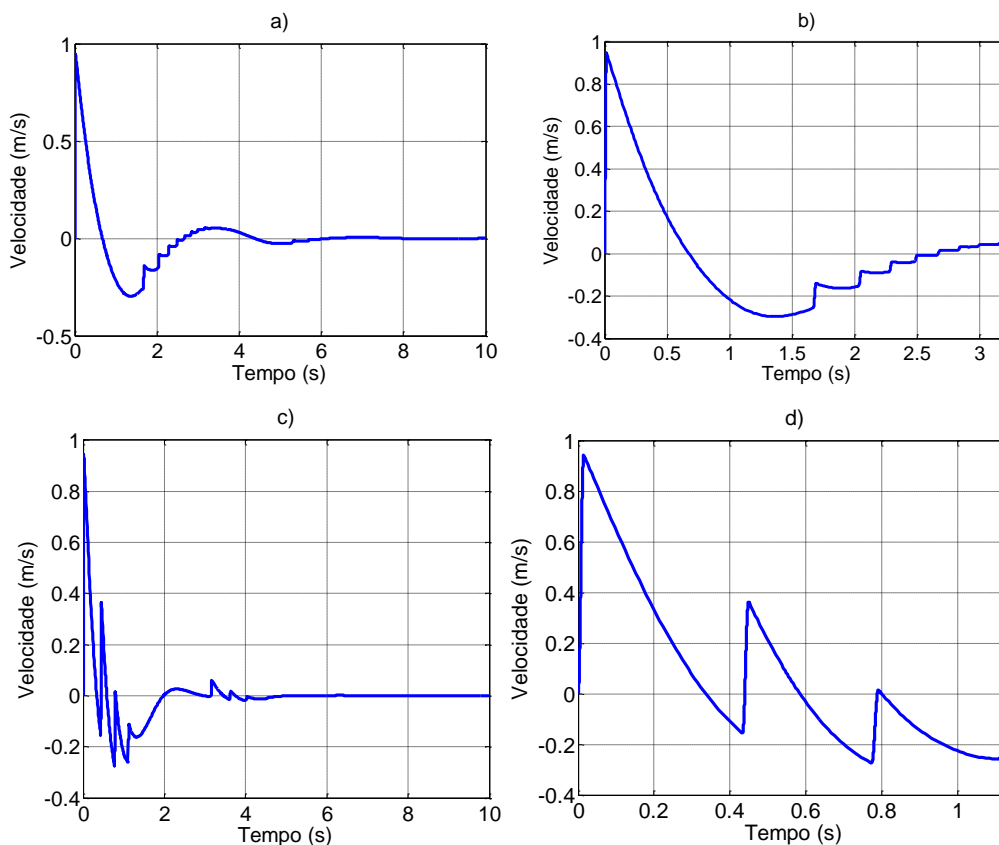


Figura 5.13 – Velocidade da massa m nos modelos (i) e (ii) para $m = 1000$ kg. a) Velocidade da massa m para o modelo (i) para 10 s de simulação. b) Detalhe da velocidade da massa m do modelo (i) para os impactos mais efetivos (3.25s de tempo de simulação). c) Velocidade da massa m para o modelo (ii) para 10 s de simulação. d) Detalhe da velocidade da massa m do modelo (ii) para os impactos mais efetivos (1.15s de tempo de simulação).

Comparando as velocidades máximas, ambos os modelos produzem praticamente os mesmos resultados. Para o modelo (i), chega-se ao valor de 0.9472 m/s e para o modelo (ii), 0.9453 m/s de velocidade máxima. Ambas as velocidades são consideradas as velocidades iniciais para a massa m nos modelos (i) e (ii), respectivamente. No modelo (i), a velocidade máxima ocorre em 0.01513s e para o modelo (ii), esse valor é de 0.01505s, ou seja, uma diferença desprezível. Esses valores são praticamente os mesmos da duração das forças de contato, como se pode verificar na Figura 5.14.

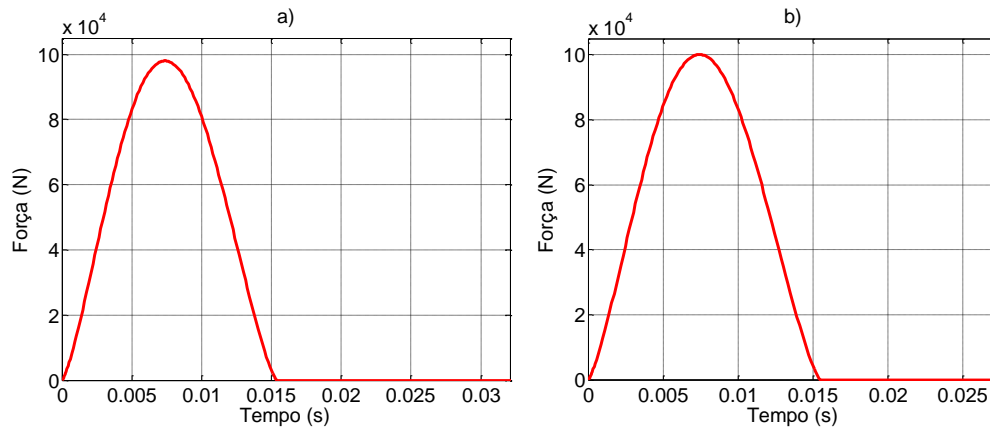


Figura 5.14 – Força de contato máxima entre a massa m e a parede A para a) modelo (i) e b) modelo (ii).

5.4. Modelo não linear do amortecimento

A seguir, será considerada uma variação dos modelo (i) e (ii) em que a força de amortecimento relativa ao amortecedor c_r não é considerada constante como apresentado na Eq. 43. Dessa forma, a parcela da força de amortecimento F_d dada por $(\dot{x}_M - \dot{x}_m)c_r$ na Eq. 43 será considerada não linear de acordo com o modelo apresentado por Polach e Hajžman (2010) a partir do gráfico da força em função da velocidade conforme ilustrado na Figura 5.15.

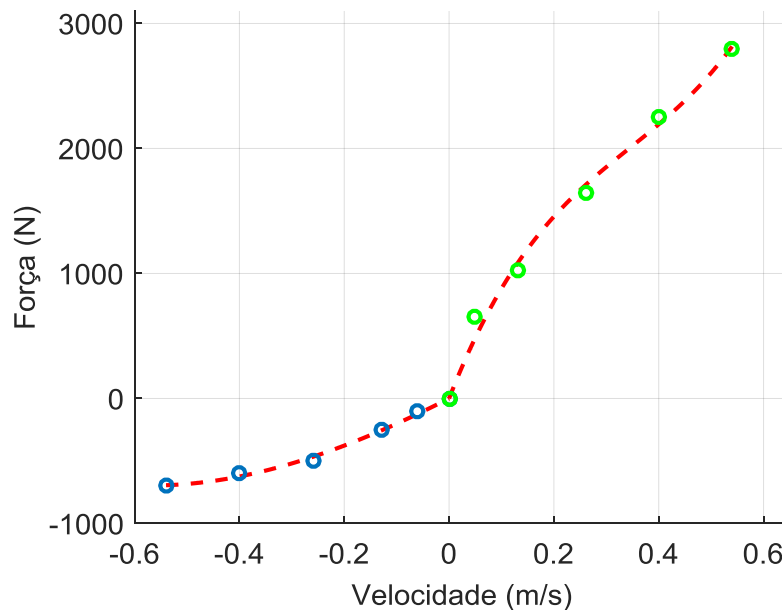


Figura 5.15 – Gráfico de força-velocidade da força de amortecimento
Fonte: Adaptado de Polach e Hajžman (2010).

A linha tracejada em vermelho traçada a partir dos pontos medidos experimentalmente é aproximada através do polinômio da Eq. 46, obtendo-se os coeficientes apresentados na

Tabela 5.5, tanto para velocidades positivas quanto para velocidades negativas.

$$F_d = a_{d1}\dot{\Delta}^3 + a_{d2}\dot{\Delta}^2 + a_{d3}\dot{\Delta} + a_{d4} \quad \text{Eq. 46}$$

Onde $\dot{\Delta} = (\dot{x}_M - \dot{x}_m)$ para o modelo (i) e $\dot{\Delta} = \dot{x}_m$ para o modelo (ii). Como ambas as curvas para velocidade negativa e para velocidade positiva interceptam o zero, a_{d4} obrigatoriamente é igual a zero.

Tabela 5.5 – Coeficientes para a força de amortecimento não linear

Coeficientes	Velocidade negativa	Velocidade positiva
a_{d1}	-1003.5	20710.7
a_{d2}	1020.7	-21384.6
a_{d3}	2128.7	10723.3
a_{d4}	0	0

Dessa forma, a Eq. 43 e a Eq. 45 tornam-se, respectivamente, a Eq. 47 e a Eq. 48.

$$\begin{aligned} M\ddot{x}_M + kx_M + c\dot{x}_M + [a_{d1}\dot{\Delta}^3 + a_{d2}\dot{\Delta}^2 + a_{d3}\dot{\Delta} + a_{d4}] + (x_M - x_m)k_r - F_{ct} &= 0 \\ m\ddot{x}_m - [a_{d1}\dot{\Delta}^3 + a_{d2}\dot{\Delta}^2 + a_{d3}\dot{\Delta} + a_{d4}] - (x_M - x_m)k_r + F_{ct} &= 0 \end{aligned} \quad \text{Eq. 47}$$

$$\begin{aligned} M\ddot{x}_M + kx_M + c\dot{x}_M - F_{ct} &= 0 \\ m\ddot{x}_m + k_r x_m + [a_{d1}\dot{\Delta}^3 + a_{d2}\dot{\Delta}^2 + a_{d3}\dot{\Delta} + a_{d4}] + F_{ct} &= 0 \end{aligned} \quad \text{Eq. 48}$$

As Figuras 5.16-19 mostram as comparações feitas dos modelos simplificado e modelos (i) e (ii) do deslocamento da massa M com os modelos não lineares definidos pela Eq. 47 (modelo não linear (i)) e pela Eq. 48 (modelo não linear (ii)), variando a massa m de 100 a 1500 kg.

Observa-se uma diferença desprezível (menos de 1%) entre o modelo (i) e o modelo não linear (i), respectivamente cores preto e ciano tracejado para todas as massas m consideradas.

Já para o modelo (ii) e modelo não linear (ii), respectivamente cores azul e magenta tracejado, percebe-se uma diferença de 16% para a massa m de 100 kg e à medida que a massa m aumenta, essa diferença é reduzida, entretanto os deslocamentos máximos da massa M não se igualam em nenhum caso considerado.

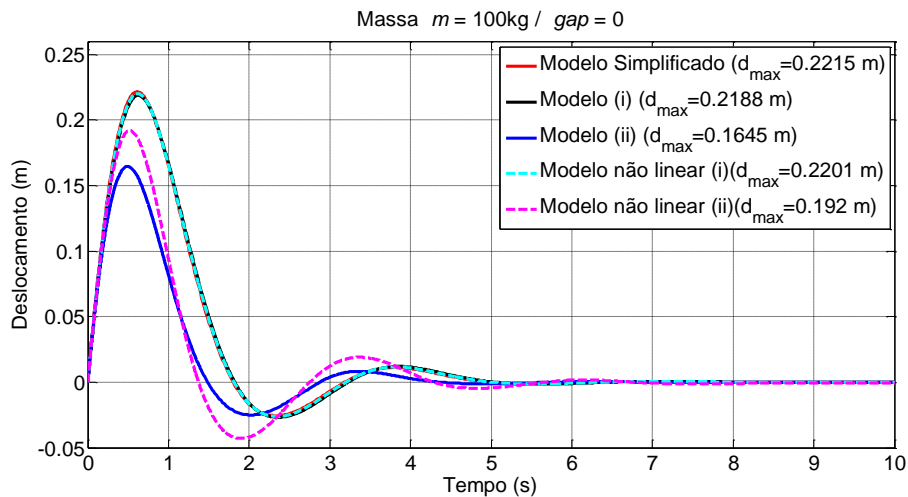


Figura 5.16 – Comparação com os modelos não lineares ($m = 100\text{kg}$)

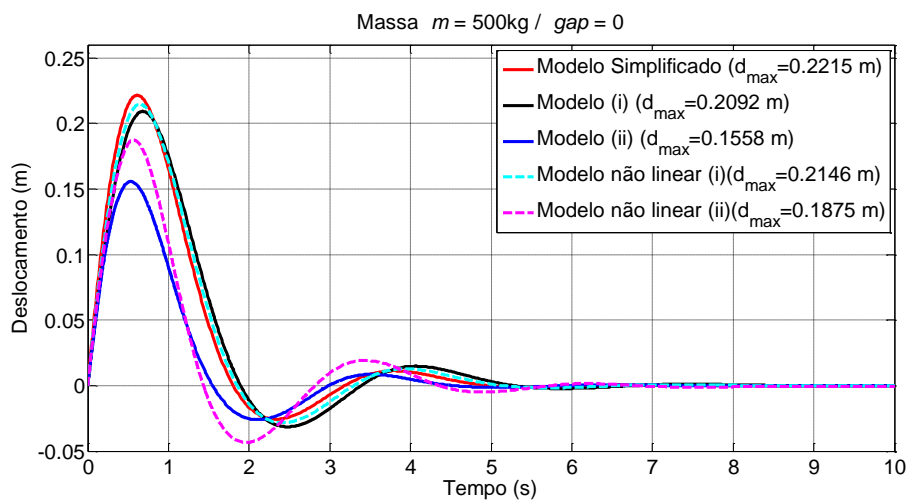


Figura 5.17 – Comparação com os modelos não lineares ($m = 500\text{kg}$)

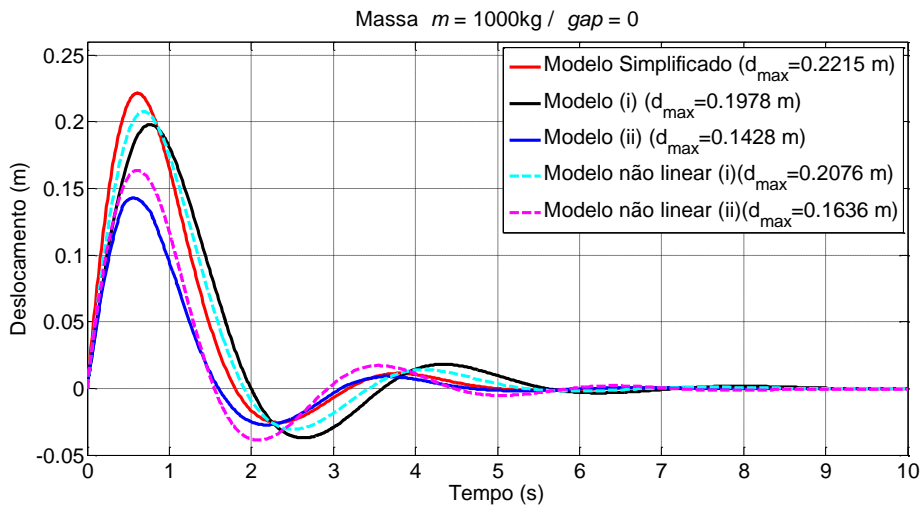


Figura 5.18 – Comparação com os modelos não lineares ($m = 1000\text{kg}$)

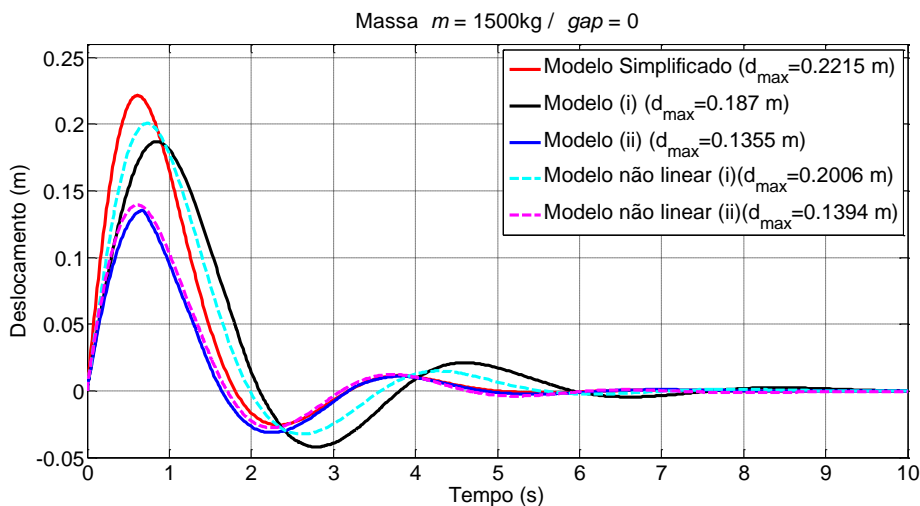


Figura 5.19 – Comparação com os modelos não lineares ($m = 1500\text{kg}$)

5.5. Análise da Força de Reação no Ponto de Ancoragem

A força exercida no ponto de ancoragem do sistema (parede P , Figura 5.2, Figura 5.4 e Figura 5.5) é um dos pontos críticos da dinâmica do sistema de recuo, pois essa força que será transmitida ao suporte do armamento. Para o modelo simplificado, Figura 5.2, a força de ancoragem ao longo do tempo é dada pela Eq. 49 e apresentada na Figura 5.20. Observa-se que a força máxima é de 6950 N.

$$\text{Força de Ancoragem} = kx_M + c\dot{x}_M$$

Eq. 49

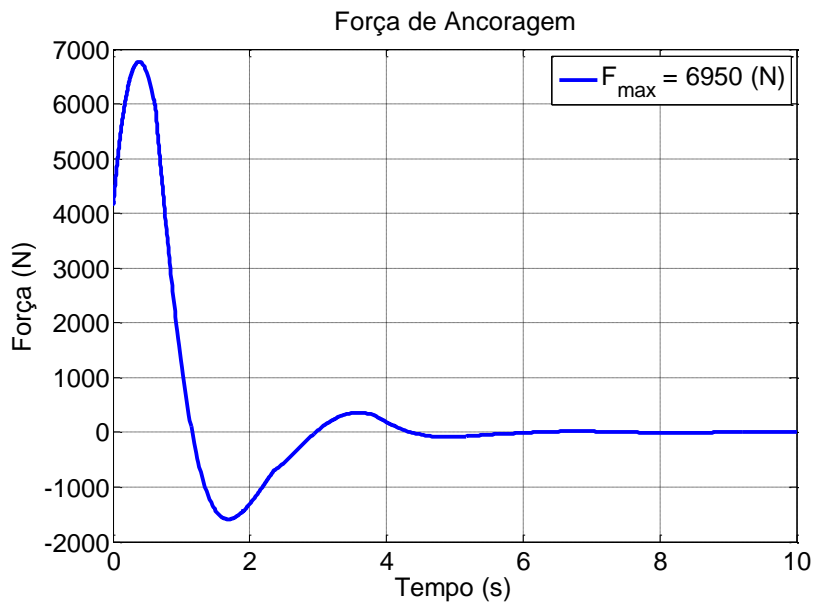


Figura 5.20 – Força de ancoragem para o modelo Simplificado

Assim como nos deslocamentos máximos da massa M , foi feita uma análise da força máxima de ancoragem para os modelos (i) e (ii) para uma variação do *gap* entre a massa m e a parede A . A Figura 5.21 e a Figura 5.22 mostram como a força máxima de ancoragem varia com o *gap*. Para o modelo (i), as forças máximas de ancoragem possuem um perfil bastante parecido com o gráfico de deslocamento máximo da massa M (Figura 5.6). Observa-se que para a massa m igual a 100 kg, a força máxima de ancoragem inicia com um valor de 6891 N para um *gap* de 0 mm e há uma pequena redução chegando a um valor mínimo de 6884 N em 15 mm de *gap*, mantendo este valor para todos demais valores do *gap*. Para a massa m de 500 kg, a força máxima de ancoragem possui um valor de 6673 N para um *gap* de 0 mm e para valores maiores e iguais a um *gap* de 44 mm, a força de ancoragem é de 6523 N. A força de ancoragem para um *gap* de 0 mm é 6324 N para a massa m de 1000 kg. Para um *gap* de 59 mm, a força de ancoragem atinge o valor mínimo de 6014 N. Para a massa m de 1500 kg, o valor inicial da força de ancoragem é de 5955 N e para um *gap* de 62 mm, essa força é de 5504 N, menor valor alcançado. Um resumo desses valores é feito na Tabela 5.6.

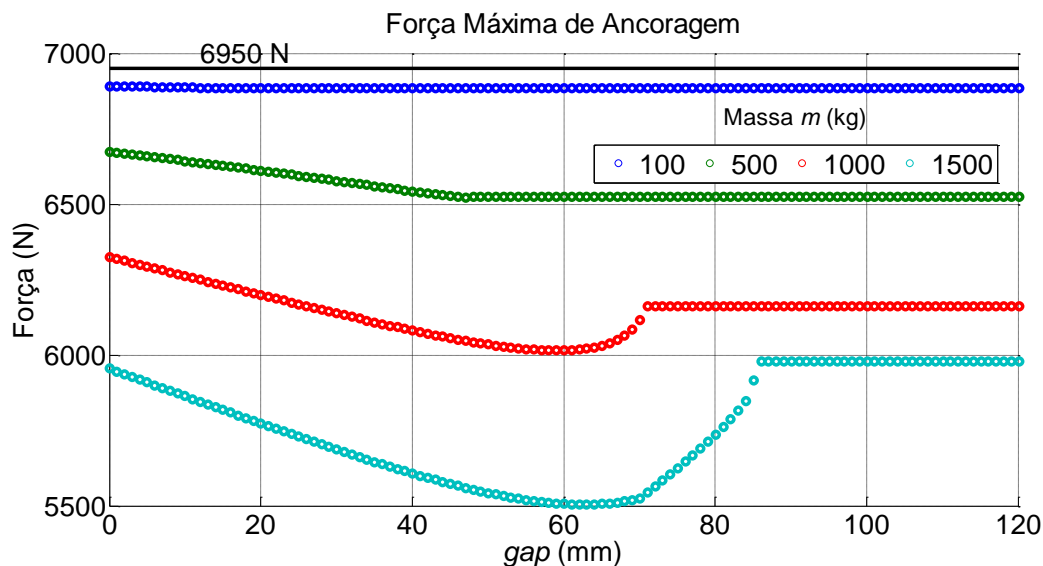


Figura 5.21 – Força máxima para o modelo (i)

Tabela 5.6 – Valor da força máxima de ancoragem para as massas m

Massa m (kg)	Menor valor da força de ancoragem (N)	Valor do gap
100	6884	Maior que 15 mm
500	6523	Maior que 44 mm
1000	6014	Igual a 59 mm
1500	5504	Igual a 62 mm
100	6891	0 mm
500	6673	0 mm
1000	6324	0 mm
1500	5955	0 mm

A resposta do modelo (ii) apresenta um comportamento mais complexo à medida que se varia o gap para diversos valores de massa m , como observado na Figura 5.22. Observa-se que os valores das forças de ancoragem para todos os valores de massa m para um gap igual a 0 mm são maiores que o valor da força de ancoragem do modelo simplificado, ou seja, não há melhoria do ponto de vista de redução da força de ancoragem inserindo uma massa não embarcada no sistema.

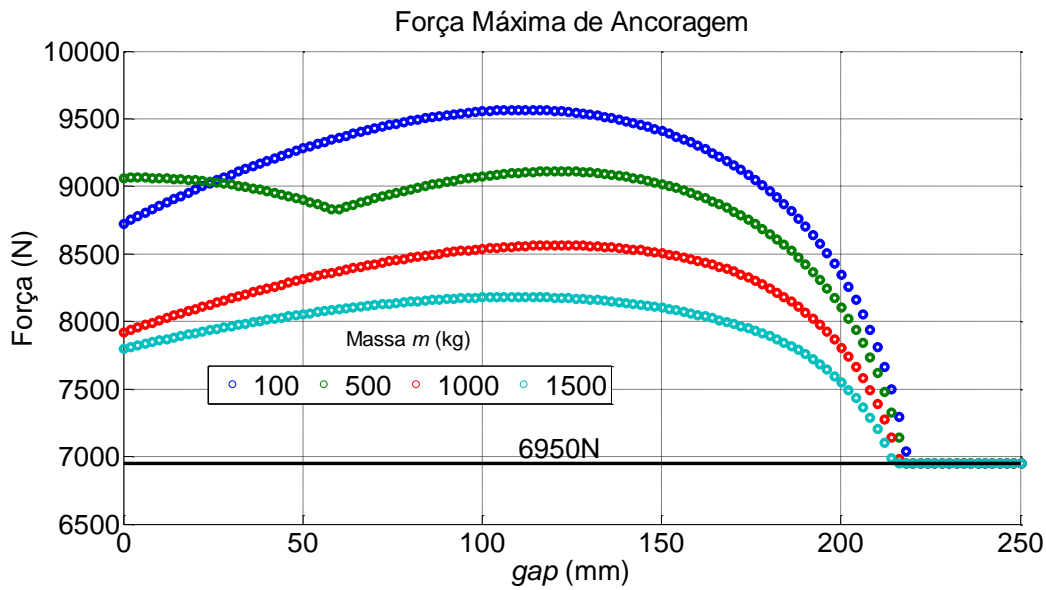


Figura 5.22 – Força máxima para o modelo (ii)

Conclui-se que o modelo (i), que possui a massa m embarcada no sistema, resulta em uma menor força no ponto de ancoragem do sistema, consequentemente um menor esforço será transmitida para o suporte de fixação do tubo e à medida que se aumenta os valores da massa embarcada, a força de ancoragem é ainda menor.

Cabe ressaltar que a massa de 1500 kg não é viável de ser adicionada e só foi utilizada para fins de análise numérica.

No próximo capítulo será apresentada a célula unitária que comporá o metamaterial proposto para aplicação da mitigação da força impulsiva gerada pelo disparo de um armamento.

6. Desenvolvimento da Célula Unitária do Metamaterial

Com o intuito de apresentar um ressonador compacto, de fácil fabricação e com boa precisão na definição da frequência de ressonância, foi idealizada uma peça conforme mostrado na Figura 6.1, modelada através do *software* de modelagem CAD 3D Solidworks®.

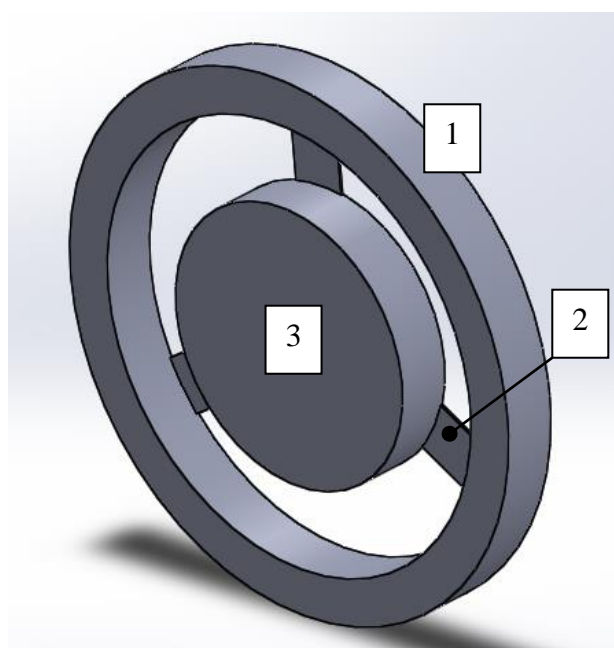


Figura 6.1 – Modelo tridimensional da célula unitária

A peça foi projetada a partir de uma chapa de latão de 5 mm de espessura e o objetivo é que através de corte à laser e do processo de fabricação por usinagem, seja criada uma peça única de acordo com a geometria apresentada na Figura 6.1.

A peça da Figura 6.1 tem o objetivo de reproduzir o comportamento do conjunto mostrado na Figura 4.1, onde a massa externa m_1 é representada pelo anel externo mostrado em “1” na Figura 6.1. Os três conectores mostrados em “2” devem se comportar como a mola de rigidez k_2 da Figura 4.1. A massa interna m_2 está configurada como o disco interno “3”, também da Figura 6.1.

6.1. Desenvolvimento Experimental

Para o desenvolvimento experimental, foram fabricadas três peças com dimensões conforme especificadas no desenho técnico na Figura 6.2 e algumas medidas variáveis de acordo com a Tabela 6.1, utilizando uma chapa de latão com 5 mm de espessura da qual inicialmente se desconheciam as propriedades. Por conta disso, foi feito um ensaio de dureza e chegou-se ao valor de 112 HB. Com esta dureza, tentou-se classificar o material de acordo com a ASTM B36/B36M-13, chegando-se à conclusão de que o material pode ser uma liga de cobre UNS N° C22000 com $\frac{3}{4}$ de dureza, tensão de escoamento de aproximadamente 340 MPa e resistência à tração de 390 MPa.

PUC-Rio - Certificação Digital N° 1412744/CA

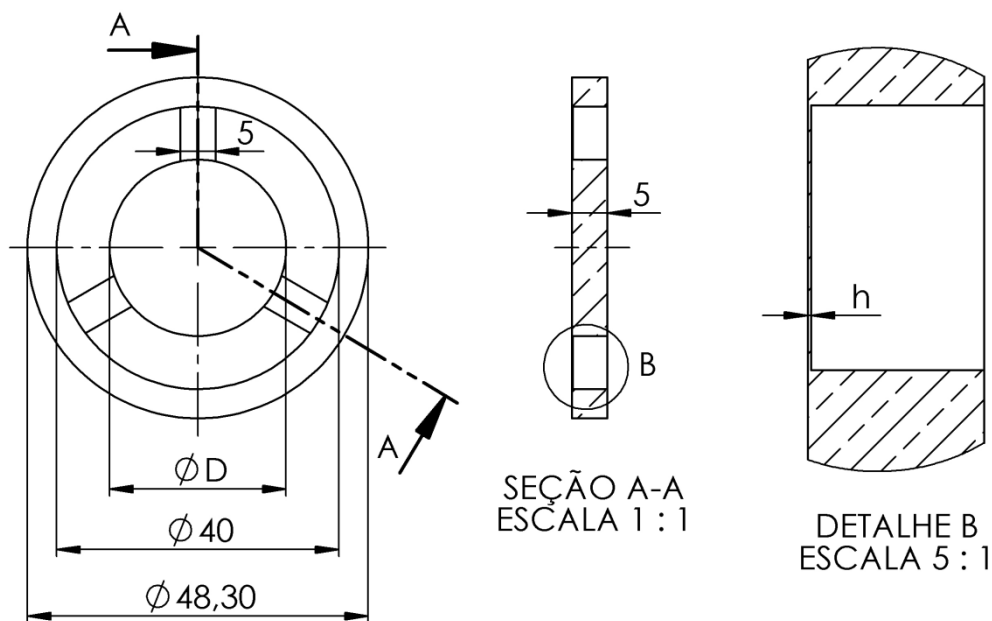


Figura 6.2 – Desenho técnico do ressonador (dimensões em mm)

Também é possível verificar na Tabela 6.1, uma comparação entre o peso medido da peça real e o peso estimado no software CAD 3D.

Tabela 6.1 – Medidas das Peças Projetadas

Peça	Diâmetro “D” (mm)	Espessura “h” (mm)	Peso medido (g)	Peso estimado (g)
1	20	0.30	35.2	36.9
2	25	0.30	42.2	43.8
3	25	0.30	40.8	41.7
4	20	0.50	35.6	36.1
5	25	0.50	41.7	48.8

Como mencionado, a fabricação da peça foi através de corte a laser e usinagem. O laser utilizado é a fibra óptica modelo YLS 1500 – TR da IPG Photonics, com potência máxima de 1500 W e montado em uma máquina CNC (Controle Numérico Computadorizado) construída no experimento de Silva (2014), conforme mostrado na Figura 6.3.



Figura 6.3 – Fabricação na máquina de corte a laser

A Figura 6.4 mostra o protótipo de uma peça fabricada, ainda sem o rebaixamento dos pontos de união entre o anel e externo e a massa interna.



Figura 6.4 – Protótipo de uma peça feita a partir do corte a laser

A Figura 6.5 mostra a peça sendo usinada para colocar os pontos de união nas espessuras especificadas e a Figura 6.6-a) mostra a peça semiacabada a Figura 6.6-b) apresenta a peça final.



Figura 6.5 – Usinagem da peça

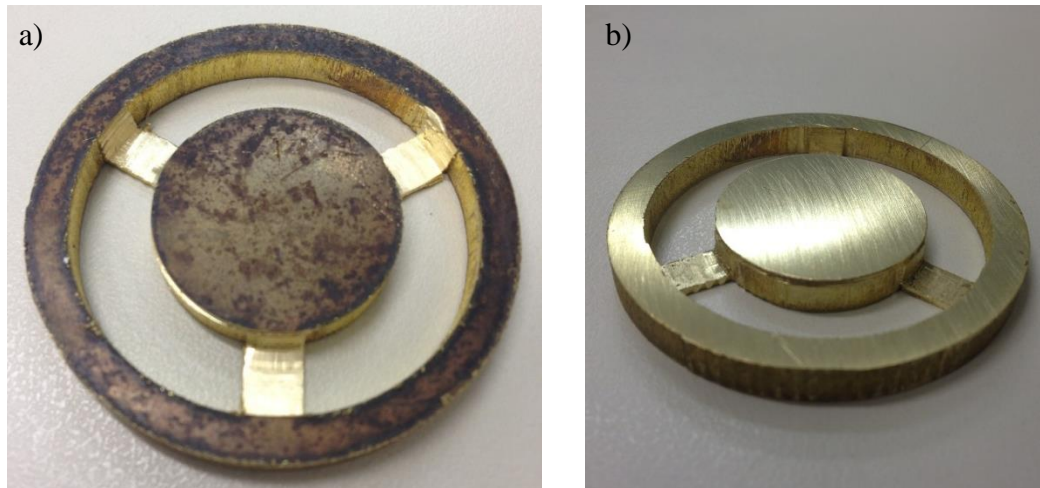


Figura 6.6 – a) Peça semiacabada. b) Peça acabada

6.2. Determinação das Frequências Naturais

Para a determinação das frequências naturais dos ressonadores, foi utilizado o pacote computacional Abaqus, da empresa Simulia®, bem como foi feita a medida experimental através de teste de impacto (*bump testing*) (SCHWARZ e RICHARDSON, 1999) utilizando o *software* LabVIEW para coleta dos dados e o *software* MATLAB para processamento dos sinais.

Foi construída uma base em nylon para servir como suporte para fixação das peças através do anel externo, permitindo assim que o anel interno permanecesse livre para vibrar, como mostrado na Figura 6.7.

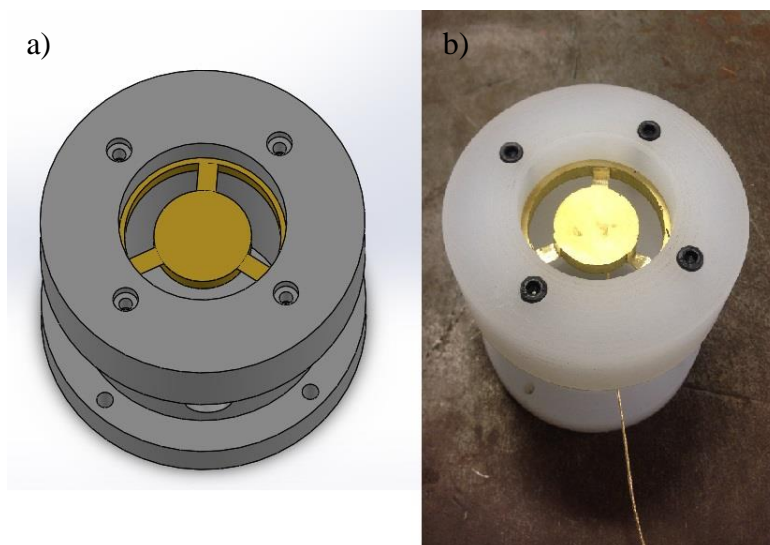


Figura 6.7 – a) Base modelada. b) Base real

Um acelerômetro Isotron, modelo 25B, foi fixado na massa interna e, como mencionado, foi utilizado o LabVIEW para coleta de dados e o MATLAB para processamento dos mesmos. Após realizar o teste de impacto, foi obtido o espectro de frequência (Figura 6.8), a excitação no domínio do tempo (Figura 6.9-a), a Transformada de Fourier do sinal (Figura 6.9-b) e um detalhe do pico da magnitude (Figura 6.10). Essas figuras são um exemplo para a peça nº 2.

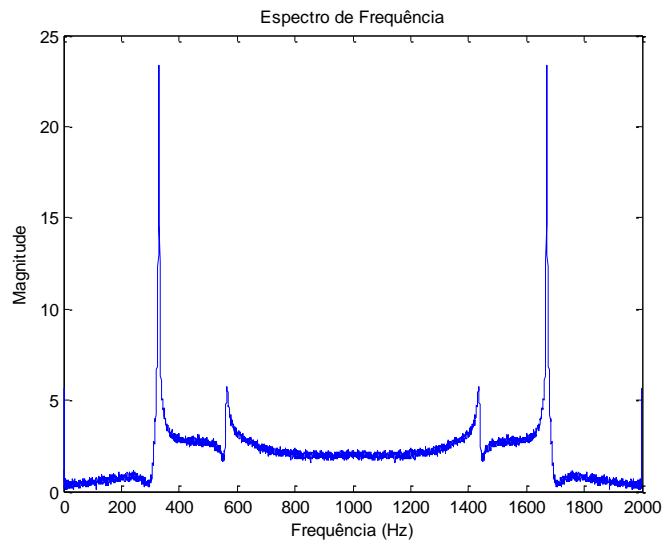


Figura 6.8 – Espectro de Frequência

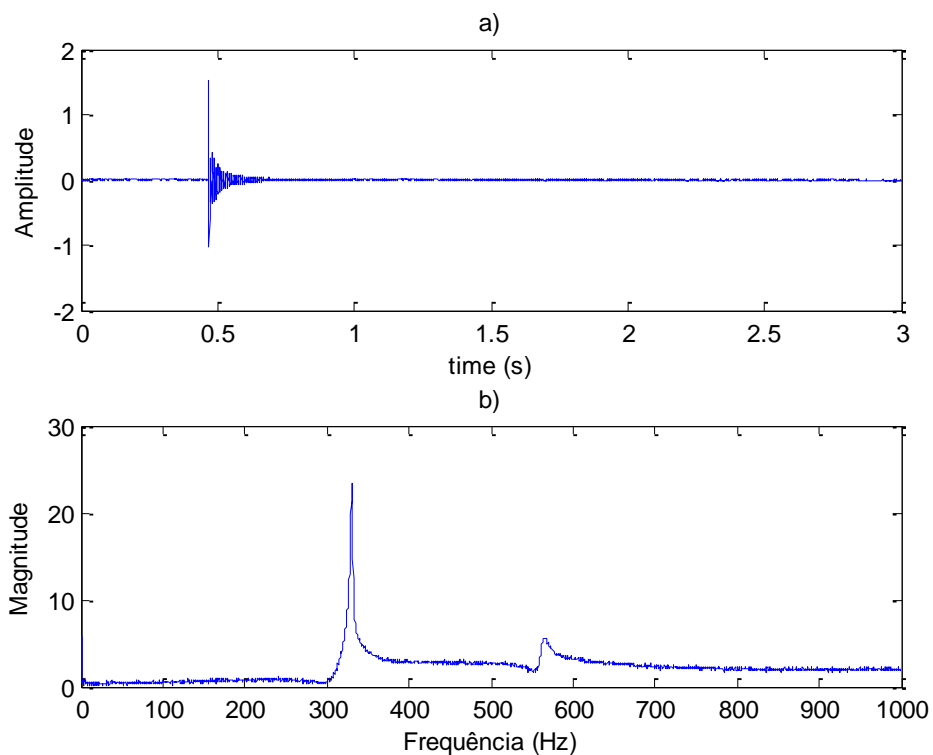


Figura 6.9 – a) Domínio do Tempo. b) Transformada de Fourier do sinal

Na Figura 6.9-b, observa-se um pico bem menor por volta de 560 Hz. Essa segunda frequência representa próximo modo de vibração da peça, a saber, a flexão em torno de um eixo radial.

A Figura 6.10 mostra que a frequência natural da peça 2 é aproximadamente 330 Hz.

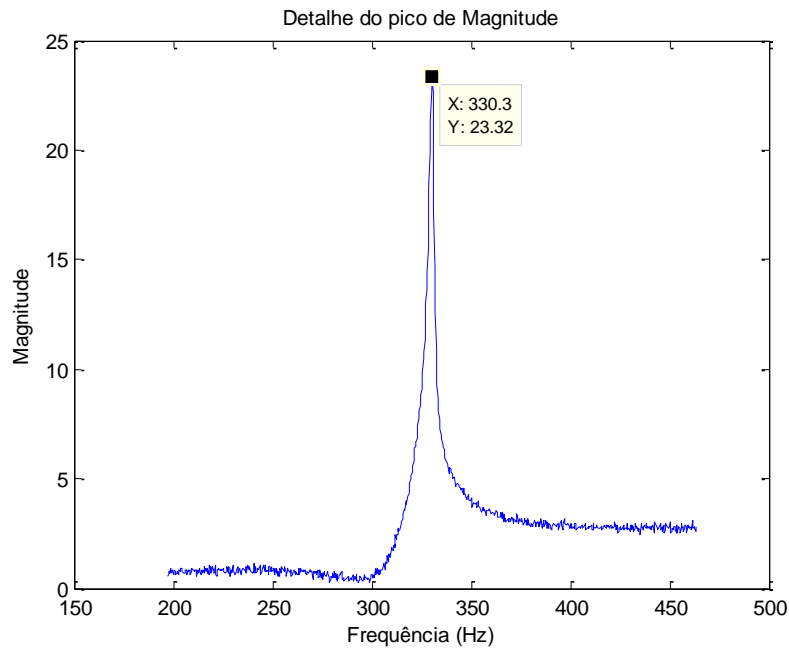


Figura 6.10 – Detalhe do Pico de Magnitude

A simulação para determinar as frequências naturais foi feita no *software* Abaqus. Entretanto, foi feito um ajuste na peça modelada em virtude de uma variação nas espessuras “h” medidas nas peças fabricadas, como mostrado na Tabela 6.2.

Tabela 6.2 – Medidas das Peças Fabricadas

Peça	Espessura “h” (mm)	Frequência estimada (Hz)	Frequência medida (Hz)
1	0.30	175	168
	0.29		
	0.32		
2	0.32	334	330
	0.31		
	0.27		
4	0.45	808	804
	0.49		
	0.53		

Desta forma, as simulações foram feitas para as três peças e como exemplo, a Figura 6.11 mostra o resultado para a peça 2. Pode-se observar que há uma assimetria do descolamento da massa interna em virtude da diferença das espessuras dos pontos de conexão e o valor da frequência natural simulada foi de 333.81 Hz (aproximadamente 334 Hz).

Os resultados comparativos entre as frequências medidas experimentalmente e as frequências estimadas por simulação das três peças estão apresentados na Tabela 6.2.

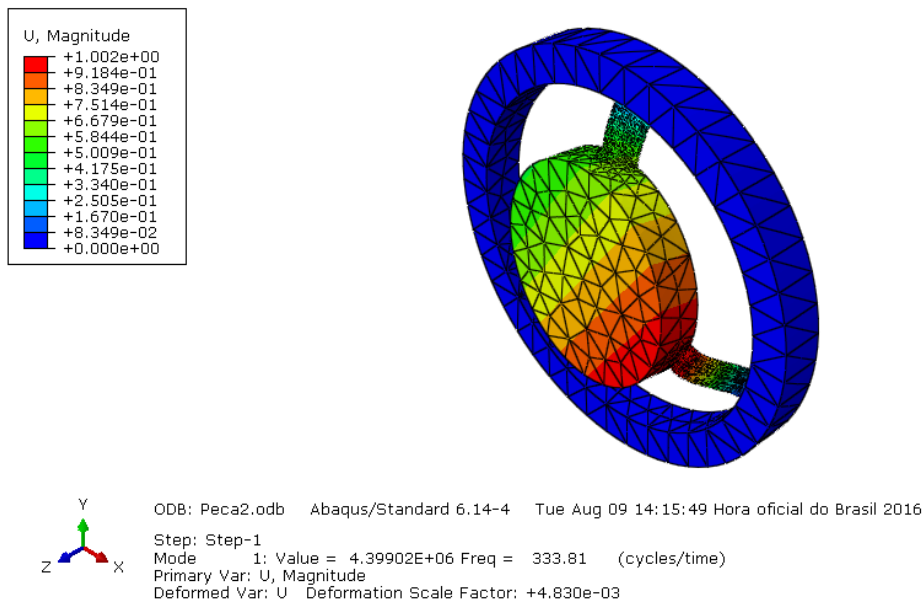


Figura 6.11 – Frequência Natural Simulada (Peça 2)

6.3. Determinação da Constante Elástica

Pretende-se determinar a constante elástica equivalente da peça em função das frequências medidas. Sabe-se que a frequência natural, em rad/s, de um elemento de massa ligado a uma mola pode ser determinada por

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{Eq. 50}$$

onde ω é a frequência, k é a constante de rigidez e m é a massa.

Relacionando a massa interna, m_2 , da Figura 6.1 para as três peças fabricadas e as frequências naturais obtidas, calcula-se a constante de rigidez dos

elementos ressonadores através da Eq. 50. Como os discos internos possuem diâmetros de 20 e 25 mm e todos possuem espessura de 5 mm, as massas internas, possuem 13.3 e 20.9 g, respectivamente, usando a densidade de 8500 kg/m³. Os resultados obtidos estão descritos na Tabela 6.3.

Tabela 6.3 – Constante de Rigidez

Peça	Massa interna m_2 (g)	Frequência medida (Hz)	k (N/m)
1	13.3	168	14820
2	20.9	330	89853
4	13.3	804	339409

Com o intuito de se verificar as constantes de rigidez calculadas, foi adicionada uma massa às peças conforme Figura 6.12. A massa consiste em uma peça de aço com massa de 42 g. Essa massa foi adicionada à massa interna da peça 1, totalizando 55.3 g. Utilizando a Eq. 50 e a constante de rigidez obtida na Tabela 6.3, chega-se a uma nova frequência natural de 82.4 Hz.

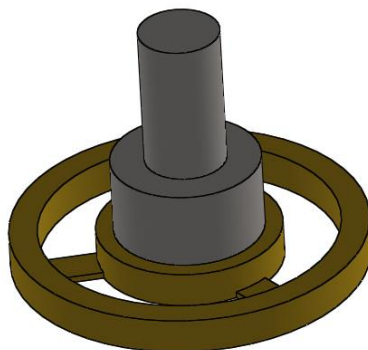


Figura 6.12 – Massa adicionada ao ressonador

Entretanto, percebeu-se durante as medições experimentais que uma frequência mais baixa que 82.4 Hz foi detectada, como mostrado na Figura 6.13, onde observa-se um pico próximo aos 54 Hz.

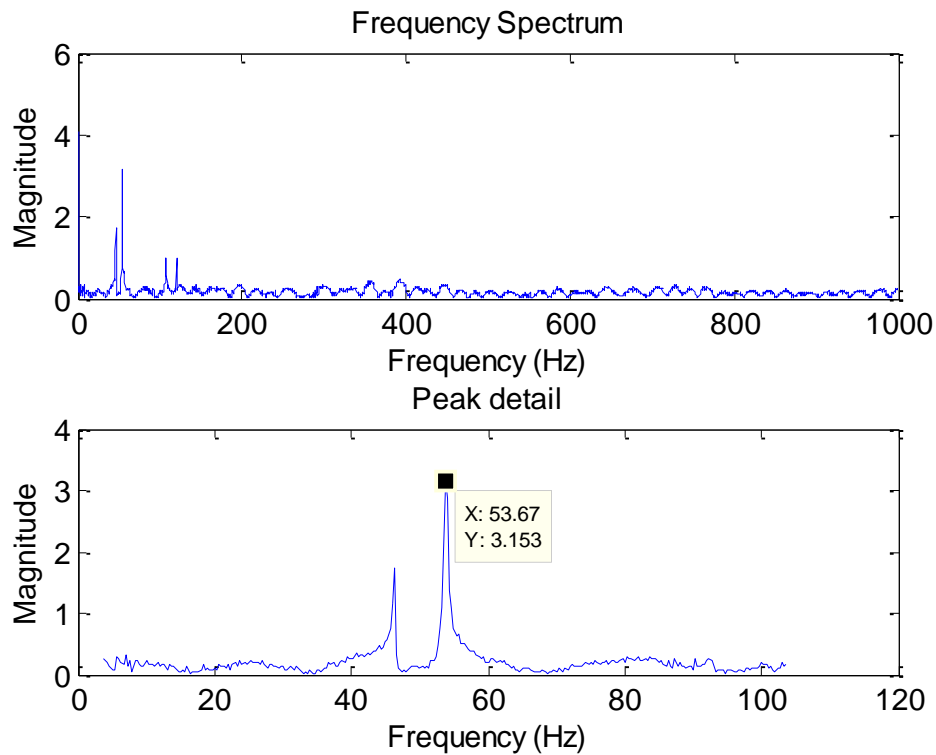


Figura 6.13 – Frequência natural da Peça 1 com adição de massa

Uma nova simulação foi realizada para identificar a frequência de ressonância da peça 1 com a massa adicionada e observou-se uma frequência de 59.5 Hz. Entretanto, esta frequência é em função de um modo de vibração não considerado na modelagem e que a massa adicionada gera em função de sua geometria alongada em relação a todo o conjunto, como mostrado na Figura 6.14.

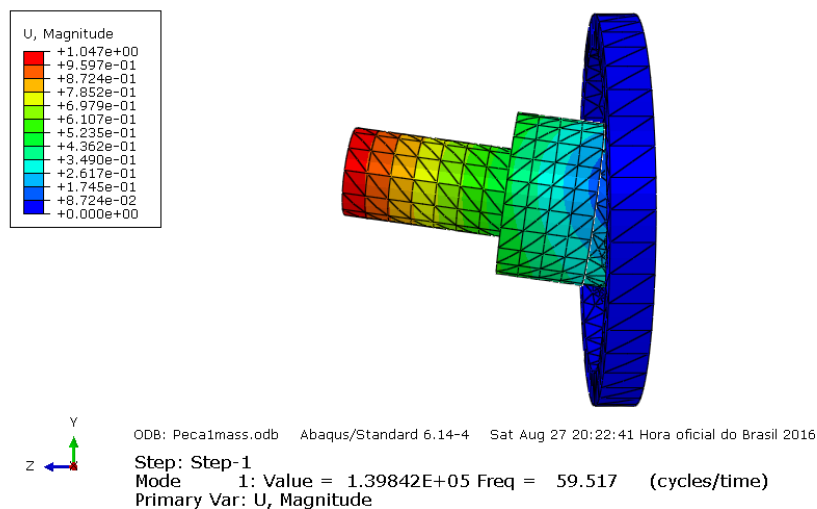


Figura 6.14 – Modo de flexão da Peça 1

Cabe ressaltar que o gráfico da Figura 6.13 foi obtido através da realização de um impacto na direção perpendicular ao eixo Z (de acordo com a referência mostrada na Figura 6.14). Quando o impacto foi realizado na direção do eixo Z, o espectro de frequência obtido é mostrado na Figura 6.15, onde o pico de frequência está em 90 Hz, relativamente próximo da frequência calculada de 82.4 Hz.

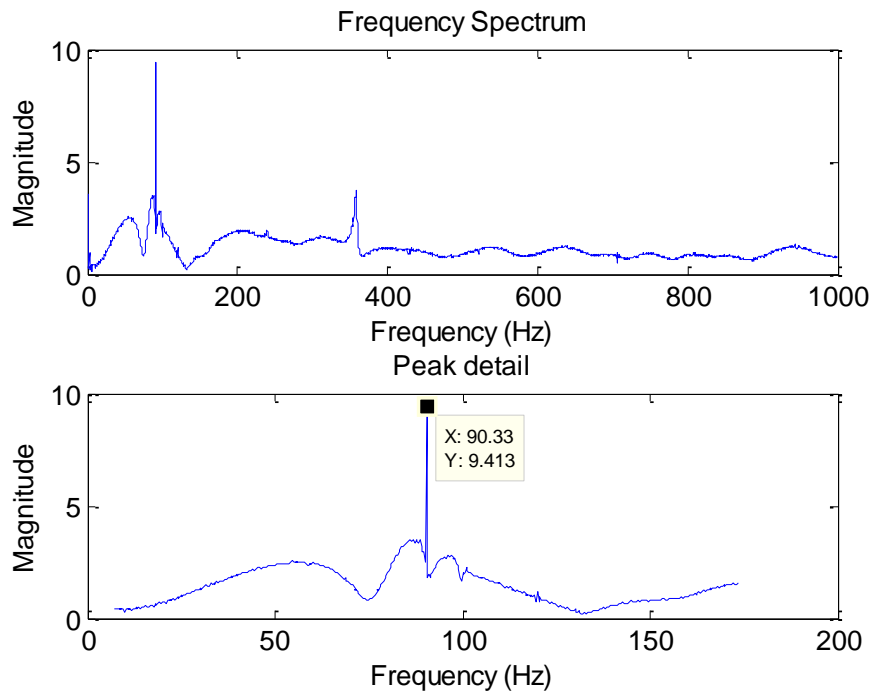


Figura 6.15 – Frequência natural da Peça 1 com adição de massa

Esse modo de ressonância longitudinal aparece também na simulação com o valor de 85.5 Hz, como mostrado na Figura 6.16.

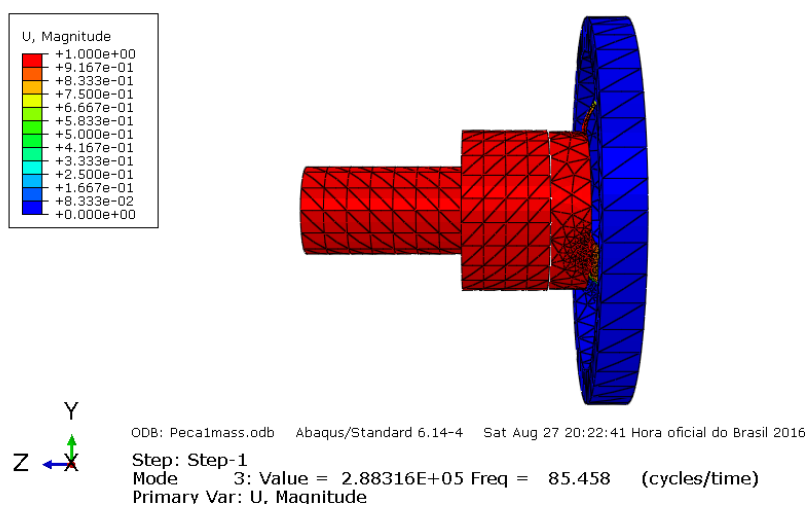


Figura 6.16 – Frequência natural longitudinal da Peça 1 com adição de massa

Dessa forma, foi montada a Tabela 6.4 com as frequências naturais longitudinais medidas, calculadas e simuladas das peças com a adição da massa de 42 g.

Tabela 6.4 – Frequência natural longitudinal com adição de massa

Peça	Nova massa interna m_2 (g)	Frequência medida (Hz)	Frequência calculada (Hz)	Frequência simulada (Hz)
1	55.3	90.3	82.4	85.5
2	62.9	226.3	192.2	203.3
4	55.3	433.3	394.3	412.3

A massa de 42 g foi adicionada à massa interna da peça 2, totalizando 62.9 g. Utilizando a Eq. 50 e a constante de rigidez obtida na Tabela 6.3, chega-se a uma frequência natural de 192.2 Hz.

Adicionando a massa de 42 g à massa interna da peça 4, totalizou-se 55.3 g referente à massa interna m_2 . Utilizando a Eq. 50 e a constante de rigidez obtida na Tabela 6.3, chega-se a uma nova frequência natural de 394.3 Hz.

6.4. Conceito de Metamateriais aplicados ao Berço de Newton

Com o intuito de analisar a resposta de um sistema composto por um metamaterial sob a ação de uma força impulsiva, aplicou-se o conceito de ressonador simples em uma cadeia de esferas que compõem o Berço de Newton como mostrado na Figura 6.17a. Nesse caso, uma (ou mais) esfera idêntica de massa m ($m_1 = m_2 = m_3 = m$) será substituída por uma esfera oca com um ressonador interno. No caso da Figura 6.17a, a esfera 2 terá a massa da esfera oca $m_2 = 0.7 m$ e a massa interna $m_4 = 0.3 m$, de modo que a massa da esfera 2 total continue a mesma. O ressonador de massa m_4 é conectado à esfera oca de massa m_2 por uma mola considerada sem massa de rigidez k_2 . Pode-se associar a massa da esfera oca à massa do anel externo da célula unitária apresentada, indicado pelo número 1 da Figura 6.17b e à massa m da cadeia de ressonadores apresentada no item 4.2, indicada na Figura 6.17c. O ressonador de massa m_4 pode ser associado à massa interna da célula unitária indicada pelo número 3 da Figura 6.17b e à massa m_2 indicada na Figura 6.17c. A mola de rigidez k_2 é representada pelos três

pontos de ligação do anel externo e da massa interna da Figura 6.17b que varia sua rigidez de acordo com sua geometria.

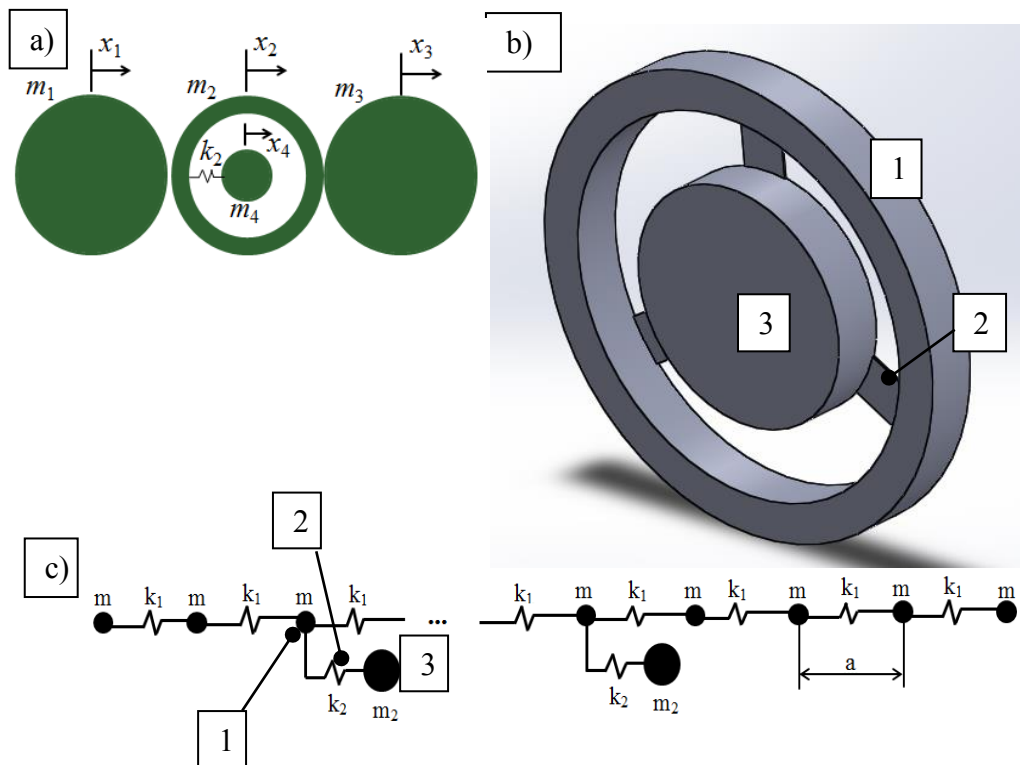


Figura 6.17 – a) Esferas do Berço de Newton com um ressonador b) Célula unitária c) Cadeia de ressonadores

As equações de movimento das três esferas da Figura 6.17a são mostradas na Eq. 51, cujas condições iniciais são: $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = \dot{x}_2 = \dot{x}_3 = \dot{x}_4 = 0$ e $\dot{x}_1 = v_0$, representando o impacto da primeira esfera na cadeia de esferas em repouso.

$$\begin{aligned}
 m_1 \ddot{x}_1 + k_{Hz} \delta_{12}^{1,5} &= 0 \\
 m_2 \ddot{x}_2 - k_{Hz} \delta_{12}^{1,5} + k_{Hz} \delta_{23}^{1,5} + k_2 (x_2 - x_3) &= 0 \\
 m_3 \ddot{x}_3 - k_{Hz} \delta_{23}^{1,5} &= 0 \\
 m_4 \ddot{x}_4 - k_2 (x_2 - x_3) &= 0
 \end{aligned}
 \tag{Eq. 51}$$

Tomando como parâmetro o exemplo mostrado na Figura 2.6 que mostra as velocidades de 3 esferas com a esfera 1 com velocidade de 0.88 m/s, verifica-se que variando a frequência natural através da variação da constante de rigidez k_2 ,

chega-se a um valor mínimo da velocidade final da esfera 3 de 0.699 m/s, como observado na Figura 6.18 quando a frequência de ressonância é de 7000 Hz.

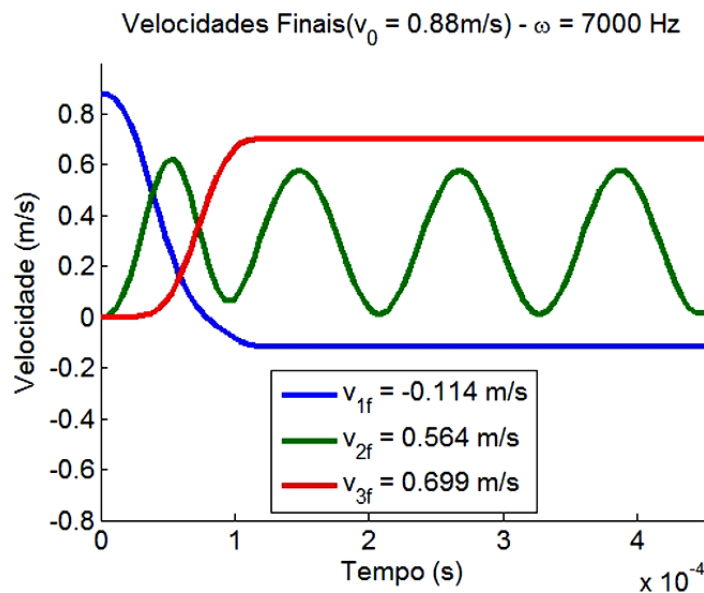


Figura 6.18 – Velocidades de 3 esferas com um ressonador

Comparando agora as forças de contato entre as esferas, semelhante ao que foi feito na Figura 2.7, procedeu-se novamente variando a frequência natural através da variação da constante de rigidez k_2 e chegou-se a um valor mínimo de força de contato entre as esferas 2 e 3 de 967 N quando a frequência natural é de 10200 Hz, como explicitado na Figura 6.19.

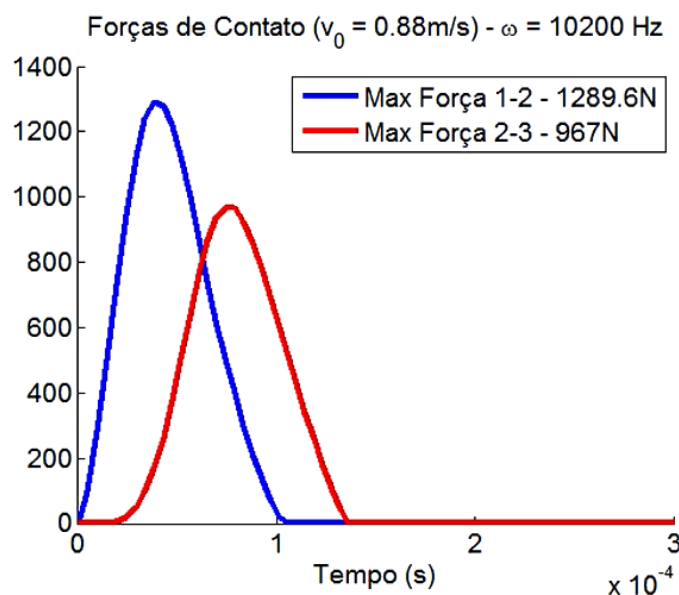


Figura 6.19 – Forças de contato entre esferas com ressonador

Estendendo este conceito para o exemplo desenvolvido no item 3.3, onde as forças de contato entre as 16 esferas da cadeia foram ilustradas na Figura 3.9, apresentando um valor máximo da força de contato entre a 15ª e 16ª esferas de 586.2 N, adicionou-se um ressonador na 10ª esfera semelhante ao descrito na Figura 6.17a e variou-se a frequência de ressonância de 0 até 13 kHz para avaliar qual o menor valor para a força de contato entre a penúltima e a última esfera, obtendo-se um valor de 409.9 N para uma frequência de excitação de 2150 Hz, como mostrado na Figura 6.20.

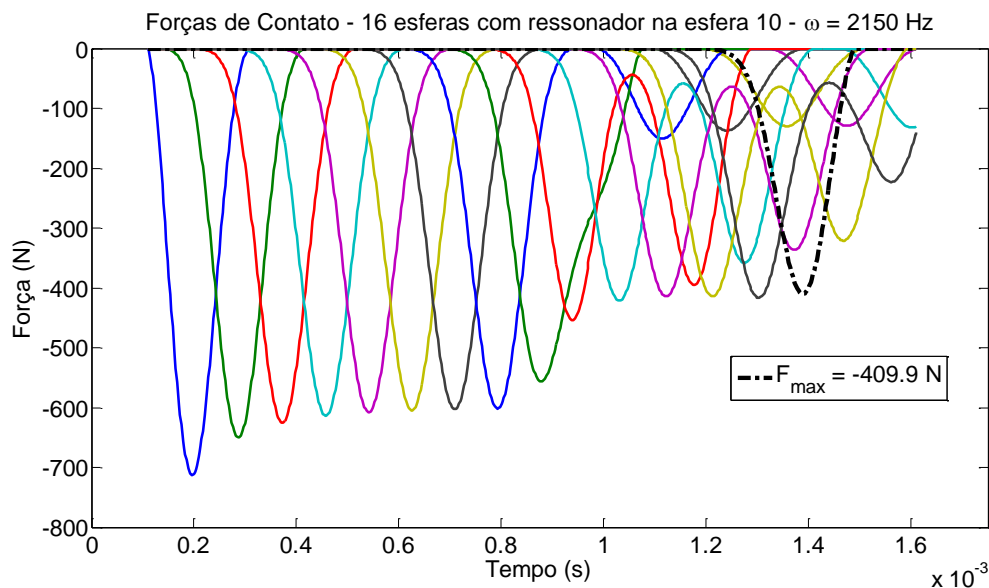


Figura 6.20 – Forças de Contato com um ressonador na 10ª Esfera.

O mesmo procedimento foi feito para 2 ressonadores, na 10ª e 11ª esferas, e o resultado pode ser visto na Figura 6.21. Neste caso, a o menor valor para a força de contato entre a 15ª e a 16ª esferas é de 285.6 N para uma frequência de excitação de 2050 Hz.

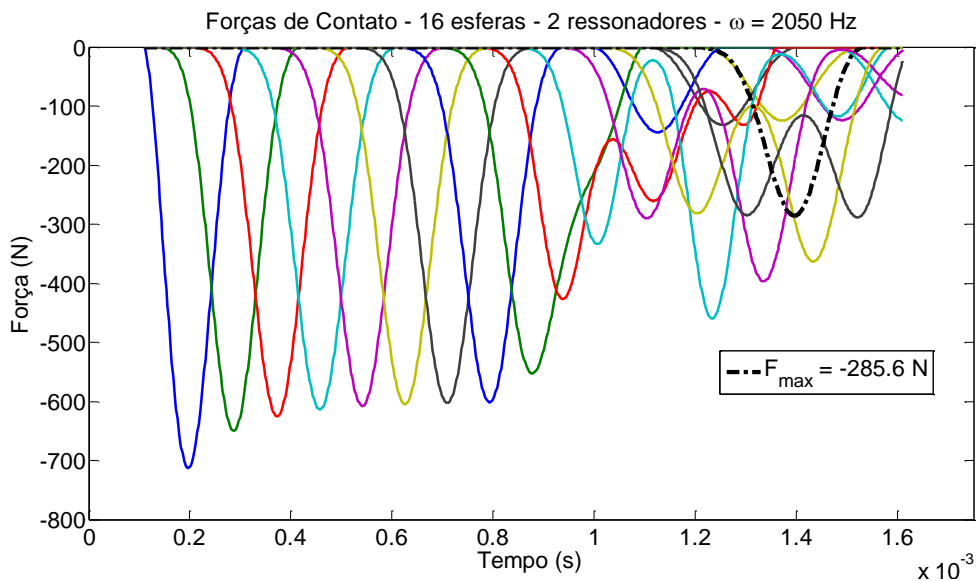


Figura 6.21 – Forças de Contato com dois ressonadores (10^a e 11^a esferas).

Adicionando mais um ressonador, na 12^a esfera, e novamente variando as frequências naturais, obteve-se uma força de contato de 198.6 N entre as últimas esferas da cadeia, como observado na Figura 6.22, para uma frequência de excitação de 1950 Hz.

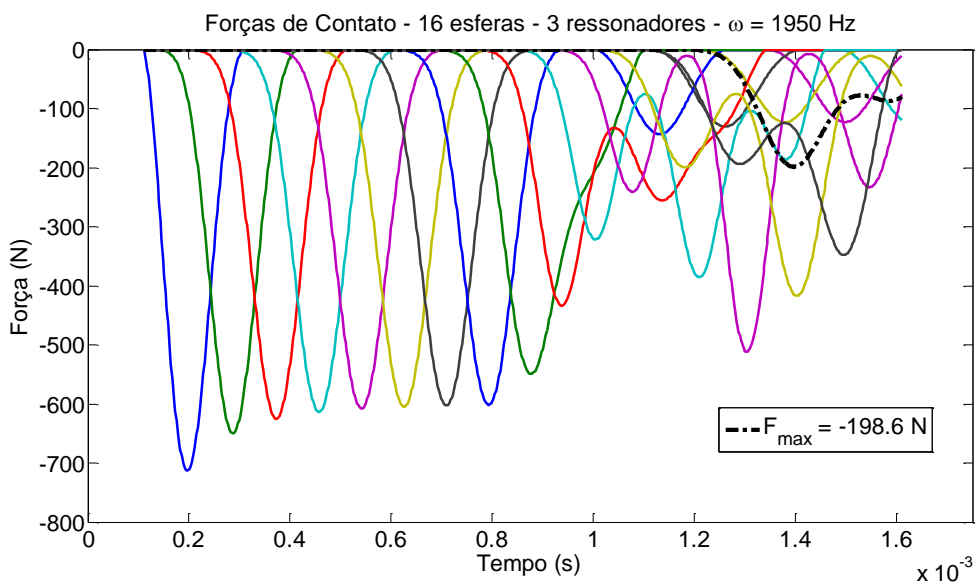


Figura 6.22 – Forças de Contato com três ressonadores (10^a, 11^a e 12^a esferas).

Assim, verifica-se a capacidade do ressonador em atenuar a propagação da onda de tensão em uma cadeia de esferas idênticas. Nota-se que à medida que aumenta-se o número de ressonadores, a atenuação é bem mais significativa.

No próximo capítulo será desenvolvido um aparato experimental baseado na célula unitária proposta neste capítulo.



7. Aparato Experimental

Serão apresentadas duas situações em que um metamaterial composto pelo ressonador proposto é ligado por molas helicoidais e submetido a solicitações dinâmicas. O primeiro caso trata de excitações harmônicas (Seção 7.1) e o segundo caso (Seção 7.2) analisa o sistema sob a ação de uma força impulsiva.

Para a montagem do aparato experimental, foram utilizadas cinco molas com constante de rigidez de 15 kN/m e quatro ressonadores que compõem o conjunto de metamaterial como mostrado na Figura 7.1.

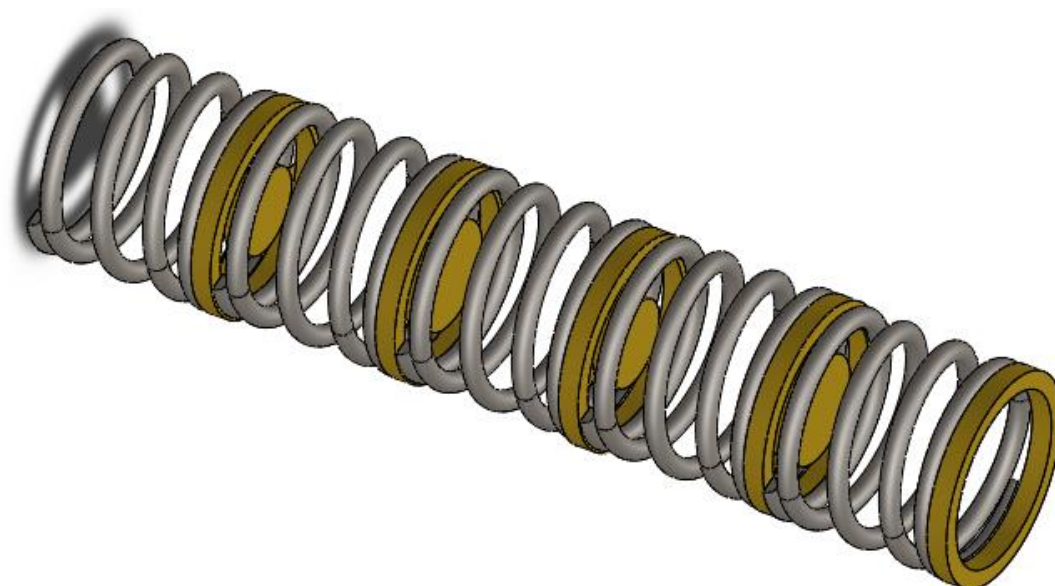


Figura 7.1 – Conjunto montado formando o metamaterial

7.1. Sistema submetido à ação de uma excitação harmônica

O aparato experimental submetido à solicitação harmônica consiste de um excitador de frequências (*shaker*) conectado ao metamaterial proposto. A partir do *shaker*, uma frequência de entrada é ajustada para excitar o metamaterial e a resposta é medida após o sinal passar pelo conjunto, como resumidamente ilustrado na Figura 7.2.

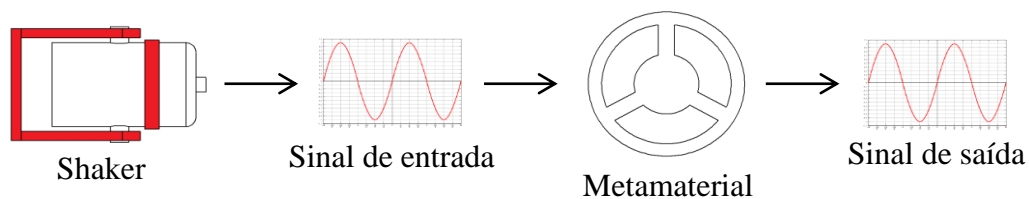


Figura 7.2 – Esquema com dispositivo composto por metamateriais

Para a montagem do experimento, foram utilizadas cinco molas com constante de rigidez de 15 kN/m e quatro ressonadores que compõem o conjunto de metamaterial e esse conjunto é excitado em uma das extremidade pelo *shaker* LDS V201. A união entre o conjunto de molas-ressonadores e o *shaker* foi feita por uma chapa e na outra extremidade do conjunto foi fixado um anel para instalação do acelerômetro, conforme pode ser visto na Figura 7.3 e na Figura 7.4.

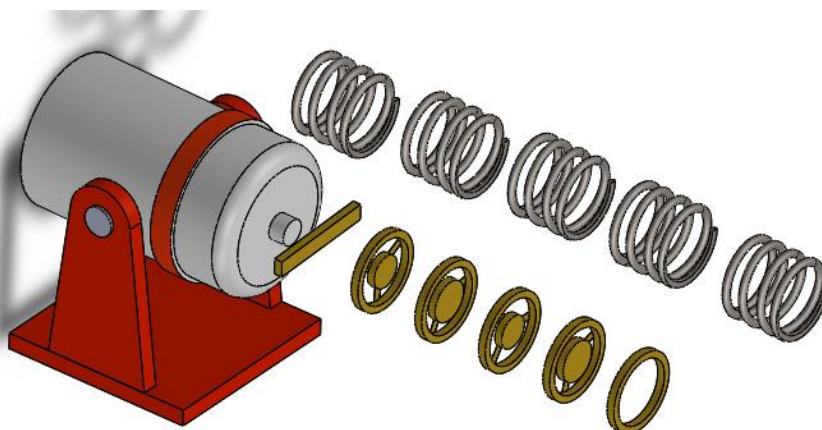


Figura 7.3 – Vista explodida do conjunto

A montagem entre as molas, os ressonadores e a chapa e o anel das extremidades é feita por um adesivo a base de etil-cianoacrilato com tempo de cura previsto de menos de 15s.

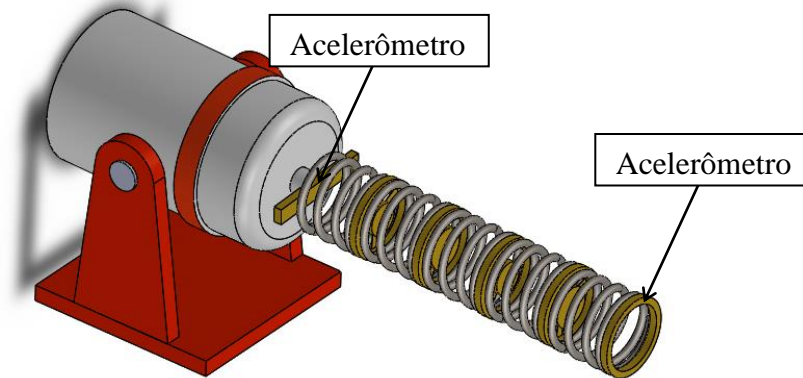


Figura 7.4 – Montagem do conjunto mola-ressonador

Os quatro ressonadores possuem frequências de ressonância e massas conforme descrito na Tabela 7.1.

Tabela 7.1 – Dados reais dos ressonadores

Peça	Frequência natural (Hz)	Massa interna (g)	Rigidez equivalente (N/m)
1	175	13.3	16080
2	195	20.9	31374
4	180	13.3	17012
7	189	20.9	29473

A ordem de montagem dos ressonadores é mostrada na Figura 7.5 e baseado no modelo discreto desenvolvido no Capítulo 4, o conjunto real foi modelado conforme o sistema mostrado na Figura 7.6.

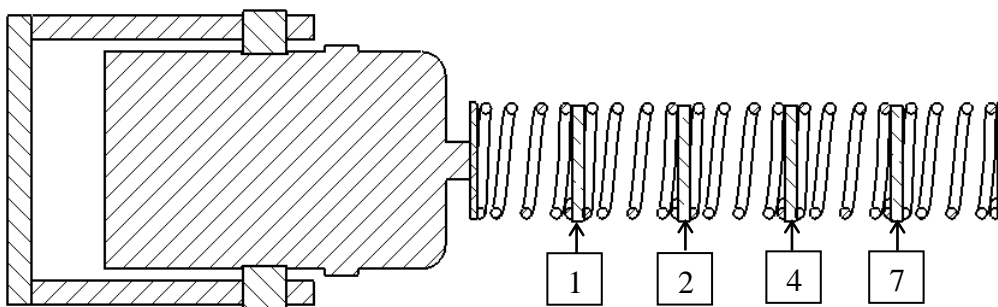


Figura 7.5 – Vista em corte do conjunto

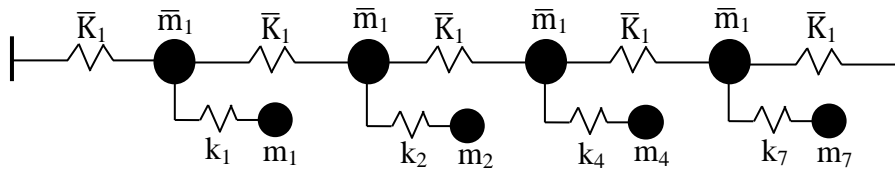


Figura 7.6 – Modelo discreto do conjunto molas-ressonadores

O modelo apresentado na Figura 7.6 é semelhante ao modelo apresentado na Figura 4.6. Naquele Capítulo, foi desenvolvida a equação de dispersão (Eq. 35) novamente reproduzida a seguir:

$$m_1 \omega^4 - \left(4k_1 \text{sen}^2 \left(\frac{qa}{2} \right) + \omega_2^2 (m_2 + m_1) \right) \omega^2 + \omega_2^2 4k_1 \text{sen}^2 \left(\frac{qa}{2} \right) = 0. \quad \text{Eq. 35}$$

A Eq. 35 é desenvolvida a partir de massas idênticas (m_2) e molas com constante de rigidez também idênticas que implicam em frequências naturais iguais (ω_2), o que não corresponde à realidade no aparato experimental.

Em virtude dos valores diferentes dos ressonadores (Tabela 7.1), foram feitas 4 curvas de dispersão conforme mostrado na Figura 7.7, uma para cada ressonador. Pode-se observar que há uma pequena diferença da faixa de *band gap* entre os ressonadores.

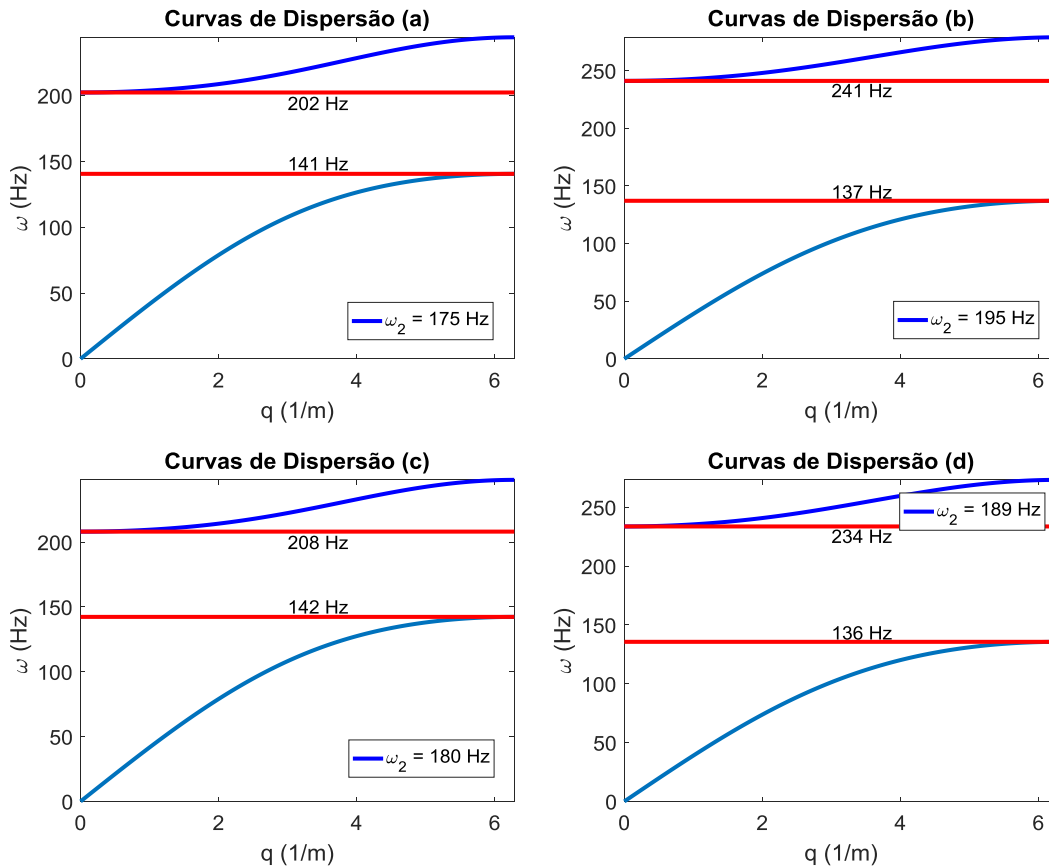


Figura 7.7 – Curvas de Dispersão

Uma simulação do modelo discreto da Figura 7.6 foi feita com os dados reais da Tabela 7.1 utilizando o módulo de perturbação linear e variando a frequência de excitação de 0 a 250 Hz. O módulo da amplitude do deslocamento da chapa conectada na extremidade do conjunto de metamateriais em função da frequência é apresentado na Figura 7.8.

Foi destacada a faixa de frequência entre 142 Hz e 202 Hz obtida pelo menor intervalo entre os valores obtidos a partir das Curvas de Dispersão das Figura 7.7-*a*, *b*, *c* e *d*.

Nota-se que aproximadamente nesta faixa ocorre o *band gap* para o modelo simulado e esta pequena divergência é em função das massas dos ressonadores e suas constantes de rigidez não serem exatamente iguais, ou seja, as frequências de ressonância não são todas iguais.

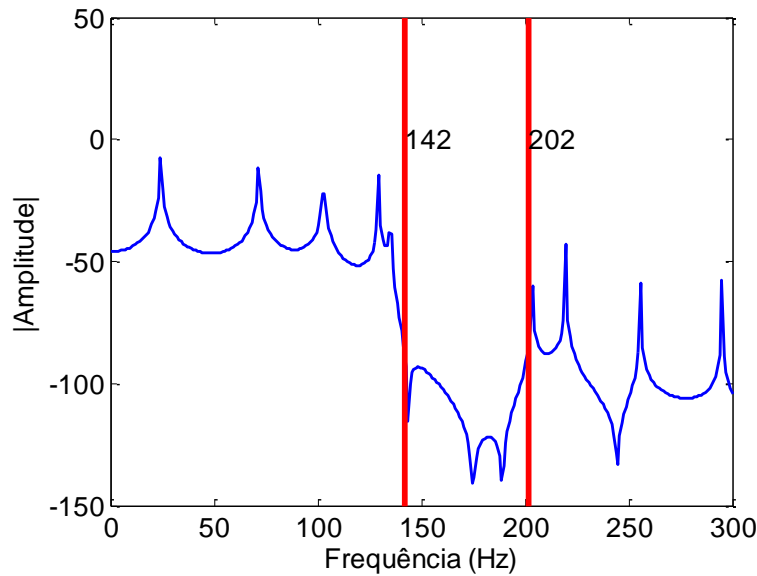


Figura 7.8 – Resposta em frequência da massa 4

A transmitância $T = |\bar{X}_N/\bar{X}_0|$ também pode ser calculada de maneira semelhante ao desenvolvimento feito pelas Eq. 38 e Eq. 39 no Capítulo 4 e reproduzidas a seguir.

$$T = \left| \prod_{n=1}^N T_n \right|, \quad \text{Eq. 38}$$

onde $T_n = \bar{X}_n/\bar{X}_{n-1}$ é dada pela relação

$$T_n = \frac{K}{K(2 - T_{n+1}) - \omega^2 m_{eff}}, \quad n = 1, 2, \dots, N \quad \text{Eq. 39}$$

Com $T_{N+1} = 1$. Entretanto, como as massas dos ressonadores são diferentes, a massa efetiva m_{eff} apresentada na Eq. 28 também será diferente para cada ressonador, e será considerada, dessa forma, uma massa efetiva m_{eff_i} com $i = 1, 2, 4$ e 7 conforme Eq. 52.

$$m_{eff_i} = \left(\bar{m}_1 + \frac{\omega_{2_i}^2 m_i}{\omega_{2_1}^2 - \omega^2} \right) \quad \text{Eq. 52}$$

Com isso, a Eq. 39 torna-se

$$T_n = \frac{K}{K(2 - T_{n+1}) - \omega^2 m_{eff_i}}, n = 1, 2, \dots, N, \quad \text{Eq. 53}$$

também com $T_{N+1} = 1$.

Aplicando a Eq. 53 e a Eq. 38, chega-se ao gráfico de transmitância apresentado na Figura 7.9 e em de forma detalhada na Figura 7.10. Conclui-se que entre 174 e 227 Hz ocorre uma redução considerável da transmitância, chegando a valores mínimos nas proximidades de 195 Hz.

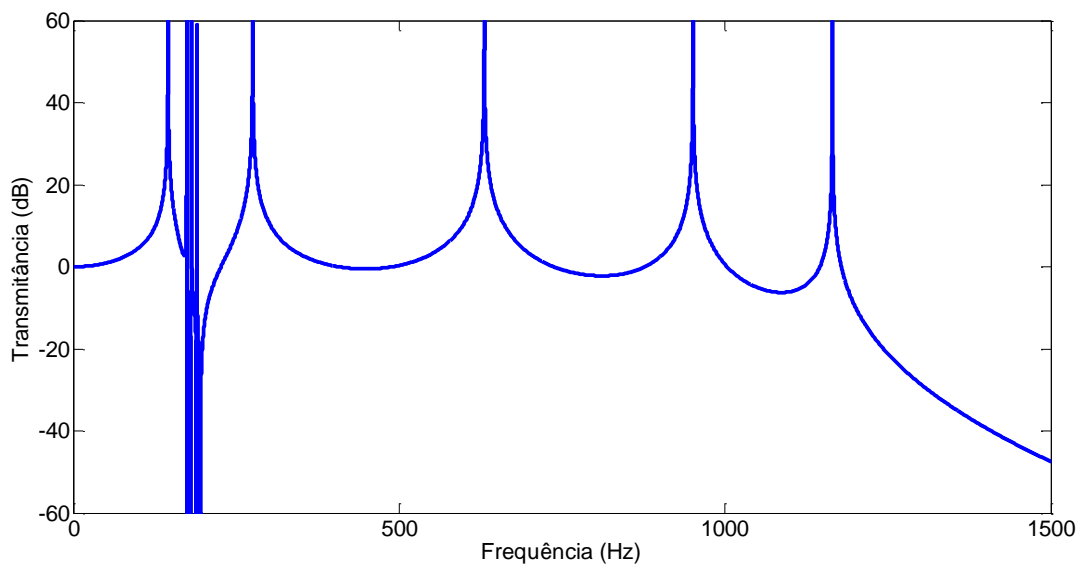


Figura 7.9 – Transmitância

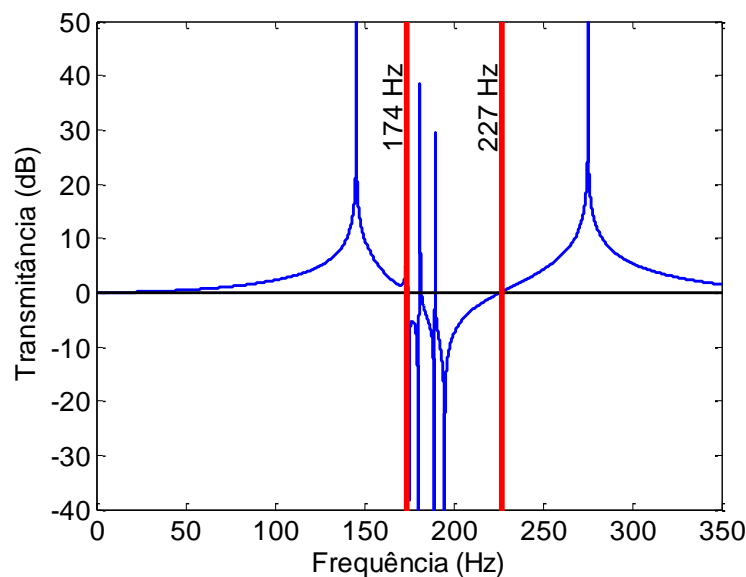


Figura 7.10 – Detalhamento da Transmitância

A seguir é mostrado o conjunto montado com os acelerômetros no início e no final do conjunto. Para garantir que não haja influência da gravidade e nem atritos, o conjunto é mantido suspenso por fios na horizontal, como mostrado na Figura 7.11.



Figura 7.11 – Montagem do experimento

Os acelerômetros utilizados são piezoelétricos da marca Endevco, modelo 25B ISOMIN e foi feita uma varredura de 5 Hz a 400 Hz durante 3 s para realização das medições.

Uma segunda medição foi feita posicionando o acelerômetro no anel externo do último ressonador, ou seja, foi medida a saída considerando apenas três ressonadores, como mostrado na Figura 7.12.



Figura 7.12 – Medição considerando três ressonadores

As respostas obtidas podem ser visualizadas na Figura 7.13. Os sinais são mostrados em termos dos módulos das amplitudes, em decibéis. O sinal de entrada (sem ressonadores), mostrado na cor preta, representa a resposta do *shaker*. A curva azul mostra a resposta do sistema considerando apenas três ressonadores como a montagem apresentada na Figura 7.12 e a curva vermelha apresenta a resposta do sinal de saída considerando os quatro ressonadores, conforme conjunto montado na Figura 7.11.

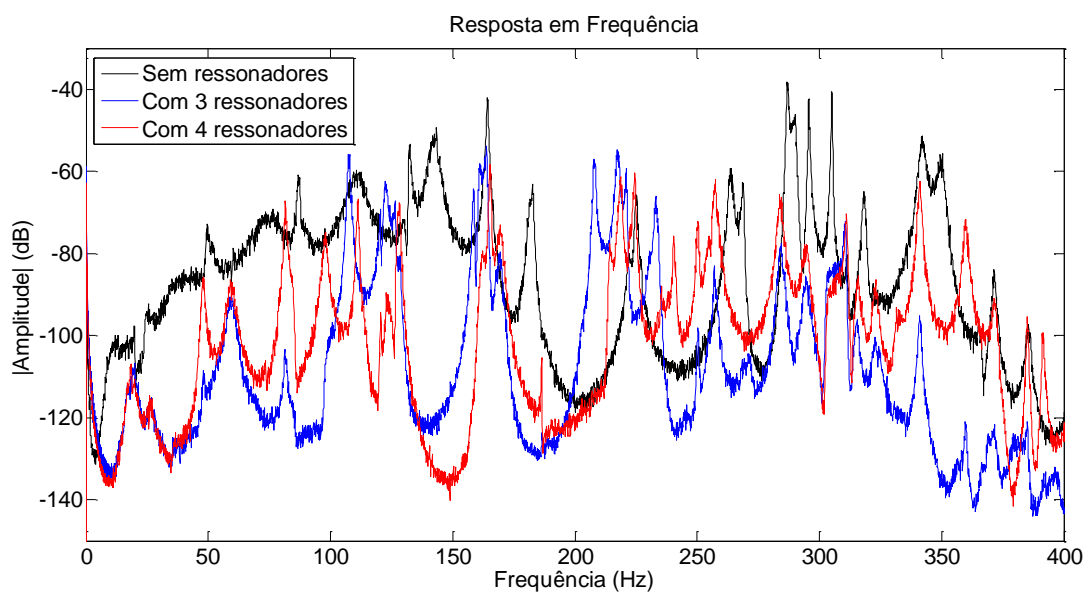


Figura 7.13 – Resposta em frequência

A Figura 7.14 destaca apenas os sinais de entrada e de saída quando a medição é feita considerando os quatro ressonadores.

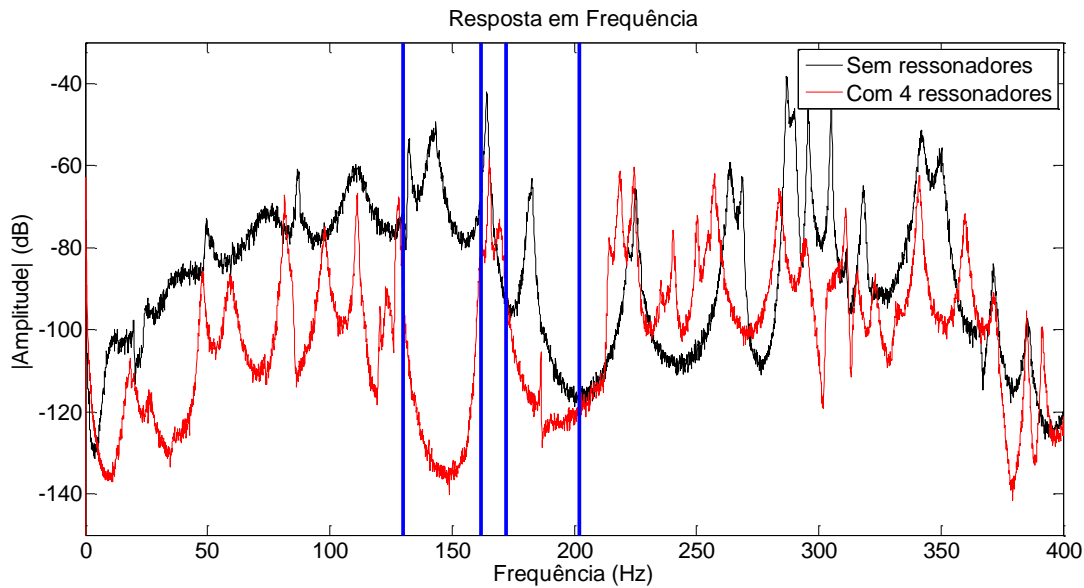


Figura 7.14 – Faixas de redução experimental do sistema

Nota-se que há duas faixas de frequência que apresentam considerada redução em relação ao sinal de entrada. A primeira faixa é de 130 a 162 Hz e a segunda é de 172 a 202 Hz. Ajustando a escala da resposta do sistema obtida pelo modelo numérico (Figura 7.8) e comparando com os resultados experimentais, chega-se à Figura 7.15.

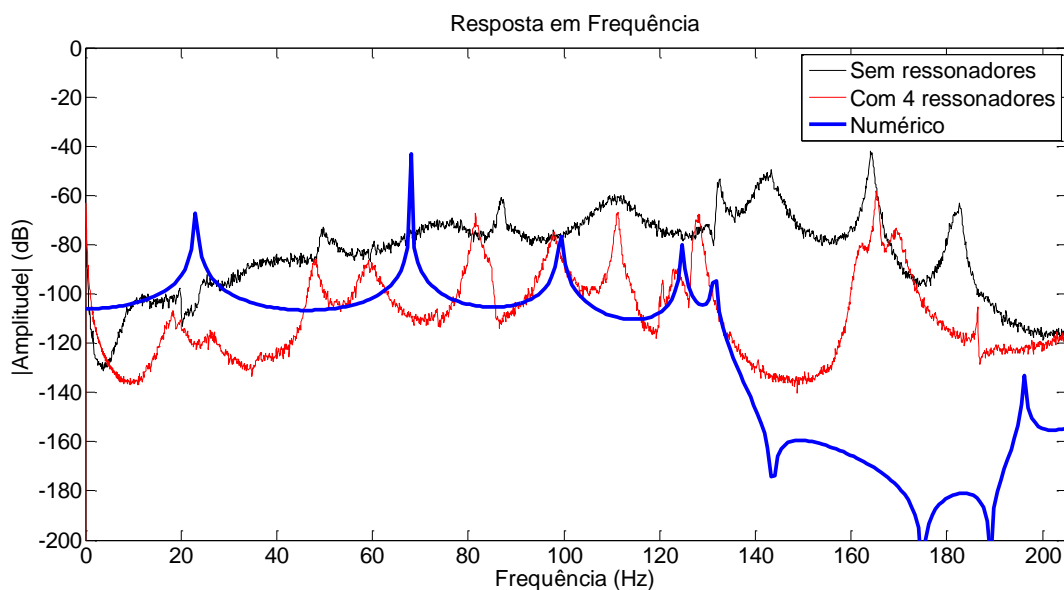


Figura 7.15 – Resposta do sistema experimental e numérico

Observa-se que o comportamento do resultado obtido numericamente é bom com relação ao obtido experimentalmente, porém a banda do resultado experimental é muito menor em função das características do sistema real que não são levadas em consideração no modelo numérico.

7.2. Sistema submetido à ação de um impacto

Para o experimento de um sistema submetido à ação de uma força impulsiva, foi feita uma adaptação no experimento mostrado na Figura 7.12. O *shaker* é substituído por um martelo composto por uma massa presa por uma haste fixa em sua extremidade por rolamentos que permitem ao conjunto haste-martelo girar livremente. Este será chamado *Martelo 1*. Ao fim do conjunto de massas-molas está posicionado outro martelo, chamado *Martelo 2*, que é semelhante ao *Martelo 1*, como mostrado na Figura 7.17. O *Martelo 1* é a entrada do sistema, ou seja, ele que será responsável por imprimir no sistema a força de impacto e o *Martelo 2* é a saída do sistema.

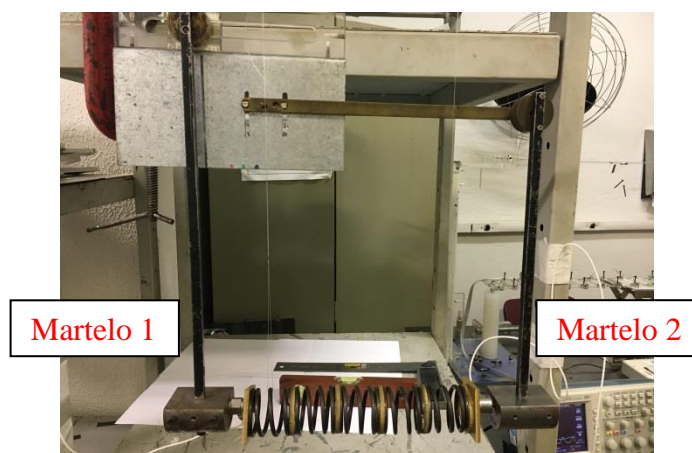


Figura 7.16 – Experimento sob ação de impacto

Na extremidade do *Martelo 1* está fixado o *Sensor 1*, que é um sensor de força PCB, modelo 208C04 SN 27063, com sensibilidade de 1124 mV/kN e faixa de medição de 4448 N e na saída, preso ao *Martelo 2*, está o *Sensor 2*, outro sensor de força PCB, modelo 208C03 SN 27576, com sensibilidade de 2248 mV/kN e faixa de medição de 2225 N, como mostrado na Figura 7.17.

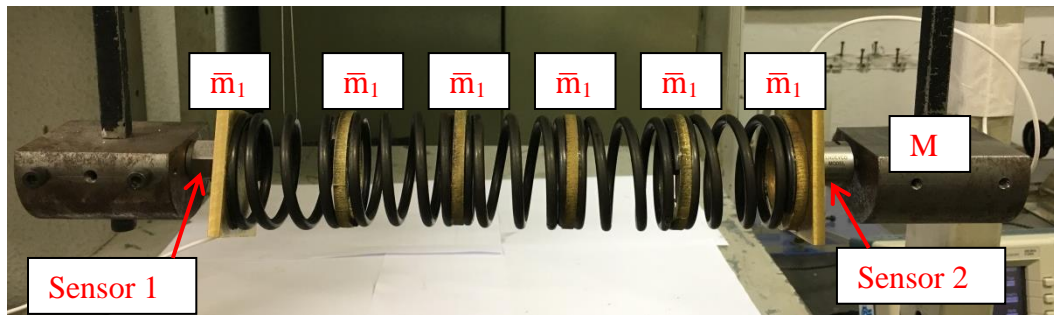


Figura 7.17 – Detalhe do experimento sob ação de impacto

As massas \bar{m}_1 são compostas por anéis feitos latão, mesmo material utilizados nos ressonadores desenvolvidos no Capítulo 4. Essas massas estão conectadas pelas molas de rigidez \bar{K}_1 e o modelo discreto do sistema experimental é mostrado esquematicamente na Figura 7.18. O Martelo 2 é representado pela massa M e está inicialmente em contato com a última massa da cadeia.

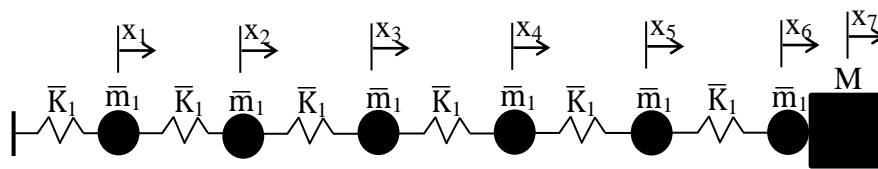


Figura 7.18 – Modelo discreto do conjunto molas-massas

O sistema de equações de movimento que regem o sistema do modelo da Figura 7.18 é apresentado na Eq. 54.

$$\begin{aligned}
 \bar{m}_1 \ddot{x}_1 + \bar{K}_1(x_1 - x_2) + \bar{K}_1 x_1 &= 0 \\
 \bar{m}_1 \ddot{x}_2 - \bar{K}_1(x_1 - x_2) + \bar{K}_1(x_2 - x_3) &= 0 \\
 \bar{m}_1 \ddot{x}_3 - \bar{K}_1(x_2 - x_3) + \bar{K}_1(x_3 - x_4) &= 0 \\
 \bar{m}_1 \ddot{x}_4 - \bar{K}_1(x_3 - x_4) + \bar{K}_1(x_4 - x_5) &= 0 \\
 \bar{m}_1 \ddot{x}_5 - \bar{K}_1(x_4 - x_5) + \bar{K}_1(x_5 - x_6) &= 0 \\
 \bar{m}_1 \ddot{x}_6 - \bar{K}_1(x_5 - x_6) + F_{ct} &= 0 \\
 M \ddot{x}_7 - F_{ct} &= 0
 \end{aligned}
 \tag{Eq. 54}$$

A força de contato, F_{ct} , entre a última massa (coordenada x_6) e a massa M , é semelhante ao modelo proposto por Hunt e Crossley (1975), explicitado na Eq. 44, já discutida no Capítulo 5 e transcrita novamente a seguir:

$$F_{ct}(\delta, \dot{\delta}) = -k_c \delta^{n_c} - c_c \delta^{n_c} \dot{\delta} = -k_c \delta^{n_c} (1 + \lambda_c \dot{\delta}) \text{ sendo } \lambda_c = \frac{c_c}{k_c} \quad \text{Eq. 44}$$

onde δ é a deformação da região de contato definida como $(x_6 - x_7)$, $\dot{\delta}$ é a velocidade de deformação, ou seja, $\dot{\delta} = (\dot{x}_6 - \dot{x}_7)$, k_c é a rigidez de contato, c_c um amortecimento viscoso e λ_c um coeficiente de proporcionalidade. O expoente n_c depende das características geométricas em torno da superfície de contato.

Como foi explicado, a força de contato F_{ct} só atuará no sistema quando os valores δ e $\dot{\delta}$ forem negativos. Para $\delta > 0$, a força de contato F_{ct} vale zero.

Novamente os parâmetros utilizados para simular a força de contato são semelhantes aos valores utilizados por Aguiar (2006).

As condições iniciais do conjunto de equações de movimento (Eq. 54) são: $x_i = 0$ ($i=1, 2, \dots, 7$), $\dot{x}_1 = v_0$ e $\dot{x}_i = 0$ ($i= 2, 3, \dots, 7$). Ou seja, a perturbação do sistema é dada pela velocidade inicial da massa \bar{m}_1 correspondente à coordenada x_1 . Esta velocidade inicial é obtida pelo impacto gerado pelo *Martelo 1* na massa \bar{m}_1 (coordenada x_1) e a partir do perfil da força obtida experimentalmente pelo *Sensor 1*, isto é, pela área correspondente ao impulso, obtém-se a variação da quantidade de movimento e conseqüentemente a velocidade inicial da massa \bar{m}_1 , como mostrado na Eq. 55.

$$\int_{t_0}^{t_1} F(t) dt = \bar{m}_1 \cdot v_0 \quad \text{Eq. 55}$$

A Figura 7.19 mostra os resultados numérico e experimental da força de contato F_{ct} entre a massa \bar{m}_1 (coordenada x_6) e a massa M do *Martelo2* (coordenada x_7), além do sinal de entrada do *sensor 1* fixo no *Martelo1*.

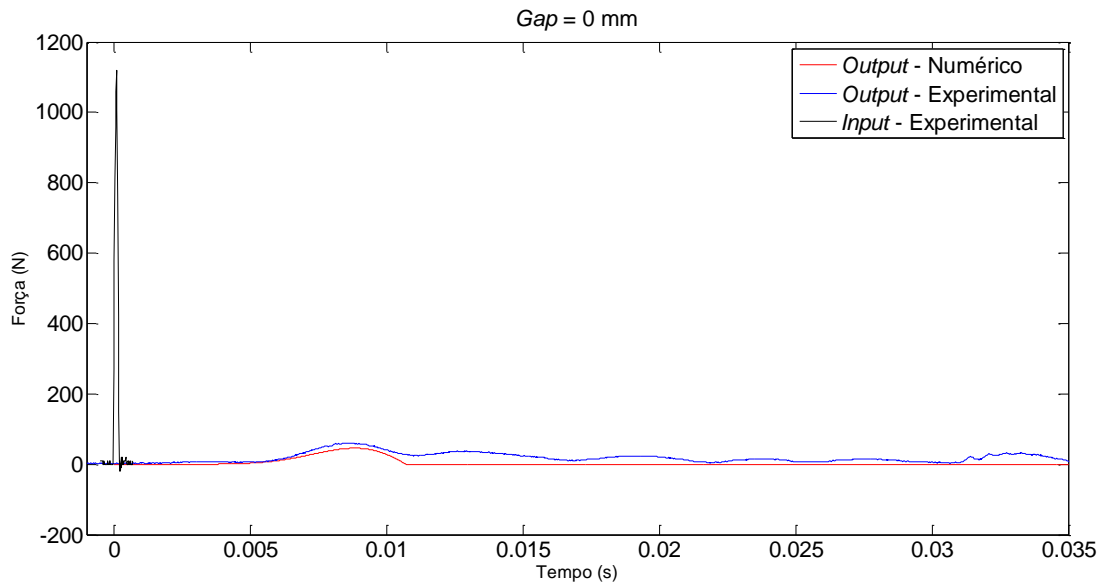


Figura 7.19 – Resultados numérico e experimental do sensor 1 e 2

A Figura 7.20 mostra em detalhe o sinal de entrada do *sensor 1* fixo no *Martelo1* obtido experimentalmente e uma tentativa de se aproximar este perfil numericamente. A força de impacto de entrada numericamente, F_{num} , a partir da função de distribuição Normal, onde a sua função densidade de probabilidade é dada por:

$$F_{\text{num}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\left[\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2\right]}, \quad \text{Eq. 56}$$

com $\sigma = 4.6 \cdot 10^{-5}$ e $\mu = 1.25 \cdot 10^{-4}$. Assim, observa-se um pico de força de 1120 N do impacto de entrada e uma duração de impacto de $0.22 \cdot 10^{-3}$ s.

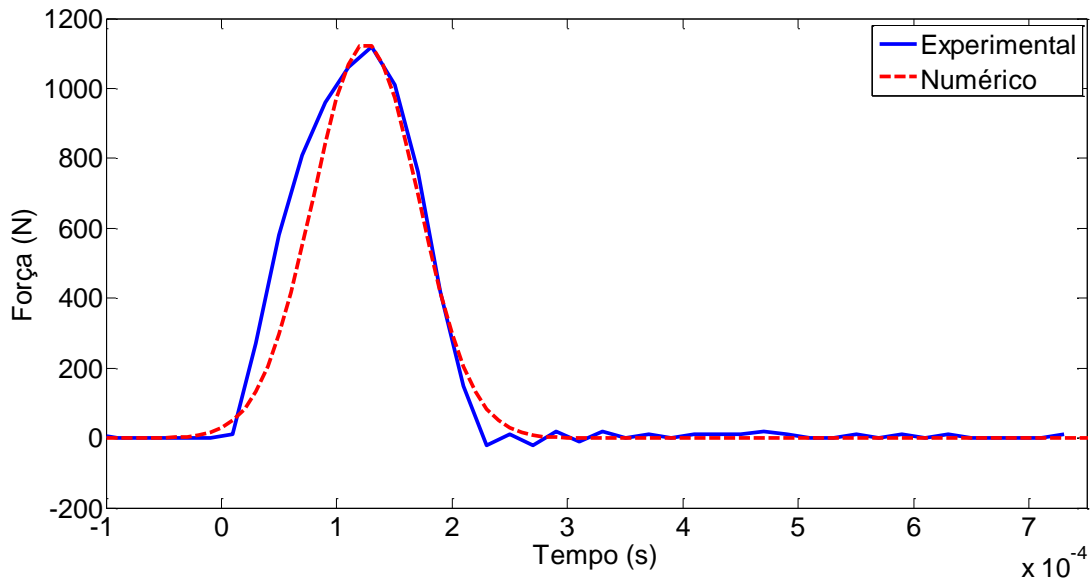


Figura 7.20 – Detalhe do resultado experimental do sensor 1

Em detalhe, a Figura 7.21 mostra os resultados numérico (a partir do sistema de equações mostrados na Eq. 54) e experimental do *sensor 2*. Observa-se que há uma boa concordância no início do perfil da força, com uma pequena diferença da amplitude máxima. A parte final do perfil do resultado experimental possui uma diferença com relação ao numérico em função do repique do martelo que é capturado pela sensibilidade do sensor de força utilizado.

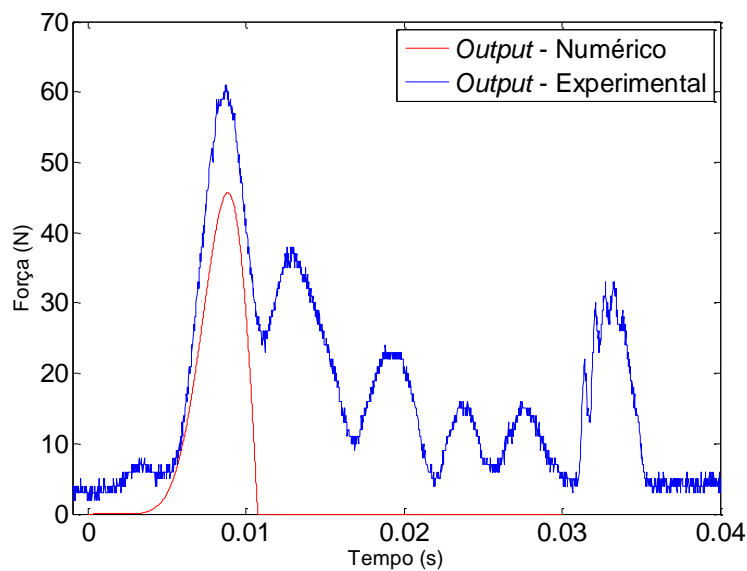


Figura 7.21 – Detalhe dos resultados numérico e experimental do sensor 1 e 2

Foi observado, tanto experimentalmente quanto numericamente, que quando a última massa \bar{m}_1 não está em contato com o *Martelo2*, a resposta no sistema é bem diferente da mostrada na Figura 7.19 e na Figura 7.21. O modelo que representa esse sistema é mostrado na Figura 7.22. Destaca-se o *gap* entre as massas \bar{m}_1 (coordenada x_6) e a massa M .

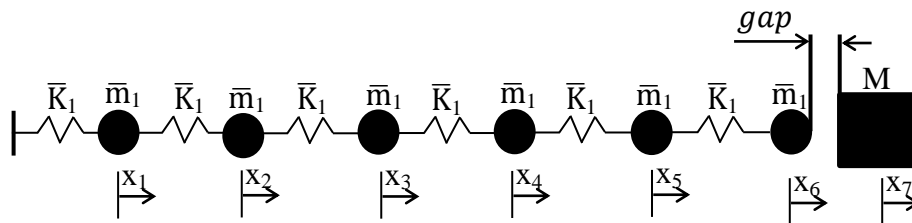


Figura 7.22 – Modelo discreto do conjunto com *gap*

A deformação da região de contato que foi definida como $\delta = (x_6 - x_7)$, agora passa a levar em consideração o *gap* e assume-se que a deformação da região de contato é $\delta = (x_6 - (x_7 + \text{gap}))$. A velocidade de deformação, $\dot{\delta}$, permanece inalterada, ou seja, $\dot{\delta} = (\dot{x}_6 - \dot{x}_7)$. A formulação restante referente à força de contato, F_{ct} , (Eq. 44) permanece inalterada.

Para um *gap* de 1 mm, obtém-se os resultados apresentados na Figura 7.23. Nota-se uma excelente concordância entre os resultados numéricos e experimentais nesse caso, novamente com uma pequena diferença entre as amplitudes máximas da força de saída (*output*) pelos motivos já explicados acima, além da massa da mola não ser desprezível e sua rigidez não ser a mais adequada.

Devido à dificuldade de se precisar na prática o valor do *gap*, optou-se por não fazer a comparação do sistema com e sem ressonadores por conta da falta de confiabilidade nesta medida.

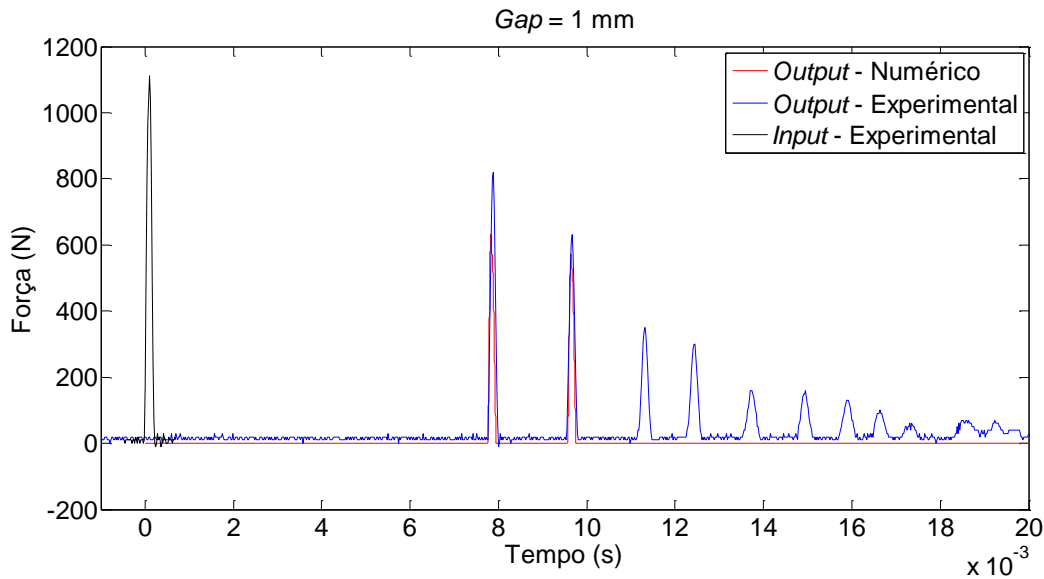


Figura 7.23 – Resultados numérico e experimental do sensor 1 e 2 com *gap* de 1 mm

Quando as massas \bar{m}_1 estão conectadas aos ressonadores, o modelo discreto, considerando um *gap* igual a zero, pode ser representado pelo esquema mostrado na Figura 7.24.

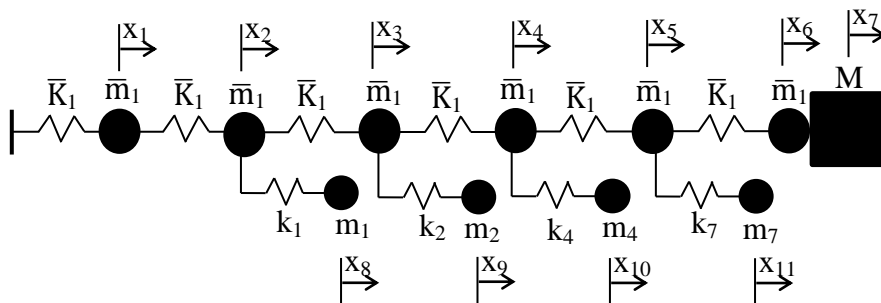


Figura 7.24 – Modelo discreto do conjunto molas-massas-ressonadores

O conjunto de equações que representam o modelo da Figura 7.24 é mostrado na Eq. 57.

$$\begin{aligned}
 \bar{m}_1 \ddot{x}_1 + \bar{K}_1(x_1 - x_2) + \bar{K}_1 x_1 &= 0 \\
 \bar{m}_1 \ddot{x}_2 - \bar{K}_1(x_1 - x_2) + \bar{K}_1(x_2 - x_3) + k_1(x_2 - x_8) &= 0 \\
 \bar{m}_1 \ddot{x}_3 - \bar{K}_1(x_2 - x_3) + \bar{K}_1(x_3 - x_4) + k_2(x_3 - x_9) &= 0 \\
 \bar{m}_1 \ddot{x}_4 - \bar{K}_1(x_3 - x_4) + \bar{K}_1(x_4 - x_5) + k_4(x_4 - x_{10}) &= 0 \\
 \bar{m}_1 \ddot{x}_5 - \bar{K}_1(x_4 - x_5) + \bar{K}_1(x_5 - x_6) + k_7(x_5 - x_{11}) &= 0
 \end{aligned}
 \tag{Eq. 57}$$

$$\begin{aligned}\bar{m}_1 \ddot{x}_6 - \bar{K}_1(x_5 - x_6) + F_{ct} &= 0 \\ M \ddot{x}_7 - F_{ct} &= 0 \\ m_1 \ddot{x}_8 - k_1(x_2 - x_8) &= 0 \\ m_2 \ddot{x}_9 - k_2(x_3 - x_9) &= 0 \\ m_4 \ddot{x}_{10} - k_4(x_4 - x_{10}) &= 0 \\ m_7 \ddot{x}_{11} - k_7(x_5 - x_{11}) &= 0\end{aligned}$$

As condições iniciais do conjunto de equações de movimento do sistema com ressonadores (Eq. 57) são: $x_i = 0$ ($i=1, 2, \dots, 11$), $\dot{x}_1 = v_0$ e $\dot{x}_i = 0$ ($i= 2, 3, \dots, 11$). A velocidade inicial v_0 é obtida de maneira semelhante ao explicado anteriormente utilizando a Eq. 55.

Resolvendo os conjuntos de equações (Eq. 54 e Eq. 57) pelo método de Runge-Kutta de quarta ordem, é possível determinar o comportamento dos sistemas. A Figura 7.25 mostra a força de saída, que é a força de contato entre a última massa da cadeia (coordenada x_6) e a massa do *Martelo 2*, massa M , para o modelo com ressonadores (vermelho) e sem ressonadores (azul).

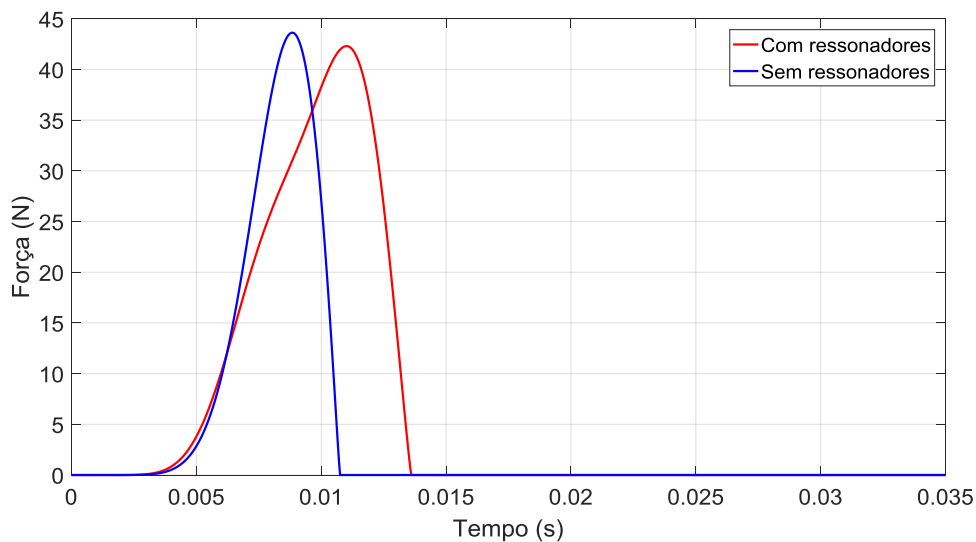


Figura 7.25 – Comparação da força de contato de saída

Nota-se que não há uma diferença significativa na amplitude máxima das forças com e sem ressonadores, apesar de uma boa concordância na parte inicial das curvas.

Os resultados experimentais com e sem ressonadores podem ser vistos na Figura 7.26. Também nota-se boa concordância no início das curvas e um ruído após o pico máximo em ambos os casos.

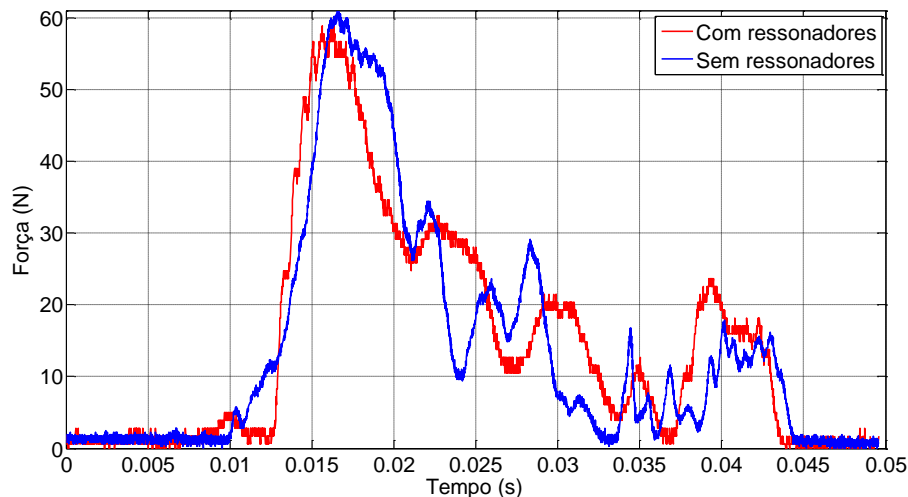


Figura 7.26 – Comparação experimental do sistema com e sem ressonadores

A Figura 7.27 mostra os resultados numéricos e experimentais dos modelos com e sem ressonadores. Pode ser observada uma diferença significativa entre o numérico e experimental. Acredita-se que essa diferença seja em função de diversos fatores, como, por exemplo, o sensor utilizado ser um sensor de força e não propriamente um sensor de impacto, as massas da mola não serem desprezíveis quando comparada com as massas do ressonador e do anel externo (\bar{m}_1), mudanças significativas na montagem do sistema com e sem ressonadores já que entre um ensaio e outro desmonta-se completamente o conjunto sem ressonadores e monta-se novamente com novas peças. Entretanto, acredita-se que o principal fator que justifica a não atenuação do sinal do sistema com ressonadores quando comparado com o sistema sem ressonadores seja o número de ressonadores insuficiente para promover a mitigação necessária.

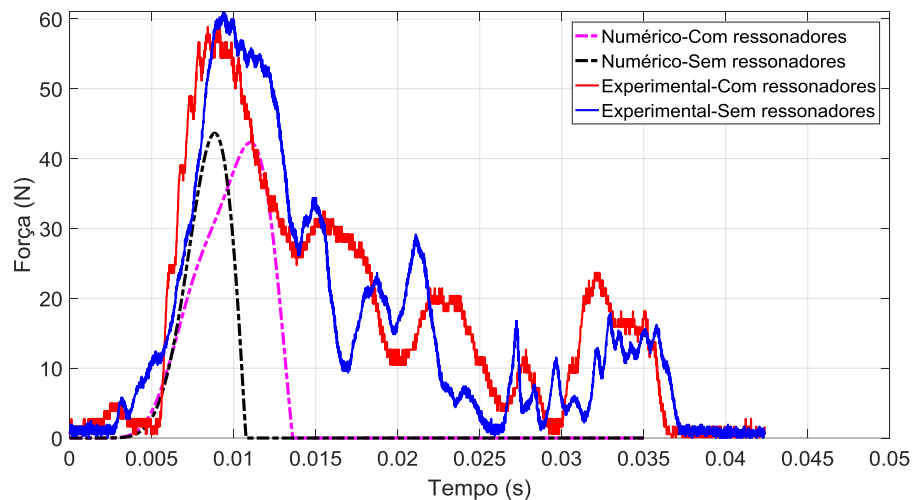


Figura 7.27 – Comparação numérico/experimental com e sem ressonadores

Portanto, conclui-se que para o sistema submetido à ação harmônica, é observada uma redução na amplitude do deslocamento na saída do sistema. Já para o sistema submetido à ação impulsiva, a atenuação não é observada, porém percebe-se uma boa concordância entre o modelo numérico e os dados experimentais obtidos, mesmo com a dificuldade em se definir exatamente o valor do *gap*.

No capítulo a seguir, será feita a modelagem numérica de uma possível aplicação dos metamateriais em um sistema de recuo.

8. Modelagem Numérica de uma Possível Aplicação

Como exemplo de aplicação de metamateriais em um sistema de recuo, foi idealizado o conjunto montado conforme Figura 8.1. O objetivo é comparar o resultado da força de ancoragem do tubo, como feito no item 5.5. Como apresentado naquele item, o tubo com peso M de 5600 kg corresponde a um tubo de um obuseiro de 155 mm (Figura 5.1) de calibre e é considerado, simplificada, como fixo no ponto P por um sistema mola-amortecedor e deslocando-se apenas na horizontal. Ao tubo, são adicionados dois conjuntos de metamateriais a e b dispostos como mostrado na Figura 8.1.

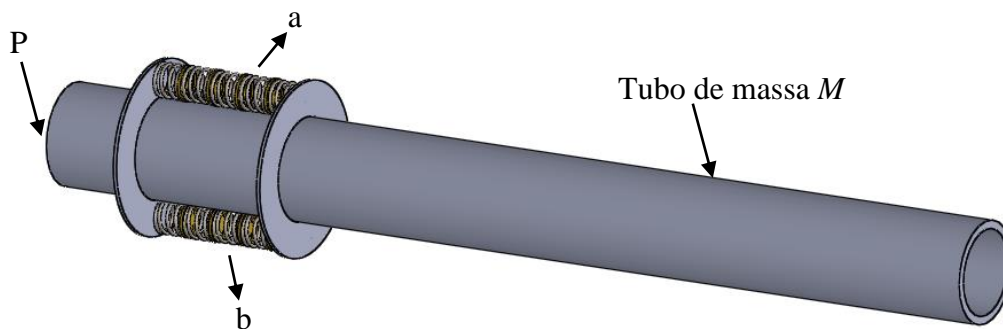


Figura 8.1 – Tubo com conjunto de metamateriais

O modelo da Figura 8.1 pode ser simplificado pelo modelo representado na Figura 8.2, onde somente um conjunto é mostrado. Os conjuntos de metamateriais a e b são compostos por quatro ressonadores e uma massa em contato com a parede solidária ao tubo A . Cada conjunto (a e b) possui massas m_{i1} e m_{i2} , com $i = a$ e b . As massas m_{i1} são conectadas entre si por molas de rigidez k_{i1} e as massas m_{i2} são conectadas às massas m_{i1} por molas de rigidez k_{i2} , como mostrado na Figura 8.2. Os deslocamentos das massas m_{i1} são definidos pelas grandezas x_{ij} , com $i = a, b$ e $j = 1, 2, 3, 4$ e 5 e os deslocamentos das massas m_{i2} são definidos pelas grandezas $x_{ij'}$, novamente com $i = a, b$, mas com $j' = 2, 3, 4$ e 5.

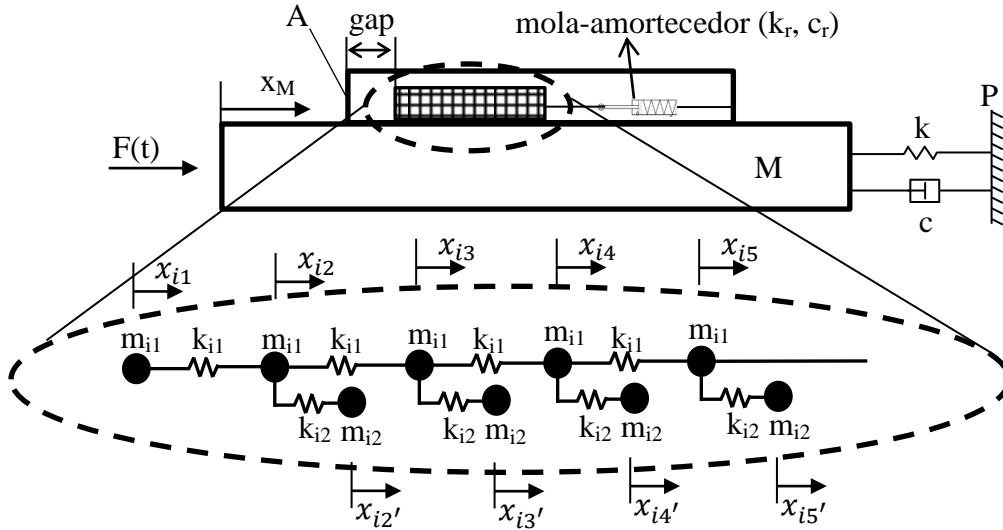


Figura 8.2 – Modelo proposto com metamateriais

As equações de movimento do sistema apresentado na Figura 8.2 são apresentadas na Eq. 58:

$$\begin{aligned}
 M\ddot{x}_M + kx_M + c\dot{x}_M + \sum_{i=a}^b [k_r(x_M - x_{i5}) + c_r(\dot{x}_M - \dot{x}_{i5}) - F_{ct_i}] &= 0 \\
 m_{i1}\ddot{x}_{i1} + k_{i1}(x_{i1} - x_{i2}) + F_{ct_i} &= 0 \\
 m_{i1}\ddot{x}_{i2} + k_{i1}(x_{i2} - x_{i3}) - k_{i1}(x_{i1} - x_{i2}) + k_{i2}(x_{i2} - x_{i2}') &= 0 \\
 m_{i1}\ddot{x}_{i3} + k_{i1}(x_{i3} - x_{i4}) - k_{i1}(x_{i2} - x_{i3}) + k_{i2}(x_{i3} - x_{i3}') &= 0 \\
 m_{i1}\ddot{x}_{i4} + k_{i1}(x_{i4} - x_{i5}) - k_{i1}(x_{i3} - x_{i4}) + k_{i2}(x_{i4} - x_{i4}') &= 0 \\
 m_{i1}\ddot{x}_{i5} - k_r(x_M - x_{i5}) - c_r(\dot{x}_M - \dot{x}_{i5}) + k_{i2}(x_{i5} - x_{i5}') &= 0 \\
 m_{i2}\ddot{x}_{i2}' - k_{i2}(x_{i2} - x_{i2}') &= 0 \\
 m_{i2}\ddot{x}_{i3}' - k_{i2}(x_{i3} - x_{i3}') &= 0 \\
 m_{i2}\ddot{x}_{i4}' - k_{i2}(x_{i4} - x_{i4}') &= 0 \\
 m_{i2}\ddot{x}_{i5}' - k_{i2}(x_{i5} - x_{i5}') &= 0
 \end{aligned}
 \tag{Eq. 58}$$

As condições iniciais são: $x_M(0) = v_0$, $x_{ij}(0) = \dot{x}_{ij}(0) = x_{ij}'(0) = \dot{x}_{ij}'(0) = 0$, para $i = a$ e b e $j = 1$ a 5 e a força de contato F_{ct_i} utilizada é semelhante ao modelo proposto por Hunt e Crossley (1975), já explicitado na Eq. 44 no item 5.2 e reproduzido novamente a seguir:

$$F_{ct_i}(\delta_i, \dot{\delta}_i) = -k_c \delta_i^{n_c} - c_c \delta_i^{n_c} \dot{\delta}_i = -k_c \delta_i^{n_c} (1 + \lambda_c \dot{\delta}_i), \text{ sendo } \lambda_c = \frac{c_c}{k_c} \quad \text{Eq. 44}$$

onde δ_i é a deformação da região de contato entre as massas M e m_{i1} (referente à coordenada x_{i1}) definida como $x_{i1} - (x_M + gap)$, $\dot{\delta}_i$ é a velocidade de deformação, ou seja, $\dot{\delta}_i = (\dot{x}_{i1} - \dot{x}_M)$, k_c é a rigidez de contato, c_c um amortecimento viscoso, λ_c um coeficiente de proporcionalidade e o expoente n_c depende das características geométricas em torno da superfície de contato.

As massas m_{i1} (referente à coordenada x_{i5}) estão conectadas ao tubo de massa M de maneira semelhante ao modelo (i) mostrado no item 5.2, ou seja, estão conectadas por uma mola e um amortecedor cujas propriedades são, respectivamente, constante de rigidez k_r e constante de amortecimento c_r .

Uma curva de pressão em função do tempo típica de um armamento de 155 mm de calibre é mostrada na Figura 8.3. Essa curva que gera a velocidade inicial v_0 do tubo (massa M).

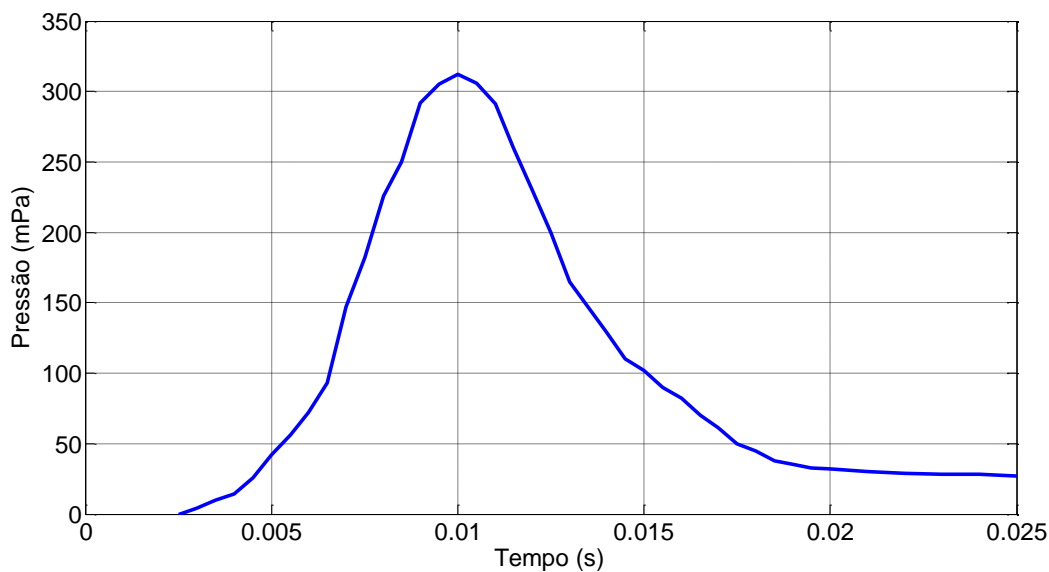


Figura 8.3 – Curva de Pressão vs. Tempo para calibre 155 mm
Fonte: Adaptado de O'HARA, G. P (2001).

A Figura 8.4 mostra a curva de pressão da Figura 8.3 e sua respectiva Transformada Rápida de Fourier (*Fast Fourier Transform* – FFT).

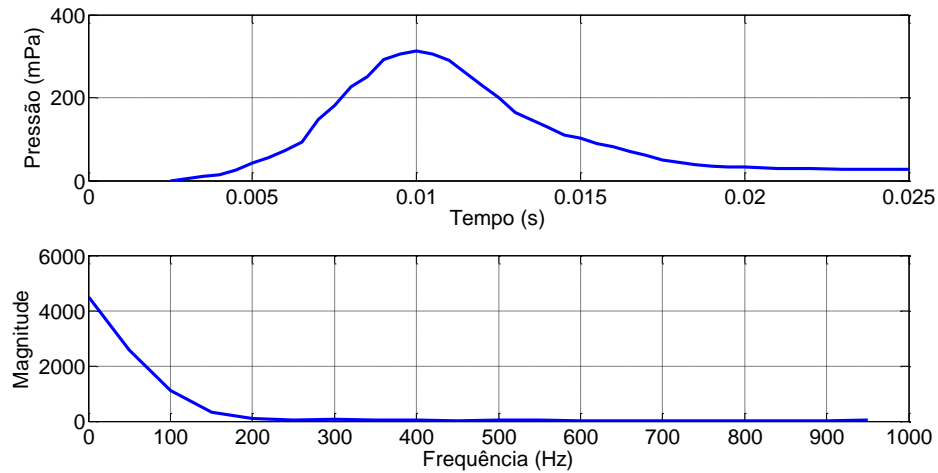


Figura 8.4 – Curva de Pressão vs. Tempo e FFT da curva de pressão

Em detalhe na Figura 8.5, a curva da Transformada Rápida de Fourier do sinal pode ser verificada. Nota-se que o espectro de frequência útil é até aproximadamente 200 Hz.

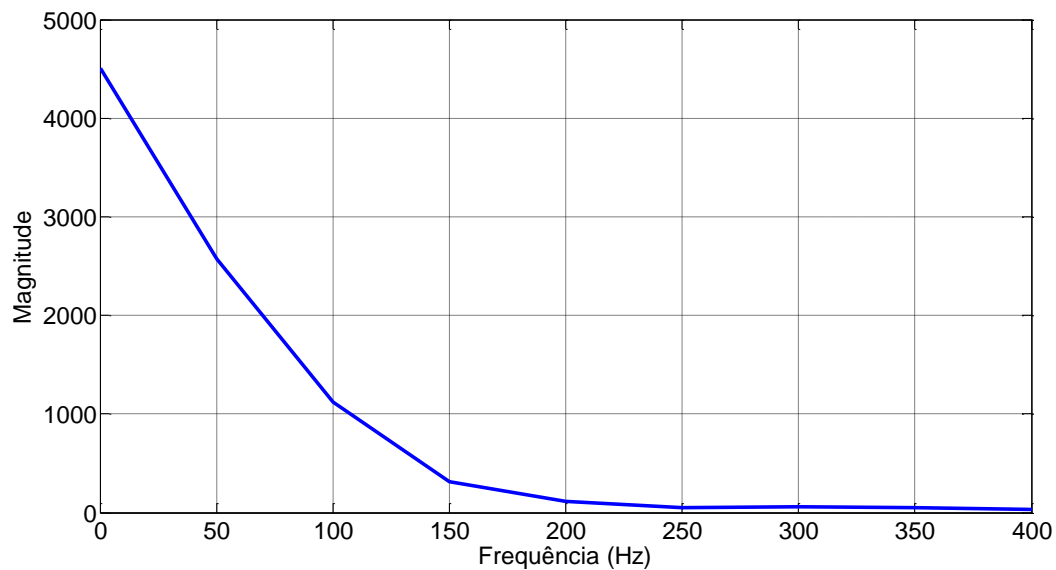


Figura 8.5 – Detalhe da FFT da curva de pressão

8.1. Conjunto de metamateriais submetido à excitação harmônica

Com o intuito de filtrar a maior parte das frequências úteis na Figura 8.5, buscou-se modelar o conjunto de metamateriais nas frequências abaixo de 200 Hz. Para fins de comparação, tomou-se cuidado para manter a soma das cinco massas

m_{i1} com as quatro massas m_{i2} iguais a massa m de 100 kg do modelo (i) apresentado no item 5.2. Foi arbitrada a massa $m_{i1} = 15$ kg e, conseqüentemente, o valor da massa m_{i2} é 6.25 kg.

A Figura 8.6 a) e b) mostram as curvas de dispersão para as frequências naturais de 100 Hz e 130 Hz, respectivamente.

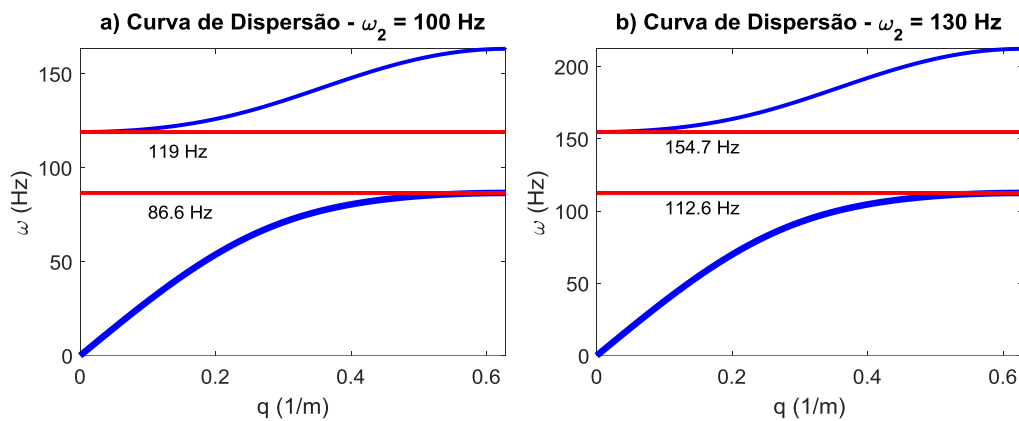


Figura 8.6 – Curvas de dispersão para a) $\omega_2 = 100$ Hz. b) $\omega_2 = 130$ Hz

Observa-se pela Figura 8.6, que o *bandgap* para a frequência natural de 100 Hz é de 86.6 Hz a 119 Hz (hachura vermelha na Figura 8.7) e para a frequência natural de 130 Hz, o *bandgap* é de 112.6 Hz a 154.7 Hz (hachura verde na Figura 8.7). A Figura 8.7 mostra a faixa de *bandgap* composta por ambos os conjuntos de ressonadores.

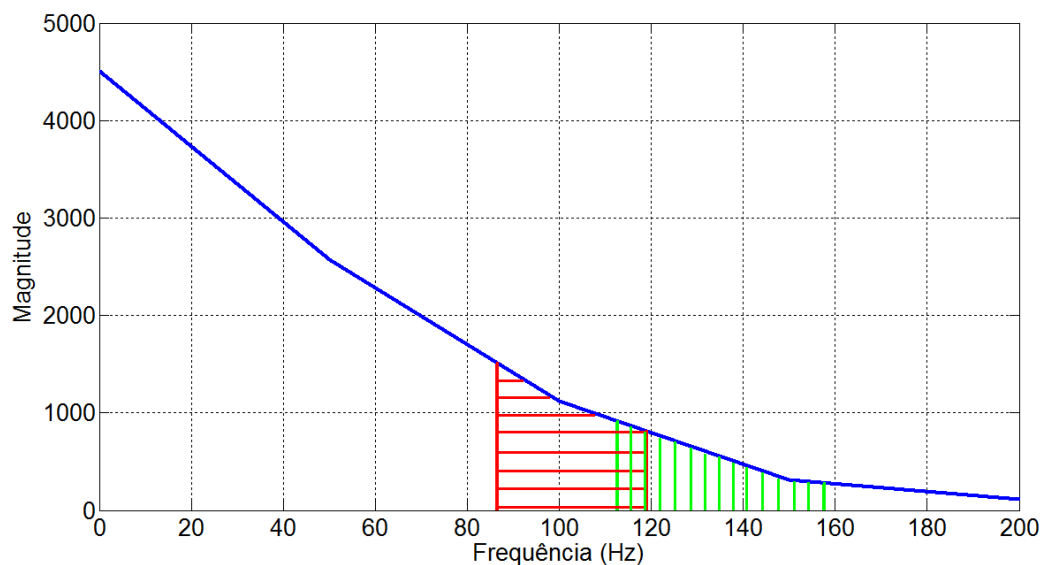


Figura 8.7 – Detalhe do *bandgap* na curva de FFT da curva de pressão

Inicialmente, os conjuntos de metamateriais foram considerados separadamente, sendo um deles denotado pela letra *a* e o outro pela letra *b*. O conjunto de metamateriais *a* possui frequência natural dos ressonadores de 100 Hz e acarreta a Condição A cujos parâmetros estão descritos na Tabela 8.1. Já o conjunto de metamateriais *b* possui frequência natural dos ressonadores de 130 Hz e implica na Condição B com parâmetros também descritos na Tabela 8.1.

Tabela 8.1 – Configurações ideais dos conjuntos de metamateriais

i	Condição	m_{i1} (kg)	m_{i2} (kg)	k_{i1} (kN/m)	k_{i2} (kN/m)	ω_{i2} (Hz)
a	A	15	6.25	2961	2467	100
b	B	15	6.25	5004	4170	130

Empregando apenas o conjunto *a*, tem-se na Figura 8.8 a resposta no domínio do tempo da massa m_{a5} do conjunto de metamateriais quando a massa m_{a1} é excitada harmonicamente com um forçamento F_{ext} igual a $k_{a1} \text{sen}(2\pi\omega_{ext})$ e a frequência ω_{ext} com o valor de 100 Hz (mesma frequência natural dos ressonadores).

Na Figura 8.9 é mostrado o detalhe dos deslocamentos, onde percebe-se que a massa m_{a5} praticamente não se desloca. A escala do deslocamento deve ser desprezada já que a intenção é apenas mostrar que a energia transferida para a massa m_{a1} não é transmitida para a massa m_{a5} .

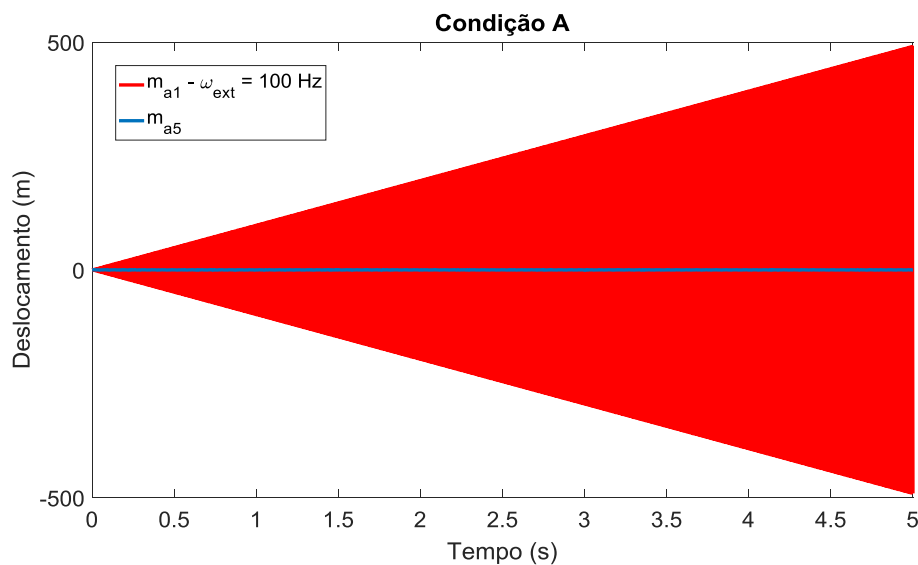


Figura 8.8 – Conjunto de Metamateriais com excitação harmônica de 100 Hz

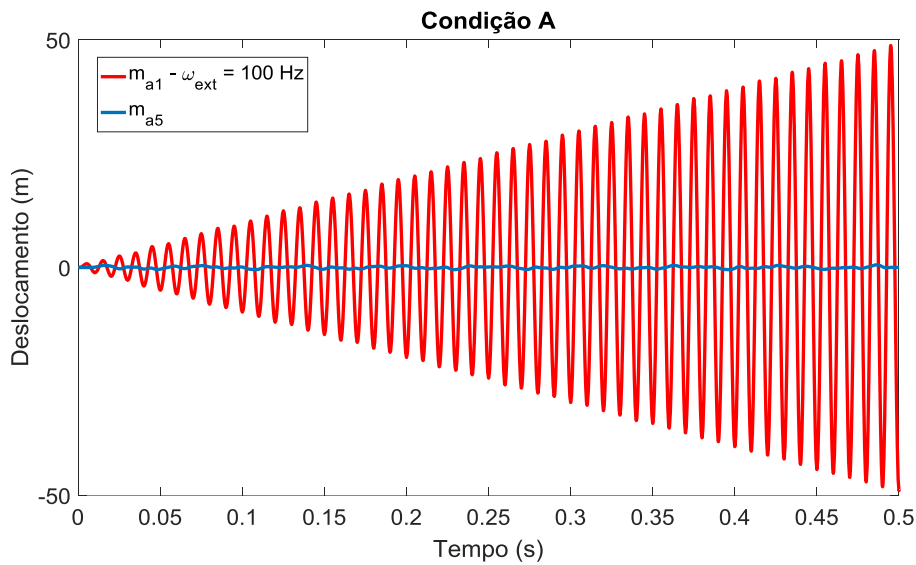


Figura 8.9 – Detalhe da resposta do sistema. Excitação harmônica de 100 Hz

A Figura 8.10 mostra a resposta semelhante da massa m_{b5} do outro conjunto de metamateriais quando a massa m_{b1} é excitada harmonicamente com um forçamento F_{ext} igual a $k_{b1} \text{sen}(2\pi\omega_{ext})$ e a frequência ω_{ext} com a mesma frequência de ressonância dos ressonadores, ou seja, ω_{ext} com o valor de 130 Hz. Os parâmetros utilizados são os descritos na Tabela 8.1 de acordo com a Condição B. O detalhamento dos deslocamentos pode ser visto na Figura 8.11.

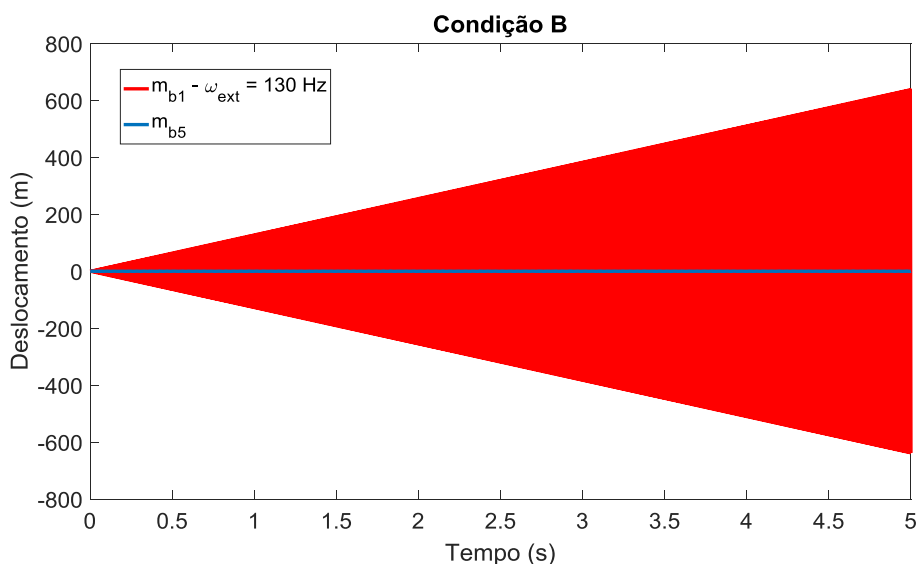


Figura 8.10 – Conjunto de Metamateriais. Excitação harmônica de 130 Hz

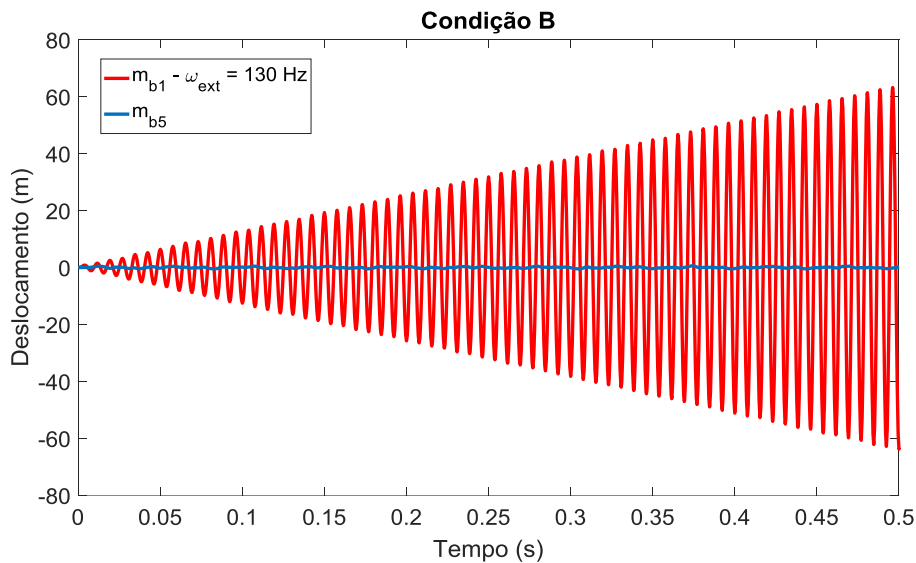


Figura 8.11 – Detalhe da resposta do sistema. Excitação harmônica de 130 Hz

Para demonstrar a efetividade da faixa de *bandgap* para, por exemplo, o conjunto *a* com frequência natural dos ressonadores de 100 Hz, cujo *bandgap* é 86.6 Hz a 119 Hz, foram feitas algumas simulações com valores limítrofes.

Aplicando um forçamento com frequência de excitação de 88 Hz e 84 Hz, observa-se uma nítida diferença da resposta no deslocamento da massa m_{a5} , conforme visto na Figura 8.12 e na Figura 8.13. Dentro da faixa de *bandgap* (88 Hz, Figura 8.12), a amplitude máxima do deslocamento da massa m_{a5} é 69.6 % menor que o deslocamento máximo da massa m_{a1} .

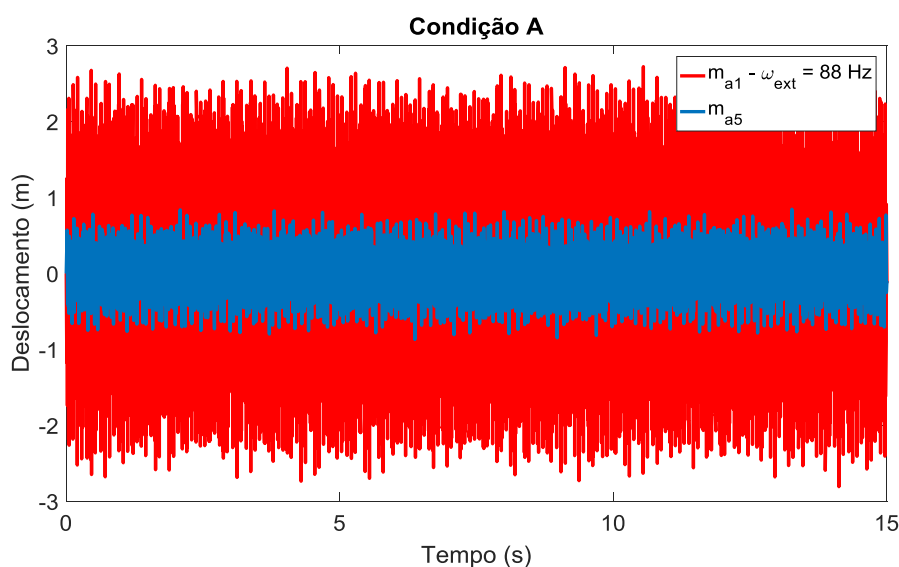


Figura 8.12 – Resposta para uma frequência de excitação de 88 Hz

Para um forçamento com frequência de excitação fora da faixa de *bandgap*, 84 Hz, observa-se pela Figura 8.13 uma redução bem menor das amplitudes de entrada e de saída, a saber, há uma redução de apenas 17.7% da amplitude do deslocamento máximo da massa m_{a5} quando comparada com a amplitude máxima do deslocamento da massa m_{a1} . Observa-se também neste caso que ocorre um fenômeno de batimento.

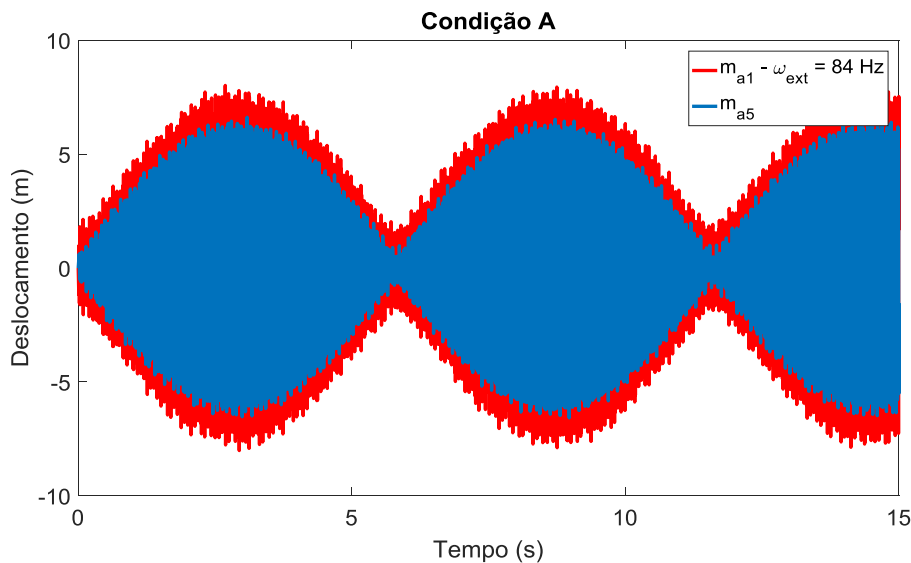


Figura 8.13 – Resposta para uma frequência de excitação de 84 Hz

Análise semelhante pode ser feita no limite superior da faixa de *bandgap* (119 Hz). A Figura 8.14 e a Figura 8.15 mostram as respostas para o sistema excitado harmonicamente a partir de um forçamento com uma frequência de 117 Hz e 120 Hz, respectivamente, e a Figura 8.16 mostra um detalhamento da Figura 8.15. No primeiro caso de excitação da massa m_{a1} com uma frequência dentro da faixa de *bandgap* (117 Hz), o deslocamento máximo da massa m_{a5} é 55.5% menor que o deslocamento máximo da massa m_{a1} .

Já para uma excitação da massa m_{a1} fora da faixa de *bandgap* (120 Hz), observa-se que a resposta da massa m_{a5} possui um aumento do deslocamento crescente ao longo do tempo. A Figura 8.16 mostra o detalhamento dessa resposta para um tempo de simulação de 1s, onde nota-se que o deslocamento da massa m_{a1} sofre um fenômeno de batimento ao longo do tempo. Dessa forma, é inviável mensurar a diferença entre os deslocamentos das massas m_{a5} e m_{a1} .

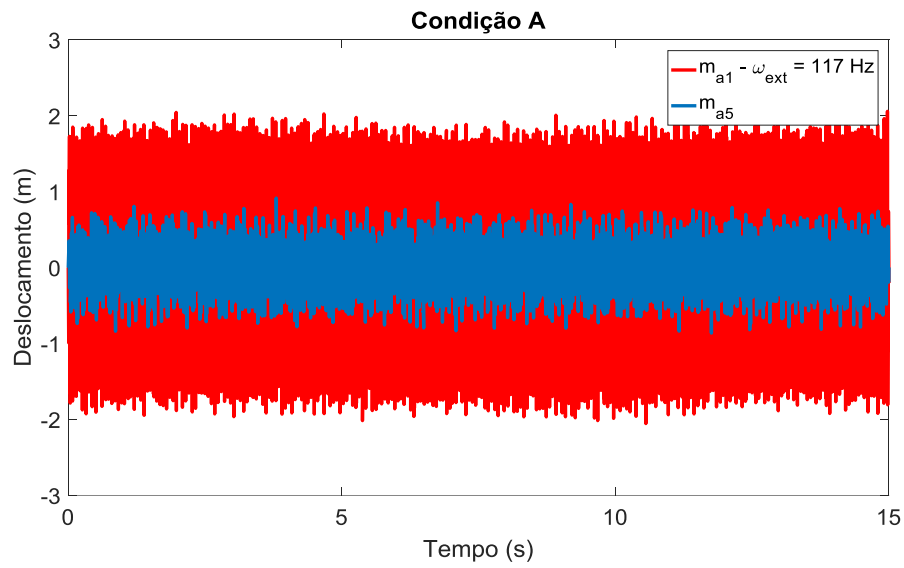


Figura 8.14 – Resposta para uma frequência de excitação de 117 Hz

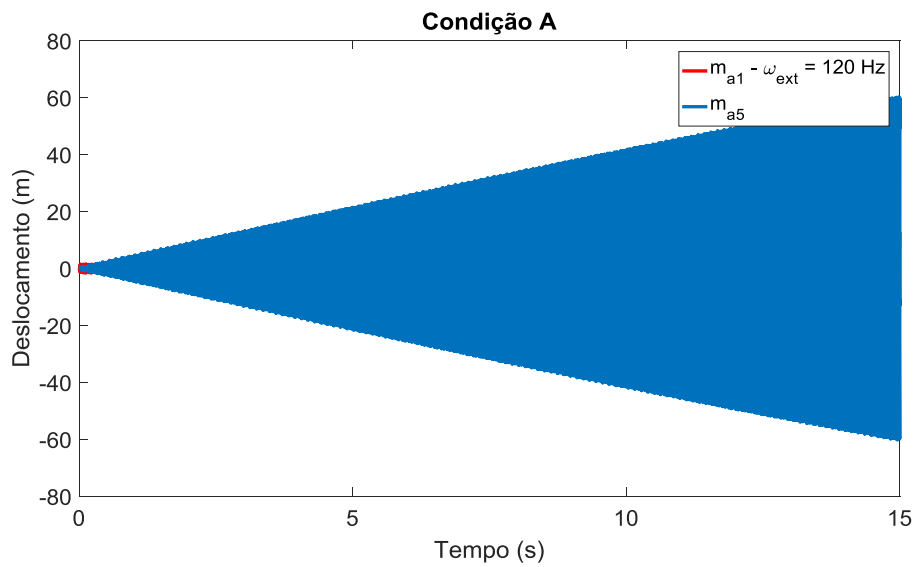


Figura 8.15 – Resposta para uma frequência de excitação de 120 Hz

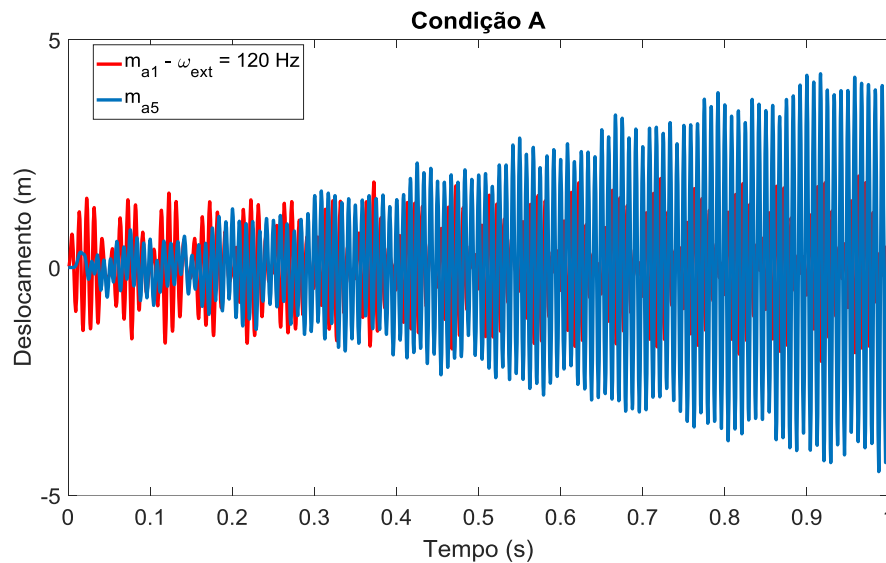


Figura 8.16 – Detalhe da resposta para frequência de excitação de 120 Hz

8.2. Especificação e Projeto do Conjunto de Metamateriais

O projeto do Conjunto de ressonadores foi feito baseado na geometria da célula unitária desenvolvida no Capítulo 6. A célula unitária desenvolvida foi modelada em aço ABNT 1045 e com dimensões especificadas na Figura 8.17. A espessura e foi especificada buscando alcançar as frequências naturais de 100 Hz e 130 Hz.

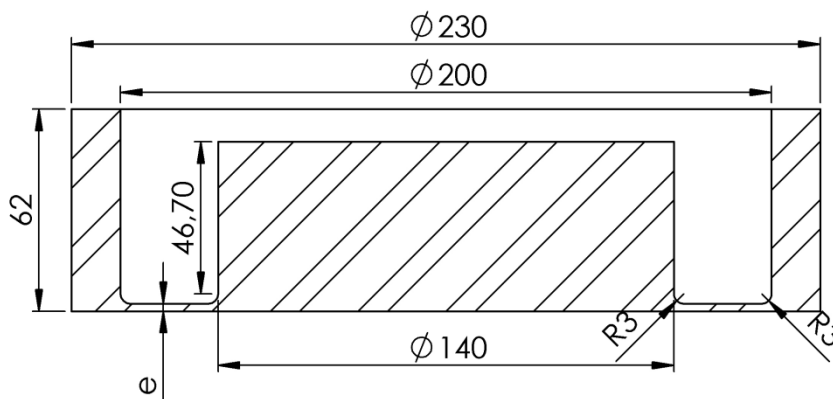


Figura 8.17 – Geometria da célula unitária

Com as restrições nos valores das massas m_{i1} e m_{i2} ($i = a$ e b) e de acordo com as frequências de ressonância de 100 Hz, para $i = a$ e 130 Hz para $i = b$, foram desenvolvidas duas células unitárias, cuja simulação por MEF forneceu as frequências naturais de 98.2 Hz, para uma espessura e igual a 1.9 mm e 134.33

Hz, para espessura e igual a 2.3 mm. Ambos os casos foram para o segundo modo de vibração, como mostrado na Figura 8.18. Assim como no Capítulo 6, a massa m_{i1} é o anel externo (em azul na Figura 8.18) e a massa m_{i2} é o anel interno (em vermelho na Figura 8.18). Cabe ressaltar que foi considerado o segundo modo já que o primeiro modo é de movimento de corpo rígido, ou seja, sem deslocamento relativo entre o anel externo e interno. Os demais modos de vibração são desconsiderados por apresentarem valores muito maiores quando comparado com a frequência de excitação do forçamento.

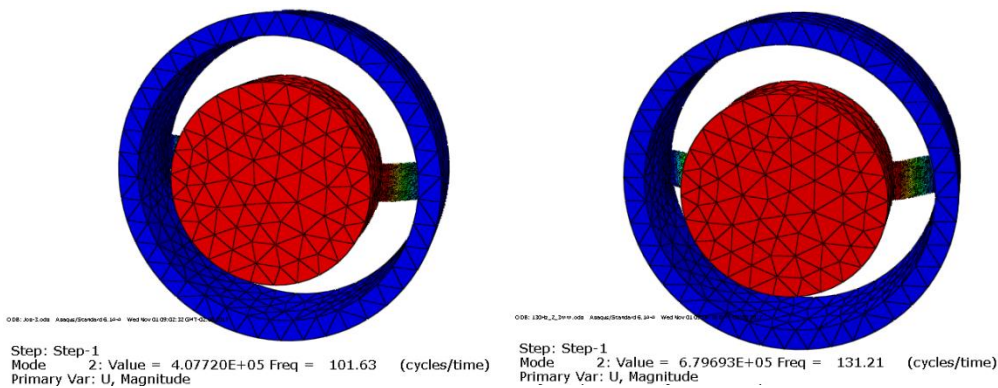


Figura 8.18 – Frequência natural do ressonador. a) 101.63 Hz b) 131.21 Hz

Para alcançar os valores das constantes de rigidez k_{a1} de 2961 kN/m (Condição A da Tabela 8.1) e k_{b1} de 5004 kN/m (Condição B da Tabela 8.1), optou-se por molas tipo prato tendo em vista sua compactação durante a montagem e seu alto valor de rigidez e foram escolhidos dois tipos de molas de acordo com a DIN (1992).

Para a rigidez ideal de 2961 kN/m, as dimensões principais da mola tipo prato, em milímetros, são $D_e = 200$, $D_i = 102$ e $t = 5.5$ e uma razão entre o deslocamento da mola, s , e sua altura útil, h_0 , é igual a 0.50. De acordo com Fromm et. at. (2003), para um arranjo de três molas tipo prato (uma mola é representada na Figura 8.19a), conforme mostrado na Figura 8.19b, obtém-se uma rigidez de 2941 kN/m. Esse arranjo combinado com a célula unitária com frequência natural de 98.2 Hz resulta na Condição C da Tabela 8.2.

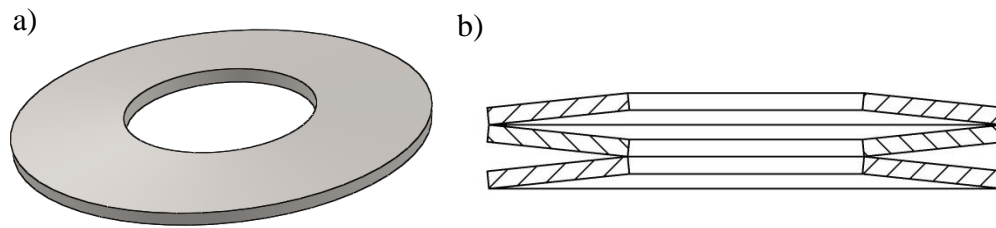


Figura 8.19 – a) Mola tipo prato b) Arranjo para rigidez de 2941 kN/m

Para a rigidez ideal de 5004 kN/m, as dimensões principais da mola tipo prato (milímetros) são $D_e = 180$, $D_i = 92$ e $t = 6$ e a razão entre o deslocamento da mola e sua altura útil (s/h_0) é de 0.75. De acordo com Fromm et. al. (2003), para um arranjo de duas molas tipo prato com essas características, conforme mostrado na Figura 8.20, obtém-se uma rigidez de 4902 kN/m. Esse arranjo combinado com a célula unitária com frequência natural de 134.33 Hz resulta na Condição D da Tabela 8.2.

Tabela 8.2 – Configurações reais dos conjuntos de metamateriais

i	Condição	m_{i1} (kg)	m_{i2} (kg)	k_{i1} (kN/m)	k_{i2} (kN/m)	ω_{i2} (Hz)
a	C	15	6.25	2941	2546	101.63
b	D	15	6.25	4902	4243	131.21

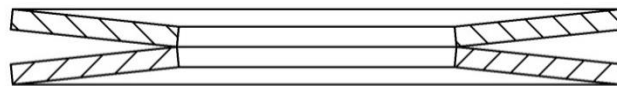


Figura 8.20 – Arranjo das molas para uma rigidez de 4902 kN/m

Com o intuito de comparar as respostas dos conjuntos *a* e *b* ideais (Figura 8.8 e detalhe na Figura 8.9 e Figura 8.10 com detalhamento na Figura 8.11), foram utilizados os parâmetros reais descritos acima que se resumem pelas Condições C e D da Tabela 8.2.

Aplicando apenas um conjunto de metamateriais utilizando a Condição C da Tabela 8.2 e um forçamento harmônico da massa m_{a1} igual à frequência natural dos ressonadores (101.63 Hz), chega-se a uma resposta da massa m_{a5} conforme apresentado na Figura 8.21.

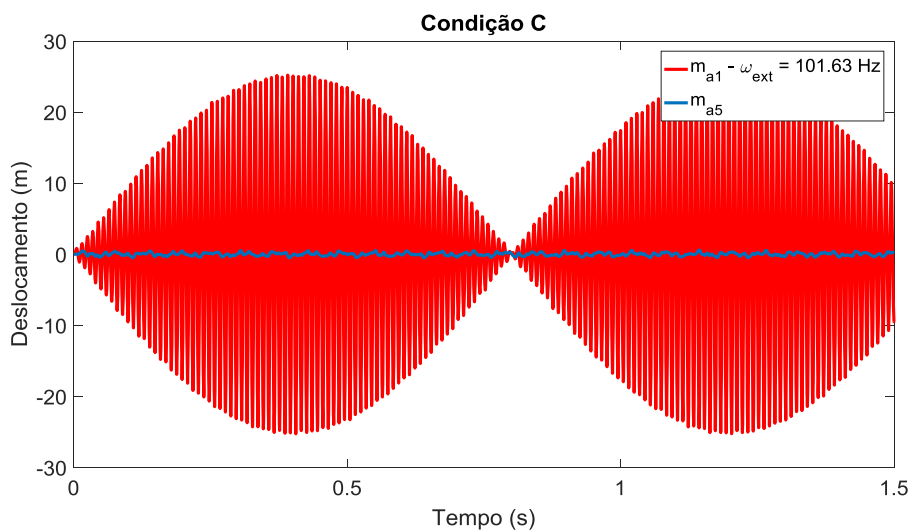


Figura 8.21 – Resposta com dados de projeto e excitação harmônica de 101.63 Hz

Para a outra frequência natural (131.21 Hz), utilizando o conjunto b com forçamento harmônico da massa m_{b1} igual a esta frequência natural e com parâmetros discriminados pela Condição D da Tabela 8.2, chega-se a uma resposta da massa m_{b5} conforme apresentado na Figura 8.22, onde se verifica um batimento perfeito do deslocamento da massa m_{b1} .

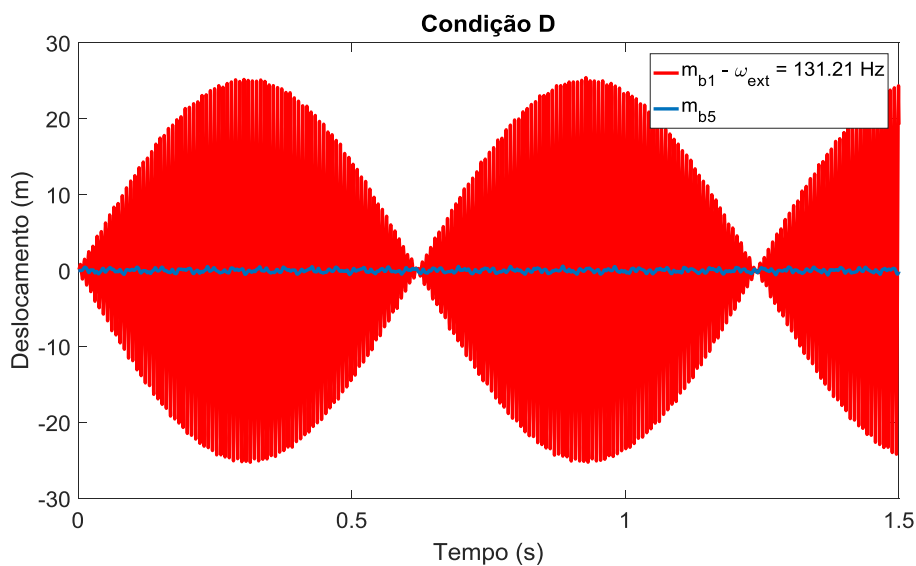


Figura 8.22 – Resposta com dados de projeto e excitação harmônica de 131.21 Hz

Em ambos os casos, mantém-se a drástica redução no deslocamento da última massa (massa m_{i5}), indicando a efetividade do bloqueio de ondas na faixa do *bandgap*.

É interessante ressaltar que as faixas de *bandgap* para a frequência natural da ordem de 100 Hz sofreram uma redução tanto no limite inferior (redução de 1.3%) quanto no limite superior (redução de 1.76%). Já as faixas de *bandgap* para a frequência natural da ordem de 130 Hz sofreram um aumento tanto no limite inferior (aumento de 1.65%) quanto no limite superior (aumento de 3.25%), como pode ser verificado na Figura 8.23. Essas alterações são em virtude das mudanças tanto da frequência natural quanto da rigidez k_{il} . Observa-se que o novo *bandgap* para o Conjunto de Metamateriais cuja frequência natural é de 101.63 Hz vai de 93.68 a 121 Hz e para o Conjunto de Metamateriais com frequência de ressonância de 131.21 Hz, a nova faixa de *bandgap* está definida pelo intervalo de 112.8 Hz a 156.2 Hz.

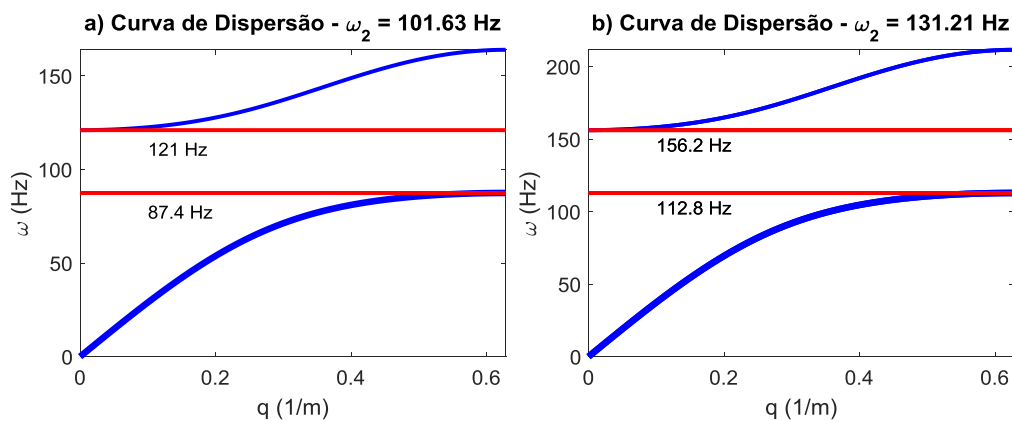


Figura 8.23 – Curvas de dispersão para a) $\omega_2 = 101.63$ Hz. b) $\omega_2 = 131.21$ Hz

Sendo assim, pode-se montar dois Conjuntos de Metamateriais conforme Figura 8.24. Nesta figura está sendo exemplificado o Conjunto de Metamateriais para a frequência natural de 101.63 Hz. Para o Conjunto de Metamateriais para frequência natural de 131.21 Hz, as molas tipo prato são diferentes, assim como seu arranjo e o ressonador.

A estimativa de peso do Conjunto modelado tridimensionalmente é de 106 kg e acredita-se ser uma boa aproximação do limite de 100 kg inicialmente estipulado.

Destaca-se na Figura 8.24, as peças que compõem uma célula unitária, a saber: as molas tipo prato, uma chapa para comprimir as molas entre os ressonadores, o ressonador em si, e um espaçador que permite a massa interna do ressonador vibrar.

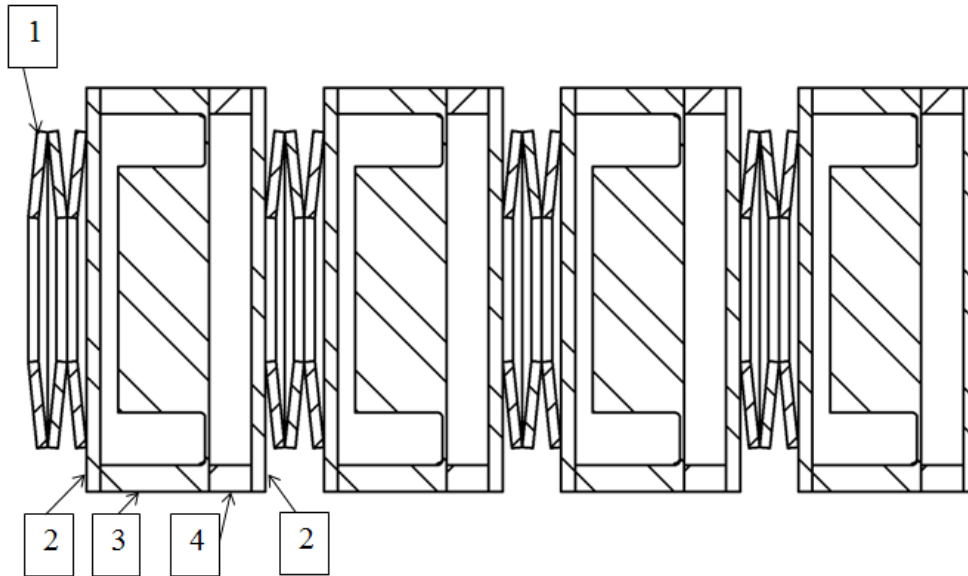


Figura 8.24 – Montagem do Conjunto de Metamateriais
(1) Mola tipo prato (2) chapa (3) ressonador (4) espaçador

8.3. Aplicação de uma Senoidal Composta

Buscando verificar a eficiência do Conjunto de Metamateriais para filtrar várias frequências, foi implementada uma onda senoidal composta por três senóides distintas com frequências de: 120 Hz e amplitude normalizada de 1 unidade, 130 Hz e amplitude normalizada de 0.75 unidades e 140 Hz e amplitude normalizada de 0.5 unidades. O sinal composto pelas três curvas apresentadas pode ser visto na Figura 8.25.

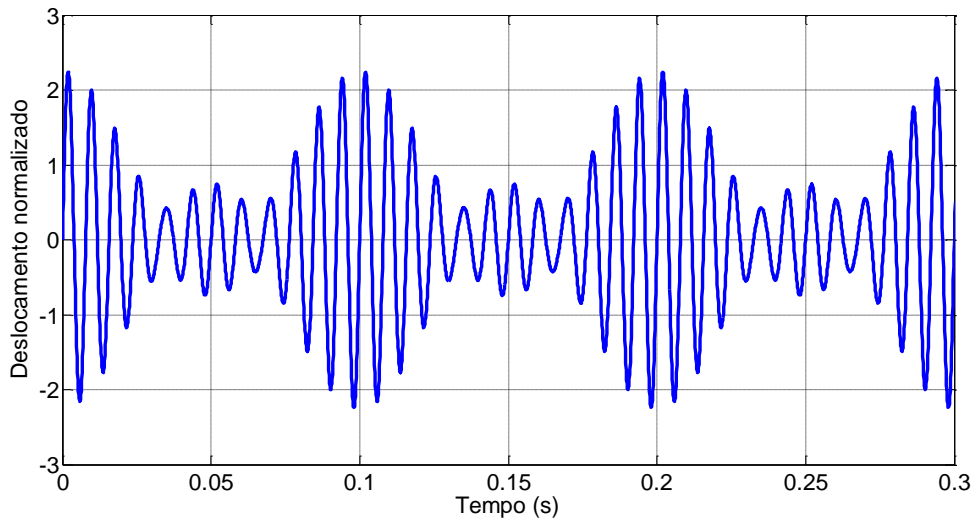


Figura 8.25 – Onda senoidal composta

Aplicando um forçamento na massa m_{b1} de acordo o perfil a onda senoidal composta no Conjunto de Metamateriais com frequência natural de 131.21 Hz (conjunto b) e os consequentes parâmetros da Condição D da Tabela 8.2, obtém-se a resposta da Figura 8.26. Nota-se uma significativa redução no deslocamento da última massa (massa m_{b5}) em relação ao deslocamento da massa m_{b1} , comprovando a eficiência no bloqueio das ondas com frequência de propagação contidas no *bandgap*.

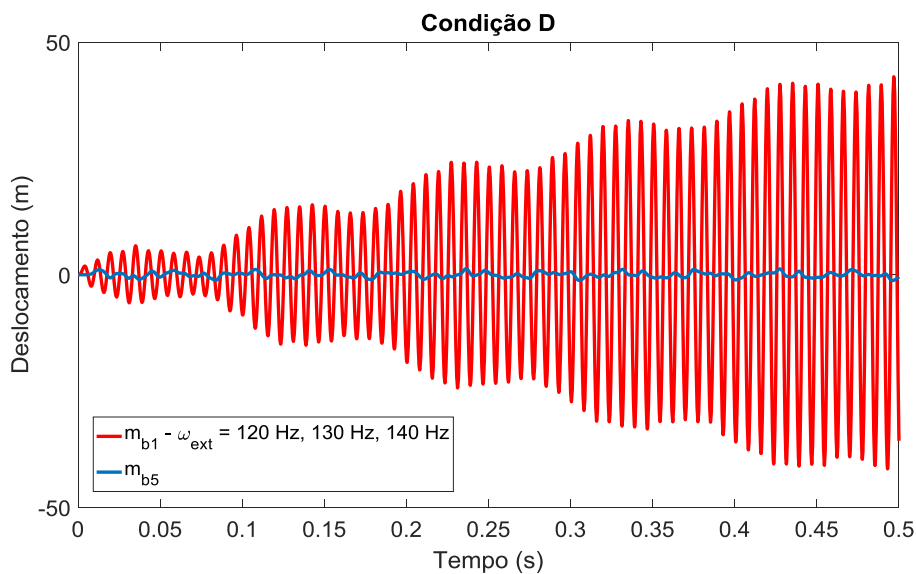


Figura 8.26 – Resposta para onda senoidal composta

8.4. Análise Estrutural do Ressonador

Devido aos problemas encontrados durante a fabricação do ressonador desenvolvido no Capítulo 6, principalmente em função da fragilidade dos pontos de ligação entre as massas interna e externa (número 2 na Figura 6.1), faz-se necessário uma análise estrutural do Conjunto de Metamateriais e toma-se como região crítica do sistema o ressonador, em especial, o ponto de ligação entre o anel externo e a massa interna, como mostrado na Figura 8.27.

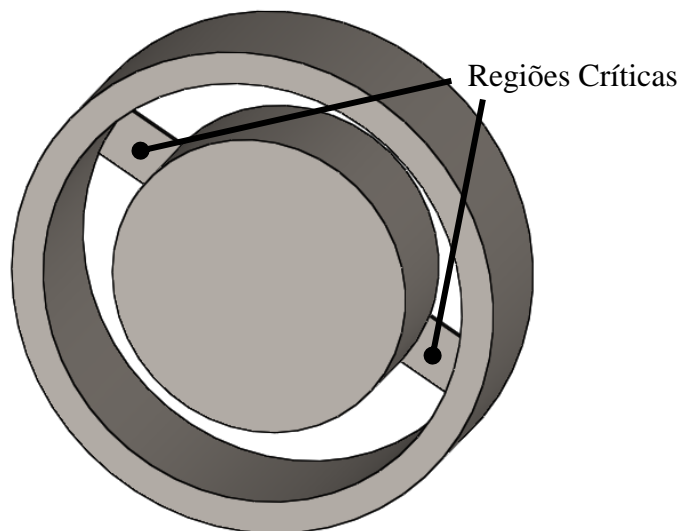


Figura 8.27 – Pontos críticos do ressonador

Para o ressonador com frequência natural de 100 Hz, a espessura da região crítica é de 1.9 mm e para o ressonador de 130 Hz, essa espessura é de 2.3 mm. Logo, a análise será feita no ressonador com menor espessura.

O nível de tensão ao qual o Conjunto de Metamateriais está submetido é em função da força de contato mostrado na Eq. 44. O gráfico dessa força durante o tempo de simulação de 10 s é mostrado na Figura 8.28, lembrando que a análise está sendo feita para um *gap* igual a zero. Como pode-se observar, o valor máximo da Força de Contato, F_{ct} , ocorre no início da simulação. O detalhe da região do valor máximo da Força de Contato é mostrado na Figura 8.29, alcançando um valor máximo de 13.015 kN.

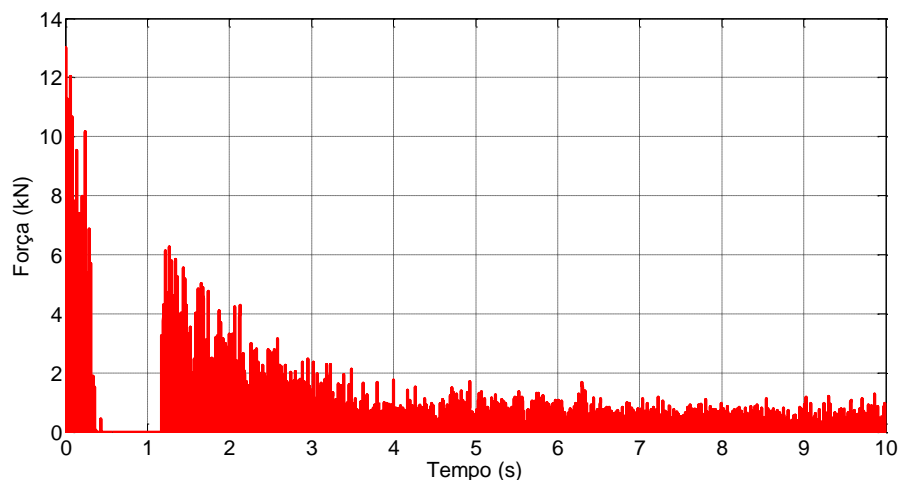


Figura 8.28 – Gráfico da Força de Contato F_{ct}

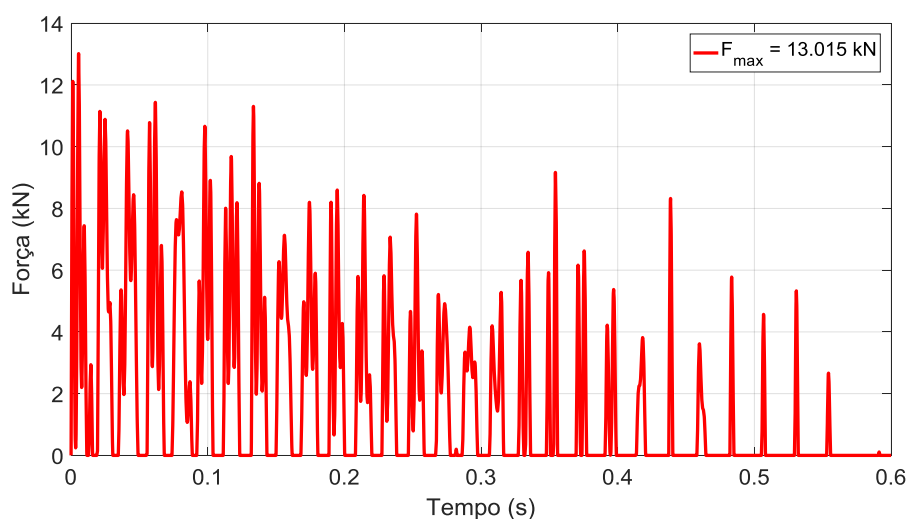


Figura 8.29 – Detalhe da região do valor máximo da Força de Contato F_{ct}

A análise estrutural foi feita usando o perfil da força mostrado na Figura 8.29 como solicitação externa através de uma simulação dinâmica por MEF durante 0,6 s utilizando o software Abaqus. O ressonador foi discretizado em 13870 elementos em uma malha utilizando o elemento C3D10M (elemento de 10 nós tetraédrico modificado), elemento disponível no software Abaqus/CAE, conforme mostrado na Figura 8.30. Foi feito um refinamento da malha nos pontos críticos, como destacado na Figura 8.30. O material utilizado foi o aço, com densidade de 7850 kg/m^3 , módulo de elasticidade de 200 GPa e coeficiente de Poisson de 0,3.

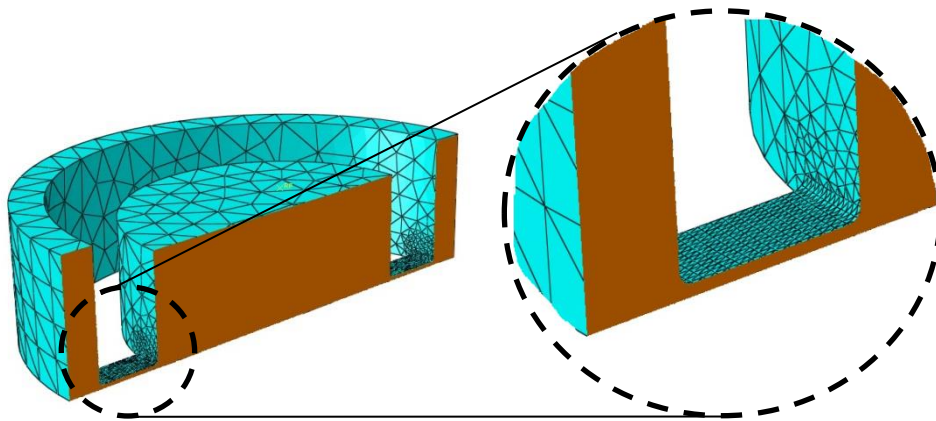


Figura 8.30 – Malha aplicada ao ressonador com detalhe para região de refinamento da malha

Para os outros elementos que compõem a célula unitária, também foi usado o aço cujas propriedades foram descritas acima. A mola tipo prato também foi discretizada utilizando o elemento C3D10M, totalizando 869 elementos. A chapa e o aro, respectivamente peças 2 e 4 da Figura 8.24, foram discretizadas utilizando o elemento C3D8R (elemento de 8 nós com integração reduzida). Para a chapa foram utilizados 224 elementos e para o aro foram utilizados 110 elementos.

A força com perfil definido na Figura 8.29 foi aplicada utilizando um ponto central de referência que foi definido como acoplado à superfície superior do ressonador, conforme Figura 8.31.

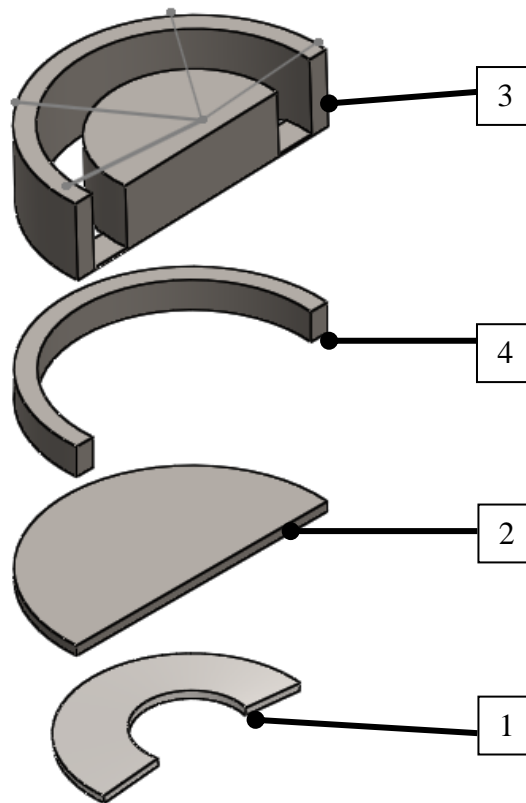


Figura 8.31 – Modo de aplicação da força
(1) mola tipo prato (2) chapa (3) ressonador (4) espaçador

Na montagem da célula unitária, foi estabelecido que as peças estão fixas entre si e entre as superfícies de contato, com exceção da chapa inferior, peça (2), com a mola tipo prato, peça (1). Para essas duas peças, foi utilizada uma fixação entre superfície e nós, onde a região dos nós da mola tipo prato está destacada na Figura 8.32. Destaca-se também na Figura 8.32, a região de fixação do conjunto, onde foram restringidos os deslocamentos em todas as direções.

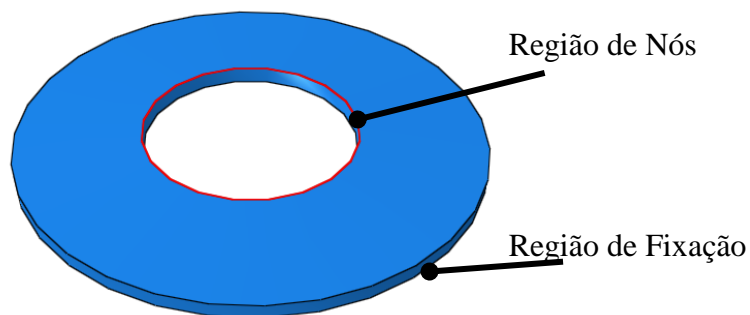


Figura 8.32 – Nós utilizados para fixação entre peças

Após a simulação, foram analisadas as tensões de von Mises em todo o conjunto durante 0.6 s. Como era de se esperar, as maiores tensões ocorreram no ponto crítico do ressonador, mais especificamente no nó 2040, como visto na Figura 8.33.

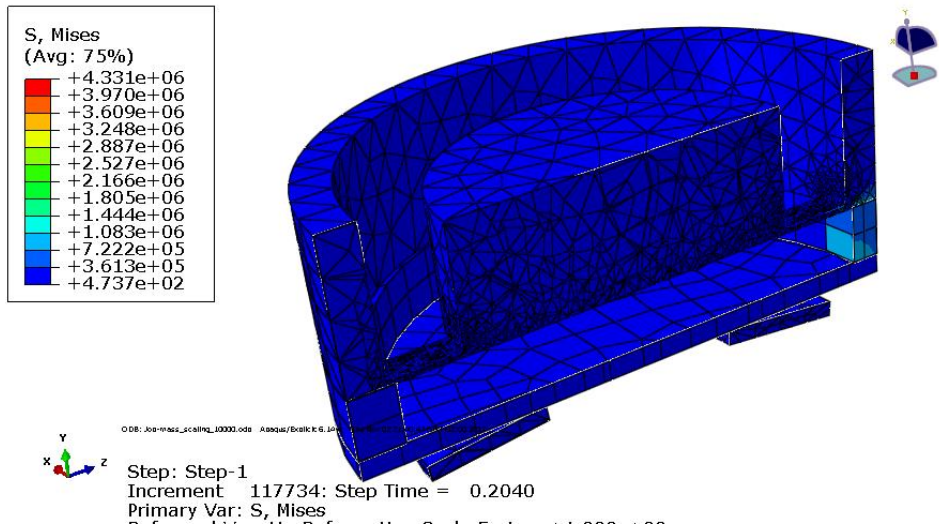


Figura 8.33 – Indicação do nó que possui maior tensão de von Mises

Na Figura 8.34 destaca-se o local de maior tensão do modelo, exatamente do ponto de engastamento, como era de se esperar. Nota-se também que, com exceção deste ponto, toda a região da viga que liga a massa interna ao aro externo está com uma tensão em torno de 0.5 MPa de acordo com a graduação de cores mostrada na Figura 8.33.

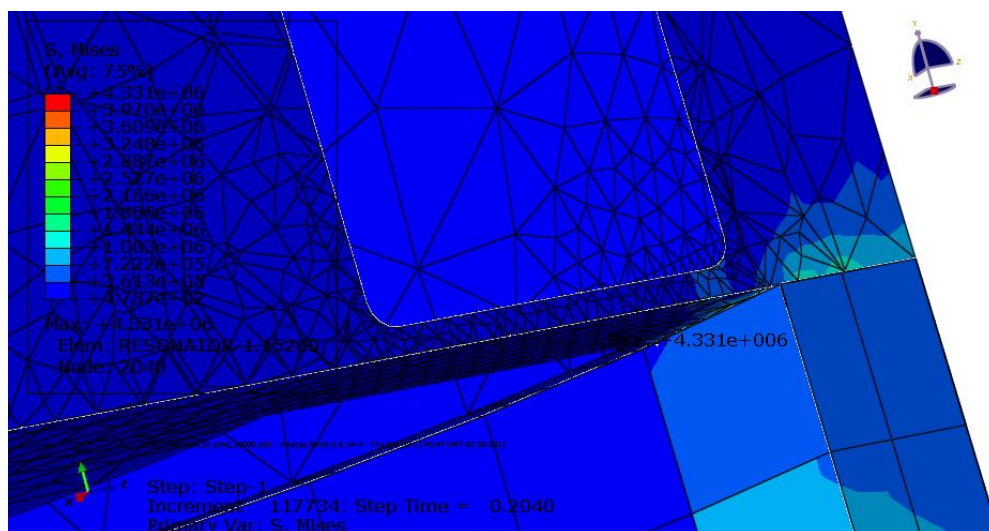


Figura 8.34 – Detalhe do local de maior tensão

Traçando um gráfico da tensão de von Mises do nó 2040 (nó crítico) ao longo do tempo, chega-se à Figura 8.35. O perfil de tensão apresenta alguns picos, sendo o valor máximo de 4.331 MPa em 0.2040 s.

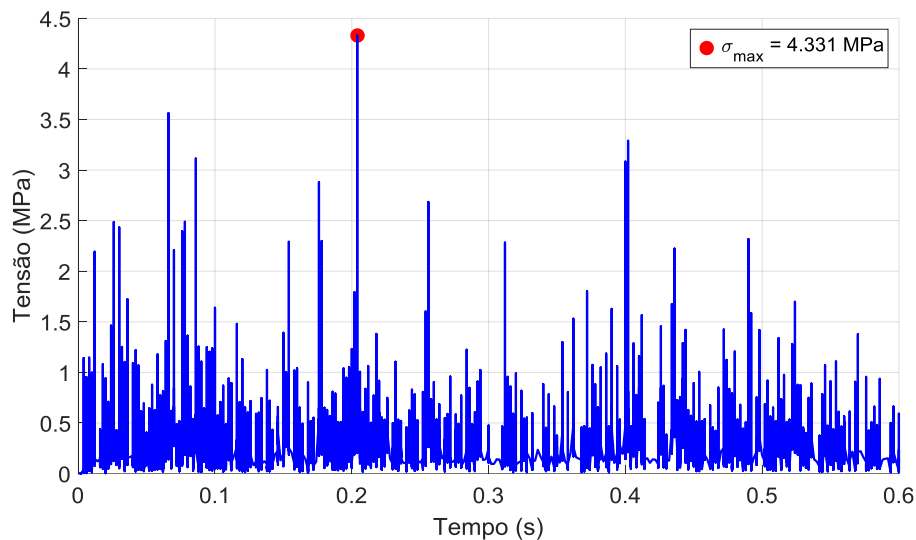


Figura 8.35 – Tensão de von Mises do nó crítico ao longo de toda simulação

Portanto, conclui-se que o sistema resistirá aos esforços a que está submetido haja vista que a tensão máxima que é atingida (4.331 MPa) está muito aquém da tensão de escoamento do aço, entre 200 e 350 MPa.

8.5. Conjunto de Metamateriais na Atenuação da Força Impulsiva

Uma vez que foi comprovado que os Conjuntos de Metamateriais filtram as frequências da excitação por uma curva de pressão (Figura 8.7), pode-se aplica-los para atenuar a força de ancoragem do tubo, como mostrado na Figura 8.1.

Dessa forma, as equações de movimento do modelo representado na Figura 8.2 serão compostas por 19 equações de movimento conforme explicitado na Eq. 58, com $i = a, b$.

É necessário destacar que se pretende comparar o modelo com massa m de 100 kg embarcada no tubo de massa M , conforme descrito no modelo (i), na seção 5.5. Além disso, o objetivo é comparar a força de ancoragem para um *gap* igual a 0 mm, que resulta em um valor máximo de 6891 N, conforme Tabela 5.6 e conforme o perfil da força mostrado na Figura 8.36.

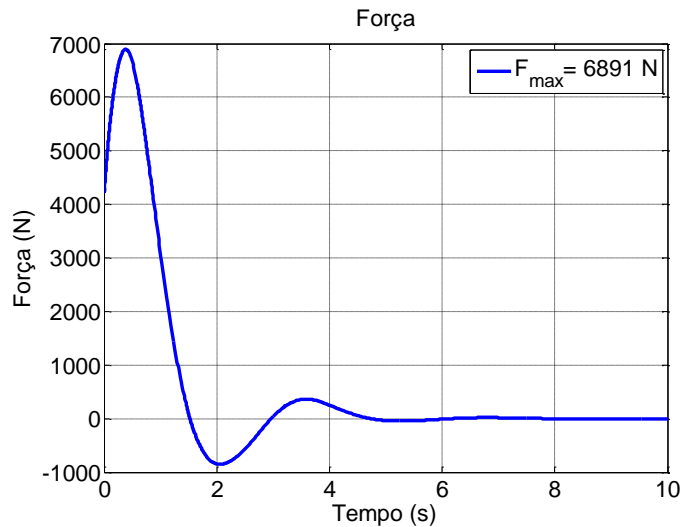


Figura 8.36 – Força de ancoragem para m igual a 100 kg

Inicialmente, foram considerados os Conjuntos de Metamateriais separadamente, ou seja, somente o Conjunto de Metamateriais com ressonadores com frequência natural de 100 Hz e somente o Conjunto de Metamateriais com frequência natural de 130 Hz dos ressonadores. Para o primeiro Conjunto, a força de ancoragem tem um valor máximo de 6164 N e um perfil como visto na Figura 8.37. Já para o segundo Conjunto, o gráfico da força de ancoragem pode ser observado na Figura 8.38, alcançando um valor máximo de 5836 N. Em ambos os casos, há uma redução da força máxima de ancoragem quando comparado com o valor obtido pelo modelo (i) com massa m de 100 kg.

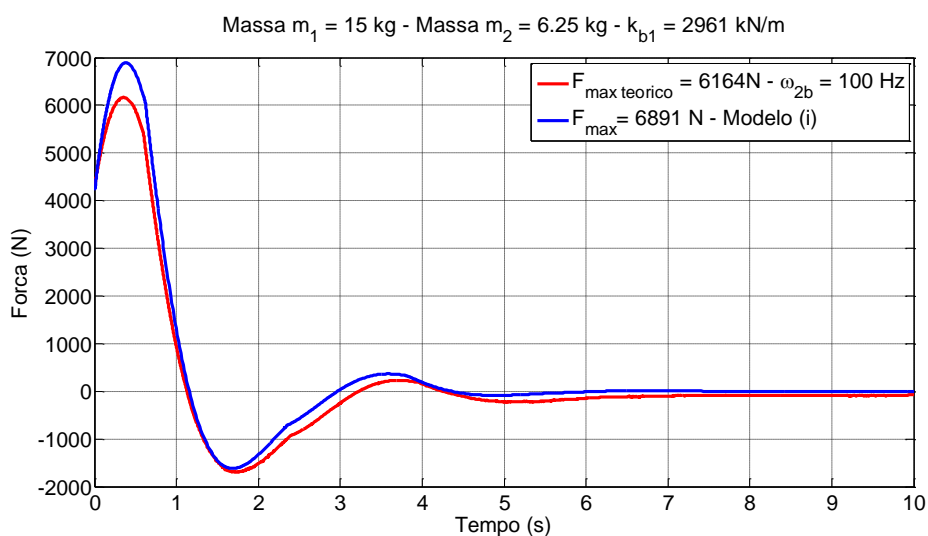


Figura 8.37 – Força de ancoragem para o Conjunto de Metamateriais com frequência natural de 100 Hz

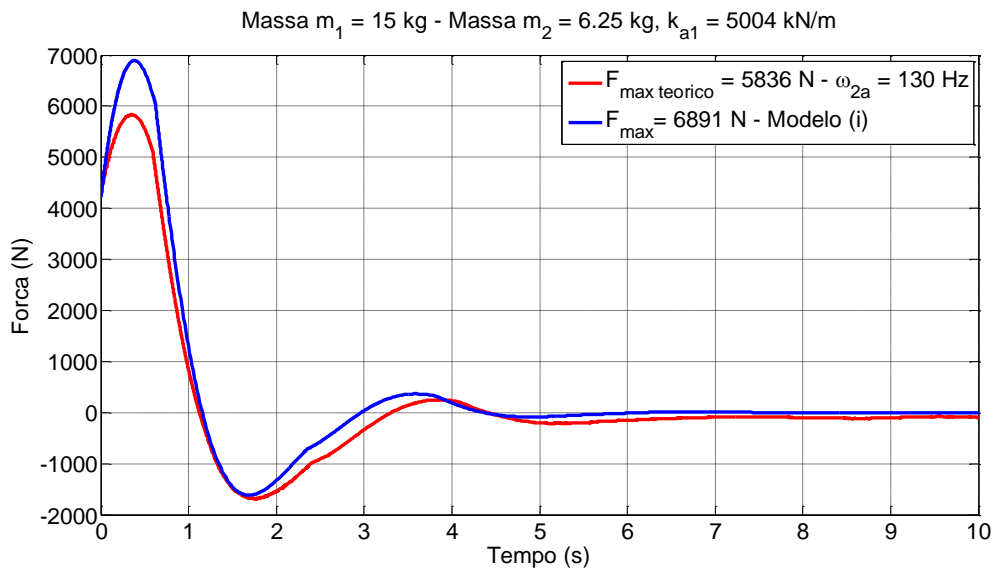


Figura 8.38 – Força de ancoragem para o Conjunto de Metamateriais com frequência natural de 130 Hz

Para a análise com os dois Conjuntos de Metamateriais quando utilizados simultaneamente, é preciso comparar como modelo (i) quando a massa m é de 200 kg, já que os dois Conjuntos de Metamateriais têm esse peso. Para essa massa m , o perfil da força de ancoragem é visualizado na Figura 8.39, encontrando um valor máximo de 6837 N. Lembrando que está sendo considerado um *gap* igual a zero.

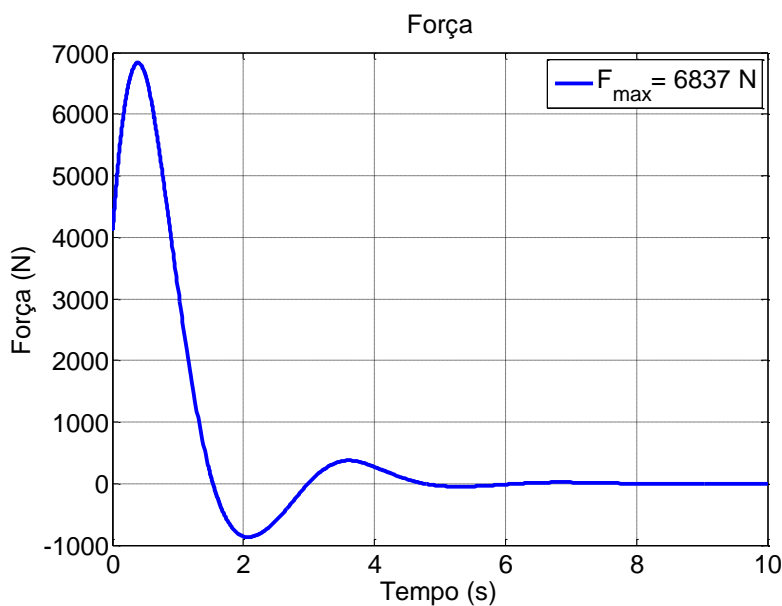


Figura 8.39 – Força de ancoragem para m igual a 200 kg

Utilizando os dois Conjuntos, chega-se a um valor máximo da força de ancoragem de 5233 N, ou seja, 1604 N ou 23,4% de redução da força máxima, como destacado na Figura 8.40.

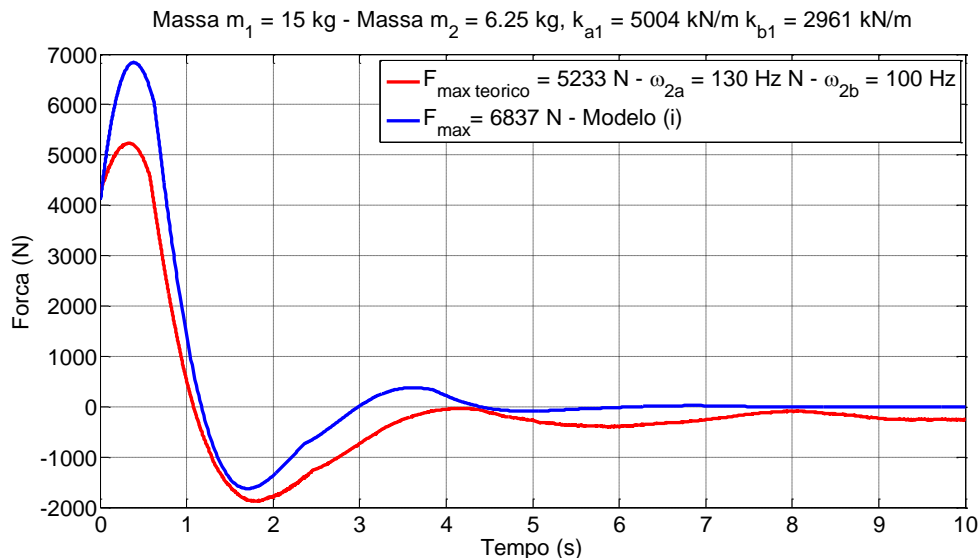


Figura 8.40 – Força de ancoragem para os dois Conjuntos de Metamateriais.

A título de empregabilidade de valores reais obtidos a partir de componentes passíveis de serem confeccionados, onde os dados encontram-se na Tabela 8.2, chegou-se à Figura 8.41. Nota-se um valor máximo real da força de ancoragem no valor de 5259 N, 23% abaixo do valor de 6830 N obtido do modelo (i) com a massa m no valor de 212 kg.

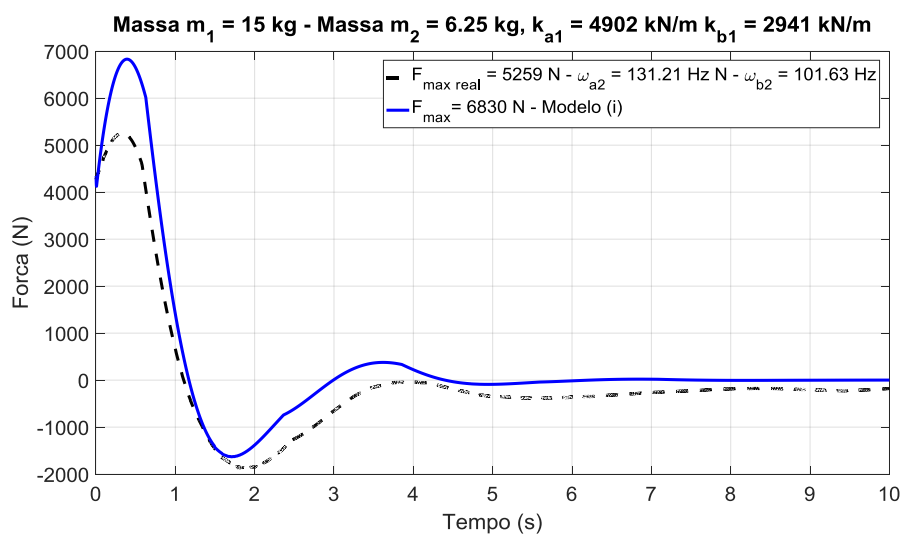


Figura 8.41 – Força de ancoragem para os dois Conjuntos de Metamateriais com valores reais

Analisando todas as variações feitas em um único gráfico, chega-se à Figura 8.42, onde são comparadas as curvas da força de ancoragem utilizando valores teóricos e reais, além das curvas considerando as forças de ancoragem do modelo (i) com 200 e 212 kg. Observa-se que para essa última, praticamente não há diferença ao longo de todo o tempo de simulação. Para as forças máximas teórica e real com a utilização dos Conjuntos de Metamateriais, é uma pequena diferença no valor máximo (5233 N para o modelo teórico e 5259 N para o modelo real) e uma diferença mais acentuada após o pico da força.

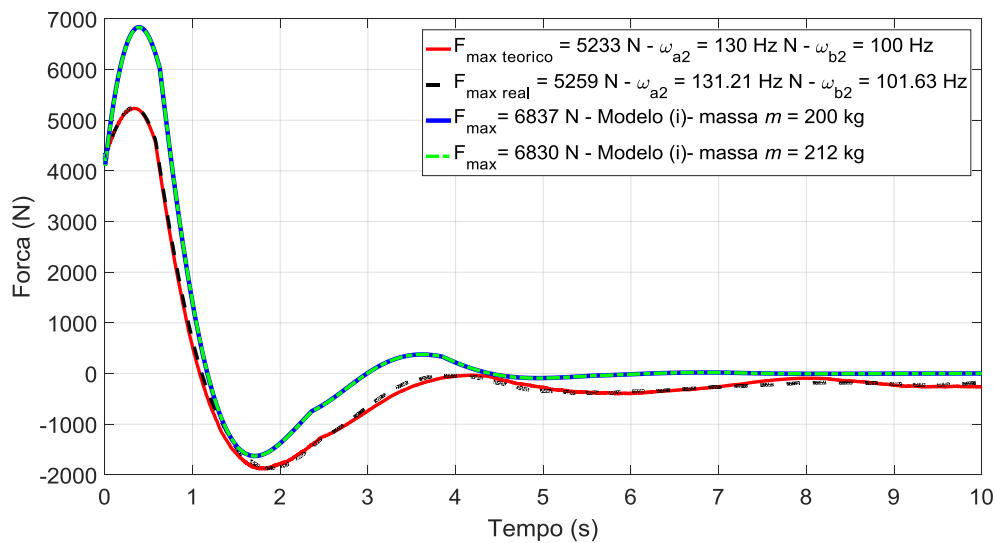


Figura 8.42 – Força de ancoragem para os dois Conjuntos de Metamateriais com valores reais e teóricos

9. Conclusão

Este trabalho apresentou como objetivo principal a proposta do uso de metamateriais elásticos na mitigação dos esforços impulsivos gerados pelo disparo de um armamento com relação à força transmitida ao suporte de fixação do tubo, sendo este objetivo atingido satisfatoriamente.

No capítulo 2 foi apresentado o Berço de Newton e foi analisada a maneira como as esferas que sofrem impacto entre si. O modelo matemático que descreve o comportamento das esferas foi feito baseado nas forças de contato a partir do modelo de Hertz, do modelo por mola e amortecedor linear (LSD) e do modelo KK. Por meio desses modelos foram analisadas as velocidades finais da última esfera e as forças de contato entre duas esferas adjacentes. Por fim, foi desenvolvida uma situação ideal entre duas esferas onde toda energia da esfera impactante foi absorvida pela segunda esfera.

No capítulo 3 foi feita uma análise de impacto, inicialmente entre duas hastes e em seguida entre as esferas do Berço de Newton, por meio da abordagem de propagação de ondas de tensão. O impacto entre as hastes foi desenvolvido pelo método clássico de conservação de energia e conservação de quantidade de movimento e os resultados foram comparados pelo Método de Elementos Finitos obtendo-se valores bastante próximos. O MEF também foi utilizado para comparar as forças de contato entre as esferas e a velocidade de propagação da onda longitudinal com os modelos analíticos desses parâmetros e comprovou-se que a onda de propagação é constante no meio homogêneo considerado.

Os conceitos de metamateriais são apresentados no capítulo 4, especificamente os metamateriais elásticos e as células unitárias com ressonadores simples e duplo e as suas respectivas massas efetivas. Quando uma cadeia de massas efetivas do ressonador simples é excitada harmonicamente com uma frequência próxima à frequência natural da massa interna do ressonador, observa-se que a massa efetiva assume valores negativos, ou seja, o ressonador reage com uma força contrária ao sentido da força de excitação. Toda a teoria de metamateriais é desenvolvida considerando uma cadeia infinita de ressonadores,

de onde se deriva também a equação de dispersão e, por conseguinte as curvas de dispersão que definem a faixa de frequência de bloqueio de onda (*bandgap*). Entretanto, para verificar a aplicabilidade dos metamateriais, foi feita a simulação de uma cadeia finita de 13 massas com ressonadores entre a 3ª e a 9ª massa e a atenuação da amplitude observada na 13ª massa foi verificada quando a 1ª massa da cadeia é excitada com uma frequência contida no *bandgap* e a atenuação é ainda maior quando a excitação é feita na 3ª e a amplitude é verificada na 9ª massa, ou seja, somente massas com ressonadores são analisadas.

No capítulo 5 foi modelado um sistema de recuo simplificado e dois modelos foram propostos para minimizar o deslocamento máximo do tubo do armamento: o modelo (i) um contendo uma massa embarcada no tubo e o modelo (ii) considerando uma massa fixa no mesmo ponto de fixação do tubo. Ambos os modelos apresentaram redução do deslocamento máximo do tubo, sendo o modelo (ii) produzindo uma redução mais significativa em relação ao modelo (i) conforme discriminado na Tabela 5.4. A força de contato entre a massa adicionada ao sistema e a parede solidária ao tubo foi estudada e concluiu-se que a massa adicionada no modelo (ii) absorve mais energia que no modelo (i), resultando em uma redução do deslocamento máximo do tubo. Foi feita uma tentativa infrutífera de utilizar um amortecedor não linear baseado no modelo obtido experimentalmente por Polach e Hajžman (2010), entretanto não foi observado nenhum ganho significativo no emprego deste modelo.

Com relação à força de ancoragem, objetivo principal desta tese, verificou-se que o modelo (ii) não implica em uma redução da força transmitida ao suporte de fixação do tubo, sendo dessa forma o modelo (i) escolhido para implementar o conjunto de metamateriais.

No capítulo 6 foi proposto o desenvolvimento experimental de uma célula unitária do metamaterial, a qual teve verificada sua frequência natural numérica e experimentalmente e em seguida foi aplicado o conceito de metamateriais no Berço de Newton com três esferas, onde a esfera central contém um ressonador interno. Neste contexto, foi feita uma varredura da frequência natural do ressonador até que se chegou ao menor valor da velocidade de saída da 3ª esfera em 7000 Hz, a saber, 0.699 m/s, conforme Figura 6.18. Esse valor é aproximadamente 16% a menos que o menor valor alcançado pelos modelos apresentados no capítulo 1 (modelo KK). Por fim, o mesmo conceito foi estendido

à cadeia de 16 esferas analisada no capítulo 3, onde naquele capítulo a força de contato entre a 15^a e a 16^a esferas foi de 586.2 N e foi adicionado inicialmente 1 ressonador na 10^a esfera, obtendo-se uma força de contato entre as mesmas esferas de 409.9 N, em seguida foi adicionado outro um ressonador na 11^a esfera obtendo-se uma força de contato entre a última e a penúltima esferas de 285.5 N, e finalizando foi adicionada um último ressonador na 12^a esfera, alcançando 198.6 N de força de contato entre a 15^a e a 16^a. Ou seja, a cada ressonador adicionado foi gerada uma redução da força de contato entre a última e a penúltima esferas da cadeia de 30%, 51.3% e 66.1%, respectivamente.

No capítulo 7 foi desenvolvido um aparato experimental com a célula unitária apresentada no capítulo 6. Este aparato foi submetido tanto à excitação harmônica quanto à ação de um impacto. Com relação à excitação harmônica, foi comprovada experimentalmente a redução da amplitude da última massa da cadeia, mostrando a efetividade dos metamateriais elásticos. Já com relação ao sistema submetido a um impacto, foi observada boa concordância entre os modelos discretos com e sem *gap* (Figura 7.18 e Figura 7.22) apesar de não ser verificada uma efetiva redução da amplitude como quando da excitação harmônica.

Finalmente o capítulo 8 apresentou uma possível aplicação do uso de metamateriais na mitigação dos esforços impulsivos gerados por um disparo. A massa embarcada do modelo (i) do sistema de recuo apresentado no capítulo 5 foi substituída por dois conjuntos de metamateriais. O espectro de frequência referente a uma curva de pressão de um disparo real foi analisado e as frequências naturais dos ressonadores dos conjuntos de metamateriais foram especificadas numericamente. Uma validação da efetividade do bloqueio da propagação de ondas do conjunto foi feita para uma excitação harmônica com frequência de excitação igual à frequência natural dos ressonadores, respectivamente 100 e 130 Hz, sendo observado total bloqueio para a frequência de ressonância. Também foi feito um estudo acerca dos limites do *bandgap* para o conjunto de metamateriais com frequência natural de 100 Hz, definido entre 86.6 Hz e 119 Hz, como mostrado na Figura 8.6. Notou-se uma nítida redução quando a frequência de excitação está dentro dos limites (88 Hz e 117 Hz) e essa redução não é acentuada quando a frequência de excitação está fora dos limites (84 Hz e 120 Hz).

Buscando uma aplicação real do conjunto de metamateriais, foi especificado e projetado um conjunto baseado em peças passíveis de fabricação para aplicação. Dessa forma, foi idealizada uma célula unitária semelhante à apresentada no capítulo 6, guardadas as devidas proporções. Uma peça com dimensões reais foi modelada tridimensionalmente e foram feitos ajustes nas espessuras do ponto de ligação entre o anel externo e a massa interna buscando alcançar por meio de MEF, os valores de 100 e 130 Hz de frequência natural da massa interna, e foram obtidos os valores de 101.63 Hz e 131.21 Hz, respectivamente. Baseado nesses valores que seriam das peças reais, foram ajustadas as configurações das constantes de rigidez e para alcançar os valores necessários, foram utilizados arranjos de molas tipo prato que proporcionaram rigidezes de 2941 kN/m e 4902 kN/m (contra valores teóricos de 2961 kN/m e 5004 kN/m, respectivamente). Uma nova análise da efetividade do bloqueio das frequências contidas no *bandgap* foi feita e pode ser comprovada a manutenção da redução da amplitude da última massa do conjunto de metamateriais, sendo observado nesse caso um efeito de batimento no deslocamento da massa de excitação. Também foi comprovada a eficiência do bloqueio das frequências quando uma onda senoidal composta por frequências contidas no *bandgap* foi aplicada no conjunto, como mostrado na Figura 8.26.

Uma análise estrutural foi desenvolvida para garantir que o ressonador suportasse os esforços ao qual será submetido e foi garantido que as tensões envolvidas no processo são muito menores que a tensão de escoamento do material considerado.

Finalmente foi feita a aplicação do conjunto de metamateriais com frequências naturais de 100 Hz e 130 Hz para atenuar os esforços impulsivos e reduzir a força máxima de ancoragem do modelo (i) estudado no capítulo 6. Utilizando os valores reais (tomando como base as frequências naturais de 101.63 Hz e 131.21 Hz), obteve-se uma redução de 23 % na força máxima de ancoragem obtida pelo modelo (i).

Dessa forma, acredita-se que a proposta do presente trabalho foi alcançada, sendo mostrado que é viável aplicar um conjunto de metamateriais para promover a mitigação de esforços impulsivos e com isso garantir que menos esforços sejam transmitidos à estrutura ou que novos equipamentos possam ser projetados com menor robustez garantindo que a vida útil seja mantida ou estendida.

9.1.Trabalhos Futuros

A aplicação de metamateriais elásticos ainda é muito recente e muitas oportunidades estão disponíveis para pesquisas futuras. Esta seção fornece algumas recomendações para pesquisas futuras.

- Um aparato experimental pode ser montado de maneira semelhante ao Berço de Newton e instrumentá-lo para medir parâmetros como, por exemplo, a força de contato entre as esferas mostradas no capítulo 3 e, dessa forma, comparar com os valores obtidos numérica e analiticamente dessa força.
- Pode-se modelar uma cadeia de ressonadores duplos similar à cadeia de ressonadores simples apresentada no capítulo 4 e a atenuação obtida pela cadeia de ressonadores duplos pode ser comparada com os valores obtidos pela cadeia de ressonadores simples. É importante atentar para que valores reais sejam empregados e dessa forma seja possível efetivamente construir uma cadeia de ressonadores duplos para se comprovar experimentalmente sua efetividade.
- A fabricação da célula unitária do capítulo 6 foi por Usinagem e devido às dificuldades de implementar as medidas necessárias com o material disponível, algumas peças falharam. A fabricação dessas peças por impressão 3D proporcionaria uma precisão geométrica muito maior para a geometria desejada, o que permitiria maior controle da frequência natural do ressonador.
- Também no capítulo 6, é possível aplicar ressonadores duplos nas esferas do Berço de Newton e com isso comparar quão menor será a força de contato entre a última e a penúltima esferas.
- O aparato experimental desenvolvido no capítulo 7 pode ser melhorado utilizando molas mais compactas, com massas menores e com rigidezes mais adequadas, o que daria mais precisão quando comparado com o modelo

analítico. Além disso, uma simulação por MEF do conjunto 3D pode ser feita e comparada com o modelo unidimensional.

- Modelos de metamateriais elásticos bidimensionais e tridimensionais podem ser empregados para a mitigação de excitações harmônicas e sua eficácia para mitigação de esforços impulsivos pode ser uma linha a ser exploradas.
- O conjunto proposto na Figura 8.24 pode ser construído e efetivamente testado em uma bancada experimental que simule um disparo real. O projeto de todo conjunto implica também em desenvolver um dispositivo que produza um aumento de pressão semelhante ao existente em um disparo.

10. Referências bibliográficas

AGUIAR, R. R. **Desenvolvimento de um Dispositivo Gerador de Vibro-impacto**. 2006. 146 f. Dissertação (mestrado). Departamento de Engenharia Mecânica, PUC-Rio, Rio de Janeiro, Brazil, 2006.

AHMADIAN, M.; APPLETON, R. J.; NORRIS, J. A. **Designing magneto-rheological dampers in a fire out-of-battery recoil system**. Magnetics, IEEE Transactions on, v. 39, n. 1, p. 480-485, 2003.

ANGOTH, V.; SINGH, A; SHANKA, M. S. **A Novel Refractive Technique for Achieving Macroscopic Invisibility of Visual Light**. Physics and Materials Chemistry, v. 1, n. 1, p. 5-8, 2013.

AMERICAN SOCIETY FOR TESTING AND MATERIALS. **B36/B36M-13**: Standard Specification for Brass Plate, Sheet, Strip, and Rolled Bar. West Conshohocken, Pa, 2013. http://dx.doi.org/10.1520/B0036_B0036M

BALL, D. W. **The Basics of Spectroscopy**. SPIE Press. Washington, USA. 2001.

BAVASTRI, C. A. **Redução de Vibrações de Banda Larga em Estruturas Complexas por Neutralizadores Viscoelásticos**. 1997. 169f. Tese de Doutorado, UFSC. 1997.

BRACH, R. **Mechanical Impact Dynamics - Rigid Body Collisions**. John Wiley and Sons, INC., New York, NY, USA, 1991.

BRILLOUIN, L. **Wave Propagation in Periodic Structures: Electric Filters and Crystal Lattices**. Courier Corporation, 2003.

BURR, A. H.; CHEATHAM, J. B. **Mechanical Analysis and Design**. 1nd Ed. Prentice-Hall: Englewood Cliffs, N. J. pp. 589- 607, 1981.

CHAN, C. T.; Li, J.; FUNG, K. H. **On extending the concept of double negativity to acoustic waves**. Journal of Zhejiang University-SCIENCE A, v. 7, n. 1, p. 24-28, 2006.

CHEN, Y. Y.; BARNHART, M. V.; CHEN, J. K.; HU, G. K.; SUN, C. T.; Huang, G. L. **Dissipative elastic metamaterials for broadband wave mitigation at subwavelength scale**. Composite Structures, v. 136, p. 358-371, 2016.

CHEN, Y.; HUANG, G.; ZHOU, X.; HU, G.; SUN, C. T. **Analytical coupled vibroacoustic modeling of membrane-type acoustic metamaterials: Plate model**. The Journal of the Acoustical Society of America, v. 136, n. 6, p. 2926-2934, 2014.

CLOUGH, R. W. **The Finite Element Method in Plane Stress Analysis**. Proc. 2nd A.S.C.E. Conf. on Electronic Computation, Pittsburg, Pa., Sept, 1960.

COMI, C.; DRIEMEIER, L. **Metamaterials for Crashworthiness of Small Cars**. Proceedings of the XXIII Conference of the Italian Association of Theoretical and Applied Mechanics, 2017.

DEUTSCHES INSTITUT FÜR NORMUNG, DIN 2093: **Disc springs, quality specifications, dimensions**. Berlin, 1992-01.

DONAHUE, C. M.; HRENYA, C. M.; ZELINSKAYA, A. P.; NAKAGAWA, K. **J. Newton's cradle undone: Experiments and collision models for the normal collision of three solid spheres**. Phys. Fluids, 20, 2008.

FRANCA, L. F. P.. **Perfuração Percussiva-Rotativa Auto-Excitada em Rochas Duras**. PhD thesis, Departamento de Engenharia Mecânica, PUC-Rio, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 2004.

FROMM, E.; KLEINER, W.; WERBUNG, H. **Handbook for Disc Springs**. Heilbronn, SCHNORR, 2003.

GILARDI, G.; SHARF, I. **Literature survey of contact dynamics modelling**. Mechanism and machine theory, v. 37, n. 10, p. 1213-1239, 2002.

GOLDSMITH, W. **Impact: The Theory and Physical Behavior of Colliding Solids**. Edward Arnold Publishers, Ltd. London, 1960.

GRAFF, K. F. **Wave motion in elastic solids**. Courier Corporation, 1975.

HALLENBERG, A. **World War II: A Student Encyclopedia**. Reference & User Services Quarterly, v. 45, n. 3, p. 265-267, 2006.

HASSAAN, G. A. **Dynamics of a Cannon Barrel-Recoil Mechanism with Nonlinear Air-Springs**. International Journal of Innovation and Applied Studies, v. 8, n. 4, p. 1669, 2014.

_____. **Dynamics of a Cannon Barrel-Recoil Mechanism with a Nonlinear Hydraulic Damper**. International Journal of Modern Sciences and Engineering Technology (IJMSET), p. 82, 2014.

_____. **On Dynamics of a Cannon Barrel-Recoil Mechanism with Nonlinear Hydraulic Damper and Air-Springs**. International Journal of Research in Information Technology, v. 2, n. 9, p. 704-714, 2014.

HERTZ, H. **On the Contact of Rigid Elastic Solids and on Hardness**. Journal fur die Reine und Angewandte Mathematik 94:156-71, 1882.

HIBBELER, R.C. **Resistência dos materiais**. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2004.

HIBBITT; KARLSSON; SORENSEN. **ABAQUS/Explicit: User's Manual**. Hibbitt, Karlsson and Sorenson Incorporated, 2001.

HUANG, H. H.; SUN, C. T.; HUANG, G. L. **On the negative effective mass density in acoustic metamaterials**. International Journal of Engineering Science, v. 47, n. 4, p. 610-617, 2009.

HUNT, K. H.; CROSSLEY, F. R. E. **Coefficient of restitution interpreted as damping in vibroimpact**. Journal of Applied Mechanics - Transactions of the ASME, p. 440 to 445, June, 1968.

HUTCHINGS, I. M. **Tribology: friction and wear of engineering materials**. Arnold, London, 1992.

INMAN, D. J. **Engineering Vibration**. New Jersey: Prentice Hall, 2001. 621 p.

KATHE, E. L. **Recoil considerations for railguns**. Magnetics, IEEE Transactions on, v. 37, n. 1, p. 425-430, 2001.

KIM, E.; YANG, J.; HWANG, H.; SHUL, C. W. **Impact and blast mitigation using locally resonant woodpile metamaterials**. International Journal of Impact Engineering, v. 101, p. 24-31, 2017.

KITTEL, C. **Introduction to Solid State Physics**. 8th edn, John Wiley & Sons, New York. 2005.

KUWABARA, G.; KONO, K. **Restitution coefficient in a collision between two spheres**, Jpn. J. Appl. Phys., Part 1 26, 1230, 1987.

LANDAU, L. D.; LIFSHITZ, E. M. **Course of theoretical physics. Theory Of Elasticity**. Vol 7. Instituto of Physical Problems, USSR Academy of Sciences, 1975.

LEE, S. H.; PARK, C. M.; SEO, Y. M.; WANG, Z. G. **Acoustic metamaterial with negative modulus**. Journal of Physics: Condensed Matter, v. 21, n. 17, p. 175704, 2009.

LEONARD, A.; FRATERNALI, F.; DARAIIO, C. **Directional wave propagation in a highly nonlinear square packing of spheres**. Experimental Mechanics, v. 53, n. 3, p. 327-337, 2013.

LI, B.; TAN, K. T. **Asymmetric wave transmission in a diatomic acoustic/elastic metamaterial**. Journal of Applied Physics, v. 120, n. 7, p. 075103. 2016.

LI, J.; PENDRY, J. B. **Hiding under the carpet: a new strategy for cloaking**. Physical review letters, v. 101, n. 20, p. 203901, 2008.

LIN, T. Y.; PING, H. C.; YANG, T. Y.; CHAN, C. T.; YANG, C. C. **Dynamic simulation of the recoil mechanism on artillery weapons**. In: ICCES: International Conference on Computational & Experimental Engineering and Sciences. p. 115-122, 2009.

LOVETT, D. R.; MOULDING, K. M.; ANKETELL-JONES, S. **Collisions between elastic bodies: Newton's cradle**. European Journal of Physics, v. 9, n. 4, p. 323, 1988.

MANIMALA, J. M.; HUANG, H. H.; SUN, C. T.; SNYDER, R.; BLAND, S. **Dynamic load mitigation using negative effective mass structures**. Engineering Structures, v. 80, p. 458-468, 2014.

MILTON, G. W.; WILLIS, J. R. **On modifications of Newton's second law and linear continuum elastodynamics**. In: Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences. p. 855-880. The Royal Society, 2007.

MOON, F. C. **A critical survey of wave propagation and impact in composite materials**, 1973.

NOBREGA, E.D.; GAUTIER, F.; PELAT A.; DOS SANTOS, J.M.C. **Vibration band gaps for elastic metamaterial rods using wave finite element method**. Mechanical Systems and Signal Processing, v. 79, p. 192-202, 2016.

O'HARA, G. P. **Dynamic analysis of a 155 mm cannon breech**. Shock and Vibration, v. 8, n. 3, 4, p. 215-221, 2001.

PALERMO, E. (28 de Agosto de 2013). Acesso em 18 de 10 de 2017, disponível em Live Science: <https://www.livescience.com/39271-how-does-newtons-cradle-work.html>

PENDRY, J. B. **Hiding under the carpet: a new strategy for cloaking**. Physical review letters, v. 101, n. 20, p. 203901, 2008.

PENDRY, J. B. **Negative refraction makes a perfect lens**. Physical review letters, v. 85, n. 18, p. 3966, 2000.

PENDRY, J. B.; SCHURIG, D.; SMITH, D. R. **Controlling electromagnetic fields**. science, v. 312, n. 5781, p. 1780-1782, 2006.

PFEIFFER, F.; GLOCKER, C. **Multibody dynamics with unilateral contacts**. John Wiley & Sons, 2008.

POLACH, P.; HAJŽMAN, M. **Design of the hydraulic shock absorbers characteristics using relative springs deflections at general excitation of the bus wheels**. Applied and Computational Mechanics, v. 4, p. 201–214, 2010.

QURESHI, A.; Li, B.; TAN, K. T. **Numerical investigation of band gaps in 3D printed cantilever-in-mass metamaterials**. Scientific Reports, v. 6, 2016.

Research and Development of Material, AMCP 706-342. Engineering Design Handbook-**Carriages and Mounts Series Recoil Systems**. US Army Material Command, Washington DC, September, 1963.

Research and Development of Material, AMCP 706-150. Engineering Design Handbook- **Interior Ballistics of Guns**. US Army Material Command, Washington DC, February, 1965.

RODRIGUES, G. S.; Weber, H. I. **Elastic Metamaterials Analysis: Simple and Double Resonators**. Research Inventy: International Journal of Engineering and Science, v. 7/4, p. 11-16, 2017.

SHARMA, B.; SUN, Chin-teh. **Acoustic metamaterial with negative modulus and a double negative structure**. arXiv preprint arXiv:1501.02833, 2015.

SILVA, Hugo Gomes da. **Estudos preliminares sobre a aplicação de lasers de alta potência na perfuração de revestimentos de poços**. 2014. 69 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Engenharia Mecânica, Engenharia Mecânica, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2014.

SILVA, M.; COSTA, A. **Experimental studies on the characteristics of tuned liquid dampers for reducing vibration in structures**. In: The 14th World Conference on Earthquake Engineering, Beijing, China. 2008.

SPENCER C. T., ed. and others, **World War I: A Student Encyclopedia**. Santa Barbara, Calif., ABC-CLIO, 2006.

SCHWARZ, B. J.; RICHARDSON, M. H. **Experimental modal analysis**. CSI Reliability week, v. 35, n. 1, p. 1-12, 1999.

TAN, K. T.; HUANG, H. H.; SUN, C. T. **Optimizing the band gap of effective mass negativity in acoustic metamaterials**. Applied Physics Letters, v. 101, n. 24, p. 241902, 2012.

TAN, K. T.; SUN, C. T. **Metacomposites Protection System against Primary Blast Injury**. Proceedings of the American Society for Composites, 2014.

THOMSON, W. **Theory of vibration with applications**. CRC Press, 1996.

TIWARI, N.; PATIL, M.; SHANKAR, R.; SARASWAT, A.; DWIVEDI, R. **Rigid body dynamics modeling, experimental characterization, and performance analysis of a howitzer**. Defence Technology, 2016.

VESELAGO, V. G. **The electrodynamics of substances with simultaneously negative values of ϵ and μ** . Soviet physics uspekhi, v. 10, n. 4, p. 509, 1968.

WIKIPÉDIA: a enciclopédia livre. **Canon de 75 modèle 1897**. Disponível em:<https://en.wikipedia.org/wiki/Canon_de_75_modèle_1897>. Acesso em: 19 abr, 2016a.

_____. **M114 155 mm howitzer**. Disponível em: <
https://en.wikipedia.org/wiki/M114_155_mm_howitzzer >. Acesso em: 24 fev,
2016b.

https://en.wikipedia.org/wiki/M114_155_mm_howitzzer

YAO, S.; ZHOU, X.; HU, G. **Experimental study on negative effective mass in a 1D mass–spring system**. New Journal of Physics, v. 10, n. 4, p. 043020, 2008.

XU, L.; CHEN, H. **Conformal transformation optics**. Nature Photonics, v. 9, n. 1, p. 15-23, 2015.

ZUKAS, J. **Introduction to hydrocodes**. Oxford: Elsevier, 2004.